

Журнал основан в январе 1958 г.



JOURNAL
OF ENGINEERING PHYSICS
AND THERMOPHYSICS

# Отдельный оттиск Offprint

Том 86, № 2 Vol. 86, No. 2

MAPT-АПРЕЛЬ
MARCH-APRIL

2013 г. МАРТ–АПРЕЛЬ ТОМ 86, № 2

УДК 536.46

### К. В. Добрего, И. М. Козлов, Н. Н. Гнездилов, Е. С. Шмелев

## РОЛЬ ТЕПЛООТДАЧИ В СТАБИЛИЗАЦИИ ПЛАМЕНИ В ЗАКРЫТОМ ОБЪЕМЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ВЫСОКОПОРИСТОЙ СРЕДОЙ

Приведены результаты моделирования горения газовоздушной смеси в закрытом объеме, заполненном высокопористой средой. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показало их качественное совпадение. Установлено, что квазистационарный режим распространения пламени возможен в случае достаточно больших относительной длины системы и удельной поверхности пористой среды. Быстрое торможение пламени объясняется уменьшением площади его поверхности из-за тушения на стенках реактора и интенсивного теплообмена между горячими продуктами горения и пористой средой. Стабилизация распространения пламени имеет место при приблизительном равенстве тепловыделения при горении газа и теплопотерь при теплообмене продуктов горения с пористой средой.

Ключевые слова: пористая среда, численное моделирование, стабилизация пламени, динамика пламени.

Введение. Распространение пламени по предварительно перемешанной газовоздушной смеси в замкнутом объеме, заполненном пористой средой, в условиях теплообмена между газом и пористой средой исследовалось в работах [1–4], посвященных проблемам пожаро- и взрывобезопасности. Несмотря на большое количество накопленных экспериментальных данных, принципиальный вопрос о механизме стабилизации скорости пламени в пористой среде все еще остается открытым. Обзор результатов подобных исследований представлен в монографии [5]. Большинство экспериментов было выполнено с трубами, заполненными пористой средой. В качестве горючего вещества использовались воздушно-метановая или воздушно-пропановая смеси. Основным результатом, полученным в [3], является идентификация нескольких стационарных режимов горения. К сожалению, не удалось получить достоверных данных о структуре пламени и об особенностях гидродинамики горения из-за принципиальных трудностей диагностики и визуализации процессов внутри пористой среды. Вероятно, в некоторых случаях горение в пористых средах может быть детально исследовано только путем численного моделирования.

Цель данной работы — исследовать численно и опытным путем динамику распространения метановоздушного пламени в замкнутом объеме, заполненном высокопористой средой.

**Физическая модель реактора с пористой средой.** Рассматривается двумерный плоский замкнутый сосуд, заполненный горючей топливовоздушной смесью. В сосуде в шахматном порядке расположены несоприкасающиеся друг с другом препятствия, представляющие собой стержни, ориентированные поперек плоскости реактора и имеющие бесконечную по сравнению с газом теплоемкость (рис. 1).

Частота расстановки и удельная поверхность стержней выбраны таким образом, чтобы, с одной стороны, препятствия были расположены достаточно близко друг к другу, образуя пористую среду, а с другой — достаточно разреженно, так, чтобы расстояние между ними было больше толщины фронта пламени и удельная поверхность стержней, определяющая теплопотери, была достаточно мала, допуская горение газовой смеси. Указанная система позволяет исследовать основные свойства газофазного горения в высокопористых средах: гидродинамические возмущения, дисперсию и объемный теплообмен между газом и пористой средой.

Расчеты проводились для набора сосудов длиной L=15–34 см, имеющих следующие параметры: поперечный размер D=1.2 см, толщина отдельного препятствия d=0.3 мм, расстояние между препятствиями  $h_L=1$  мм и  $h_D=2$  мм, шаг расчетной сетки  $h_x=h_v=0.1$  мм (рис. 1), удельная площадь препятствий 2.4 мм $^{-1}$ .

Эксперименты проводились на метановоздушных смесях. Корпуса двух исследованных реакторов выполнялись из текстолита с шириной камеры D=2.5 см и длиной L=17.7 и 25 см. Препятствия были сделаны из лакированной медной проволоки диаметром 0.8 мм: расстояния между препятствиями  $S_L=2.5$  мм и  $S_D=5$  мм (рис. 1), удельная площадь поверхности препятствий 0.194 мм $^{-1}$ .

Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси. 220072, г. Минск, ул. П. Бровки, 15; э-почта: nick gn@itmo.by. Поступила 08.11.2011.

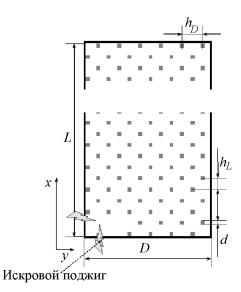


Рис. 1. Расчетная область

Математическая модель. Математическая формулировка рассматриваемой проблемы включает в себя следующие нестационарные уравнения: уравнение неразрывности, уравнение Навье—Стокса для сжимаемого газа в приближении нулевого числа Маха и уравнения сохранения химических компонентов газа и энергии:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \mathbf{v} , \qquad (1)$$

$$\rho \, \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \sigma' \,, \tag{2}$$

$$\rho \frac{dY_i}{dt} = \dot{\rho}_i + \nabla(\rho D \nabla Y_i) , \quad i = \overline{1, N} , \qquad (3)$$

где  $\dot{\rho}_i$  — скорость образования i-го компонента газа в результате химической реакции,  $\sum_i \dot{\rho}_i = 0, \ \sigma'$  — тензор вязких нап-

ряжений с компонентами 
$$(\sigma')_{ik} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

Уравнение сохранения энергии записано через энтальпию с учетом процессов диффузии и теплопроводности:

$$\rho \frac{dH}{dt} = \nabla \left( \rho \sum_{i} h_{i} D \nabla Y_{i} + \lambda \nabla T \right). \tag{4}$$

Скорость звука принимается равной бесконечности. На стенках реактора и границах препятствий ставятся условия непроницаемости. Граничные условия для температуры имеют вид [6]:

$$\lambda \nabla T \mathbf{n} \big|_{\mathbf{h}} = \alpha (T - T_{\mathbf{w}}) ,$$

где  $\alpha = 100 \text{ BT/(K·м}^2)$ , **n** — вектор нормали.

Горение метановоздушной смеси описывается одностадийной реакцией  $CH_4 + 2O_2 \rightarrow 2H_2O + CO_2$ . Скорость горения смеси имеет аррениусовский вид [7]:

$$\dot{\rho}_i = -\rho s_i k Y_{\text{CH}_4} \exp(-E/T) ,$$

где  $s_i$  — стехиометрический коэффициент для i-го компонента газа,  $k = 2.6 \cdot 108 \text{ c}^{-1}$  — предэкспонента;  $Y_{\text{CH}_4}$  — массовая доля метана,  $E = 15\,640 \text{ K}$ .

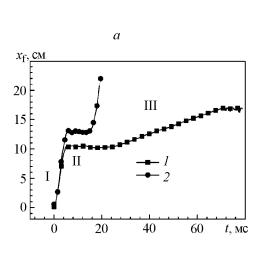
В начальный момент времени реактор заполнен стехиометрической метановоздушной смесью. В его левом нижнем углу для моделирования поджига задается источник энергии удельной мощностью порядка  $10^{10}$  Вт/кг, который отключается при возгорании смеси. Детальное описание математической модели дано в [8].

Для численного моделирования использовался пакет Gasburn. Движение газа рассчитывалось с применением аналога MAC (marker and cell) метода, обобщенного для расчета движения сжимаемого газа, учитывающего теплопроводность, диффузию и вязкость. Подобный метод был использован в [9] для расчета свободной конвекции. Уравнения сохранения химических компонентов газа (3) интегрировались совместно с уравнением сохранения энергии (4) по неявной схеме методом итераций Ньютона. Более подробно методика расчета описана в [10].

**Результаты моделирования.** На рис. 2 показаны типичные временные зависимости положения фронта пламени. Легко проследить три стадии его распространения: I — стадия интенсивного ускорения горения, II — стадия стоячей волны и III — стадия квазистационарного распространения пламени.

Фронт горения имеет сложную структуру на всех этапах, которая определяет особенности его движения. Даже на стадии квазистационарного распространения фронт горения сохраняет свою сложность (рис. 2–4) и претерпевает периодические трансформации. Такие трансформации вызывают осцилляции давления с частотой 80–100 Гц, что соответствует данным, полученным в экспериментах А. А. Коржавина [1].

Детальное моделирование распространения пламени в описанной выше системе требует много компьютерного времени. С целью его уменьшения начальное давление в системе было снижено до  $P_0 = 0.5$  атм, что



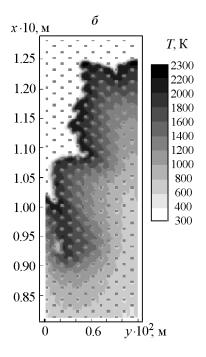


Рис. 2. Зависимость координаты фронта пламени от времени (a) при длинах канала 17 (I) и 34 см (2): I — стадия быстрого ускорения горения, распространения пламени; II — стадия стоячей волны; III — стадия квазистационарного распространения пламени, распределение температуры газа в камере на стадии III ( $\delta$ )

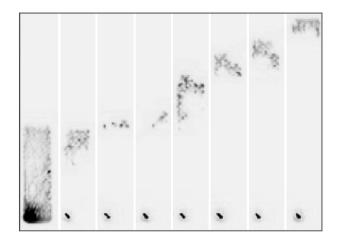


Рис. 3. Картина распространения пламени в экспериментальной установке, полученная при частоте смены кадров  $30^{-1}$  с временным шагом 0.033 с. Негатив

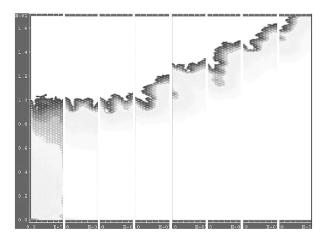


Рис. 4. Поле температуры газа в численном эксперименте для реактора длиной  $L=17~{\rm cm}$  при шаге по времени  $0.01~{\rm c}$ . Более темные участки соответствуют большей температуре

привело к увеличению толщины фронта пламени и позволило использовать более грубую расчетную сетку с шагом  $\Delta x=0.1$  мм. Расчет горения для длины реактора L=17 см занимает порядка трех дней на компьютере с процессором частотой 3 ГГц. Для моделирования того же реактора на более подробной сетке требуется больше одного месяца. По этой причине наши расчеты ограничились случаем с начальным давлением 0.5 атм, хотя эксперименты были проведены при нормальном атмосферном давлении. Для упрощения изготовления экспериментальная установка была шире, а препятствия имели больший диаметр. Поэтому невозможно провести прямое сравнение данных эксперимента и численного моделирования. В то же время сравнение динамического поведения экспериментальной (рис. 3) и численной (рис. 4) систем демонстрирует впечатляющее сходство. Приведенные далее результаты численного моделирования получены для реактора длиной L=17 см.

Анализ данных, полученных с помощью численного эксперимента, позволяет сформулировать количественные соотношения и инварианты задачи. Построим качественную модель, описывающую основные особенности динамики пламени, не проводя детального исследования ускорения пламени и увеличения его поверхности. Принимая во внимание главную роль значительных гидродинамических возмущений, вносимых препятствиями в увеличение площади поверхности фронта пламени, для описания ускорения пламени на первой стадии разумно использовать простую геометрическую модель с целью нахождения корреляции между площадью поверхности пламени и объемом сгоревшего газа:

$$V = aS^b. (5)$$

Для автомодельного расширения в трехмерном пространстве рациональная степень b=1.5. С учетом соотношения между производной от объема по времени и скоростью нормального распространения пламени  $\dot{V}=Sv_{\rm n}$  увеличение площади поверхности пламени со временем описывается квадратичным законом  $S\sim v_{\rm n}^2t^2~(V\sim v_{\rm n}^3t^3)$ . В случае, когда b=1, поверхность фронта пламени увеличивается со временем по экспоненциальному закону:  $S=S_0\exp(v_{\rm n}t/a)$ . В общем случае геометрическая модель (5) с рациональной степенью  $1 < b \le 1.5$  соответствует степенной зависимости площади поверхности пламени от времени.

Расчеты показывают, что ускорение пламени на начальной стадии хорошо описывается формулой (5) (рис. 5 и 6). На рис. 5 изображена временная зависимость массы и объема продуктов горения. На рисунке видны те же стадии горения, что и на рис. 2. Рис. 6 демонстрирует в развернутом виде первую стадию горения — стадию его интенсивного ускорения. На этом рисунке пунктирные аппроксимационные кривые показывают, что квадратичные временные зависимости объемной и массовой долей продуктов горения имеют место на начальной фазе горения, а кубическая зависимость характерна для стадии ускорения до момента резкого торможения пламени.

Квадратичный закон роста площади поверхности пламени в начальной фазе горения объясняется тем, что на этом этапе пламя распространяется, практически не взаимодействуя с преградами. Дальнейшее изменение скорости горения происходит из-за взаимодействия пламени с препятствиями (псевдопористой средой), поскольку поверхность фронта пламени приобретает фрактальные свойства. Корреляция между объемом сгоревшего газа и площадью поверхности пламени (рис. 7) демонстрирует самоподобность кривой ( $V \sim S^2$ ) и следует из фрактального характера растяжения пламени.

На рис. 8 представлена корреляция во времени между давлением в системе, площадью поверхности пламени и мощностью тепловыделения. При этом давление зависит линейно от тепловой энергии (рис. 9). В неадиа-батическом случае эта зависимость теряет свою однозначность.

В случае геометрического увеличения поверхности фронта пламени (5), как показывает анализ, теплопотери никогда не превышают интегрального тепловыделения, что гарантирует постоянное ускорение пламени. Основной причиной торможения пламени является быстрое изменение соотношения между тепловыделением и

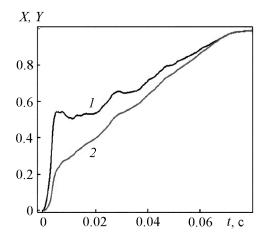


Рис. 5. Зависимости объемной (1) и массовой (2) долей продуктов горения от времени

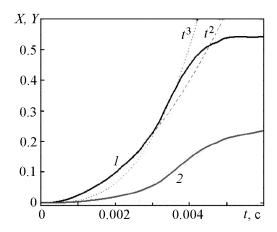


Рис. 6. Зависимости объемной (1) и массовой (2) долей продуктов горения от времени в фазе интенсивного ускорения: штриховая и пунктирная линии степенные аппроксимации указанных зависимостей

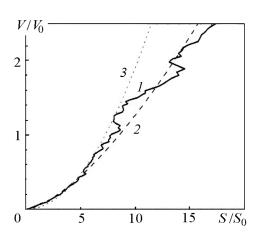


Рис. 7. Зависимость объема сгоревшего газа от площади поверхности пламени в фазе интенсивного ускорения пламени t=0—3.2 мс: I — корреляция между долей продуктов горения и безразмерной площадью поверхности пламени; 2, 3 — степенные аппроксимации  $V \sim S^2$  и  $V - S^{1.5}$ 

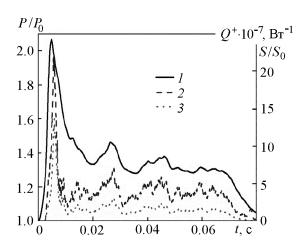


Рис. 8. Зависимость давления (1), площади поверхности пламени (2) и мощности тепловыделения (3) от времени

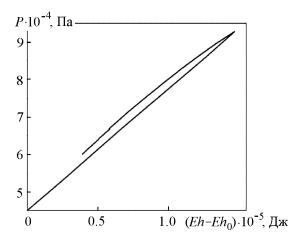


Рис. 9. Корреляция между давлением и выделившейся энергией в период t=0–19 мс. Точка поворота — 4.9 мс

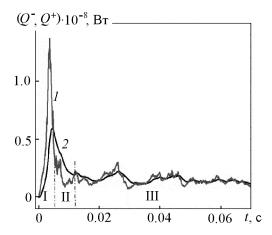


Рис. 10. Зависимость мощностей тепловыделения (1) и теплопотерь (2) от времени: I — стадия быстрого ускорения горения; II — стадия стоячей волны; III — стадия квазистационарного распространения пламени

теплопотерями в газе, которое наблюдается при уменьшении поверхности фронта пламени, когда он достигает стенок камеры реактора.

На рис. 10 изображены зависимости тепловыделения и теплопотерь от времени. В соответствии с этим рисунком за стадией ускорения I ( $Q^+ > Q^-$ ) следует стадия стоячей волны II ( $Q^+ < Q^-$ ). Вторая стадия характеризуется доминированием тепловых потерь, что приводит к временной остановке фронта пламени и даже к его движению в обратном направлении. При последующем уменьшении  $Q^-$  баланс тепловыделения и теплопотерь в газе восстанавливается и система вступает в стадию квазистационарного распространения пламени III.

Наиболее важной проблемой при изучении горения в рассматриваемой системе является вопрос о скорости пламени в квазистационарной стадии и физических причинах ее установления. В связи с высокой сложностью таких систем точный анализ задачи невозможен.

Проведем анализ особенностей горения в квазистационарной стадии. Приближенное равенство интегральных мощностей тепловыделения и теплопотерь  $Q^+ \approx Q^-$  является следствием создавшейся гидродинамической картины, в которой скорость газа на переднем крае фронта пламени, осредненная по поперечному сечению

реактора, приблизительно равна нулю. В связи с этим повышенная по сравнению с  $v_n$  скорость пламени, обусловленная пульсациями поля скорости, имеет природу протуберанцев, распространяющихся возле правой и левой стенок реактора попеременно. Поскольку подобная гидродинамика в общем случае объясняется неустойчивостью плоского фронта пламени, необходимо построить математическую модель неустойчивости подобного рода. Принимая во внимание высокую пористость системы и учитывая то, что характерный диаметр каналов существенно больше толщины вязкого подслоя и толщины фронта пламени, можно использовать модель гидродинамической неустойчивости плоского пламени Ландау [11]. В соответствии с этой моделью плоский фронт абсолютно неустойчив и инкремент роста неустойчивости определяется выражением

$$\Omega = k v_1 \frac{\mu}{1 + \mu} \left[ \sqrt{1 + \mu - 1/\mu - 1} \right], \tag{6}$$

где  $\mu = \rho_1/\rho_2 > 1$  — отношение плотностей газа перед фронтом пламени и за ним, k — волновое число,  $v_1$  — скорость газа, втекающего во фронт пламени. Максимальная линейная скорость роста возмущений определяется как  $\Omega D = \Omega/k$ . Предполагая, что скорость газа, втекающего во фронт пламени, равна скорости его нормального распространения  $v_n$ , получаем оценку максимальной скорости распространения переднего края пламени:

$$v_{\rm f} = \Omega D_1 + v_{\rm n} = v_{\rm n} \left[ 1 + \frac{\mu}{1 + \mu} \left[ \sqrt{1 + \mu - 1/\mu - 1} \right] \right].$$
 (7)

При  $\mu = 7.2$  соответствующей оценкой скорости фронта будет  $v_f/v_n = 2.61$  (сплошная тонкая линия на рис. 11). Видно, что эта оценка хорошо аппроксимирует результаты численных расчетов. В случае более плотного расположения препятствий, моделирующих пористую среду, т. е. при меньшей пористости, законы гидродинамического движения могут существенно измениться, и использование модели Ландау будет некорректно. Интересным следствием (7) является независимость скорости пламени от диаметра реактора.

Скорость пламени можно оценить, используя производную по времени от объема продуктов горения (рис. 12). В этом случае усредненная по времени скорость близка к скорости переднего края фронта пламени, но флуктуации во втором случае значительно выше.

Другой подход к определению скорости фронта пламени основан на использовании различных моделей турбулентного (возмущенного) пламени, например модели Зельдовича:  $v_f = v_n + u_g'$ , где  $u_g'$  — амплитуда пульсации скорости вблизи фронта пламени. Подобные модели требуют оценки гидродинамической скорости вблизи фронта пламени, и, как указано выше, среднее значение такой скорости в рассматриваемой системе близко к нулю.

Для полноты описания системы оценим скорость релаксации средней температуры продуктов горения. На рис. 13 совместно с графиком, демонстрирующим результаты расчета (сплошная кривая), приведена аналити-

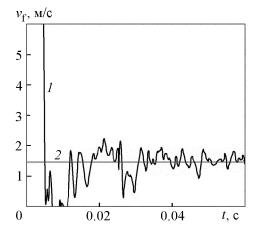


Рис. 11. Зависимость скорости пламени от времени: I — оценка по положению переднего края фронта пламени (математическое моделирование); 2 — оценка по (7)

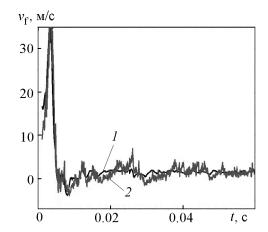


Рис. 12. Зависимость скорости пламени от времени: I — оценка с использованием производной по времени от объема продуктов горения; 2 — скорость переднего края фронта пламени

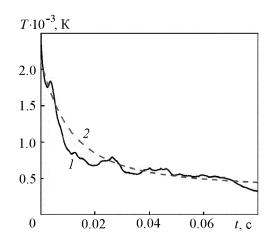


Рис. 13. Средняя температура продуктов горения: I — расчет; 2 — аппроксимация по (8)

ческая оценка температуры пламени (штриховая), полученная из допущения о постоянстве скорости распространения фронта пламени:

$$\overline{T}_{b} = T_{0} + (T_{ad} - T_{0}) \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha t},$$
 (8)

где  $\alpha = h/\langle c \rho_g \rangle$ .

Как показывает анализ, скорость релаксации средней температуры продуктов горения слабо зависит от скорости и ускорения пламени. Поэтому средняя температура пламени, рассчитанная по (8), хорошо согласуется с многочисленными данными численных экспериментов независимо от скорости пламени.

Заключение. Проведено детальное численное моделирование динамики пламени в закрытом двумерном сосуде, заполненном высокопористым материалом. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными показало их

качественное совпадение. Установлено, что квазистационарный режим распространения пламени возможен в случае достаточно большой относительной длины системы (L/D > 9) и удельной поверхности пористой среды  $(S_{\rm sp} \ge 10^{-4} \ {\rm m}^{-1})$ . Разработанное программное обеспечение может использоваться для прямого трехмерного моделирования динамики пламени.

Изучен режим горения в высокопористых средах, характеризующийся слабой тепловой связью между твердой и газовой фазами. Отмечены три стадии распространения пламени: интенсивное ускорение, стадия стоячей волны и стадия квазистационарного распространения "leapfrog", в которой скорость пламени  $v_{\rm f}/v_{\rm n}=2-3$ . Характеристические параметры последней стадии были определены при помощи теории Ландау, описывающей гидродинамическую неустойчивость плоского пламени.

Предложена физическая модель горения в указанной выше системе. Параметры стадии интенсивного ускорения определены с помощью геометрической модели поверхности пламени, где фрактальная размерность области продуктов горения вначале составляет 1.5, а затем уменьшается до 1.33. Быстрое торможение пламени объясняется уменьшением площади его поверхности из-за тушения на стенках реактора и интенсивным теплообменом между горячими продуктами горения и пористой средой. Квазистационарное распространение пламени имеет место при приблизительном равенстве тепловыделения при горении газа и теплопотерь при теплообмене продуктов горения с пористой средой. Поскольку пламя распространяется в среднем по неподвижному газу, скорость распространения пламени можно определить из модели гидродинамической неустойчивости его фронта, что дает довольно хорошее приближение скорости распространения пламени.

Полученные результаты могут быть использованы при создании пламегасителей и взрывобезопасных топливных баков. Разработанное авторами программное обеспечение позволяет моделировать системы инициации детонационной волны прежде всего для пульсационного детонационного двигателя.

Следующим шагом в наших исследованиях будет изучение критических условий возникновения ускорения и стабилизации фронта пламени в закрытых камерах с длиной, намного большей их ширины, и в полуоткрытых камерах.

#### Обозначения

d — толщина препятствия; D — поперечный размер реактора; E — энергия активации; H и  $H_i$  — удельные энтальпии смеси газов и ее i-го компонента;  $h_L$  и  $h_D$  — расстояния между препятствиями по длине и ширине реактора, численный эксперимент;  $h_x$  и  $h_y$  — шаги расчетной сетки по длине и ширине реактора; L — длина реактора; P и  $P_0$  — текущее и начальное давления газа;  $Q^+$  и  $Q^-$  — мощности тепловыделения и теплопотерь; S и  $S_0$  — текущая и начальная площади поверхности пламени;  $S_L$  и  $S_D$  — расстояния между препятствиями по длине и ширине реактора, натурный эксперимент; t — время; t — температура газа; t — температура стенок препятствий; t — вектор скорости газа; t — скорость фронта пламени; t и t — скорость нормального распространения пламени; t и t и t — текущий и начальный объемы газа; t и t — продольная и поперечная координаты; t и t — объемная и массовая доли t — коэффициент теплоотдачи газа; t — коэффициент теплопроводности газа; t — плотность газа. Индексы: t — стенка; t — граница; t — фронт; t — нормальный.

## Литература

- 1. **Korzhavin A. A., Bunev V. A., and Babkin V. S.** Dynamics of gaseous combustion in closed systems with an inert porous medium. *Combust. Flame*. 1997. Vol. 109. Pp. 507–520.
- 2. **Лямин Г. А., Пинаев А. В.** О режиме быстрого дозвукового горения газов в инертной пористой среде с плавным подъемом давления в волне. *Физика горения и взрыва*. 1987. Т. 23, № 4. С. 27–30.
- 3. **Babkin V. S., Korzhavin A. A., and Bunev V. A.** Propagation of premixed gaseous explosion flames in porous media. *Combust. Flame.* 1991. Vol. 87. Pp. 182–190.
- 4. **Trimis D. and Durst F.** Combustion in a porous medium advances and applications. *Combust. Sci. Technol.* 1996. Vol. 121. Pp. 153–168.
- 5. Добрего К. В., Жданок С. А. Физика фильтрационного горения газов. Минск: Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2002.
- 6. **Hackert L., Ellzey J. L., and Ezekoye O. A.** Effects of thermal boundary conditions on flame shape and quenching in ducts. *Combust. Flame.* 1998. Vol. 112. Pp. 73–84.
- 7. **Hanamura K., Echigo R., and Zhdanok S.** Superadiabatic combustion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1993. Vol. 36, No. 13. Pp. 3201–3224.
- 8. **Dobrego K. V., Kozlov I. M., and Vasiliev V. V.** Flame dynamics in thin semi-closed tubes at different heat loss conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2006. Vol. 49. Pp. 198–206.
- 9. **Kozlov I. M., Suvorov A. E., and Tyukaev V. I.** A numerical study of free convection in a strongly inhomogeneous gas medium. *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1995. Vol. 38. Pp. 2689–2695.
- 10. **Kozlov I. M., Dobrego K. V., and Gnesdilov N. N.** Application of RES methods for computation of hydrodynamic flows by an example of a 2D flow past a circular cylinder for Re = 5–200. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2011. No. 1. Pp. 231–239.
  - 11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 2006.