Неделя 3

Теория

1) Диэлектрики. Поляризация среды. Поляризационный заряд.

Как известно, любая материальная **среда** состоит из множества положительно и отрицательно **заряженных частиц** (атомных ядер и электронов). В классической физике и те, и другие, во всяком случае, на масштабах больших атомных, считаются точечными. Ввиду **большого числа** как положительно так и отрицательно заряженных **частиц**, для них в каждой точке $\vec{r}$ пространства можно ввести **концентрации** – $n_+(\vec{r})$ и $n_-(\vec{r})$. Вопрос о критерии корректности такого описания, является отдельным и нетривиальным – пока его просто используем для дальнейших рассуждений. Умножив упомянутые концентрации на абсолютные значения зарядов q_+ и q_- соответствующих частиц, получим абсолютные значения объемных **плотностей** положительных $\rho_+(\vec{r}) = n_+ q_+$ и отрицательных $\rho_-(\vec{r}) = n_- |q_-|$ **зарядов**. Сами заряды делятся на **свободные** и **связанные**. Первые способны беспрепятственно (в рамках задач электростатики) перемещаться по всему общему среды, вторые – упрощенно можно считать привязанными каждый к своей паре, заряженной точно так же по модулю, но противоположно по знаку, относительно которой способен смещаться как правило на расстояние не превышающего атомных размеров. Так, например, газообразная среда состоит из изолированных друг от друга электро-нейтральных молекул, в каждой из которых расстояние между любыми частями не может превышать размеров молекулы.

В случае наличия в среде **свободных** зарядов последние под действием любого **статического внешнего поля** неизбежно **переместятся** так, чтобы его скомпенсировать (**полностью экранировать**) своим полем. Так работают **проводники**.

Среды **без свободных** зарядов называются **диэлектриками**. Их можно описать, введя для каждой точки $\vec{r}$ вектор **смещения** $\vec{\xi}(\vec{r})$

положительных зарядов относительно соответствующих им отрицательно заряженных пар. Очевидно, что если упомянутое **смещение** в каждой точке **равно нулю**, то положительные **заряды** в каждой точке будут **полностью компенсироваться** соответствующими им парами:

Если при любом $\vec{r}$ $\quad \vec{\xi}\left(\vec{r}\right)=0$ то $\rho_+\left(\vec{r}\right)=\rho_-\left(\vec{r}\right)=\rho_\pm\left(\vec{r}\right).$

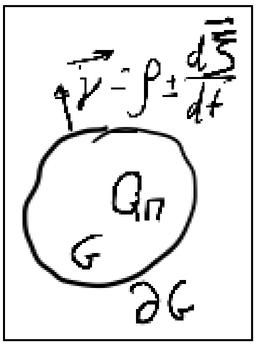
Пусть теперь $\vec{\xi}\left(\vec{r}\right)\neq 0.$ Сразу введем обозначение

$$\rho_\pm\left(\vec{r}\right)\vec{\xi}\left(\vec{r}\right)=\vec{P}\left(\vec{r}\right). \qquad (1)$$

Величин $\vec{P}$ фактически отображает **дипольный момент, содержащийся в единице объема среды**. Ее будем называть **поляризацией**. Попробуем разобраться в том, образуется ли при этом в объеме среды **нескомпенсированный (поляризационный) заряд**? Обозначим его плотность за

$$\rho_{Пол}\left(\vec{r}\right)=\rho_+\left(\vec{r}\right)-\rho_-\left(\vec{r}\right). \qquad (2)$$

Рассмотрим процесс поляризации в динамике, то есть допустим, что смещение $\vec{\xi}$ меняется во времени t. Это может быть обусловлено движением как положительных, так и отрицательных зарядов. Так, если средние скорости их движения равны $\vec{v}_+$ и $\vec{v}_-$, то



$$\vec{v}_+-\vec{v}_-=\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}. \qquad (3)$$

С другой стороны, наличие **движения** объемно распределенного **заряда** представляет собой электрический **ток**, объемная плотность которого равна

$$\vec{j}\left(\vec{r}\right)=\rho_+\left(\vec{r}\right)\vec{v}_+\left(\vec{r}\right)-\rho_-\left(\vec{r}\right)\vec{v}_-\left(\vec{r}\right)=\rho_\pm\left(\vec{r}\right)\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{P}}{dt}. \qquad (4)$$

Последнее верно, так как, во-первых, поскольку предполагаемая плотность поляризационного заряда $\left|\rho_{Пол}\right|=\left|\rho_+\left(\vec{r}\right)-\rho_-\left(\vec{r}\right)\right|$ всегда много меньше плотностей всех зарядов $\rho_\pm$, содержащихся в веществе, а во-вторых, скорости $\vec{v}_+$ и $\vec{v}_-$ скорее всего, направлены в противоположные стороны, а значит $\left|\vec{v}_\pm\right| \le \left|\vec{v}_+ - \vec{v}_-\right|$. Последнее говорит только о том, что относительное изменение плотностей ρ_+ и ρ_- по отдельности не превышает $\left|\rho_{Пол}\right|$, то есть также много меньше $\rho_\pm$.

Рассмотрим теперь в пространстве **произвольную область** G с **границей** ∂G. Поток **плотности тока** через границу области по определению дает величину **заряда**, вытекающего из области в единицу **времени**:

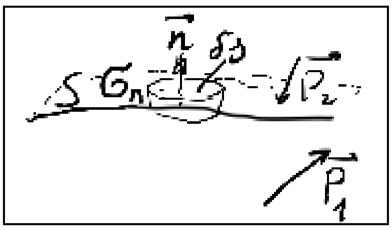
$$\frac{dQ_{Пол\,G}}{dt} = -\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{j}, d\vec{s}\right) = -\oiint\limits_{\partial G}\left(\frac{d\vec{P}}{dt}, d\vec{s}\right) = -\frac{d}{dt}\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{P}, d\vec{s}\right). \quad (5)$$

Интегрируя (5) с учетом того, что как уже было упомянуто, если во всех точках $\vec{r}$ $\vec{P}\left(\vec{r}\right) = 0$, то и $Q_{Пол\,G} = 0$, получим следующее интегральное равенство:

$$\iiint\limits_{G}\rho_{Пол}\left(\vec{r}\right)d^3\vec{r} = Q_{Пол\,G} = -\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{P}, d\vec{s}\right) \qquad (6)$$

или в дифференциальной форме

$$\rho_{Пол} = -\left(\nabla, \vec{P}\right). \qquad (7)$$



Используя равенство (6), можно также найти **поверхностную** плотность поляризационных зарядов $\sigma_{Пол}$ на границе двух диэлектриков. Так пусть две диэлектрические среды с поляризациями $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ граничат по поверхности S. Направим нормаль $\vec{n}$ к границе в выбранной точке $\vec{r}$ в сторону второй среды. Возьмем в качестве **области** G цилиндр **бесконечно малой высоты** и с малыми поперечными размерам, но такой, что его **основания** лежат по **разные стороны** от **границы**. Тогда, если площадь оснований цилиндра равна δs, то равенство (6) дает

$$Q_{Пол\,G} = \sigma_{Пол}\left(\vec{r}\right)\delta s = \left(\left(\vec{P}_1\left(\vec{r}\right) - \vec{P}_2\left(\vec{r}\right)\right), \vec{n}\right)\delta s. \text{ или}$$

$$\sigma_{Пол}(\vec{r}) = \left(\left(\vec{P}_1(\vec{r}) - \vec{P}_2(\vec{r})\right), \vec{n}\right). \qquad (8)$$

Попробуем теперь оценить реальные значения смещения ξ, *имеющие место в простых экспериментах.*

Для начала оценим характерные значения $\rho_\pm$ *для реальных сред. В качестве типичного диэлектрика возьмем кварц. Его материальная плотность* $\rho_m \approx 2{,}2\, г/см^3$. *Поскольку кварц состоит из легких элементов, но тяжелее водорода, примерно половину массы среды составляют протоны. Следовательно, характерная объемная плотность положительного заряда выражается через концентрацию протонов* n_p *в среде и равна*

$$\rho_+ = n_p\, e \approx \frac{\rho_m}{2} \frac{e}{m_p} \approx 3*10^{14}\, \frac{Гс\, см^2}{см^3} = 10^5\, \frac{Кл}{см^3} \approx 30\, \frac{А\,ч}{см^3} \qquad (9)$$

Для сравнения при такой плотности заряд, содержащийся в одном кубическом сантиметре, сопоставим с емкостью автомобильного аккумулятора.

Пусть теперь поверхностная плотность $\sigma_{Пол}$ *такова, что способна породить напряженность поля, соответствующую пробою воздуха:*

$$E = 3*10^4\, см = 100\, Гс\, \left(ед.СГСЭ\right) \Rightarrow \sigma = \frac{E}{4\pi} \approx 8\, Гс \approx P.$$

Отсюда характерная величина смещения зарядов

$$\xi = \frac{P}{\rho_\pm} = 3*10^{-14}\, см. \qquad (10)$$

Это меньше размеров атомного ядра.

2) Теорема Гаусса для диэлектрических сред. Индукция электрического поля. Граничные условия.

Запишем **теорему Гаусса** с учетом поляризационных зарядов и (6):

$$\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{E},d\vec{s}\right)=4\pi\left(Q_G+Q_{Пол\,G}\right)=4\pi Q_G-4\pi\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{P},d\vec{s}\right). \qquad (11)$$

Здесь за Q_G обозначены все заряды, **не связанные с поляризацией** среды. Их обычно называют «**свободными**», однако это **не обязательно значит**, что они способны **беспрепятственно передвигаться** в пространстве: они вполне **могут быть «закреплены»** в своих точках и связанными с изначальным незначительным различием между ρ_+ ρ_-.

Введем теперь новую величину

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P} \qquad (12)$$

и назовем ее **индукцией** электрического поля.

Тогда теорема Гаусса (11) перепишется в виде

$$\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{D},d\vec{s}\right)=4\pi Q_G, \qquad (13)$$

в котором фигурируют **только «свободные»** заряды.

Понятие индукции электрического поля возникало и при описании поля в вакууме, но ***в системе СИ****. В этой системе измерений в вакууме она определяется как*

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}.$$

В свою очередь теорема Гаусса имеет вид

$$\oiint\limits_{\partial G}\left(\vec{D},d\vec{s}\right)=Q_G. \qquad (14)$$

Что касается диэлектриков, то, согласно проведенным рассуждениям, формулы (6) и (7) для распределения заряда в системе СИ будут такими же.

Следовательно, теорема Гаусса для диэлектриков ***в системе СИ*** *будут иметь такой же вид (14), а индукция поля – выражаться следующим образом:*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}. \qquad (15).$$

Вернемся **к системе СГС** и разберемся с тем, как соотносятся поля **на границе двух диэлектриков**. Пусть при этом заданы

$\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ – векторы поляризации граничащих сред,

$\vec{n}$ – вектор нормали к границе, направленный в сторону второй среды, а также

σ – поверхностная плотность «свободных» зарядов на границе диэлектриков.

Последняя обычно в задачах равна нулю. Обратим внимание, что фигурирующая в выше приведенных формулах **напряженность** поля $\vec{E}(\vec{r})$ по-прежнему определяет **силу, действующую на пробный заряд** со стороны **всех** других зарядов среды **(включая поляризационные)**. Поэтому, во-первых, **напряженность** поля остается **консервативной** величиной, из чего следует, что на границе диэлектрика **«касательные»** компоненты **напряженности сохраняются**:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}; \\ &\vec{E}_{1,2\parallel} = \vec{E}_{1,2} - \vec{n}\left(\vec{E}_{1,2}, \vec{n}\right). \end{aligned} \qquad (16)$$

Во-вторых, для **нормальных** компонент **напряженности** поля с учетом (8) имеем:

$$\begin{aligned} &\vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} \equiv \vec{n}\left(\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right), \vec{n}\right) = 4\pi\vec{n}\left(\sigma + \sigma_{Пол}\right) = \\ &= 4\pi\sigma\vec{n} - \vec{n}\left(\left(4\pi\vec{P}_2 - 4\pi\vec{P}_1\right), \vec{n}\right) \end{aligned}$$

или для нормальных компонент **индукции** поля

$$\vec{D}_{2\perp} - \vec{D}_{1\perp} = 4\pi\sigma\vec{n};$$
$$\vec{D}_{1,2\perp} = \vec{n}\left(\vec{D}_{1,2}, \vec{n}\right). \qquad (17)$$

Напомним, что здесь σ представляет собой поверхностную **плотность только «свободных»** зарядов, которая обычно, если в задаче не указано другое, равна нулю. Как правило в задачах эти заряды содержатся **в тонком слое проводника** (например, обкладке конденсатора), **разделяющей** упомянутые **диэлектрики**. *На самом же деле такие заряды могут образоваться и просто на границе диэлектриков в результате электрического пробоя одного из них.*

В любом случае утверждения (16) и (17) представляют собой **граничные условия** для двух **диэлектрических сред.**

Упомянутые утверждения нетрудно переписать и для случая, если одна из сред (для определенности **первая**) является **проводником:**

$$\vec{E}_{2\|} = 0; \quad \vec{D}_{2\perp} = 4\pi\sigma_{\Pi}\vec{n}. \qquad (18)$$

3) Свойства диэлектриков. Задача электростатики с линейными изотропными диэлектриками.

Поляризация диэлектрика может быть вызвана различными **причинами**. Так она может быть **«вморожена»** в диэлектрик, то есть отлична от нуля в силу **термодинамических** причин (частный случай **сегнетоэлектрика**). Также она может быть обусловлена **механическими напряжениями** (пьезоэлектрический эффект). Но **в любом случае** она зависит от **напряженности** поля $\vec{E}$ внутри среды, поскольку последнее неизбежно будет «растаскивать» положительно и отрицательно заряженные частицы среды относительно друг друга. Если других факторов **кроме поля** нет, и среда **не является сегнетоэлектриком**, то в **слабых полях** (поле в пределах напряженности пробоя воздуха – *30кВ/см=100Гс (ед. СГСЭ)* – определенно является слабым) **поляризация** среды $\vec{P}(\vec{r})$ с **напряженностью** поля $\vec{E}(\vec{r})$ связаны **линейно**. Такую среду можно назвать **линейным диэлектриком**. Если же при этом среда является

изотропной (свойства не зависят от направления), то упомянутые величины будут **просто пропорциональны** друг другу:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \alpha(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r}). \qquad (19)$$

Коэффициент пропорциональности α в таком случае называется **поляризуемостью** диэлектрика. В общем случае этот коэффициент зависит от точки пространства и определяется материальными свойствами среды в данной точке. В таком случае индукция и напряженность поля также пропорциональны друг другу:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \left(1 + 4\pi\alpha(\vec{r})\right)\vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}). \qquad (20)$$

Стоящий здесь **коэффициент** пропорциональности ε называется **диэлектрической проницаемостью** среды. Именно ее обычно используют в качестве характеристики линейного изотропного диэлектрика.

Перепишем теперь **основную задачу электростатики** с учетом наличия в пространстве **линейных изотропных диэлектриков**.

Для начала вспомним, что в силу **консервативности напряженности** электрического поля, для него можно ввести **потенциал** $\varphi(\vec{r})$. Выразим через него напряженность и индукцию поля:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \qquad (21.1)$$

$$\vec{D} = -\varepsilon\nabla\varphi. \qquad (21.2)$$

С учетом последнего основную задачу электростатики можно записать в следующем виде:

$$\left(\nabla, \left(\varepsilon\nabla\varphi\right)\right) = -4\pi\rho; \qquad (22.1)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_{\Pi i} \text{ при } \vec{r} \in G_{\Pi i}; \qquad (22.2)$$

$$\oiint\limits_{\partial G_{\Pi i}} \left(\left(\varepsilon\nabla\varphi\right), d\vec{s}\right) = -4\pi q_{\Pi i}; \qquad (22.3)$$

$$\varphi(\vec{r}) \to 0 \text{ при } |\vec{r}| \to \infty. \qquad (22.4)$$

При этом **для каждого проводника** Π_i, заполняющего свою область $G_{\Pi i}$, **задаются либо заряд** $q_{\Pi i}$**, либо потенциал** $\varphi_{\Pi i}$. **Остальные параметры считаются неизвестными.**

Примечательно, что **задача, сформулированная таким образом** подобно аналогичной задаче, но без диэлектриков, **имеет единственное решение**.

Кроме того, нельзя не отметить, что геометрия конкретной задачи не обязательно должна быть трехмерной. Она может быть также двумерной (когда вдоль одной из осей как проницаемость диэлектриков ε и плотность свободных зарядов ρ, так и положение границ проводников остаются постоянными) или одномерной (в таком случае упомянутые величины зависят только от одной координаты, а все границы представляют собой плоскости, перпендикулярные соответствующей оси). При этом во всех случаях предполагается, что на больших расстояниях от начала и трехмерных, двумерных или одномерных (в зависимости от случая) координат пространство $\left(|\vec{r}| \to \infty\right)$ заполнено однородным диэлектриком $\left(\varepsilon(\vec{r}) = \text{const}\right)$, а свободных зарядов нет $\left(\rho(\vec{r}) = 0\right)$, то есть все неоднородности системы сосредоточены вблизи начала координат. Тогда нетрудно показать (с помощью теоремы Гаусса), что, если полный заряд системы отличен от нуля, то во всех случаях кроме трехмерного потенциал на бесконечности по абсолютной величине должен неограниченно возрастать, то есть условие (22.4) невыполнимо. В этих случаях его следует заменить на условие стремления распределения потенциала к определенной асимптоте, определяемой из той же теоремы Гаусса.

Так в двумерном случае $\left(\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\perp\right)$ последняя не должна зависеть от направления, то есть $\varphi(\vec{r}) \to \varphi_0\left(|\vec{r}|\right)$, где $\varphi_0\left(|\vec{r}|\right)$, как нетрудно показать, является бесконечно растущей (по абсолютной величине) логарифмической функцией.

В одномерном же случае $\left(\vec{r} = \vec{e}\,x\right)$ асимптоты должны быть линейными, но могут быть разными по абсолютной величине наклона, поскольку одномерная геометрия, вообще говоря, не исключает асимметричного случая, когда для распределения $\varepsilon(x)$ $\varepsilon(-\infty) \neq \varepsilon(+\infty)$. В таком случае теорема Гаусса вкупе с соображениями симметрии требует равенства на бесконечности соответствующих проекций индукции поля – $D_x(\infty) = -D_x(-\infty)$, а не его напряженности. Правда, последний (одномерный асимметричный с ненулевым суммарным зарядом) случай следует считать экзотическим и не вполне корректным, так как такое простейшее решение предполагает определенное соотношение между «бесконечностями» различных размеров системы. Последнее условие снимается, **если суммарный (свободный) заряд равен нулю**. Тогда однозначно $D_x(\infty) = D_x(-\infty) = 0.$

4) ***Поле однородно поляризованных длинного цилиндра и шара. Формула Лоренц-Лоренца.**

Рассмотрим вначале бесконечно длинный диэлектрический **цилиндр** радиусом R, **поляризация** которого $\vec{P}$ **перпендикулярна** его оси. Выпишем готовые ответы в виде выражений для потенциала и полей снаружи и внутри цилиндра

$$\varphi_{in} = 2\pi\left(\vec{P},\vec{r}_\perp\right); \qquad \vec{E}_{in} = -2\pi\vec{P}; \quad \vec{D}_{in} = +2\pi\vec{P};$$

$$\varphi_{out} = 2\pi\frac{R^2}{r_\perp^2}\left(\vec{P},\vec{r}_\perp\right); \quad \vec{E}_{out} = \vec{D}_{out} = 2\pi R^2\left(2\frac{\vec{r}_\perp\left(\vec{P},\vec{r}_\perp\right)}{r_\perp^4} - \frac{\vec{P}}{r_\perp^2}\right). \qquad (23)$$

Пусть теперь цилиндр такого же радиуса из **линейного изотропного диэлектрика** с диэлектрической проницаемостью ε находится **во внешнем поле** $\vec{E}_0$, перпендикулярном его оси. Попробуем, используя (23), найти его поляризацию $\vec{P}$, **считая ее однородной**. Для этого запишем выражения для полей внутри цилиндра и используем их связь через ε. Сами **поля** складываются из $\vec{E}_0$ и соответствующего **внутреннего поля** самого цилиндра:

$$\vec{E}_{\Sigma\, in} = -2\pi\vec{P} + \vec{E}_0; \quad \vec{D}_{\Sigma\, in} = 2\pi\vec{P} + \vec{E}_0 = \varepsilon\vec{E}_{\Sigma\, in} = \varepsilon\left(\vec{E}_0 - 2\pi\vec{P}\right)$$
$$\Rightarrow 2\pi\vec{P} = \vec{E}_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}. \qquad (23)$$

Обратим внимание на два **предельных случая**. При $\varepsilon \to \infty$ напряженность поля внутри $\vec{E}_{\Sigma in} \to 0$, а значит

$$\vec{P}_{\alpha\to\infty} = \frac{\vec{E}_0}{2\pi}. \qquad (24.1)$$

Это соответствует **случаю с проводящей проволокой**. Действительно, диэлектрик с **бесконечной поляризуемостью** должен быть **неотличим от проводника**.

Если теперь взять **другой предельный случай** – $\varepsilon - 1 = 4\pi\alpha << 1$, получим

$$\vec{P}_{\alpha\to 0} = \alpha\vec{E}, \qquad (24.2)$$

что тоже логично, поскольку в случае слабой поляризуемости **влиянием** на поляризацию **экранирования** поля поляризационными зарядами диэлектрика **можно пренебречь**.

Запишем теперь выражения аналогичные (22) для диэлектрического **шара** радиусом R.

$$\varphi_{in} = \frac{4}{3}\pi\left(\vec{P},\vec{r}\right); \qquad \vec{E}_{in} = -\frac{4}{3}\pi\vec{P}; \quad \vec{D}_{in} = +\frac{8}{3}\pi\vec{P};$$
$$\varphi_{out} = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{r^3}\left(\vec{P},\vec{r}\right); \quad \vec{E}_{out} = \vec{D}_{out} = \frac{4}{3}\pi R^3\left(3\frac{\vec{r}\left(\vec{P},\vec{r}\right)}{r^5} - \frac{\vec{P}}{r^3}\right). \qquad (25)$$

Для шара из диэлектрика с проницаемостью ε аналогично (23) получим

$$\frac{4}{3}\pi\vec{P} = \vec{E}_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}. \qquad (26)$$

Для предельных случаев, соответствующих (24.1) и (24.2) имеем

$$\vec{P}_{\alpha\to\infty} = \frac{3}{4\pi}\vec{E}_0 \qquad (27.1)$$

и

$$\vec{P}_{\alpha\to 0} = \alpha\vec{E}. \qquad (27.2)$$

Наконец получим формулу для диэлектрической проницаемости **среды**, состоящей из **большого числа «упругих диполей»**. Пусть среда состоит из **частиц с поляризуемостью** β:

$$\vec{p} = \beta\vec{E},$$

причем их **концентрация** равна n. Казалось бы задача должна решаться в одно действие: ведь **поляризация** среды есть дипольный момент, содержащийся в единице объема, то есть

$$\vec{P} = n\vec{p}. \qquad (28)$$

Здесь **проблема** состоит в том, что **поле** $\vec{E}$ в среде (величина которого берется усредненной по окрестности данной точки, содержащей большое число частиц) формируется **всеми ее частицами**, **включая интересующую** нас (для которой мы хотим найти дипольный момент). Однако для **корректной оценки поля**, действующего на частицу, необходимо как-то **исключить** ее **собственный вклад** в поле $\vec{E}$. За этот **вклад** принимается **собственное внутреннее поле** диэлектрического шара малого радиуса с поляризацией $\vec{P}$, окружающего частицу. Выбор шарообразной формы исключаемого куска среды связан с однородностью собственного внутреннего поля и его прямой пропорциональностью поляризации. Ни одна другая форма не обеспечивает таких свойств. В итоге (28) перепишется как

$$\vec{P} = n\beta\left(\vec{E} + \frac{4}{3}\pi\vec{P}\right) \Rightarrow \vec{P} = \frac{n\beta\vec{E}}{1 - \frac{4}{3}\pi n\beta} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3 + 8\pi n\beta}{3 - 4\pi n\beta}. \qquad (29)$$

Последнюю формулу обычно записывают в следующем виде:

$$\frac{4}{3}\pi n\beta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \qquad (30)$$

Она известна под названием **формулы Лоренц-Лоренца**.

Опять же, для разреженных (в первую очередь газообразных) сред, у которых $\varepsilon - 1 << 1$, формула (30) превращается в тривиальную

$$\varepsilon - 1 = 4\pi\alpha \approx 4\pi n\beta. \quad (31)$$

Основные формулы и утверждения.

Диэлектрик в электростатике в самом общем случае характеризуется пространственным распределением **поляризации** $\vec{P}(\vec{r})$.

Физический смысл **поляризации** – **объемная плотность дипольного момента**, усредненная по малой окрестности точки $\vec{r}: \; d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})\, d^3\vec{r}.$

В связи с последним обстоятельством все поля в диэлектрике также берутся усредненными по малой окрестности точки.

Для описания **влияния диэлектрика на поле** принято вводить величину

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \qquad (12)$$

которая называется **индукцией электрического поля**.

Упомянутое влияние в общем случае полностью описывается соответствующей **теоремой Гаусса**

в интегральной: $$\oiint_{\partial G} \left(\vec{D}, d\vec{s}\right) = 4\pi Q_G \qquad (13)$$

и **дифференциальной** $$\left(\nabla, \vec{D}\right) = 4\pi\rho \qquad (13а)$$

формах. Последняя вместе с потенциальностью (консервативностью) поля $\vec{E},$ при известной связи между $\vec{E}$ и $\vec{D}$ (материальное уравнение) обусловливает **единственность** решения основной задачи электростатики в диэлектрике.

В правой части теоремы Гаусса (13, 13а) учитываются **только свободные** заряды. В некоторых случаях (особенно при наличии «вмороженной» поляризации) имеет смысл помнить про **поляризационные** заряды, которые являются такими же источниками поля $\vec{E},$ как и свободные.

Объемная плотность поляризационных зарядов $$\rho_{Пол} = -\left(\nabla, \vec{P}\right); \qquad (7)$$

их **поверхностная плотность** $$\sigma_{Пол}(\vec{r}) = \left(\left(\vec{P}_1(\vec{r}) - \vec{P}_2(\vec{r})\right), \vec{n}\right). \qquad (8)$$

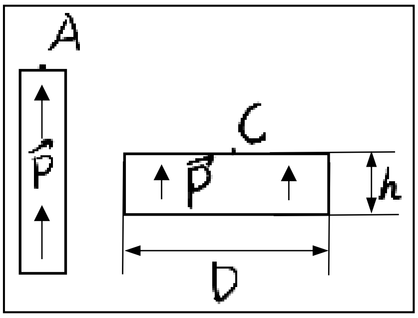
Граничные условия для полей $$\vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{1\parallel}; \quad (16) \qquad \vec{D}_{2\perp} - \vec{D}_{1\perp} = 4\pi\sigma\vec{n}, \quad (17)$$

где σ – поверхностная плотность свободных зарядов (на границе или в проводящей обкладке). Если для **диэлектрика дана** (в качестве известной или неизвестной) **диэлектрическая проницаемость** $\varepsilon(\vec{r}),$ то он является **линейным и изотропным**, и для него материальное уравнение имеет вид

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r}). \quad (20)$$

Задачи группы I

3.8 Имеется длинный цилиндр и тонкая шайба, изготовленные из одинаково поляризованного диэлектрика. Оба объекта поляризованы вдоль оси симметрии. Отношение высоты к диаметру шайбы $h/D = 2*10^{-2}$. Найти поле вблизи центра верхней грани шайбы E_C, если поле вблизи центра грани цилиндра $E_A = 300\ В/см$.



Напряженность поля диэлектрика есть поле поляризационных зарядов. Поскольку поляризация в обоих случаях перпендикулярна двум граням, а нижняя грань у длинного цилиндра находится достаточно далеко, чтобы ее влияние можно было не учитывать, поверхностная плотность зарядов по абсолютной величине в обоих случаях равна

$$\sigma = P = \frac{E_A}{2\pi}.$$

Поскольку точка C находится напротив центров двух противоположно заряженных дисков, напряженность в ней направлена вертикально и определяется разностью абсолютных значений телесных углов, под которым видны верхняя Ω_+ и нижняя Ω_- грань.

$$E_C = \sigma\left(\Omega_+ - \Omega_-\right) = \sigma 2\pi\left(1 - \left(1 - \cos\theta\right)\right) = E_A \cos\theta =$$

$$= E_A \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(D/2\right)^2}} \approx E_A \frac{2h}{D} = 12 \frac{В}{м}.$$

3.26 Пространство между обкладками конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется линейно с расстоянием до пластины x от ε_1 до ε_2, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Найти емкость C конденсатора, если даны площадь S и расстояние d между пластинами.

Пусть заряд конденсатора равен Q. Тогда по теореме Гаусса индукция поля D внутри направлена вдоль оси x и равна

$$D = 4\pi \frac{Q}{S}.$$

Напряжение есть интеграл от напряженности, то есть

$$U = \int_0^d E_x(x)\,dx = \int_0^d \frac{D}{\varepsilon(x)}dx = 4\pi \frac{Q}{S}\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x/d} =$$

$$= 4\pi \frac{Qd}{S}\frac{\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = 4\pi \frac{Qd}{S}\frac{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Искомая емкость по определению равна

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{S}{4\pi d}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}.$$

3.39 Найти силу взаимодействия между электро-нейтральным диэлектрическим шариком радиусом r_0 и точечного заряда q, расположенного на расстоянии $R >> r_0$ от центра шарика. Диэлектрическая проницаемость материала шарика равна ε: $\varepsilon - 1 << 1$.

Решать задачу будем в векторном виде. Пусть $\vec{R}$ − радиус-вектор, соединяющий центр шарика с зарядом. Тогда, поскольку $R >> r_0$, поле заряда, в котором находится шарик, можно считать однородным и равным

$$\vec{E}_0 = -\frac{q\vec{R}}{R^3}.$$

Поскольку $\varepsilon - 1 << 1,$ влиянием собственного поля шарика на поле внутри можно пренебречь, и потому поляризация шарика

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}_0 = -q\frac{\varepsilon - 1}{4\pi R^3}\vec{R},$$

Где $\alpha -$ поляризуемость материала шарика, которая связана с диэлектрической проницаемостью следующим образом: $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha.$

Дипольный момент шарика равен произведению поляризации на объем: $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \vec{P}.$ Осталось найти силу, действующую на заряд q со стороны диполя с моментом $\vec{p}$

$$\vec{F}_q = q\left(3\frac{\vec{R}\left(\vec{p},\vec{R}\right)}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}\right) = -q^2\frac{4}{3}\pi r_0^3\frac{\varepsilon - 1}{4\pi R^6}\left(3\frac{\vec{R}\left(\vec{R},\vec{R}\right)}{R^2} - \vec{R}\right) =$$

$$= -2q^2 r_0^3\frac{\varepsilon - 1}{3R^5}\frac{\vec{R}}{R} = -2q^2 r_0^3\frac{\varepsilon - 1}{3R^5}\vec{e}_q.$$

Здесь $\vec{e}_q$ – единичный вектор, направленный из центра шарика в сторону заряда $q.$ Знак «–» при полученном выражении свидетельствует, что заряд к шарику притягивается. По модулю же сила равна

$$F_q = \frac{2}{3}q^2 r_0^3\frac{\varepsilon - 1}{R^5}$$

Заметим, что задача решается и для произвольного $\varepsilon.$ Для этого в выражении для $\varepsilon - 1 << 1,$

3.77 В заряженный до потенциала V плоский конденсатор вставлен стержень длиной l_0 из диэлектрика с однородной, «замороженной» поляризацией $\vec{P},$ направленной вдоль его оси. Найти циркуляцию индукции $\vec{D}$ электрического поля по контуру $L,$ один из участков которого проходит по оси стержня, вдоль направления поляризации.

Воспользуемся свойством консервативности напряженности электрического поля: $\oint\limits_L \left(\vec{E}, d\vec{r}\right) = 0.$ Отсюда для циркуляции индукции имеем

$$\Gamma_{\vec{D}}\left(L\right) = \oint\limits_L \left(\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right), d\vec{r}\right) = 4\pi\oint\limits_L \left(\vec{P}, d\vec{r}\right) = 4\pi P l_0,$$

поскольку, по условию задачи $\vec{P} \neq 0$ только внутри цилиндра.