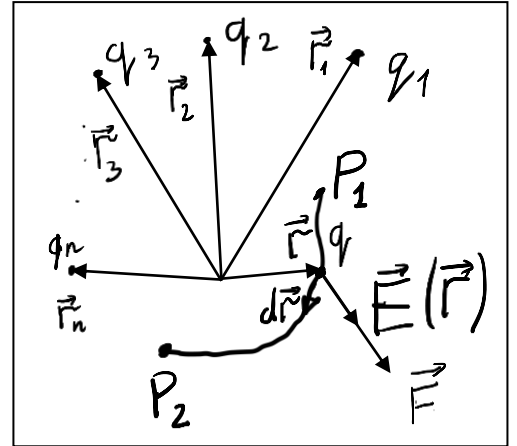


## Неделя 2

### Теория

#### 1) Потенциал электростатического поля. Консервативность поля. Энергия системы точечных зарядов.

Возьмем произвольную систему неподвижных зарядов  $q_i, i = \{1, 2, \dots, n\}$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\vec{r}_i$ . Тогда напряженность поля в произвольной точке пространства с радиус-вектором  $\vec{r}$ , не совпадающим ни с одним из  $\vec{r}_i$ , по известной формуле равна



$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (1)$$

Найдем работу  $A_{P_1 P_2}$ , которую необходимо затратить, чтобы переместить пробный заряд  $q$  из точки  $P_1$  в точку  $P_2$ . Для этого заметим, что напряженность поля (1) можно переписать в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^n q_i \nabla \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -\nabla \left( \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right) = -\nabla \varphi(\vec{r}). \quad (2)$$

Функцию

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (3)$$

назовем потенциалом поля множества зарядов  $\{q_i\}$  в точке  $\vec{r}$ . Распишем теперь искомую работу по определению:

$$\begin{aligned} A_{P_1 P_2} &= \int_{A_1}^{A_2} (-q \vec{E}(\vec{r}), d\vec{r}) = q \int_{A_1}^{A_2} (\nabla \varphi(\vec{r}), d\vec{r}) = \\ &= q \int_{A_1}^{A_2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = q \int_{A_1}^{A_2} d\varphi = q (\varphi(\vec{r}_{P_2}) - \varphi(\vec{r}_{P_1})). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом **работа** по перемещению пробного заряда против электростатических сил **не зависит от траектории** его движения, а определяется исключительно разностью потенциалов в конечной и начальной точках. Это свойство электростатического поля называется потенциальностью или консервативностью. Его можно сформулировать через равенство нулю циркуляции поля по любой замкнутой кривой:

$$\oint (\vec{E}(\vec{r}), d\vec{r}) = 0. \quad (5)$$

Последнее утверждение на самом деле просто говорит о том, что в электростатике **не нарушается закон сохранения энергии**. На самом деле только из последнего утверждения должна следовать справедливость равенства (5) для любого статического силового поля  $\vec{E}$  а из него и существование потенциала  $\varphi$ , градиент которого в каждой точке пропорционален полю  $\vec{E}$ .

Обратим внимание, что сам **потенциал** в рамках последнего определения для описания того же поля **определен с точностью до константы**. Действительно, если прибавить к нему константу, то ни одна из производных, а значит и градиент его не изменится. При этом потенциал в виде (3) удобен тем, что он для любой системы зарядов обращается в нуль на бесконечности (при  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ ).

На основе выше изложенного можно утверждать, что для того, чтобы добавить в систему из  $n$  имеющихся зарядов еще один заряд  $q_{n+1}$ , переместив его из бесконечности в точку с радиус-вектором  $\vec{r}_{n+1}$ , нужно затратить энергию

$$\Delta W_{n+1} = q_{n+1} \varphi(\vec{r}_{n+1}) = q_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_i|}.$$

Пользуясь последним утверждением, вычислим энергию, необходимую для того, чтобы собрать исходную систему из  $n$  зарядов путем последовательного перемещения зарядов из различных бесконечно удаленных точек. Так при отсутствии зарядов в системе поле отсутствует, а значит перемещение первого заряда затрат энергии не требует. Для всех зарядов, начиная со второго,

$$\begin{aligned}
W_n &= \sum_{i=2}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в точке  $\vec{r}_i$  всеми зарядами системы кроме  $i$ -го. Здесь следует обратить внимание на коэффициент  $1/2$ . его легко объяснить на примере двух зарядов ( $n=2$ ). Так, чтобы сблизить два заряда  $q_1$  и  $q_2$  на расстояние  $r_{12}$ , нужно затратить энергию

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} = q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2).$$

## 2) Случай непрерывно распределенного заряда.

Как видно из выражений (2) и (3), для системы точечных зарядов как напряженность, так и потенциал поля определены везде кроме точек расположения зарядов. Это связано с тем, что потенциал поля неограниченно возрастает вблизи упомянутых точек. Если же заряд «размазан» по пространству с объемной плотностью  $\rho(\vec{r})$ , то потенциал

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3 \vec{r}_1 \tag{7}$$

определен во всех точках пространства. При этом вклад в интеграл (7) зарядов, расположенных в ближайшей окрестности точки  $\vec{r}$  оказывается исчезающе малым. То же можно сказать и про случай заряда, распределенного по поверхности  $S$ , но уже с **поверхностной плотностью**  $\sigma(\vec{r})$ :

$$\varphi(\vec{r}) = \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} ds. \tag{8}$$

В этом случае неопределенность будет лишь у компоненты **напряженности поля**, перпендикулярной к поверхности. Действительно, пользуясь теоремой Гаусса (в интегральной форме):

$$\oint\limits_{\partial G} (\vec{E}(\vec{r}), d\vec{s}) = 4\pi Q_G, \quad (9)$$

нетрудно показать, что для заданного вектора нормали  $\vec{n}$  к поверхности в точке  $\vec{r}$  перпендикулярная к поверхности компонента  $\vec{E}_\perp$  напряженности поля с разных сторон поверхности отличается на  $4\pi\sigma$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\vec{E}_\perp(\vec{r} + \vec{n}\delta) - \vec{E}_\perp(\vec{r} - \vec{n}\delta)) &= \vec{n}4\pi\sigma(\vec{r}); \\ \vec{E}_\perp &= \vec{n}(\vec{E}, \vec{n}). \end{aligned} \quad (10)$$

Для доказательства утверждения (10) достаточно применить теорему Гаусса к границе малого цилиндра, основания которых параллельны элементу заряженной поверхности, а их центры находятся в точках  $\vec{r} + \vec{n}\delta$  и  $\vec{r} - \vec{n}\delta$ . Применив же свойство потенциальности поля (5), можно показать, что параллельная заряженной поверхности компонента поля  $\vec{E}$  не меняется при переходе через поверхность:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\vec{E}_\parallel(\vec{r} + \vec{n}\delta) - \vec{E}_\parallel(\vec{r} - \vec{n}\delta)) &= 0; \\ \vec{E}_\parallel &= \vec{E} - \vec{E}_\perp. \end{aligned} \quad (11)$$

Для доказательства (11) берем замкнутую кривую в виде прямоугольника, две стороны которого параллельны элементу заряженной поверхности, причем их середины находятся в точках  $\vec{r} + \vec{n}\delta$  и  $\vec{r} - \vec{n}\delta$ , и параллельны произвольному вектору  $\vec{\tau} \perp \vec{n}$ . В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} (\vec{E}_\tau(\vec{r} + \vec{n}\delta) - \vec{E}_\tau(\vec{r} - \vec{n}\delta)) &= 0; \\ \vec{E}_\tau &= \vec{\tau}(\vec{E}, \vec{\tau}). \end{aligned}$$

Из того, что последнее верно для любого  $\vec{\tau} \perp \vec{n}$ , следует (11).

Что касается заряда, распределенного по бесконечно тонкой проволоке, то вблизи нее потенциал неограниченно возрастает, также как в случае с точечным зарядом, и потому такие объекты следовало бы рассматривать примерно также как точечные заряды (как неделимые образования, поскольку их «сборка» требует бесконечно большой энергии). Здесь мы их рассматривать не будем.

Дополним теперь формулу для энергии зарядов (6) с учетом зарядов, распределенных по пространству и по поверхностям:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \iint_{S_k} \sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) ds + \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (12)$$

Поверхностные интегралы здесь берутся по всем поверхностям  $S_k$ . Еще раз обратим внимание, что при вычислении «вклада» в энергию точечного заряда  $q_i$  мы не учитываем потенциал самого заряда в точке его расположения. Это связано с тем, что точечный заряд мы считаем неделимым (его невозможно собрать из двух меньших, поскольку это, как уже было упомянуто, требует бесконечно большой энергии). Также может оказаться, что в системе имеется **подсистема из жестко закрепленных относительно друг друга зарядов** (например, жесткий диполь). В таком случае **энергию взаимодействия зарядов этой подсистемы также можно не учитывать** (из расчета потенциала, в которых находятся заряды данной подсистемы исключается вклад всех ее зарядов). **Такой системой**, однако, ни в коем случае **нельзя считать проводник**, поскольку при изменении поля заряды в нем перераспределяются, а значит и меняется энергия их взаимодействия.

### 3) Проводники. Основная задача электростатики в вакууме.

Со школы всем известен закон Ома, согласно которому любая разность потенциалов внутри проводника вызывает движение зарядов. В электростатике рассматриваются только состояния систем, в которых движение зарядов либо отсутствует, либо происходит достаточно медленно, чтобы не вызывать существенного сопротивления внутри материала. Проще говоря, **внутри проводника**

$$\varphi = \text{const.}$$

Перепишем теорему Гаусса (9) в дифференциальном виде (естественно, для случая, когда в рассматриваемой области существуют только объемно распределенные заряды):

$$(\nabla, \vec{E}) = 4\pi\rho. \quad (13)$$

Кстати, дифференциальная форма (13) связана с интегральной (9) через теорему мат. анализа – Гаусса-Остроградского – о том, что для произвольных дифференцируемой векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$  и области  $G$  с ориентированной вонне границей  $\partial G$  имеет место интегральное тождество:

$$\oint\oint_{\partial G} (\vec{a}, d\vec{s}) = \iiint_G (\nabla, \vec{a}) d^3\vec{r}. \quad (14)$$

Пользуясь последним, легко доказать, что из (13) следует (9).

Перепишем теперь (13) через потенциал.

$$(\nabla, \nabla\varphi) = \Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (15)$$

Фигурирующий здесь оператор

$$\Delta = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Называется оператором Лапласа или лапласианом.

Из (16) сразу следует, что **в толще проводника отсутствуют заряды:**

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const} \Rightarrow \rho = 0. \quad (16)$$

При этом на поверхности проводника заряды находиться вполне могут (обусловлено это тем, что свободные заряды под действием относительно слабых внешних полей физически не могут покинуть границы проводника). Пользуясь (16), а также утверждениями (10) и (11), получаем, что поле с внешней стороны границы проводника

$$\vec{E}_\perp = 4\pi\sigma\vec{n}, \quad (17)$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе проводника;  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда в ближайшей точке границы.

В силу упомянутых особенностей проводника его свойства в электростатической системе помимо формы границы  $\partial G_{\Pi}$  могут определяться либо потенциалом  $\varphi_n$  (который может поддерживаться искусственно путем соединения с «землей» напрямую или через источник ЭДС) либо полным зарядом  $q_{\Pi}$ . Указанные параметры проводника, помещенного в определенную электростатическую систему, как нетрудно догадаться, должны быть однозначно связаны.

Сформулируем теперь **основную задачу электростатики**. Пусть в пространстве имеется набор из  $n$  **областей, заполненных проводящей средой (проводников)**  $G_{\Pi i}$ ,  $i = \{1, 2, \dots, n\}$  и объемно распределенные **заряды**  $\rho(\vec{r})$  (естественно, лишь в точках пространства, не принадлежащих проводникам). Отметим, что, вообще говоря, как точечные, так и распределенные по проволоке/поверхности заряды можно приближенно заменить объемно распределенными по шару конечного малого радиуса/трубке/слою конечной толщины. В итоге имеем следующую задачу для распределения потенциала в пространстве  $\varphi(\vec{r})$ :

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho; \quad (18.1)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_i \text{ при } \vec{r} \in G_{\Pi i}; \quad (18.2)$$

$$\oint\limits_{\partial G_{\Pi i}} (\nabla \varphi, d\vec{s}) = -4\pi q_{\Pi i}; \quad (18.3)$$

$$\varphi(\vec{r}) \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (18.4)$$

**При этом для каждого проводника задаются либо заряд, либо потенциал. Остальные параметры считаются неизвестными.**

Примечательно то, что задача (18) всегда имеет единственное решение. Это примечание называется теоремой единственности. Ключом к ее доказательству является **теорема Ирншоу**, которая утверждает, что в пустом пространстве у потенциала не может существовать точек экстремума. Доказывается она упрощенно через

теорему Гаусса. Так, если в какой-либо точке  $\vec{r}_0$  имеется экстремум, то вокруг этой точки должна существовать сфера, во всех точках которой градиент потенциала отличен от нуля, и направлен либо вовнутрь, либо вовне сферы. Отсюда сразу следует отличие от нуля потока напряженности через сферу, а значит и величины заряда, заключенного внутри сферы, которых в пустом пространстве быть не должно.

Докажем теперь теорему единственности.

Пусть у задачи (18) существует два решения –  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Обозначим их разность за новую функцию:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi.$$

Тогда для новой функции задача переписется следующим образом:

$$\Delta \psi = 0; \quad (19.1)$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi_i \text{ при } \vec{r} \in G_{\Pi i}; \quad (19.2)$$

$$\oint\oint_{\partial G_{\Pi i}} (\nabla \psi, d\vec{s}) = -4\pi q_{\Pi i}; \quad (19.3)$$

$$\psi(\vec{r}) \rightarrow 0 \text{ при } |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (19.4)$$

При этом для каждого номера проводника  $i$  либо  $\psi_i = 0$ , либо  $q_{\Pi i} = 0$  в зависимости от того, что задано в задаче. Из (19.1) следует, что для потенциала  $\psi$  вне проводников работает теорема Ирншоу, а значит экстремальные значения он принимает на границах проводников. Докажем, что потенциалы всех проводников равны нулю. Сделать это нужно лишь для тех, для которых в условии задачи задан заряд, так как у тех, для которых задан потенциал, это очевидно так. Возьмем проводник, соответствующий экстремальному значению потенциала. Тогда, внешняя проекция напряженности поля  $(-\nabla \psi, \vec{n})$  в каждой точке границы с внешней ее стороны должна быть либо равной нулю, либо иметь постоянный знак. Второй случай, согласно теореме Гаусса, свидетельствовал бы об отличии от нуля полного заряда проводника, что противоречит условию. Остается первый случай, из которого с учетом (17) следует,



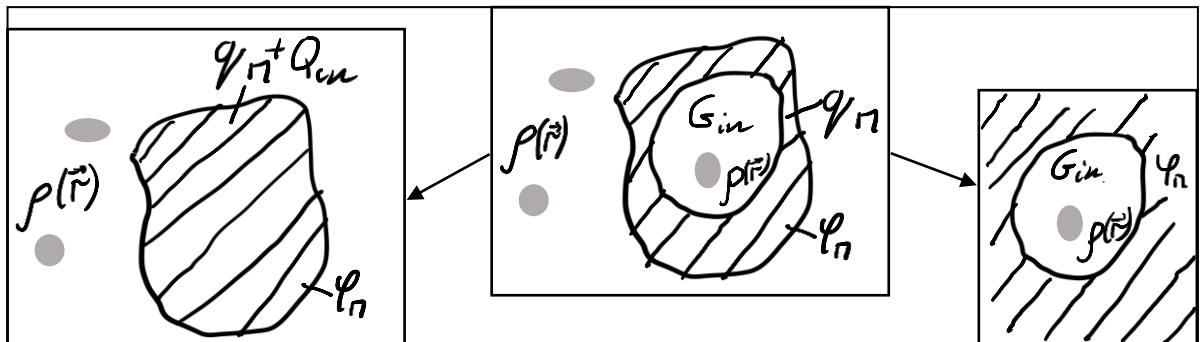
что заряды отсутствуют на всей границе проводника. Следовательно, замена данного проводника пустым пространством никак не должна сказаться на распределении потенциала. Но в таком случае в этой области, согласно той же теореме Ирншоу, не должно наблюдаться экстремального значения потенциала. В итоге противоречия отсутствуют лишь в случае, когда потенциал  $\psi$  во всех точках пространства, включая проводники, одинаков и равен нулю.

Знание распределения потенциала в пространстве  $\varphi(\vec{r})$ , а также потенциалов  $\varphi_{\Pi i}$  и зарядов  $q_{\Pi i}$  всех проводников позволяет вычислить полную энергию системы:

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \iiint \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{\Pi i} \varphi_{\Pi i}. \quad (20)$$

#### 4) Метод изображений

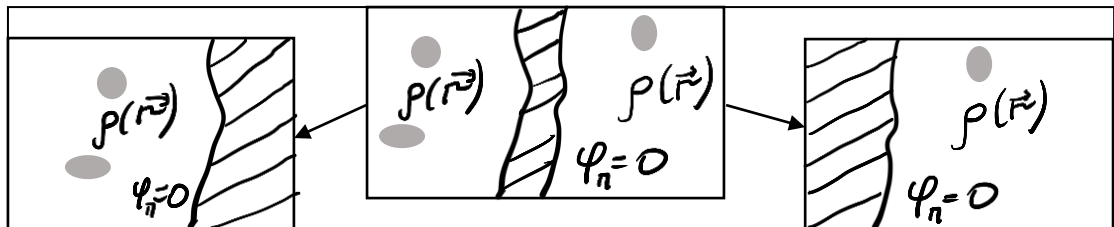
Теорема единственности позволяет в некоторых случаях решать задачу электростатики путем точного угадывания. Прежде чем перейти к описанию самих случаев, упомянем, что если некая область  $G_{in}$  отделена от остального пространства замкнутым, в общем случае толстым, слоем проводника  $G_{\Pi}$  (иначе говоря, область пространства  $G_{in}$  представляет собой полость в теле проводника), то задачу электростатики можно разделить на две независимые – внешнюю, в рамках которой проводник считается цельным (полость считается тоже проводящей) и внутреннюю,



предполагающую все пространство вокруг полости проводником, поддерживаемом при фиксированном потенциале  $\varphi_{\Pi}$ . При этом во

внешней задаче полный заряд, заключенный внутри полости  $Q_{in} = \iiint_{G_{in}} \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$ , считается частью заряда проводника. Обратим внимание, что в условие внутренней задачи не входит заряд проводника  $q_{II}$ . Более того, на внутреннее распределение поля не влияет также величина потенциала окружающего проводника (если, конечно внутри полости нет другого проводника с фиксированным потенциалом). Это связано с отсутствием в рассматриваемой области бесконечно удаленных точек, для которых сформулировано граничное условие (18.4).

Предельным для описанной задачи является случай, когда проводящий слой разделяет два полупространства. В таком случае потенциал проводника автоматически считается равным нулю,



поскольку проводник простирается до бесконечно удаленных точек, а задача также как в предыдущем случае, разбивается на две (в данном случае «левую» и «правую»).

Теперь про угадывание решений. В обоих упомянутых случаях решение «левой» и «правой» подзадач сводятся к поиску распределения потенциала, удовлетворяющего условию (18) в незаштрихованной области (заштрихованная область из рассмотрения исключается, поскольку поле в ней отсутствует). Для этого достаточно угадать распределение потенциала поля, создаваемого зарядами, распределенными по поверхности проводника, которое бы в сумме с потенциалом имеющихся в пустом пространстве зарядов (вычисленным по формуле (7)) удовлетворил бы граничному условию. При этом никто не мешает попытаться представить искомый потенциал обусловленным зарядами, расположенными в заштрихованной области (для каждой из подзадач). Действительно, если заряды, порождающие некий потенциал

$$\varphi_{\rho^*}(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho^*(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1,$$

находятся исключительно в заштрихованной области, то в интересующей нас области он автоматически будет удовлетворять уравнению Лапласа (19.1), а значит суммарный потенциал

$$\varphi = \varphi_{\rho} + \varphi_{\rho^*} : \quad \varphi_{\rho}(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1,$$

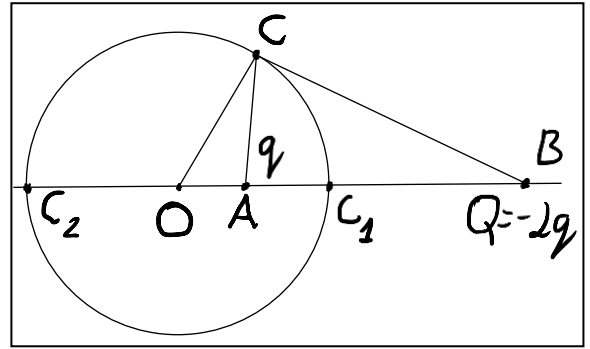
удовлетворять уравнению Пуассона (18.1). Остается лишь подобрать распределение «виртуальных» зарядов  $\rho^*(\vec{r})$  так, чтобы их суммарный потенциал с потенциалом «реальных» зарядов принял требуемое значение  $\varphi_{\Pi}$  на границе проводника. В случае удачи поле виртуальных зарядов можно использовать для вычисления как силы, действующей на реальные заряды, так и заряда самого проводника (в случае внешней задачи последний по теореме Гаусса будет равен интегральной сумме всех виртуальных зарядов).

Кроме того, знание распределения напряженности поля  $\vec{E}(\vec{r})$  вблизи границы проводника позволяет, используя формулу (17), найти распределение плотности заряда  $\sigma(\vec{r})$  на поверхности проводника, то есть полностью восстановить реальную картину распределения зарядов.

**Теперь про угадывание распределения виртуальных зарядов.** Это оказывается нетрудно, если граница проводника сферическая. Дело в том, что у поля системы из любых двух различных по модулю и противоположных по знаку зарядов поверхность нулевого потенциала является сферой. Это утверждение просто доказывается методами школьной геометрии. Пусть в точке  $A$  расположен заряд  $q$ , а в точке  $B$  – противоположный по знаку и больший по модулю  $Q = -\alpha q$ ;  $\alpha > 1$ . Попробуем построить поверхность нулевого потенциала. Начнем с ее точек, лежащих на прямой  $AB$ . Таких точек будет по одной с каждой стороны от точки  $A$  –  $C_1$  и  $C_2$  (см. рисунок). Сразу обозначим середину отрезка  $C_1C_2$  за  $O$ , а от нее до

упомянутых точек –  $OC_1 = OC_2 = r$ . С учетом последнего обозначения запишем условие на равенство нулю потенциалов в точках  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1B = \alpha AC_1 \\ C_2B = \alpha C_2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OB - r = \alpha(r - OA) \\ OB + r = \alpha(r + OA). \end{cases}$$



Путем вычитания и сложения последних двух равенств получим

$$r = \alpha OA = \frac{OB}{\alpha} = \frac{\alpha AB}{\alpha^2 - 1}. \quad (21)$$

Очевидно, что все упомянутые точки существуют при любых  $\alpha$  и расстоянии  $AB$ . Возьмем теперь произвольную точку  $C$  на сфере радиусом  $r$  и центром в точке  $O$ . Рассмотрим треугольники  $OCA$  и  $OBC$ . У них имеется общий угол при вершине  $O$ , а стороны прилежащие этому углу – пропорциональны:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC} = \alpha.$$

Отсюда следует подобие упомянутых треугольников, из которого имеем

$$\frac{CB}{AC} = \frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OC} = \alpha \Rightarrow \varphi_C = \frac{q}{AC} - \frac{\alpha q}{CB} = 0.$$

Если теперь у нас вне проводящей сферы радиуса  $r$  имеется точечный заряд  $Q$ , а потенциал самой сферы  $\varphi_{\Pi} = 0$ , то, согласно выше изложенному, внешнее поле самой сферы будет точно повторять поле точечного заряда  $Q^* = -Q/\alpha$ , расположение которого и величина  $\alpha$  однозначно определены заданной геометрией в силу соотношений (21). При этом заряд  $Q^*$  называют **изображением** заряда  $Q$ . Если теперь в систему добавить виртуальный заряд  $Q_0^*$ , расположенный в центре сферы, то

потенциал сферы останется постоянным, но станет равным  $\varphi_{\Pi} = Q_0^*/r$ .

Если зарядов множество  $\{Q_i\}$ , то нужный потенциал  $\varphi_{\Pi}$  на границе сферы можно сформировать, разместив внутри нее изображения данных зарядов  $\{Q_i^*\}$ ,  $0 \leq i \leq n$ , а в центре – заряд

$$Q_0^* = \varphi_{\Pi} r. \quad (22)$$

Суммарный заряд проводника при этом будет равен сумме зарядов всех изображений и центрального заряда:

$$q_{\Pi} = \sum_{i=0}^n Q_i^*. \quad (23)$$

Если задача внутренняя, (заданы заряды  $\{q_i\}$ , расположенные внутри сферической полости в теле проводника), то для решения электростатической задачи в полости достаточно разместить вне нее изображения зарядов

$$q_i^* = -\alpha q_i \quad (24)$$

так, чтобы суммарный потенциал каждой пары зарядов  $q_i$  и  $q_i^*$  на границе полости обращался в нуль.

Вернемся к объемно распределенным зарядам. Обобщив (21) в векторном виде, расположив начало координат в центре сферы, радиус-векторы заряда  $\vec{r}_q$  и его изображения  $\vec{r}_q^*$  можно связать следующим соотношением:

$$\vec{r}_q^* = \vec{r}_q \frac{r^2}{|\vec{r}_q|^2} = \vec{r}_q \left( \frac{q^*}{q} \right)^2; \quad q^* = -q \frac{r}{|\vec{r}_q|}. \quad (25)$$

При преобразовании (25) объем малой окрестности точки меняется  
В

$$\frac{d^3 \vec{r}_q^*}{d^3 \vec{r}_q} = \left| \det \left\| \frac{\partial \vec{r}_q^*}{\partial \vec{r}_q} \right\| \right| = \left( \frac{q^*}{q} \right)^6$$

раз. В силу последнего объемная плотность изображения распределенного заряда, о котором речь шла в изначальной задаче (18), равна

$$\rho^*(\vec{r}_{\rho}^*) = \rho(\vec{r}_{\rho}) \left( \frac{q}{q^*} \right)^5 = \rho(\vec{r}_{\rho}) \left( \frac{|\vec{r}_{\rho}|}{r} \right)^5. \quad (26)$$

Любопытно, что плотности зарядов различаются не только сильнее, но и обратную сторону по сравнению с их интегральными значениями.

Наконец, рассмотрим предельный случай с  $r \rightarrow \infty$ . Он соответствует случаю **бесконечной проводящей плоскости**. В этом случае нет смысла привязываться к центру сферы, поскольку он бесконечно удален, а имеет смысл переписать выражение (21) в виде

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{r - OA}{OB - r} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha - 1)} = 1,$$

Поскольку в этом случае  $\alpha \rightarrow 1$ . Таким образом **изображением  $q^*$  заряда  $q$  в бесконечной плоской поверхности проводника будет такой же, но противоположный по знаку заряд, расположенный на том же расстоянии с противоположной стороны поверхности, на одной с ним нормали к ней.**

### 5) И еще немного про диполь.

Перепишем с учетом свойства консервативности (2) электростатического поля известную формулу для силы  $\vec{F}_{\vec{p}}$ , действующей на диполь  $\vec{p}$ :

$$\vec{F}_{\vec{p}} = (\vec{p}, \nabla) \vec{E} = -(\vec{p}, \nabla) \nabla \varphi = -\nabla \left( \vec{p}, \overset{\downarrow}{\nabla} \varphi \right) = \nabla \left( \vec{p}, \overset{\downarrow}{\vec{E}} \right). \quad (27)$$

Здесь стрелка над множителем означает, что оператор дифференцирования действует только на него. Эта стрелка не имеет смысла, если момент  $\vec{p}$  диполя не зависит от места его положения  $\vec{r}$ . В таком случае (случай «жесткого» диполя) сила (27) может быть представлена в виде

$$\vec{F}_{\vec{p}} = \nabla(\vec{p}, \vec{E}) = -\nabla W_{\vec{p}}; \quad W_{\vec{p}} = -(\vec{p}, \vec{E}). \quad (28)$$

Такое же выражение для энергии  $W_{\vec{p}}(\vec{r})$  диполя можно получить, аккуратно выделив его вклад в общую энергию (12). При этом сам диполь следует рассматривать как систему из двух жестко связанных друг с другом зарядов, энергия взаимодействия которых исключается из рассмотрения. Учитывая последнее обстоятельство, изменение энергии (28) для случая вращаемого диполя обусловлено как работой по его пространственному перемещению, так и по повороту.

Из случаев диполя с переменным моментом следует выделить случай «упругого» диполя, величина момента которого с точностью до направления пропорциональна полю  $\vec{E}$ :

$$\vec{p}_{el} = \alpha \vec{E}. \quad (29)$$

В таком случае выражение для силы (27) примет вид

$$\vec{F}_{\vec{p}} = \nabla \left( \vec{p}_{el}, \vec{E} \right) = \alpha \nabla \left( \vec{E}, \vec{E} \right) = \frac{\alpha}{2} \nabla \left( |\vec{E}|^2 \right) = \frac{1}{2} \nabla (\vec{p}_{el}, \vec{E}) = -\nabla W_{el}. \quad (30)$$

Получается, что энергия «упругого» диполя отличается от энергии «жесткого» ровно вдвое.

Примером «упругого» диполя может служить электрически нейтральный проводящий сферический объект, радиус  $R$  которого мал по сравнению с неоднородностями внешнего поля. Его дипольный момент связан с внешним полем как

$$\vec{p}_R = \vec{E} R^3 \quad (31)$$

Последнюю формулу можно получить тремя способами – 1) через результат задачи (1.23), 2) методом изображений и 3) через выражение для потенциала поля диполя

$$\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = -(\vec{p}, \nabla) \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{|\vec{r}|^3}, \quad (32)$$

который на сфере радиусом  $R$  повторяет потенциал однородного поля  $\vec{E}$ , определенного в соответствии с (31).



## Краткая сводка утверждений и формул – что желательно знать.

В электростатике любое поле потенциально: для любой точки  $\vec{r}_0$  определен

потенциал в виде интеграла  $\varphi(\vec{r}_0) = -\int_{\infty}^{\vec{r}_0} (\vec{E}(\vec{r}), d\vec{r})$  (4\*)

по произвольной кривой, соединяющей любую бесконечно удаленную точку пространства с данной, **не зависит** от выбора ни той, ни другой. В связи с этим

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r}). \quad (2)$$

Потенциал поля **точечного** заряда  $\varphi_q(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}|}$ . (3)

Потенциал поля **диполя**  $\varphi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{|\vec{r}|^3}$ . (32)

**Скачок поля на поверхности**, заряженной с плотностью  $\sigma$  (нормаль  $\vec{n}$  выбираем произвольно):  $\lim_{\delta \rightarrow 0} (\vec{E}(\vec{r} + \vec{n}\delta) - \vec{E}(\vec{r} - \vec{n}\delta)) = \vec{n}4\pi\sigma(\vec{r})$ . (10,11)

**Уравнение Пуассона (выполняется всегда!)**  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  (15)

**Проводник**  $\Pi i$  в электростатике – область, в которой потенциал постоянен.

**Заряд проводника** сосредоточен на поверхности.

**Основная задача электростатики** – найти поле (распределение потенциала) во всем пространстве, если для каждого **проводника** задан либо полный заряд  $q_{\Pi i}$ , либо потенциал  $\varphi_{\Pi i}$ , а **вне проводников** – распределение зарядов.

**Решение так поставленной задачи всегда существует и единственно.**

**Метод изображений** – способ угадывания поля, создаваемое проводником независимо снаружи его сферической границы и внутри сферической полости в нем. Искомое поле равно суммарному полю изображений  $q_i^*$  всех зарядов

$q_i$ , расположенных в области.  $\vec{r}_{q_i^*} = \vec{r}_{q_i} \frac{r^2}{|\vec{r}_{q_i}|^2}; \quad q^* = -q \frac{r}{|\vec{r}_{q_i}|}$ . (25)

Здесь  $r$ ,  $\vec{r}_{q_i}$  и  $\vec{r}_{q_i^*}$  – радиус сферы, представляющей границу рассматриваемой области, и радиус-векторы, соединяющие ее центр с зарядом и изображения соответственно. В случае **внешней** задачи в упомянутый **центр** помещают дополнительно заряд, задающий потенциал проводника  $q_0^* = \varphi_{\Pi} r$ . (22)

## Задачи группы I.

**1.24** Найти распределение зарядов  $\sigma(\theta)$  на границе длинной проводящей проволоки, находящейся во внешнем однородном поле напряженностью  $E_0$ .

Начнем с того, что поле рассматриваемых зарядов внутри проволоки должно компенсировать внешнее, то есть быть равным  $-\vec{E}_0$ . Зададим радиус проволоки  $R$ . Далее решать задачу можно двумя способами:

**1 способ** – по аналогии с 1.23.

Возьмем однородно заряженный (зарядовой плотностью  $\rho$ ) цилиндр. По теореме Гаусса его собственное поле внутри равно

$$\vec{E}_+ = \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \frac{4\pi \rho |\vec{r}_\perp|^2}{2\pi |\vec{r}_\perp|} = 2\pi\rho\vec{r}_\perp.$$

Здесь  $\vec{r}_\perp$  – радиус-вектор, проведенный от оси цилиндра. Наложим теперь друг на друга на два одинаковых, но противоположно заряженных цилиндра так, чтобы ось положительно заряженного была смещена относительно отрицательно заряженного на радиус-вектор  $\vec{\delta} : |\vec{\delta}| \ll R$ . Тогда в области перекрытия поле будет однородным, а его напряженность равна  $\vec{E}_\Sigma = -2\pi\rho\vec{\delta}$ . Приравняв  $\vec{E}_\Sigma$  к  $-\vec{E}_0$ , имеем  $\vec{\delta} = \frac{\vec{E}_0}{2\pi\rho}$ . Если теперь устремить  $\rho$  к бесконечности, то в такой системе цилиндров весь нескомпенсированный заряд будет сосредоточен в бесконечно тонком слое, толщина которого в окрестности точки  $\vec{r}_\perp : |\vec{r}_\perp| = R$  равна

$$d(\vec{r}_\perp) = |\vec{r}_\perp + \vec{\delta}| - |\vec{r}_\perp| = \left( \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}, \vec{\delta} \right) = |\vec{\delta}| \cos \theta.$$

Здесь  $\theta$  – угол между  $\vec{r}_\perp$  и  $\vec{E}_0$ .

Заряд, содержащийся в этом слое в окрестности все той же точки, приходящийся на единицу поверхности,

$$\sigma(\theta) = \rho d(\vec{r}_\perp) = \rho |\vec{\delta}| \cos \theta = \frac{E_0}{2\pi} \cos \theta.$$

**2 способ** заключается в угадывании двумерного распределения потенциала  $\varphi_{np}(\vec{r}_\perp)$ , создаваемого зарядами, индуцированными в проволоке. Пусть радиус проволоки равен  $R$ . Тогда искомая функция должна, во-первых, удовлетворять уравнению Лапласа (19.1), а во-вторых – на границе ( $|\vec{r}_\perp| = R$ ) равняться

$$\varphi_{np} = \varphi_0 + (\vec{E}_0, \vec{r}_\perp).$$

Попробуем угадать потенциал, взяв по аналогии с (32) функцию

$$\varphi_{np}(\vec{r}_\perp) = \frac{R^k}{|\vec{r}_\perp|^k} (\vec{E}_0, \vec{r}_\perp) \text{ с неизвестным } k.$$

Подберем  $k$ , подставив функцию в уравнение Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^k} (\nabla, \nabla \varphi_{np}) &= \left( \nabla, \nabla \frac{(\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{|\vec{r}_\perp|^k} \right) = \left( \nabla, \left( \frac{\vec{E}_0}{|\vec{r}_\perp|^k} - k \frac{\vec{r}_\perp (\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{|\vec{r}_\perp|^{k+2}} \right) \right) = \\ &= -k \frac{(\vec{r}_\perp, \vec{E}_0)}{|\vec{r}_\perp|^{k+2}} + k(k+2) \frac{(\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{|\vec{r}_\perp|^{k+2}} - 2k \frac{(\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{|\vec{r}_\perp|^{k+2}} - k \frac{(\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{|\vec{r}_\perp|^{k+2}} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется, когда  $k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$ .

На самом деле полученный потенциал соответствует полю двух тонких противоположно заряженных нитей, расположенных вблизи оси проволоки.

Суммарное поле на границе проволоки

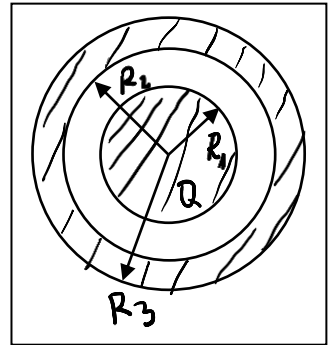
$$\vec{E}(\vec{r}_\perp) \Big|_{|\vec{r}_\perp|=R} = \vec{E}_0 - \nabla \varphi_{np} = 2 \frac{\vec{r}_\perp (\vec{E}_0, \vec{r}_\perp)}{R^2} = 2\vec{n} (\vec{E}_0, \vec{n}),$$

где  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к поверхности проводника. Сопоставив результат с (17) имеем

$$\sigma = \frac{2}{4\pi} (\vec{E}_0, \vec{n}) = \frac{E_0}{2\pi} \cos \theta.$$

Обратим внимание, что аналогичную, но трехмерную, задачу можно еще решить методом изображений, взяв в качестве источника однородного внешнего поля бесконечно удаленный точечный заряд. Однако данной (двумерной) задачи такой метод не годится, поскольку последний хорошо работает только для сферических (или плоский как частный случай сферической) границ проводников.

**2.3.** Металлический шар радиусом  $R_1$ , несущий заряд  $Q$ , окружен сферическим металлическим незаряженным слоем с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним  $R_3$ . Все сферические границы концентричны. Найти зависимость напряженности поля от расстояния до центра системы  $r$  и потенциалы шара  $\varphi_1$  и слоя  $\varphi_2$  в двух случаях: внешний слой а) не заряжен; б) заземлен.



Напряженность поля внутри центрального шара и внутри металлического слоя равна нулю; во всем пустом пространстве в силу сферической симметрии картины и отсутствия заряда во внешнем слое, повторяет поле точечного заряда  $Q$ :

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R_1 \text{ и } R_2 < r < R_3 \\ Q/r & \text{при } R_1 < r < R_2 \text{ и } r > R_3. \end{cases}$$

Интегрируя поле, получим значения потенциалов в случае а):

$$\varphi_2 = \frac{Q}{R_3}; \quad \varphi_1 = \frac{Q}{R_3} + \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}.$$

В случае б) – когда шар заземлен – поле между проводниками не изменится, снаружи внешнего – пропадет. В итоге потенциалы обоих проводников уменьшатся на  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = 0; \varphi_1 = \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}.$$

**2.20** Найти силу притяжения заряда  $q$  и металлического шара радиусом  $r$ . Расстояние от центра шара до заряда равно  $d$ . Рассмотреть два случая: а) шар заземлен; б) шар не заряжен.

Поскольку граница проводника является сферой, к задаче применим метод изображений. Для начала построим изображение  $q^*$  заряда  $q$ . По формуле (25) величина заряда  $q^*$  и расстояние  $d^*$  до него от центра шара равны

$$q^* = -q \frac{r}{d}; \quad d^* = \frac{r^2}{d}.$$

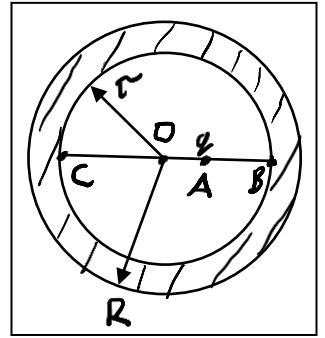
Сила притяжения в случае а) равна

$$F_a = -\frac{qq^*}{(d-d^*)^2} = \frac{q^2 r d^2}{d(d^2 - r^2)^2} = \frac{q^2 r d}{(d^2 - r^2)^2}.$$

Для случая электро-нейтрального шара б) в его центр следует добавить виртуальный заряд  $q_0^* = -q^*$ , обнуляющий поток напряженности поля через его границу. Сила взаимодействия с шаром в этом случае будет обусловлена обоими виртуальными зарядами:

$$F_6 = F_a - \frac{q q_0^*}{d^2} = \frac{q^2 r d}{(d^2 - r^2)^2} - \frac{q^2 r}{d^3} = \frac{q^2 r}{d^3} \left( \frac{1}{(1 - (r/d)^2)^2} - 1 \right).$$

**2.22** Внутри сферического незаряженного слоя с центрами обеих границ в точке  $O$ , внутренним радиусом  $r$ , а внешним –  $R$  помещен заряд  $q$ . Заряд находится в точке  $A$ :  $OA = d$ . Найти 1) поверхностную плотность заряда на внешней поверхности  $\sigma_o$ ; 2) потенциал проводника  $\varphi_{\Pi}$ ; 3) поверхностную плотность в точках  $B$  и  $C$  –  $\sigma_B$  и  $\sigma_C$ .



Поскольку внутри проводящего слоя поле отсутствует, суммарный заряд на внутренней поверхности слоя должен полностью экранировать заряд, содержащийся в полости, то есть должен быть равен  $-q$ . Поскольку суммарный заряд слоя равен нулю, точно такой же, но противоположный по знаку (то есть равный  $+q$ ) должен быть индуцирован на внешней поверхности проводника. В силу сферической симметрии внешней электростатической задачи, распределение как потенциала и поля снаружи проводника, так и заряда по внешней его поверхности должны быть сферически симметричными. Следовательно, искомая в пункте 1) плотность

$$\sigma_o = \frac{q}{4\pi R^2}$$

В силу той же симметрии распределение потенциала снаружи должно повторять таковое для точечного заряда  $q$ , помещенного в центре симметрии. Следовательно, потенциал проводника из п. 2)

$$\varphi_{\Pi} = \frac{q}{R}.$$

Для ответа на вопросы п. 3) потребуется найти напряженности поля в полости, вблизи точек  $B$  и  $C$  –  $\vec{E}_B$  и  $\vec{E}_C$  соответственно. Искать будем в векторном виде. Введем единичный вектор  $\vec{n} = \overline{OB}/OB$ . Тогда относительно точки  $O$

заряд  $Q$  находится в точке с радиус-вектором  $\vec{d} = \vec{n}d$ ;

точка  $B$  – с радиус-вектором  $\vec{r}_B = \vec{n}r$ , а  $C$  – с  $\vec{r}_C = -\vec{n}r$ .

В силу сферичности границы полости, напряженность поля в ней равна сумме напряженностей полей заряда  $q$  и его изображения  $q^*$ , точку расположения которого обозначим за  $\vec{d}^*$ . Согласно (25),

$$\begin{aligned} q^* &= -q \frac{r}{d}; \quad \vec{d}^* = \vec{n}d^* = \vec{n} \frac{r^2}{d}. \Rightarrow \vec{E}_B = \frac{q\vec{n}}{(r-d)^2} + \frac{q^*(-\vec{n})}{(d^*-r)^2} = \\ &= \frac{\vec{n}q}{(r-d)^2} \left(1 + \frac{d}{r}\right) = -\vec{n}_B q \frac{1+d/r}{(r-d)^2}; \quad \vec{E}_C = \frac{q(-\vec{n})}{(r+d)^2} + \frac{q^*(-\vec{n})}{(d^*+r)^2} = \\ &= \frac{-\vec{n}q}{(r+d)^2} \left(1 - \frac{d}{r}\right) = -\vec{n}_C q \frac{1-d/r}{(r+d)^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{n}_B$  и  $\vec{n}_C$  – внешние нормали к поверхности проводника в точках  $B$  и  $C$ .

И снова в соответствии с (10) искомые плотности заряда

$$\sigma_B = \frac{(\vec{n}_B, \vec{E}_B)}{4\pi} = -\frac{q}{4\pi} \frac{1+d/r}{(r-d)^2}; \quad \sigma_C = \frac{(\vec{n}_C, \vec{E}_C)}{4\pi} = -\frac{q}{4\pi} \frac{1-d/r}{(r+d)^2}.$$