

《四足机器人控制算法》要点

年份：2025

- 一、概述与实践准备

- 1. 四足机器人组成 P4

- 动力系统：关节电机
 - 控制系统：硬件+软件，软件分为规划器和运动控制器
 - 通讯系统
 - 能源系统：电池

- 二、关节电机

- 1. 永磁同步电机 P4

- 其他电机类型：异步电机（不精确）、步进电机（只对角度精确）
 - 原理：固定磁场中，永磁体会旋转并保持在平行于磁场的方向（指南针+地球）。改变磁场的方向，即改变磁场与永磁体之间的夹角，形成力矩。

- 2. FOC（Field-Oriented Control） P4

- 中文为永磁同步电机的矢量控制。像素级控制，精确，噪声小。
 - 原理：三个电流线圈产生三个方向磁场，所合成的总磁场方向，拖动转子按期望方式运动。

- 3. 电机结构 P5

减速器。作用：使电机转子（高转速、低力矩），经过减速，到达机器人（低转速、高力矩）。

- 4. 单圈绝对位置编码器 P5

- 1. 能够储存圈数
 - 2. 断电删除圈数

- 5. 关节电机混合控制 P6

五个控制量：（需在电机运行模式为“闭环伺服控制”下起作用）

- τ_{ff} （前馈力矩）
 - K （位置刚度）
 - q_{des} （期望角度位置）
 - D （速度刚度/阻尼）
 - \dot{q}_{des} （期望角速度）

输出量：

- τ_{cmd} （输出力矩）

状态量：

- q （当前角度位置）
 - \dot{q} （当前角速度）

$$\tau_{cmd} = \tau_{ff} + K(q_{des} - q) + D(\dot{q}_{des} - \dot{q})$$

- 6. 电机控制模式 P11

- 位置模式
 - 速度模式
 - 阻尼模式（默认开机状态）
 - 力矩模式
 - 零力矩模式
 - 混合模式（位置、速度、力矩的混合控制。PD控制器。）

- 三、仿真与控制框架

- 1. 面向对象的应用 P20

通常会有仿真和真机2种模式，二者继承同一父类接口，外层代码不需要改。

- 2. 有限状态机 P22

继承同一个父类，实现如下接口：

- enter：刚进此状态执行一次
 - run：进入后循环调用
 - exit：退出时执行一次
 - checkChange：检查是否需要切换进其他状态

- 3. 关节排序与坐标轴 P25, 28

- 腿顺序：0-右前，1-左前，2-右后，3-左后
 - 关节顺序：0-机身，1-大腿，2-小腿

- 旋转轴方向：平行的，均为x前y左z上
- 关节旋转轴：机身绕x轴，大腿和小腿绕y轴

4. 网络配置 P34

1. 交换机和路由器：交换机实现多个计算机内部通讯，路由器可以连到互联网。路由器通常包括交换机的功能。LAN（局域网），WAN（广域网）。
2. 配置固定IP

```
sudo ifconfig eth0 down
sudo ifconfig eth0 up 192.168.123.162 netmask 255.255.25
```

3. 开机自动配置固定IP

```
sudo vim /etc/network/interfaces
```

```
# 添加如下内容
auto eth0
iface eth0 inet static
address 192.168.123.162
netmask 255.255.25
```

4. 网关

1. 新路由器未配置时默认IP通常是192.168.0.1。
2. 网关可以理解为就是路由器的IP地址。其他计算机通过这个出口连接互联网。

5. DNS

1. ping 域名的时候未必成功，需要DNS解析
2. DNS服务器

```
ping 202.38.64.1      # 中科大
ping 114.114.114.114  # 我国常用
ping 8.8.8.8          # Google
```

3. 配置

```
sudo vim /etc/network/interfaces
```

```
dns-nameservers 8.8.8.8
```

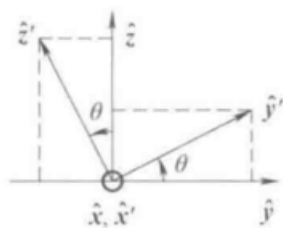
• 四、刚体运动学

1. 三维空间旋转矩阵 P45

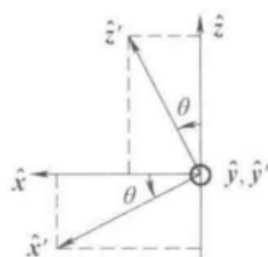
在一个坐标系下，任意向量都可以用单位向量来表示：

$$\vec{OP} = x_s \cdot \hat{x}_s + y_s \cdot \hat{y}_s$$

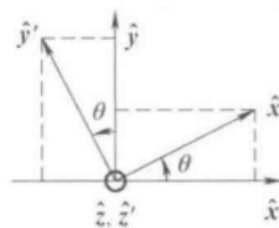
旋转矩阵=新坐标系的单位向量在参考坐标系下的坐标（通常通过三角函数获得）



a) 关于x轴旋转



b) 关于y轴旋转



c) 关于z轴旋转

$$R_x(\theta) = [\hat{x}' \quad \hat{y}' \quad \hat{z}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵特性:

- $\det(R) = 1$, 行列式=1 (旋转矩阵不缩放物体)
- $R^{-1} = R^T$, 逆=转置 (反向旋转尽量不用逆矩阵, 而用转置矩阵)

2. 向量积 P48

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

向量 \mathbf{c} 方向: 右手四指指向 \mathbf{a} , 向 \mathbf{b} 方向握拳, 大拇指方向

模长含义: 平行四边形面积

特性: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

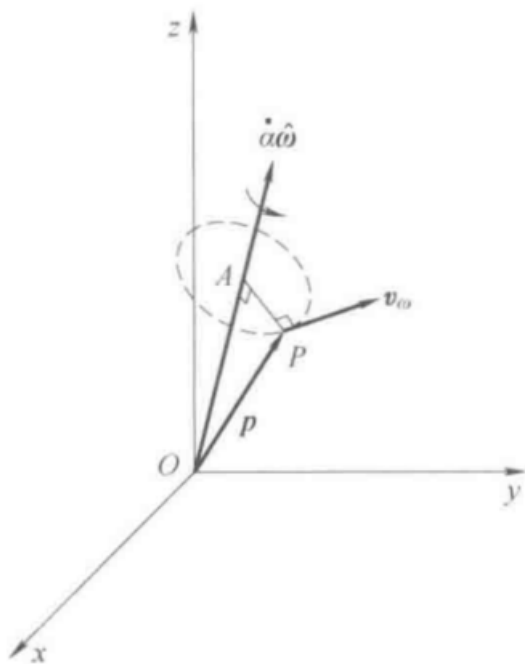
变形: 根据单位向量的叉乘特性 (此处略), 可将第一个向量变为一个反对称矩阵, 记为符号 $[\mathbf{a}]_{\times}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 \cdot b_x + (-a_z) \cdot b_y + a_y \cdot b_z \\ a_z \cdot b_x + 0 \cdot b_y + (-a_x) \cdot b_z \\ (-a_y) \cdot b_x + a_x \cdot b_y + 0 \cdot b_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{b} \\ &= [\mathbf{a}]_{\times} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

3. 绕轴旋转质点速度 P50

根据线速度=角速度*半径, 得到

$$|\mathbf{v}_{\omega}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{p}| \cdot \sin\angle AOP$$



模长恰好为向量积模长, 加上方向, 得:

$$\mathbf{v}_{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} = [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \mathbf{p}$$

含义: 质点线速度等于绕轴角速度叉乘质点坐标

4. 罗德里格斯公式: 轴-角表示法与旋转矩阵的互换

5. 欧拉角 P50

与旋转矩阵互换, 一般按Y-P-R顺序

• 五、单腿的运动学和静力学

1. 正运动学 P66

单看一条腿。关节角度→足端坐标。

定义四个坐标系{0} {1} {2} {3}，{0}是基座坐标系，{1} {2} {3}分别是三个连杆的坐标系。{0} {1} {2}共用一个原点。四个坐标系轴方向都是x前y左z上。

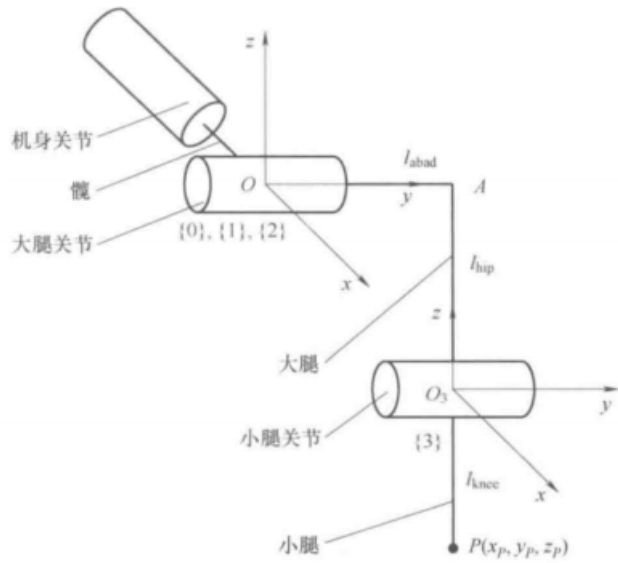


图 5.3 机器人单腿简化图

机身关节、髋关节、膝关节分别旋转 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 ，按照4.1的方法，得到足端坐标相对机身关节坐标：

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + l_2 \sin \theta_2 \\ -l_3 \sin \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ l_3 \cos \theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ l_1, l_2, l_3 : 连杆长度。髋长、大腿长、小腿长。

$$l_1 = \begin{cases} -l_{abad}, & \text{右前腿, 右后腿} \\ l_{abad}, & \text{左前腿, 左后腿} \end{cases}, l_2 = -l_{hip}, l_3 = l_{knee}$$

■ 推导过程：刚体运动学

{0}→{1}: 绕x转 θ_1

$$T_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

{1}→{2}: 绕y转 θ_2

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

{2}→{3}: 绕y转 θ_3 (右腿为例)

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ -\sin \theta_3 & 0 & \cos \theta_3 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

足端在{3}的坐标：

$$\begin{bmatrix} p_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 逆运动学 P69

足端坐标→关节角度。

求解顺序: θ_1 、 θ_3 、 θ_2

$$\theta_1 = \text{atan2}(z_p l_1 + y_p L, y_p l_1 - z_p L)$$

$$\theta_3 = -\pi + \arccos\left(\frac{l_{hip}^2 + l_{knee}^2 - |\overrightarrow{AP}|^2}{2l_{hip}l_{knee}}\right)$$

$$\theta_2 = \text{atan2}(a_1 m_1 + a_2 m_2, a_2 m_1 - a_1 m_2)$$

- L : 机器人腿部 (大腿和小腿) 在yz平面投影长度, 根据勾股定理

$$L = \sqrt{y_p^2 + z_p^2 - l_1^2}$$

- $|\overrightarrow{AP}|$: O点在A点里侧, $\angle OAP$ 是直角, 根据勾股定理

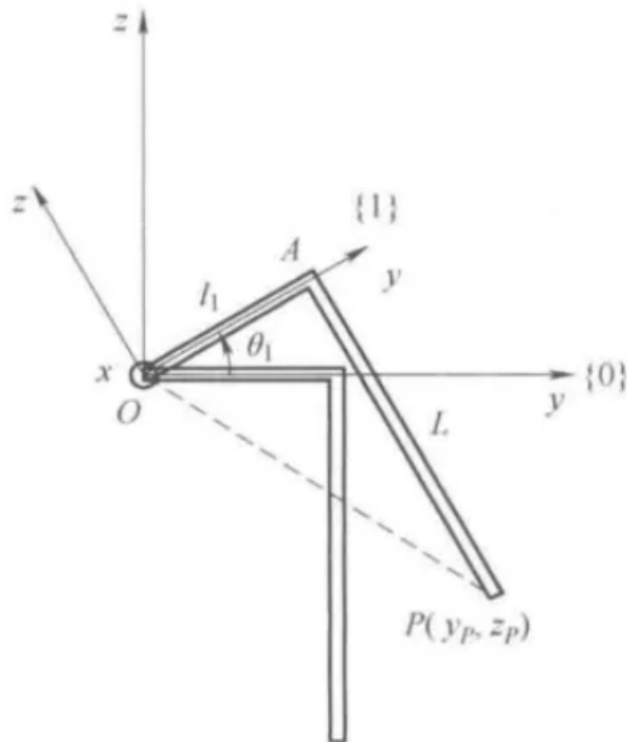
$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x_p^2 + y_p^2 + z_p^2 - l_{abad}^2)}$$

- a 和 m :

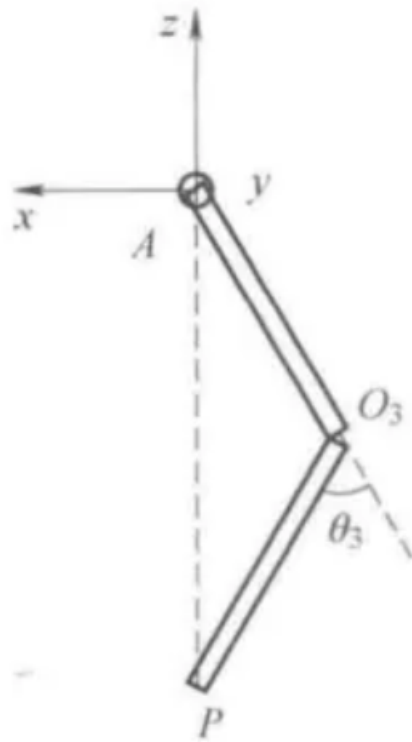
$$\begin{cases} a_1 = y_p \sin \theta_1 - z_p \cos \theta_1 \\ a_2 = x_p \\ m_1 = l_3 \sin \theta_3 \\ m_2 = l_3 \cos \theta_3 + l_2 \end{cases}$$

- 推导过程: 几何学

单腿前视图:



单腿侧视图:



3. 一阶微分运动学和静力学 P72

足端线速度与关节角速度是线性关系，二者可以通过雅可比矩阵 \mathbf{J} 互推。 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\theta)$ ，仅与关节旋转角度有关。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{bmatrix}$$

■ 推导过程：对“5.1 正运动学”中的足端坐标关节角度等式两边求导

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= l_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_2 + l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &= l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &= 0 \cdot \dot{\theta}_1 + (l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos\theta_2) \cdot \dot{\theta}_2 + l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 \\ &= J_{11} \cdot \dot{\theta}_1 + J_{12} \cdot \dot{\theta}_2 + J_{13} \cdot \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_P &= -l_3 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 - l_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1 \dot{\theta}_2 \\ &= -l_3 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 + l_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) - l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 - l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_1 \\ &= (-l_1 \sin\theta_1 - l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 - l_3 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \dot{\theta}_1 + (l_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + l_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \dot{\theta}_2 \\ &\quad + l_3 \sin\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3 \\ &= J_{21} \cdot \dot{\theta}_1 + J_{22} \cdot \dot{\theta}_2 + J_{23} \cdot \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_P &= l_3 \cos\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 + l_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &= -l_3 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \dot{\theta}_1 - l_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \dot{\theta}_1 - l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2 \\ &= (l_1 \cos\theta_1 - l_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 - l_3 \sin\theta_1 \cos(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \dot{\theta}_1 + (-l_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 - l_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \dot{\theta}_2 \\ &\quad + (-l_3 \cos\theta_1 \sin(\theta_2 + \theta_3)) \cdot \dot{\theta}_3 \\ &= J_{31} \cdot \dot{\theta}_1 + J_{32} \cdot \dot{\theta}_2 + J_{33} \cdot \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (5.41)$$

4. 单腿静力学 P73

足端力和关节力矩也是线性关系。二者可以通过雅可比矩阵互推。

$$\begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T \cdot \boldsymbol{F}$$

■ 推导过程：力学公式

(力 * 半径) * 角速度 = 力矩 * 角速度

力 * (半径 * 角速度) = 力 * 线速度

∴ 力矩 * 角速度 = 力 * 线速度

5. 摆动腿修正力 P74

对于腾空腿，可应用上述原理，根据（规划的）足端目标位置和目标速度，求出关节角度和关节角速度。但调参不方便，因此还需对其足端的目标位置与目标速度的差距施加修正力：

$$\boldsymbol{f}_d = \boldsymbol{K}_p (\boldsymbol{p}_{0d} - \boldsymbol{p}_{0f}) + \boldsymbol{K}_d (\dot{\boldsymbol{p}}_{0d} - \dot{\boldsymbol{p}}_{0f})$$

• 六、四足机器人的运动学与动力学

1. 机身坐标系与世界坐标系 P77

机身坐标系{b}，是一个惯性系（不平移旋转），但是时刻与机器人位姿重合。

一般建立在重心上。 P80

世界坐标系{s}，也是一个惯性系，选择初始状态下某一只脚为原点的坐标系。

只有惯性系中才能使用牛顿第二定律。

2. 刚体上某个质点的速度与加速度 P78

质点不考虑旋转，只考虑速度和加速度。

刚体上质点的速度 = 刚体平移速度 + 刚体旋转产生的速度。加速度同理。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_P &= \boldsymbol{v}_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P \\ \ddot{\boldsymbol{p}}_P &= \dot{\boldsymbol{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P \end{aligned}$$

■ \boldsymbol{v}_b ：刚体平移线速度

■ $\boldsymbol{\omega}_b$ ：刚体旋转角速度

■ 推导过程：

（1）根据第4章绕轴旋转质点速度

$$\dot{\boldsymbol{p}}_P = \boldsymbol{v}_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} (\boldsymbol{p}_P - \boldsymbol{p}_{O'})$$

（2）对（1）求导

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_P = \dot{\boldsymbol{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} (\boldsymbol{p}_P - \boldsymbol{p}_{O'}) + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} (\dot{\boldsymbol{p}}_P - \dot{\boldsymbol{p}}_{O'})$$

（3）将（1）代入（2）

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_P = \dot{\boldsymbol{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} (\boldsymbol{p}_P - \boldsymbol{p}_{O'}) + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} (\boldsymbol{p}_P - \boldsymbol{p}_{O'})$$

（4） O' 坐标为0

$$\boldsymbol{p}_{O'} = 0$$

（5）将（4）带入（1）和（3）

$$\dot{\boldsymbol{p}}_P = \boldsymbol{v}_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P$$

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_P = \dot{\boldsymbol{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_P$$

3. 机身运动时足端速度 P79

机身运动时的足端速度 = 机身平移导致的足端牵连速度（6.2 刚体质点速度）+ 关节旋转导致的足端速度（5.3节 一阶微分运动学）

$$\begin{aligned} v_{bej} &= v_{be} + v_{bj} \\ &= v_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \boldsymbol{p}_{bj} + \boldsymbol{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

进而可进一步通过坐标变换，变换到世界坐标系下足端速度，此处略。

4. 单刚体动力学 P80

单刚体：忽略四条腿形变对动力学的影响。

1. 质量定义：密度在体积上的积分

$$\int_B \rho \, dV = m$$

2. 重心特性:

$$\int_B \rho \mathbf{p}_b \, dV = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

3. 重心受到的合外力: 牛顿第二定律。

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$

■ 推导过程

对每一个质点进行积分:

$$\mathbf{f}_b = \int_B \rho(x, y, z) \ddot{\mathbf{p}}_b(x, y, z) dV$$

将 $\ddot{\mathbf{p}}_P = \dot{\mathbf{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} \mathbf{p}_P + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{p}_P$ 代入上式, 其中 $\dot{\mathbf{v}}_b$ 和 $[\dot{\boldsymbol{\omega}}]_{\times}$ 为常量, 再带入质量定义、重心特性, 即可得到牛顿第二定律公式。

4. 重心受到的合外力矩: 旋转刚体欧拉方程。

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{I}_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{I}_b \boldsymbol{\omega}_b$$

第二项非线性, 不好求解。但由于四足通常不会快速旋转, 故可省去。

■ 推导过程: 力矩 = 力臂 \times 力 (力臂与力的向量积)

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_b &= \int_B [\mathbf{p}_b]_{\times} d\mathbf{f} = \int_B [\mathbf{p}_b]_{\times} \rho \ddot{\mathbf{p}}_b \, dV \\ &= \int_B \rho [\mathbf{p}_b]_{\times} (\dot{\mathbf{v}}_b + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} \mathbf{p}_b + [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{p}_b) dV \\ &= \int_B \rho [\mathbf{p}_b]_{\times} dV \dot{\mathbf{v}}_b + \int_B \rho [\mathbf{p}_b]_{\times} [\dot{\boldsymbol{\omega}}_b]_{\times} \mathbf{p}_b \, dV + \int_B \rho [\mathbf{p}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{p}_b \, dV \end{aligned}$$

之后再根据向量积的各种运算法则化简, 即可得到欧拉方程。

5. 惯性张量

根据式 (6.20) 对惯性张量的定义, 令 $\mathbf{p}_b = [p_x \ p_y \ p_z]^T$, 则刚体的惯性张量 \mathbf{I}_b 为

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_b &= - \int_B \rho [\mathbf{p}_b]_{\times} [\mathbf{p}_b]_{\times} dV \\ &= - \int_B \rho \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} dV \\ &= \int_B \rho \begin{bmatrix} p_y^2 + p_z^2 & -p_x p_y & -p_x p_z \\ -p_x p_y & p_x^2 + p_z^2 & -p_y p_z \\ -p_x p_z & -p_y p_z & p_x^2 + p_y^2 \end{bmatrix} dV \\ &= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.29)$$

所以惯性张量 \mathbf{I}_b 中的各项元素为

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_B \rho (p_y^2 + p_z^2) dV \\ I_{yy} = \int_B \rho (p_x^2 + p_z^2) dV \\ I_{zz} = \int_B \rho (p_x^2 + p_y^2) dV \\ I_{xy} = - \int_B \rho p_x p_y dV \\ I_{xz} = - \int_B \rho p_x p_z dV \\ I_{yz} = - \int_B \rho p_y p_z dV \end{cases} \quad (6.30)$$

惯性张量的坐标系转换:

$$\mathbf{I}_s = \mathbf{R}_{sb} \mathbf{I}_b \mathbf{R}_{sb}^T$$

5. 动能 P82

移动动能:

$$K_m = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_b^T \mathbf{v}_b$$

转动动能:

$$K_t = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_b^T \mathbf{I}_b \boldsymbol{\omega}_b$$

6. 足端动力学 P85

重心的合力 = 重力 + 四个足端力之和

重心的力矩 = 四足力矩之和

(下面的公式包含从{b}坐标系到{s}坐标系的转换)

公式形式:

$$\begin{cases} m\mathbf{g} + \sum_{i=0}^n \mathbf{f}_{(i)s} = m\dot{\mathbf{v}}_s \\ \sum_{i=0}^n [\mathbf{p}_{g(i)}]_{\times} \mathbf{f}_{(i)s} = \mathbf{R}_{sb} \mathbf{I}_b \mathbf{R}_{sb}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \end{cases}$$
$$\mathbf{g} = [0, 0, 0.98]^T, n = 3$$

矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ [\mathbf{p}_{g0}]_{\times} & [\mathbf{p}_{g1}]_{\times} & [\mathbf{p}_{g2}]_{\times} & [\mathbf{p}_{g3}]_{\times} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{0s} \\ \mathbf{f}_{1s} \\ \mathbf{f}_{2s} \\ \mathbf{f}_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(\dot{\mathbf{v}}_s - \mathbf{g}) \\ \mathbf{R}_{sb} \mathbf{I}_b \mathbf{R}_{sb}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_s \end{bmatrix}$$

上述公式中, 机器人世界坐标系姿态 \mathbf{R}_{sb} 、运动状态 \mathbf{v}_s 、 $\boldsymbol{\omega}_s$, 需要通过观测来估计。

• 七、状态估计器

1. IMU P88

组成与输出: 加速计 (加速度, 姿态), 陀螺仪 (角速度)

加速计原理: $m\mathbf{a} = -k\mathbf{s}$ (质量 \times 加速度 = 力 = 弹簧刚度 \times 位移)

IMU可以给出的量包括加速度 \mathbf{a}_s 、角速度 $\boldsymbol{\omega}_s$ 、位姿 \mathbf{R}_{sb}

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{R}_{sb} \mathbf{a}_{out} + \mathbf{g}$$

2. 离散状态空间模型 P89

连续系统 ($\dot{\mathbf{x}}$ 为下一状态, 不是导数)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k-1) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{cases}$$

- \mathbf{A} : 系统矩阵
- \mathbf{B} : 输入矩阵
- \mathbf{C} : 输出矩阵

(离散系统与连续系统的区别:) P92

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}_c \\ \mathbf{B} = \Delta t \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C} = \mathbf{C}_c \end{cases}$$

1. 状态量：（及导数）

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b \\ \mathbf{v}_b \\ \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_b \\ \dot{\mathbf{v}}_b \\ \dot{\mathbf{p}}_0 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \mathbf{R}_{sb}\mathbf{a}_b + \mathbf{g} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}$$

- \mathbf{p}_b : 机身位置
- \mathbf{v}_b : 机身速度
- \mathbf{p}_i : 四个足端位置（导数部分假设足端静止）

2. 控制量：

假设机身加速度为控制量，则（ $\dot{\mathbf{x}}$ 为为下一状态，不是导数）：

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 12} \\ & \mathbf{0}_{3 \times 18} & \\ & \mathbf{0}_{12 \times 18} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{12 \times 3} \end{bmatrix} [\mathbf{R}_{sb}\mathbf{a}_b + \mathbf{g}] \quad \mathbf{B}$$

3. 观测：

$$y = \begin{bmatrix} p_{sfB0} \\ p_{sfB1} \\ p_{sfB2} \\ p_{sfB3} \\ v_{sfB0} \\ v_{sfB1} \\ v_{sfB2} \\ v_{sfB3} \\ p_{sz0} \\ p_{sz1} \\ p_{sz2} \\ p_{sz3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sb} p_{bfB0} \\ R_{sb} p_{bfB1} \\ R_{sb} p_{bfB2} \\ R_{sb} p_{bfB3} \\ R_{sb} ([\omega_b] \times p_{bfB0} + J_0 \dot{\theta}_0) \\ R_{sb} ([\omega_b] \times p_{bfB1} + J_1 \dot{\theta}_1) \\ R_{sb} ([\omega_b] \times p_{bfB2} + J_2 \dot{\theta}_2) \\ R_{sb} ([\omega_b] \times p_{bfB3} + J_3 \dot{\theta}_3) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- p_{sfBi} : {s}下足端到机身位置向量 (根据关节角度、机身姿态, 关节角度可以得到关节坐标系下的足端位置, 再通过一步机身姿态矩阵转换到{s}坐标系)
- v_{sfBi} : {s}下足端相对于机身的速度 (根据6.3移动刚体的质点速度求得)
- p_{szi} : 足端高度 (假设着地)

3. 离散卡尔曼滤波 P99

噪声模型:

$$\begin{cases} x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

$$w \sim (0, Q), v \sim (0, R)$$

- Q : 过程噪声协方差
- R : 观测噪声协方差

求解步骤:

1) 与递推最小二乘估计相同, 需要先给出初始状态的最优状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ 和协方差 \mathbf{P}_0^+ , 其方法和递推最小二乘估计相同。

2) 当离散卡尔曼滤波器开始运行时, 时刻 $k=1$, 首先根据式 (7.62) 和式 (7.63) 来计算 $k=1$ 时刻的先验估计 $\hat{\mathbf{x}}_1^-$ 和先验协方差 \mathbf{P}_1^- :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+ + \mathbf{B}u_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (7.65)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_1^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0^+ + \mathbf{B}u_0 \\ \mathbf{P}_1^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_0^+ \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{cases} \quad (7.66)$$

根据式 (7.64) 来计算卡尔曼滤波增益 \mathbf{K}_1 :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T)^{-1} \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{P}_1^- \mathbf{C}^T (\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}_1^- \mathbf{C}^T)^{-1} \end{cases} \quad (7.67)$$

然后读取各个传感器的测量值, 将其代入式 (7.13), 即可得到测量值 \mathbf{y}_1 , 并且根据式 (7.64) 来计算后验估计 $\hat{\mathbf{x}}_1^+$ 和后验协方差 \mathbf{P}_1^+ :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R} \mathbf{K}_k^T \end{cases} \quad (7.68)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_1^+ = \hat{\mathbf{x}}_1^- + \mathbf{K}_1 (\mathbf{y}_1 - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_1^-) \\ \mathbf{P}_1^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{C}) \mathbf{P}_1^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_1 \mathbf{C})^T + \mathbf{K}_1 \mathbf{R} \mathbf{K}_1^T \end{cases} \quad (7.69)$$

这时的 $\hat{\mathbf{x}}_1^+$ 就是 $k=1$ 时刻的最优状态估计。

3) 当 $k=2, 3, \dots$ 时, 离散卡尔曼滤波器重复执行步骤 2) 中的操作。

4. 协方差测量 P100

对于观测噪声 \mathbf{R} , 易证机器人在静止状态时的噪声协方差等于观测协方差。

对于过程噪声 \mathbf{Q} , 其中一部分噪声是控制量引入的, 控制量 $\mathbf{R}_{sb} \mathbf{a}_b$ 是 IMU 给出的结果, 也有测量噪声。

5. 参数调试 P103

- 以同一比例缩放三个协方差矩阵的值, $\mathbf{Q}' = a\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}' = a\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{P}_0^{+'} = a\mathbf{P}_0^+$, 估计效果不会发生变化。
- 某足端腾空时, 观测噪声 \mathbf{Q} 对应位置的值应该设置为 $+\infty$ 。更精细的做法是利用分段函数, 在开始触地与结束触地时, 设置可变的协方差。
- 一般 \mathbf{R} 都可以直接测量得到, 重点在于调节 \mathbf{Q} 。先设置一个较大的值, 如果估计结果较大震动, 再逐渐缩小 \mathbf{Q} , 直到合适为止。

• 八、平衡控制器

1. 机身位姿反馈控制 P109

通过控制力, 结合 6.6 的足端动力学方程, 来控制机身的线加速度和角加速度, 进而控制机身在 {s} 中的位置和姿态。

此处使用 PD 控制实现线/角加速度对位姿的控制 (推导略)。 P112

$$\ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{p} + \mathbf{K}_d \Delta \dot{\mathbf{p}}$$

- \mathbf{p} : 位置; $\dot{\mathbf{p}}$: 速度; $\ddot{\mathbf{p}}$: 加速度; $\Delta \mathbf{p}$: 位置偏差; $\Delta \dot{\mathbf{p}}$: 速度偏差;
- xyz 可以分别控制。
- 让机身产生符合上述等式的线加速度, 位置和速度就能收敛到目标位置和目标速度。
- $\mathbf{K}_p < \frac{1}{(dt)^2}$, 需要通过试验调节; 得到 \mathbf{K}_p 后, $\mathbf{K}_d = 2\sqrt{\mathbf{K}_p} - \frac{dt}{2} \mathbf{K}_p$ 。

角加速度原理类似, 只是 xyz 不能分别计算。让机身产生 PD 控制等式的角加速度, 就能让机身收敛到目标姿态。

2. 足端力控制的二次规划求解 P114

对于 6.6 的足端动力学方程, 目前已知除足端力以外的全部变量:

- (1) 机器人重心到足端位置: 状态估计器 (第 7 章)。
- (2) 机器人位姿: IMU (7.1 节)
- (3) 线加速度和角加速度: PD 控制器 (8.1 节)

其中, 有 6 个等式, 12 个未知数, 未知数数量 > 方程数量, 解不唯一, 需要二次规划。

优化目标: P116

(形如:)

$$J = (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T \mathbf{S} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}$$

(实际：)

- 第一项：6.6式等式两边相减趋近于0
- 第二项：足端力尽量小
- 第三项：当前足端力与上一状态足端力不要差别太大

约束： P114

(摩擦锥约束，右侧为矩阵形式)

$$\begin{cases} -\mu F_z < F_x < \mu F_z \\ -\mu F_z < F_y < \mu F_z \\ 0 < F_z \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ -1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{f}_{is} \geq \mathbf{0}$$

3. 关节实际控制 P117

通过第5章的雅可比矩阵，将足端力转换回关节力矩，实现关节的实际控制。

4. 转动惯量等需要大量测试调参。WBC不需要调参。

• 九、步态和轨迹规划

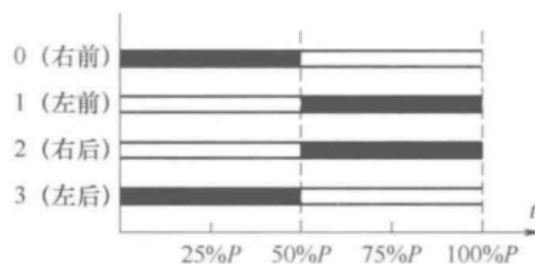
stance-触底腿，swing-摆动腿

1. 步态类型与触地系数 P122

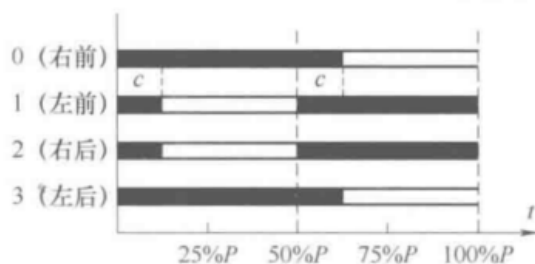
步态周期=P，触地系数=r。则触地时长 $T_{\text{stance}}=rP$ ，腾空时长 $T_{\text{swing}}=(1-r)P$ 。

各种步态：

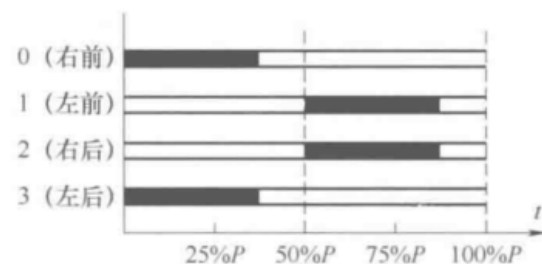
- 对角步态 (Trot)：相对的两只脚落地。此外，还分为步行对角步态 (触地系数>0.5) 和奔跑对角步态 (触地系数<0.5)。



a) 常用的对角步态

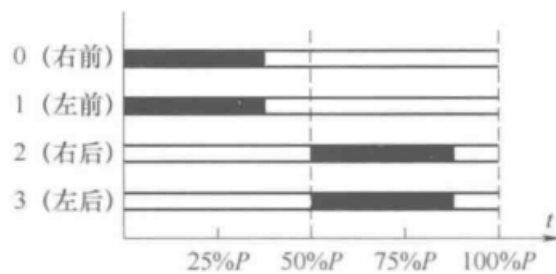


b) 步行对角步态

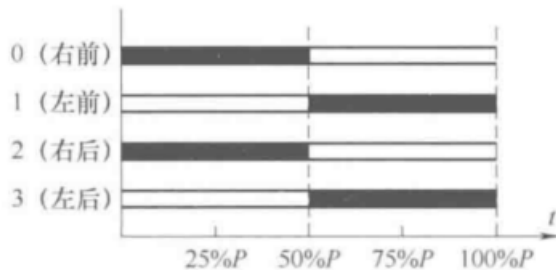


c) 奔跑对角步态

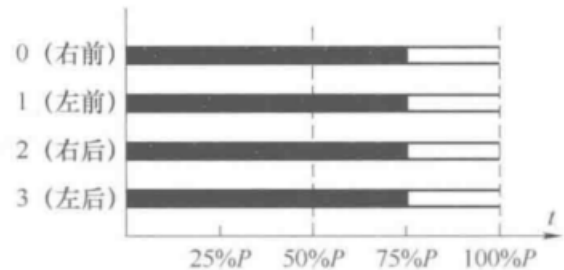
- 跃进步态 (Bound)：两条前腿同步运动，两条后腿同步运动。
- 踱步步态 (Pace)：两条左腿同步运动，两条右腿同步运动。
- 弹跳步态 (Pront)：四条腿同步运动。



a) 跃进步态



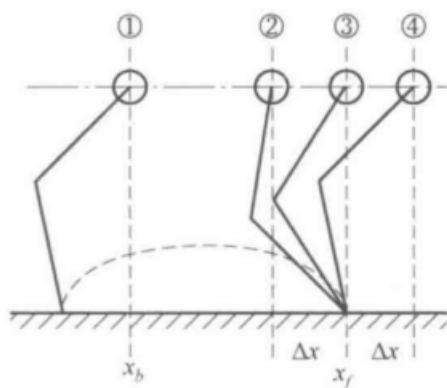
b) 踱步步态



c) 弹跳步态

2. 落脚点规划 P125

一条腿的运动图示：开始离地①→触地②→中立点③→下一次离地④



$$\begin{cases} x_f = x_p(p) + v_x(1-p)T_{\text{swing}} + \frac{1}{2}v_xT_{\text{stance}} + k_x(v_x - v_{xd}) \\ y_f = y_p(p) + v_y(1-p)T_{\text{swing}} + \frac{1}{2}v_yT_{\text{stance}} + k_y(v_y - v_{yd}) \end{cases}$$

落地点可以拆分为x和y两个方向：

- Δx : 1/2触地时间*腿部速度，对应公式 $\frac{1}{2}vT_{\text{stance}}$ 部分。
- 重心从①→②的距离：离地时间*腿部速度，但由于腿部速度非匀速，因此用时刻t的相位p ($p_t = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$) 对初始位置和中止位置加权得到。
- 当机器人实际速度高于目标速度时，可再前移触地点（图中右移，对应公式 $k(v - v_d)$ 部分），这样可以产生一个向后（图中向左）的加速度。

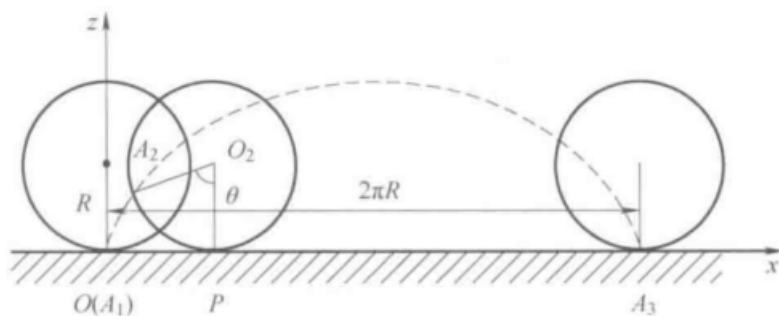
（转动和平移的原理类似，略）

3. 摆线轨迹的位置与速度 P128

摆动轨迹的方法：多项式曲线、分段直线、摆线。

摆线方法：（x与y原理一致）

一个圆在地上滚动一周，初始触地点在空中的轨迹即为摆线。



当滚动角= θ 时，初始触地点 A_1 运动到 A_2 位置，水平和垂直位移分别为：

$$\begin{cases} x = R \left(\frac{2\pi t}{T} - \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \\ z = R \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \end{cases}$$

其中 T 为滚动一圈的时间（离地时间）， $\frac{2\pi t}{T}$ 为滚动角 θ 。对时间求导，即为摆线速度。

假设足端从 (x_0, y_0, z_0) 开始腾空到 (x_1, y_1, z_1) 开始触地，上述圆周长 $2\pi R = x_1 - x_0$ 。解除水平移动距离与 R 的绑定，自定义足端最大高度为 h ，同时将 $\frac{t}{T}$ 用相位 p 表示，得到摆线轨迹位置公式：

$$\begin{cases} x_c = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{2\pi} (2\pi p - \sin 2\pi p) \\ y_c = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2\pi} (2\pi p - \sin 2\pi p) \\ z_c = z_0 + \frac{h}{2} (1 - \cos 2\pi p) \end{cases}$$

对时间求导得到摆线速度：

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \frac{x_1 - x_0}{T} (1 - \cos 2\pi p) \\ \dot{y}_c = \frac{y_1 - y_0}{T} (1 - \cos 2\pi p) \\ \dot{z}_c = \frac{\pi h}{T} \sin 2\pi p \end{cases}$$

• 十、行走控制器

结合前面几章的内容，就可以编写一个行走控制器。 …………… P134

1. 目标：使机器人机身到达用户输入的目标位置、目标速度、目标姿态和目标角速度（通过一个函数计算，比如手柄程序）。
2. 根据当前设置的步态状态，规划四足各自支撑期和摆动期。摆动腿：落脚点规划和摆线规划（第9章）。支撑腿：触地静止。
3. 单腿控制：
 1. 摆动腿：根据足端位置和足端速度计算关节角度和关节角速度，外加修正力（第5章）。
 2. 支撑腿：根据估计器和平衡控制器，计算支撑腿足端位置、速度、力（第6-8章）。进而转换为关节角度、角速度和力矩（5.4节）。
4. 关节电机混合控制：关节角度、角速度和力矩的混合控制（第2章）。