Tarea mosi 3

Eduardo Ulises Yaveh Álvarez Marmolejo

August 2025

1 Problema 1

Sea $y_t = \varepsilon_t, con E(\varepsilon_t) = 0, E\left(\varepsilon_t^2\right) = \sigma^2 > 0$ y $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ para $t \neq s$. Considera ahora el proceso:

$$\varepsilon_t^2 = c + \rho\varepsilon_{t-1}^2 + u_t$$

donde $0 < \rho < 1$ y $u_t \sim WN(0, 1)$. Muestra que este proceso es estacionario.
Proof:

1. Para que sea estacionario: Media constante: $\mathbb{E}(y_t) = \mu$
2. Autocovarianza independiente del tiempo
3. Covarianza no depende del hempo.

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(c + \rho\varepsilon_{t-1}^2 + u_t)$$

$$= \mathbb{E}(c) + \rho\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathbb{E}(u_t)$$

$$= c + \rho\mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + 0$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_{t-1}^2) = \mu$$

$$\to \mu = c + p\mu \to \mu - \mu p = c \to \mu(1-p) = c \to \mu = \frac{c}{1-p}$$

Consideremos: $y_t = \varepsilon_t^2 - \mu$

$$\to y_t + \mu = c + \rho(y_{t-1} + \mu) + u_t$$

$$y_t = c + \rho y_{t-1} + \rho\mu + u_t - \mu$$

como $c = \mu(1-p)$

$$y_t = \mu(1-\rho) + \rho y_{t_+} + \rho\mu + u_t - \mu_t$$

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

Obtemendo un AR:
Y Por construccion: $\mathbb{E}(y_t) = 0, \rho < 1$ & u_t es Ruido blanco

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-1}) = \rho^k \gamma_0$$

Donde:

$$\gamma_0 = var(y_t) = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2} = \frac{1}{1-\rho^2}$$

Como $\varepsilon_t^2 = y_t + \mu$ $Cov\left(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2\right) = Cov(y_t + y_{t-k}) = \gamma_k$

$$Cov\left(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2\right) = Cov(y_t + y_{t-k}) = \gamma_k$$

2 Problema 2

Sea $\varepsilon_t \sim iidN\left(0, \sigma^2\right)$, y :

$$Y_t = \delta t + \varepsilon_t$$

Muestra que este proceso no es estacionario:
Recuperando que tiene que tener media constante independiente del tiempo:

$$E(Y_t) = E(\delta t + \varepsilon_t)$$
$$E(Y_t) = \delta t + E(\varepsilon_t)$$
$$E(Y_t) = \delta t + 0$$
$$E(Y_t) = \delta t$$

Dado que depende de t, no es estacionario

3 Problema 3

Argumenta que una variable aleatoria $Y_t \sim$ iid Cauchy es estrictamente estacionaria, pero no estacionaria en covarianza.

Por la naturaleza de la Cauchy, es estrictamente estacionaria debido a que la distribución conjunto por ser iid. Sin embargo, la media y la varianza no estan definidas, por la misma naturaleza de la Cauchy

4 Problema 4

Supongamos que la media $\mu^{(i)}$ de la i-ésima realización de $Y_t^{(i)}, \left\{y_t^{(i)}\right\}_{t=-\infty}^{\infty}$, proviene de una distribución normal con media 0 y varianza λ^2. Además:

$$Y_t^{(i)} = \mu^{(i)} + \varepsilon_t; \quad \varepsilon_t \sim iidN\left(0, \sigma^2\right)$$

Muestra que el proceso que sigue $Y_t^{(i)}$ es estacionario, pero no ergódico.

- Por la misma definición $Y_t^{(i)}$ iid$N(0, \sigma^2)$ y u_t iiD $N(0, \lambda^2)$, por lo que es estacionario
- La parte ergotica es que sea convergente a $E(Y_t^{(i)})$ entonces:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_t^{(i)} = E(Y_t^{(i)}) = 0$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\mu^{(i)} + \varepsilon_t) = \mu^{(i} + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t$$

Como ε_t $\tilde{\text{i}}$id $N(0, \sigma^2)$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t = 0$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_t^{(i)} \to \mu^{(i)}$$

Convergiendo a una variable aleatoria en lugar de 0