НЕДЕЛЯ 4

ТЕОРИЯ

1) Электрическая энергия системы зарядов и проводников в вакууме и ее изменение при малых перемещениях.

Как уже упоминалось в теории ко второй неделе, для **«сборки» системы** из n точечных зарядов путем их перемещения из бесконечно удаленных точек (в случае отсутствия проводников или диэлектриков), требуется совершить **работу** равную

$$W_T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \quad (1)$$

где

$$\varphi_i = \sum_{j \neq i}^{n} \frac{q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|} \quad (2)$$

есть потенциал, в котором находится $i-$й заряд. **Работа** (1) не зависит от порядка «сборки» системы и называется ее **энергией**. Если же в системе присутствуют поверхностные заряды $\sigma\left(\vec{r}\right)$, распределенные по m поверхностям S_k и объемно распределенные заряды $\rho\left(\vec{r}\right)$, то формулу (1) можно обобщить следующим образом:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \iint_{S_k} \sigma\left(\vec{r}\right)\varphi\left(\vec{r}\right)ds + \frac{1}{2}\iiint \rho\left(\vec{r}\right)\varphi\left(\vec{r}\right)d^3\vec{r} = \\ &= W_T + W_\sigma + W_\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом в распределение **потенциала** в пространстве $\varphi\left(\vec{r}\right)$ следует учитывать вклад **всех зарядов** – как точечных, так и распределенных, а в потенциал для каждого из зарядов $\varphi_i -$всех кроме самого заряда q_i. Наконец, если в системе присутствуют **проводники**, то каждый из них, помимо геометрии, характеризуется **зарядом** $q_П$ и **потенциалом** $\varphi_П$, определяемых однозначно через основную задачу электростатики. Если их добавить в систему, то в формуле (3) появится дополнительное слагаемое $W_П$, связанное с энергией зарядов, заключенных в проводниках:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\iint_{S_k}\sigma(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,ds + \frac{1}{2}\iiint\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\,d^3\vec{r} +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_П} q_{П\,p}\varphi_{П\,p} = W_T + W_\sigma + W_\rho + W_П. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь **силу** $\vec{F}_i$, действующую **на точечный заряд** q_i в описанной системе. В случае, если в системе **проводников нет**, то фактически, исходя из определения энергии, эта сила должна быть такой, что работа, совершенная ею при **движении вдоль** любой **оси** X, равна

$$\delta A = F_{i\,x}\,\delta x_i = -\delta W = -\frac{\partial W}{\partial x_i}\delta x_i\,,$$

Где $\delta x_i -$ величина бесконечно малого смещения вдоль выбранной оси. Разделив полученное равенство на δx_i, имеем:

$$F_{i\,x} = -\frac{\partial W}{\partial x_i} \equiv q_i E_{i\,x} \equiv -q_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}. \qquad (5)$$

Равенство (5) является верным, но может показаться противоречивым. Действительно, в выражении (4) произведение $q_i\varphi_i$ в явном виде присутствует лишь в одном слагаемом суммы, где берется с коэффициентом $1/2$. Однако, положение каждого заряда влияет не только на потенциал, в котором находится он, но и потенциалы, в которых находятся все остальные заряды. При этом получается, что в **системе, состоящей из фиксированных зарядов**, **вклад** каждого заряда в полную энергию **ровно вдвое больше** величины данного **слагаемого** в общем выражении. Ровно на столько $\left(\text{на } q_i\varphi_i\right)$ **уменьшится полная** энергия при его удалении из **системы**.

Последнее утверждение, сформулированное **в интегральном виде**, **нельзя** считать верным в случае присутствия **проводников**. Действительно, оно сформулировано для случая, когда все заряды, кроме рассматриваемого, **неподвижны**. Заряды же **в проводниках** при перемещении «пробного» заряда неизбежно **перераспределяются**, в результате чего меняется и энергия их взаимодействия. Однако, **в дифференциальной** форме (5) данное утверждение остается **верным** и при наличии проводников.

Последнее утверждение можно обосновать тем, что при квазистатическом перемещении зарядов (при условии, что в каждый момент времени поле внутри проводников отсутствует) единственной силой, совершающей работу, а значит и обуславливающей изменение энергии, является внешняя сила, перемещающая заряд. **Исключением** является случай, когда **разность потенциалов** между проводниками обеспечивается **источником ЭДС**, который также может совершать **работу**, которую следует учитывать в энергетическом балансе.

Попробуем доказать последнее утверждение более математически строго, разбив процесс на ***два*** *этапа. На* ***первом*** *из них заряды в проводнике остаются неподвижными. Обозначим изменение энергии на нем за* δW_1. *Согласно (5), оно равно*

$$\delta W_1 = -F_{ix}\delta x_i. \quad (6)$$

Второй *этап предполагает перераспределение зарядов по поверхностям проводников до выравнивания потенциала внутри каждого из них. На нем изменение энергии обозначим за* δW_2. *Утверждение можно считать доказанным, если удастся показать, что при* $\delta x \to 0$ *отношение* $\delta W_2 / \delta W_1 \to 0.$ *Для доказательства поменяем процессы местами, а все заряды, в том числе и распределенные в пространстве и на поверхностях (в том числе и проводников) представим в виде конечного множества точечных. Как известно, формула (3) как раз получена путем обобщения утверждений, справедливых для точечных зарядов. Обратный переход всегда можно сделать, разбив «заряженное» пространство на бесконечно малые ячейки и поместив в центр каждой точечный заряд, равный содержащемуся в ней.*

Итак, пусть у нас в пространстве имеется n *точечных неподвижных зарядов* q_i, *расположенных в точках* $\vec{r}_i$. *Пусть при этом часть из них изменила свое значение на малую величину* $\delta q_i << q_i$. *Тогда суммарная энергия системы зарядов, изначально равная*

$$W_0 \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}; \quad r_{ij} \equiv \left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| \qquad (7)$$

изменится на величину δW *такую, что*

$$W_0 + \delta W \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\left(q_i+\delta q_i\right)\left(q_j+\delta q_j\right)}{r_{ij}} =$$

$$= W_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{q_i\,\delta q_j + q_j\,\delta q_i}{r_{ij}} + O\left(\delta q^2\right) =$$

$$= W_0 + \sum_{i,j=1}^{n}\delta q_i \sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}} + O\left(\delta q^2\right) = W_0 + \sum_{i=1}^{n}\delta q_i\,\varphi_i + O\left(\delta q^2\right)$$

или для изменения энергии в чистом виде

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n}\delta q_i\,\varphi_i + O\left(\delta q^2\right). \qquad (8)$$

Здесь $O\left(\delta q^2\right)$ *есть многочлен, слагаемые которого пропорциональны всевозможным произведениям* $\delta q_i\,\delta q_j$.

Вернемся теперь к задаче с проводниками и малым смещением одного из зарядов. Будем считать очевидным то, что величина изменения заряда каждой ячейки проводников пропорциональна смещению пробного δx_i: $\delta q_i \propto \delta x_i$. *Тогда, запустив второй процесс в обратную сторону (с момента, когда внутри каждого проводника установился постоянный потенциал* $\varphi_{\Pi\, p}$) *для изменения энергии на нем получим*

$$\delta W_2 = \sum_{p=1}^{n_\Pi}\delta q_{\Pi\, p}\,\varphi_{\Pi\, p} + O\left(\delta x_i^2\right). \qquad (9)$$

Здесь мы учли, что на данном этапе заряд меняется только на различных частях поверхности проводников, в то время как все другие заряды неподвижны и величины своей не меняют. Запишем теперь суммарное изменение энергии системы

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = -F_x\,\delta x_i + \sum_{p=1}^{n_П} \delta q_{П\,p}\,\varphi_{П\,p} + O\left(\delta x_i^2\right). \qquad (10)$$

Последнее слагаемое, содержащееся в (10), при $\delta x_i \to 0$ будет **исчезающе малым** по сравнению с первым. **Второе** же обратится в ноль в случае, если все **проводники** либо **изолированы** (для них $\delta q_{П\,p} = 0$), либо **заземлены** (для них $\varphi_{П\,p} = 0$). **Любой другой случай** предполагает **наличие** в системе источников **ЭДС**, определяющих либо потенциал конкретного проводника, либо разность потенциалов между ними, а **сумма** в (10) есть не что иное как элемент **работы всех ЭДС** в системе.

Рассуждения, приведшие к формуле (10) для связи **малого изменения энергии** системы с суммой элементов **механической работы** по малому перемещению одного точечного заряда и **работы источников ЭДС**, можно распространить на случай малого перемещения также **систем** зарядов и **проводников** как целого. При этом **первая** есть работа **против электростатических сил**, действующих на все «свободные» заряды (в том числе и те, что содержатся в проводниках). Все такие силы называют **пондеромоторными**.

В итоге (10) без последнего слагаемого, которое при бесконечно малых перемещениях исчезает, обобщается в следующем виде:

$$\delta W = -\delta A_П + \delta A_Б. \qquad (11)$$

Здесь $\delta A_П$ есть элемент работы **пондеромоторных** сил (эта работа соответствует изменению энергии без учета перераспределения заряда в проводниках), а $\delta A_Б -$ работа источников ЭДС, то есть «батареек», осуществляющих перенос заряда между проводниками и «землей» (то есть бесконечно удаленной точкой пространства).

2) Энергия диполя в поле. Сила и момент, действующий на диполь с точки зрения энергии.

Как следует из рассуждений, приведших к результату (11), **силы**, действующие на любую **подсистему** зарядов, определяются **ее вкладом** в полную **энергию** системы (точнее изменением этой энергии при различных малых перемещениях). При этом **изменение энергии** следует считать **при неподвижных остальных зарядах** (включая индуцированные на поверхности проводников). Если **диполь** представляет собой **жесткую** систему из двух зарядов (дипольный момент по модулю постоянен), то **энергия** их взаимодействия также постоянна и может быть **исключена** из полной энергии. По определению при внесении в систему дополнительного заряда q_+ в точку $\vec{r}_+$ требуется работа

$$W_+ = q_+\varphi\left(\vec{r}_+\right),$$

где $\varphi\left(\vec{r}\right)$ −распределение имеющихся зарядов в пространстве. Внесем теперь заряд q_- в точку $\vec{r}_-$. Если теперь записать суммарное изменение электростатической энергии без учета энергии взаимодействия зарядов q_+ и q_-, получим фактически работу по перемещению из бесконечно удаленной точки двух зарядов с жестко фиксированным расстоянием (именно им определяется энергия их взаимодействия):

$$W_\Sigma = W_+ + W_- = q_+\varphi\left(\vec{r}_+\right) + q_-\varphi\left(\vec{r}_-\right). \qquad (12)$$

Если заряды q_+ и q_- образуют диполь с моментом $\vec{p}$, то

$$q_+ = -q_- = q;\ \vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{p}}{2q}; \vec{r}_- = \vec{r} - \frac{\vec{p}}{2q}, \qquad (13)$$

причем расстояние между зарядами $d = p/q$ много меньше размеров неоднородностей поля остальных зарядов в окрестности интересующей нас точки $\vec{r}$. Подставив (13) в (12), получим:

$$W_\Sigma = q\left(\varphi\left(\vec{r}_+\right)+\varphi\left(\vec{r}_-\right)\right) \approx q\left(\frac{\vec{p}}{q},\nabla\varphi\left(\vec{r}\right)\right) = -\left(\vec{p},\vec{E}\left(\vec{r}\right)\right) \equiv W_p. \qquad (14)$$

Получившаяся формула есть классическое выражение для **энергии диполя во внешнем поле**.

Рассмотрим бесконечно малое изменение положения диполя. Оно может быть связано как с малым поступательным смещением $\delta\vec{r}$, так и с малым поворотом. Поворот можно описать, задав вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения и малый промежуток времени δt, за который по определению дипольный момент изменится на

$$\delta\vec{p} = \left(\vec{\omega}\times\vec{p}\right)\delta t. \quad (15)$$

Найдем **работу пондеромоторных сил** через изменение энергии (14), взятое с обратным знаком (в соответствии с (11)):

$$\begin{aligned} \delta A_П &= -\delta W_p = \left(\delta\vec{p},\vec{E}\right)+\left(\vec{p},\delta\vec{E}\right) = \\ &= \left(\left(\vec{\omega}\times\vec{p}\right),\vec{E}\right)\delta t + \left(\vec{p},\left(\left(\delta\vec{r},\nabla\right)\vec{E}\right)\right) = \delta A_{Пв} + \delta A_{Пп}. \end{aligned} \qquad (16)$$

Здесь $\delta A_{Пв}$ и $\delta A_{Пп}$ есть вклад в работу вращения и поступательного перемещения диполя. Преобразуем эти слагаемые и сопоставим с известными из механики выражениями через силу $\vec{F}_p$ и момент сил $\vec{M}_p$, действующих на диполь:

$$\delta A_{Пв} = \left(\left(\vec{\omega}\times\vec{p}\right),\vec{E}\right)\delta t = \left(\vec{\omega},\left(\vec{p}\times\vec{E}\right)\right)\delta t = \left(\vec{\omega},\vec{M}_p\right)\delta t; \qquad (17)$$

Для поступательной части с учетом консервативности поля

$$\begin{aligned} \delta A_{Пп} &= \left(\vec{p},\left(\left(\delta\vec{r},\nabla\right)\vec{E}\right)\right) = -\left(\vec{p},\left(\left(\delta\vec{r},\nabla\right)\nabla\varphi\right)\right) = -\left(\vec{p},\nabla\right)\left(\delta\vec{r},\nabla\varphi\right) = \\ &= -\left(\delta\vec{r},\left(\left(\vec{p},\nabla\right)\nabla\varphi\right)\right) = \left(\delta\vec{r},\left(\left(\vec{p},\nabla\right)\vec{E}\right)\right) = \left(\delta\vec{r},\vec{F}_p\right) \end{aligned} \qquad (18)$$

В итоге имеем классические выражения для **силы** и **момента силы**, действующих на диполь:

$$\vec{M}_p = \left(\vec{p}, \vec{E}\right); \qquad (19.1)$$

$$\vec{F}_p = \left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{E} = \nabla\left(\vec{p}, \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right). \qquad (19.2)$$

Таким образом **закон сохранения энергии** позволяет находить **силы** и **моменты сил**, действующие на различные системы зарядов. Такой способ называется **методом виртуальных перемещений**. Заключается он в нахождении связи приращения электрической **энергии** системы с приращением ее **геометрического параметра**, через который явно выражается работа интересующей нас силы.

3) Емкостные коэффициенты проводников. Работа пондеромоторных сил при перемещении проводников и диэлектриков. Случай постоянных зарядов и потенциалов.

Пусть рассмотренная ранее система состоит **только** из заряженных **проводников**. **Добавим** в нее **линейные изотропные диэлектрики** (характеризующиеся пространственным распределением диэлектрической проницаемости $\varepsilon\left(\vec{r}\right)$). Тогда, согласно свойствам основной задачи электростатики, ее состояние можно однозначно задать, определив для **каждого проводника** либо **заряд** $q_{\Pi i}$ либо **потенциал** $\varphi_{\Pi i}$. Остальные параметры проводников при этом определяются путем решения линейного дифференциального уравнения с нулевой правой частью (поскольку свободные заряды вне границ проводников отсутствуют). В этом случае можно показать, что **заряды** и **потенциалы** проводников **линейно связаны**. Эту связь для n проводников можно задать через матрицу из n^2 **коэффициентов**:

$$q_{\Pi i} = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}\varphi_{\Pi j}. \quad (20)$$

Присутствующие здесь коэффициенты C_{ij} имеют размерность емкости и называются **емкостными**. При **постоянной геометрии** проводников и распределении $\varepsilon\left(\vec{r}\right)$ **любая работа** по переносу зарядов осуществляется **источниками ЭДС**. Ввиду **консервативности** системы, эта работа должна быть равна изменению **электрической энергии** системы. Ее малое приращение равно

$$dW = \delta A_Б = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{П\,i} \delta q_{П\,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{П\,i} C_{ij} d\varphi_{П\,j}. \quad (21)$$

Если закон сохранения энергии выполняется, то есть существует энергия W как функция потенциалов всех проводников, то ее первые частные производные будут равны

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi_{П\,j}} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{П\,i} C_{ij},$$

а вторые – соответственно

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi_{П\,j} \partial \varphi_{П\,i}} = C_{ij} = C_{ji}, \quad (22)$$

поскольку результат двойного дифференцирования функции не должен зависеть от порядка дифференцирования. Саму **консервативность** системы чисто математически проще доказать через локализацию работы (энергии) в пространстве, что будет проделано ниже. Пока что примем эту консервативность как данность. С учетом (22) нетрудно убедиться, что производные (21) имеет функция

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_{П\,i} \varphi_{П\,j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_{П\,i} \varphi_{П\,i}. \quad (23)$$

Попробуем теперь выяснить, как влияет **движение проводников и диэлектриков** на энергию (23). Очевидно, что изменение **геометрии** системы приводит к изменению **емкостных коэффициентов** C_{ij}. Пусть в результате малого возмущения геометрии системы они изменились на δC_{ij}. Тогда, очевидно, **при постоянных потенциалах** проводников **изменение энергии** системы равно

$$\delta W_{\varphi} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{\Pi i}\varphi_{\Pi j}\delta C_{ij}. \quad (24)$$

Однако, поскольку при этом меняются заряды проводников, в данном процессе совершают работу также источники ЭДС:

$$\delta A_{Б} = \sum_{i=1}^{n}\varphi_{\Pi i}\,\delta q_{\Pi i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{\Pi i}\varphi_{\Pi j}\delta C_{ij} = 2\delta W_{\varphi}. \qquad (25)$$

Отсюда **работа пондеромоторных сил**

$$\delta A_{\Pi} = \delta A_{Б} - \delta W_{\varphi} = +\delta W_{\varphi}. \quad (26)$$

Таким образом мы показали, что в случае, если **потенциалы** всех проводников **фиксированы**, то **работа пондеромоторных сил** строго равна изменению **полной энергии** системы **с тем же знаком**. Иногда бывает, что приращение энергии удобнее вычислять **при постоянных зарядах** на проводниках – δW_q. Тогда, очевидно, **работа ЭДС равна нулю**, а изменение энергии полностью обусловлено работой внешних сил по изменению геометрии системы:

$$\delta A_{\Pi} = -\delta W_q. \qquad (27)$$

На самом деле нетрудно показать, что в этом случае **изменение энергии** системы будет равно **выражению (24)**, но взятому **с обратным знаком**. Действительно, если сохраняются заряды на проводниках, то изменение их потенциалов должно быть таким, чтобы все суммы в (20) оставались неизменными. Это возможно при условии, что (с учетом малости всех приращений)

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij}\,\delta\varphi_{\Pi j} = -\sum_{i=1}^{n}\delta C_{ij}\,\varphi_{\Pi j}.$$

С учетом последнего изменение энергии

$$\delta W_q = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta\varphi_{\Pi i}\,q_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta\varphi_{\Pi i}\,C_{ij}\varphi_{\Pi j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi_{\Pi i}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\delta\varphi_{\Pi j} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta C_{ij}\varphi_{\Pi i}\varphi_{\Pi j} = -\delta W_{\varphi}.$$

Как правило в роли такой системы выступает либо один проводник, либо конденсатор, состоящий из двух противоположно заряженных проводников. В обоих случаях формула (23) сводится к одному слагаемому, пропорциональному произведению либо емкости проводника на квадрат его потенциала, либо емкости конденсатора на квадрат разности потенциалов между обкладками. В обоих случаях легко видеть, что **пондеромоторные силы действуют в сторону увеличения емкости.**

4) Токи в неограниченных средах. Закон Ома в дифференциальной форме. Локализация энергии в пространстве. Максвелловские натяжение и давление.

Изменение **зарядов на проводниках** невозможно без направленного движения первых за их пределами. Обычно оно осуществляется **через провода**, соединенные с источниками ЭДС, но в рамках задач по электростатике движение зарядов **может** иметь место и **в пространстве** между проводниками, если оно заполнено **неидеальным диэлектриком**, обладающим конечной **удельной проводимостью** λ. В таком случае, например, неоднородность среды может приводить к возникновению **пространственного заряда**. Как известно, в изотропной проводящей среде, характеризующейся в каждой точке проводимостью $\lambda(\vec{r})$, справедлив **закон Ома**, согласно которому наличие поля напряженностью $\vec{E}(\vec{r})$ неизбежно порождает ток плотностью

$$\vec{j}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}). \qquad (28)$$

При этом поток данного вектора через произвольную ориентированную поверхность есть заряд, проходящий через нее в единицу времени. Если применить это утверждение к бесконечно малым замкнутым поверхностям, то получим **уравнение непрерывности потока** (или закон сохранения заряда):

$$\left(\nabla, \vec{j}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \qquad (29)$$

где $\rho-$ объемная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке. Поскольку **в стационарном случае** (поле не зависит от времени) заряд нигде накапливаться не должен, в этом случае левая часто (29) должна быть равна нулю, что с учетом (28) дает

$$\left(\nabla,\left(\lambda\vec{E}\right)\right)=0. \qquad (30)$$

При заданных зарядах или потенциалах проводников данное уравнение **аналогично** основному дифф. уравнению в **основной задаче электростатики**, а значит и сама задача в такой формулировке всегда разрешима **единственным образом**. При этом плотность свободных зарядов всегда можно найти из теоремы Гаусса:

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\left(\nabla,\left(\varepsilon\vec{E}\right)\right). \qquad (31)$$

Очевидно, что последнее выражение обращается в нуль, если проводимость и диэлектрическая проницаемость среды либо **постоянны**, либо **пропорциональны** друг другу. В **противном** случае в пространстве обязательно будет присутствовать **свободный заряд**, распределение которого всегда можно найти из (31).

Рассмотрим теперь **зарядку** проводников через **ЭДС, распределенную в пространстве**. При этом будем считать, что везде, где в диэлектрической среде имеет место движение зарядов (то есть ток), электрическое **поле** полностью **компенсируется ЭДС**, а **движение** зарядов происходит бесконечно медленно (как в квазистатическом процессе из термодинамики). Тогда нетрудно показать, что **работа,** совершаемая ЭДС в единицу времени равна интегралу от скалярного произведения **плотности тока** на **напряженность** поля, взятому с обратным знаком. Этот интеграл будем брать по шару G бесконечно большого радиуса, такого, что все заряды системы сосредоточены в малой окрестности его центра. В итоге, применяя математические тождества, теорему Гаусса-Остроградского и основные законы электростатики, можно получить:

$$\delta A_Б = \delta t \iiint\limits_G \left(-\vec{j}, \vec{E}\right) d^3\vec{r} = \delta t \iiint\limits_G \left(\vec{j}, \nabla\varphi\right) d^3\vec{r} =$$

$$= \delta t \iiint\limits_G \left(\left(\nabla, \vec{j}\varphi\right) - \varphi\left(\nabla, \vec{j}\right)\right) d^3\vec{r} =$$

$$= \delta t \left(\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial G} \varphi\left(\vec{j}, d\vec{s}\right) + \iiint\limits_G \varphi \frac{\partial\rho}{\partial t} d^3\vec{r} \right) =$$

$$= \delta t \left(\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial G} \varphi\left(\vec{j}, d\vec{s}\right) + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_G \varphi \left(\nabla, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) d^3\vec{r} \right) =$$

$$= \frac{\delta t}{4\pi} \left(\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial G} \varphi \left(\left(4\pi\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{s} \right) - \iiint\limits_G \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \nabla\varphi \right) d^3\vec{r} \right) =$$

$$= \frac{\delta t}{4\pi} \left(\oint\!\!\!\oint\limits_{\partial G} \varphi \left(\left(4\pi\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{s} \right) + \iiint\limits_G \left(\vec{E}, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \right) d^3\vec{r} \right).$$

Можно строго доказать, что, при устремлении радиуса шара G к бесконечности по сравнению с размерами системы зарядов, содержащийся здесь поверхностный интеграл обратится в ноль. При этом необязательно считать нулевым ток $\vec{j}$, обеспечивающий приток заряда из бесконечности. В итоге окажется, что **работа** по произвольному **переносу** зарядов **в ограниченную область** пространства равна следующему интегралу от поля по всему пространству:

$$\delta A_Б = \frac{1}{4\pi} \iiint \left(\vec{E}, \delta\vec{D}\right) d^3\vec{r}. \quad (32)$$

В случае **линейной связи** между $\vec{E}$ и $\vec{D}$ выражение (32) оказывается полным дифференциалом:

$$\delta A_Б = \delta \left(\iiint \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} d^3\vec{r} \right) = \delta W. \qquad (33)$$

В таком случае стоящую под интегралом величину

$$w_e = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad (34)$$

называют **объемной плотностью электрической энергии**. Само **равенство (33)**, полученное непосредственно из основных теорем электростатики и математических тождеств, **свидетельствует** о **консервативности** любой системы свободных зарядов в среде из **изотропного линейного диэлектрика** с произвольным распределением диэлектрической проницаемости.

Обратим внимание, что плотность энергии (34) имеет размерность **давления**, и это неспроста. На самом деле разность плотностей энергии на границе можно использовать для вычисления **силы давления**, действующую на границу двух диэлектриков. При этом, однако, следует помнить, что, если поле **перпендикулярно** границе, то сила действует в сторону **большей** плотности энергии. Если же поле **параллельно** границе, то в сторону **меньшей**, однако в обоих случаях сила направлена в сторону более «слабого» диэлектрика. Таким образом можно считать, что компонента поля **параллельная** границе порождает **давление**, а перпендикулярная – **натяжение**. На самом деле такой принцип работает в области, где силовые линии не искривлены. **Натяжение** будет действовать и на заряженный **проводник** в пустоте. Так пусть с разных сторон тонкого проводящего слоя известно поле $\vec{E}_1 = E_1\vec{n}$ и $\vec{E}_2 = E_2\vec{n}$, которые, очевидно, перпендикулярны границе. Заряд единицы площади проводника равен $\sigma = \dfrac{E_2 - E_1}{4\pi}$, где $E_2 -$ поле со стороны, в которую «торчит» нормаль $\vec{n}$. Нетрудно показать, что **поверхностный заряд** в среднем находится в **поле**, равном **среднему арифметическому** от $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, то есть

$$\vec{F} = s\frac{\vec{n}}{8\pi}\left(E_2 - E_1\right)\left(E_2 + E_1\right) = s\,\vec{n}\left(w_2 - w_1\right).$$

Казалось бы силы, действующие на диэлектрик, также должны сводиться к действую поля на заряды, только включая поляризационные. И для **суммарной силы**, действующей **на кусок** твердого диэлектрика, находящегося **в пустом пространстве**, это действительно так. Последнее утверждение, однако, является нетривиальным и будет отдельно доказано ниже. Однако, например,

с жидким диэлектриком такой подход не работает. Проверяется это на примере с двумя зарядами, находящимися в таком диэлектрике. Действительно, если, например, поместить **в жидкий диэлектрик** с проницаемостью ε **два однородно заряженных твердых шара** с такой же проницаемостью, то суммарный заряд каждого из них (с учетом поляризационного) должен оказаться в ε раз меньше. Следовательно, их сила взаимодействия **в диэлектрике** должна быть **в** ε^2 раз **меньше**, чем в вакууме. Однако, со школы известно, что упомянутое отличие **должно быть ровно в** ε **раз**. Дело в том, что поляризация диэлектриков порождает силы «механической» реакции по всему объему, и локализация этих сил может сильно отличаться от электростатических, что действуют непосредственно на поляризационные заряды. В итоге **единственным универсальным** методом вычисления сил **в** (во всяком случае линейных) **диэлектриках** является **метод виртуальных перемещений**.

На самом деле для объемной плотности сил, действующих на диэлектрик, имеется общая формула

$$\vec{f} = -\frac{1}{8\pi}\left|\vec{E}\right|^2 \nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\rho_м \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\left|\vec{E}\right|^2\right), \quad (36)$$

где $\rho_м$ – материальная плотность диэлектрической среды. На самом деле, если среда несжимаема, то **второй (стрикционный)** член можно не учитывать, поскольку он компенсируется прераспределением «механического» давления внутри среды. Последняя формула получается путем аккуратного применения метода виртуальных перемещений через связь изменения энергии с малыми смещениями всех элементов среды. Этой формулой **без стрикционного члена** обосновываются **максвелловские натяжение и давление**, действие которых можно представить как перепад давлений, действующий из среды 1 в сторону среды 2:

$$\Delta P_{12} = \left(w_{2\perp} - w_{1\perp}\right) - \left(w_{2\parallel} - w_{1\parallel}\right); \quad w_\perp = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|\vec{E}_\perp\right|^2; \; w_\parallel = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|\vec{E}_\parallel\right|^2. \quad (37)$$

Докажем еще упомянутое выше утверждение о том, что сумма сил, действующих на кусок твердого линейного изотропного *диэлектрика, честно вычисленная по формуле (36), равна сумме сил, взаимодействия поля с поляризационными зарядами. Пусть диэлектрик вместе со своими границами помещается в области* G *пространства, причем свободных зарядов в указанной области нет. Тогда данное утверждение запишется как*

$$\iiint\limits_G \vec{f}\left(\vec{r}\right) d^3\vec{r} = -\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_G \left|\vec{E}\right|^2 \nabla\varepsilon\ d^3\vec{r} = -\iiint\limits_G \vec{E}\left(\nabla,\vec{P}\right) d^3\vec{r} = \iiint\limits_G \vec{E}\,\rho_{Пол}\ d^3\vec{r}.$$

Здесь предпоследний знак равенства неочевиден. Его обоснуем ниже. Пока отметим, что при вычислении силы мы исключили стрикционный член, поскольку он представляет собой градиент величины, обращающейся на границе в ноль, а потому интеграл от него должен обратиться в ноль. По той же причине в ноль должен обратиться и следующий интеграл:

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_G \left(\left|\vec{E}\right|^2 \nabla\varepsilon - \left(\varepsilon-1\right)\nabla\left(\left|\vec{E}\right|^2\right)\right) d^3\vec{r} = 0.$$ *Следовательно*

$$-\frac{1}{8\pi}\iiint\limits_G \left|\vec{E}\right|^2 \nabla\varepsilon\, d^3\vec{r} = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_G \left(\varepsilon-1\right)\nabla\left(\left|\vec{E}\right|^2\right) d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \left(\varepsilon-1\right)\nabla\left(\vec{E},\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) d^3\vec{r} = \iiint\limits_G \nabla\left(\vec{P},\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right) d^3\vec{r},$$

То есть сила, действующая на «изолированный» кусок диэлектрика, вычисленная по формуле (36), равна сумме сил, действующих на все диполи диэлектрика, вычисленные по формуле (19.2). Теперь для обоснования упомянутого выше знака равенства осталось доказать, что

$$\iiint\limits_G \left(\vec{E}\left(\nabla,\vec{P}\right) + \nabla\left(\vec{P},\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right) d^3\vec{r} = 0.$$

Последнее равенство можно доказать, расписав его по координатам. Так с учетом консервативности поля $\vec{E}$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x};\quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x};\quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$ *его левую часть можно*

Привести к виду

$$\iiint_G \left(\vec{E}\left(\nabla,\vec{P}\right)+\nabla\left(\vec{P},\overset{\downarrow}{\vec{E}} \right) \right) d^3\vec{r} = \iiint_G \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(E_xP_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_xP_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xP_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(E_yP_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_yP_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_yP_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(E_zP_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_zP_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_zP_z\right) \end{pmatrix} d^3\vec{r}.$$

Каждое слагаемое, содержащееся в полученном подынтегральном выражении есть компонента градиента величины, обращающейся в ноль на границе области G. Следовательно, интеграл как от каждого упомянутого слагаемого, так и от всего полученного выражения, должен обратиться в ноль.

Доказанное утверждение полезно тем, что, во-первых, оно **работает** также для диэлектрика с **«замороженной» поляризацией**. Во-вторых, его также можно доказать и **для момента сил**, действующих на кусок диэлектрика. Ну и в-третьих, при вычислении таким образом как силы, так и момента сил, действующих на кусок диэлектрика, можно **исключить действие** на заряды **собственного поля** данного куска диэлектрика, поскольку внутренние силы системы не влияют ни на равнодействующую, ни на суммарный их момент.

5) ***Вывод формулы (36).

Эту часть специально пишу очень мелким шрифтом, тем не менее, без нее тему не могу считать вполне раскрытой. Действительно, есть задачи, которые трудно решить честно без использования максвелловских напряжений, которое без формулы (36) видится не вполне обоснованным.

Итак, попробуем применить метод виртуальных перемещений в самом общем виде. При этом движение диэлектрической среды с первоначальным распределением диэлектрической проницаемости $\varepsilon\left(\vec{r}\right)$ будем представлять в виде малого смещения $\vec{\xi}\left(\vec{r}\right)$ каждого ее элемента относительно начального положения. При этом, очевидно может произойти изменение материальной плотности среды, обусловленной ее деформацией, которая в силу малости смещений $\vec{\xi}$ также будет малой. Пусть начальное распределение этой плотности равно $\rho_м\left(\vec{r}\right)$. После указанных смещений, в результате которых произойдет фактически преобразование пространства

$$\vec{r}_1\left(\vec{r}\right)=\vec{r}+\vec{\xi}\left(\vec{r}\right),$$

объемы элементарных ячеек среды будут определяться якобианом данного преобразования, то есть

$$\delta V_1\left(\vec{r}_1\right)=\delta V\left(\vec{r}\right)\left(1+\left(\nabla,\vec{\xi}\right)\right).$$

Поэтому материальная плотность соответствующих точек среды (сдвинутых на $\vec{\xi}$)

$$\rho_{м1}\left(\vec{r}+\vec{\xi}\right)=\rho_м\left(\vec{r}\right)\left(1-\left(\nabla,\vec{\xi}\right)\right).$$

Изменение материальной плотности должно приводить к изменению диэлектрической проницаемости среды в смещенной точке:

$$\varepsilon_1\left(\vec{r}+\vec{\xi}\right)=\varepsilon\left(\vec{r}\right)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\rho_м\left(\nabla,\vec{\xi}\right).$$

Для того, чтобы найти новое значение диэлектрической проницаемости в изначальной точке пространства вычтем ее приращение при смещении на $\vec{\xi}$:

$$\varepsilon_1\left(\vec{r}\right)=\varepsilon\left(\vec{r}\right)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\rho_м\left(\nabla,\vec{\xi}\right)-\left(\vec{\xi},\nabla\varepsilon\right)=\varepsilon\left(\vec{r}\right)+\delta\varepsilon\left(\vec{r}\right). \qquad (38)$$

Пусть теперь изменение диэлектрической проницаемости сопровождается каким-то приращением напряженности электрического поля $\delta\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ и связанной с ней индукции $\delta\vec{D}=\varepsilon\,\delta\vec{E}+\vec{E}\,\delta\varepsilon.$ При этом вполне допускается движение свободных зарядов, сопровождающихся работой ЭДС. Найдем приращение полной электрической энергии в системе (33) и отдельно работу ЭДС (32). Обратим внимание, что при выводе выражения (32) для работы ЭДС никак не использовался факт постоянства распределения диэлектрической проницаемости. Он использовался при отождествлении выражения (33) с энергией системы, поскольку в этом случае работу может совершать только ЭДС.

Итак, выражения (33) и (32) дают

$$\delta W=\frac{1}{8\pi}\iiint\left(E^2\delta\varepsilon+\varepsilon\,\delta\left(E^2\right)\right)d^3\vec{r};$$

$$\delta A_Б=\frac{1}{8\pi}\iiint\left(2E^2\delta\varepsilon+\varepsilon\,\delta\left(E^2\right)\right)d^3\vec{r}.$$

Работа пондеромоторных сил идет в сторону уменьшения энергии, в то время как работа ЭДС – в сторону увеличения:

$$\delta W=\delta A_Б-\delta A_П \;\Rightarrow\; \delta A_П=\delta A_Б-\delta W=\frac{1}{8\pi}\iiint E^2\delta\varepsilon\, d^3\vec{r}=$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\iiint E^2\rho_м\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\left(\nabla,\vec{\xi}\right)d^3\vec{r}-\frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{\xi},E^2\nabla\varepsilon\right)d^3\vec{r}=$$

$$=-\frac{1}{8\pi}\iiint E^2\rho_м\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\delta\left(d^3\vec{r}\right)-\frac{1}{8\pi}\iiint\left(\vec{\xi},E^2\nabla\varepsilon\right)d^3\vec{r}.$$

Здесь $\delta\left(d^3\vec{r}\right)=\left(\nabla,\vec{\xi}\right)d^3\vec{r}$ есть не что иное как изменение объема ячейки пространства $d^3\vec{r}$ при деформации среды, вызванной ее движением. В силу этого выражение перед данным изменением в выражении для работы имеет физический смысл давления, которое порождает силу равную его градиенту, взятому с обратным знаком. Во втором же интеграле в скалярном произведении с $\vec{\xi}$ мы имеем силу, действующую на элемент объема в чистом виде. В итоге, суммируя выше сказанное, получаем в чистом виде выражение для силы, действующей на элемент объема среды:

$$\delta\vec{F}=\frac{1}{8\pi}\left(\nabla\left(E^2\rho_м\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho_м}\right)-E^2\nabla\varepsilon\right)d^3\vec{r}.$$

Это фактически в чистом виде есть формула (36).

Основные утверждения и формулы

Для «сборки» системы из n точечных **зарядов** как в пустом пространстве, так и при наличии линейных диэлектриков, требуется **работа** $W_T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$, (1)

где φ_i – **потенциал** в соответствующей точке поля **всех зарядов кроме** $i-$го. Формула (1) легко обобщается на случай непрерывно распределенного заряда. Данную **работу** называют **энергией системы.** При этом «вклад» в нее самого $i-$го заряда $\Delta W_{Ti} = q_i\varphi_i$ вдвое больше соответствующего слагаемого из (1).

Энергия «жесткого» диполя – сумма «вкладов» его зарядов без учета их взаимодействия

$$W_p = -\left(\vec{p}, \vec{E}\left(\vec{r}\right)\right). \qquad (14)$$

Отсюда сила и момент сил, действующих на любой диполь

$$\vec{F}_p = \left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{E} = \nabla\left(\vec{p}, \overset{\downarrow}{\vec{E}}\right); \qquad \vec{M}_p = \left(\vec{p}, \vec{E}\right). \quad (19.2/1)$$

Если в системе присутствуют проводники, то к энергии (1) добавляется вклад проводников: $W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_П} q_{П\,p}\varphi_{П\,p} = W_T + W_П$. (4)

Метод виртуальных перемещений основан на том, что для малого изменения геометрии системы необходимо совершить работу **против** пондеромоторных сил, равную $-\delta A_П$. Последняя определяется и равенства, содержащего **работу ЭДС** $\delta A_Б$:

$$\delta W = -\delta A_П + \sum_{p=1}^{n_П} \varphi_{П\,p}\delta q_{П\,p} = -\delta A_П + \delta A_Б. \qquad (10,11)$$

Если все заряды находятся **только на проводниках**, то $\delta A_П = \delta W_\varphi = -\delta W_q$. (26,27)

Если диэлектрики однородные, то **пондеромоторные силы** (без учета стрикции) **локализованы на их границах и границах проводников**. Их можно интерпретировать как действие максвелловского давления из среды 1 в среду 2:

$$\Delta P_{12} = \left(w_{2\perp} - w_{1\perp}\right) - \left(w_{2\parallel} - w_{1\parallel}\right); \quad w_\perp = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|\vec{E}_\perp\right|^2; \; w_\parallel = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|\vec{E}_\parallel\right|^2. \qquad (37)$$

Содержащиеся здесь величины составляют $w_e = w_\perp + w_\parallel = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ (34) – объемную **плотность электрической энергии.**

Неидеальный диэлектрик проводит ток, объемная **плотность** $\vec{j}$ которого обычно подчиняется **закону Ома:** $\vec{j} = \lambda\vec{E}$. (28). **Токи** могут **породить объемные заряды** в толще «диэлектрика». Для последних работает закон сохранения заряда: $\left(\nabla, \vec{j}\right) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$.(29)

Или для **стационарного** случая **с учетом закона Ома** $\left(\nabla, \left(\lambda\vec{E}\right)\right) = 0$. (30)

ЗАДАЧИ ГРУППЫ I

1.5 Найти выражение для энергии диполя $\vec{p}$ во внешнем поле $\vec{E}$. Рассмотреть два случая: а) диполь «жесткий» и б) диполь «упругий»: $\vec{p}=\alpha\vec{E}$.

Случай а) рассмотрен в теории. См. формулу (14):

$$W_p=-\left(\vec{p},\vec{E}\right).$$

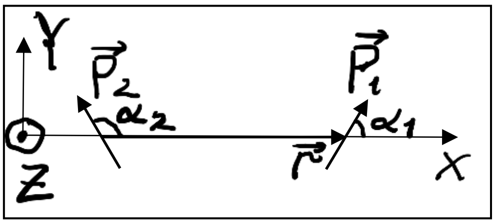
Если диполь упругий, то для его введения в данную точку следует совершить работу по преодолению пондеромоторных сил:

$$W_\alpha=-\int_\infty^{\vec{r}}\left(\vec{F}_p,d\vec{r}\right)=-\int_\infty^{\vec{r}}\left(d\vec{r},\nabla\left(\vec{p},\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right)=-\alpha\int_\infty^{\vec{r}}\left(d\vec{r},\nabla\left(\vec{E},\overset{\downarrow}{\vec{E}}\right)\right)=$$

$$=-\alpha\int_\infty^{\vec{r}}\left(d\vec{r},\nabla\left(\frac{E^2}{2}\right)\right)=-\frac{\alpha E^2}{2}=-\frac{\left(p,\vec{E}\right)}{2}.$$

Коэффициент $1/2$ объясняется тем, что из-за непостоянства модуля дипольного момента нельзя пренебрегать взаимодействием между зарядами диполя, которое включает также упругие силы в «пружине», которая их соединяет.

Т4.1 Две молекулы воды с дипольным моментом $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = 1,84*10^{-18}$ *эрг/Гс* находятся на расстоянии $|\vec{r}| = 3,5*10^{-7}$ *см*, лежат в одной плоскости и наклонены к оси под углами α_1 и α_2. Найти энергию W электростатического взаимодействия молекул и проекции F_{1x} и F_{1y} силы, действующих на первую молекулу.



Энергия взаимодействия равна взятой с обратным знаком работе, требующейся для удаления любого из диполей на бесконечное расстояние. Она выражается формулой (14). Применив ее к первой молекуле, получим:

$$W = -\left(\vec{p}_1, \left(\frac{3\vec{r}(\vec{p}_2, \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3}\right)\right) = \frac{(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{r^3} - \frac{3}{r^5}(\vec{p}_1, \vec{r})(\vec{p}_2, \vec{r}).$$

Через данные в задаче параметры она выразится как

$$W = W_0\left(\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - 3\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right) = W_0\left(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right);$$

$$W_0 = \frac{p^2}{r^3} = \frac{1,84^2}{3,5^3} * 10^{-15}\, \text{эрг} \approx 8*10^{-17}\, \text{эрг}.$$

Для вычисления силы следует продифференцировать выражение для энергии, записанное в векторном виде:

$$\vec{F}_1 = -\nabla W = -\frac{15}{r^7}(\vec{p}_1, \vec{r})(\vec{p}_2, \vec{r}) + \frac{3}{r^5}\left(\left(\vec{p}_1(\vec{p}_2, \vec{r})\right) + \left(\vec{p}_2(\vec{p}_1, \vec{r})\right) + \left(\vec{r}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)\right)\right).$$

Или в координатах

$$F_x = F_0\left(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right);\ F_y = F_0\sin(\alpha_1 + \alpha_2);$$

$$F_0 = 3\frac{p^2}{r^4} = 3*\frac{1,84^2 * 10^{-36}}{3,5^4 * 10^{-28}}\, \text{дин} = 6,7*10^{-10}\, \text{дин};$$

3.44 Найти радиус r_e электрона при котором энергия его поля равна его энергии покоя $W_p = mc^2$. Рассмотреть случаи а) заряд однородно заполняет шар и б) заряд распределен по сфере.

Для энергии поля удобно пользоваться исходной формулой (4) через распределение потенциала. В случае б) заряд весь заряд находится в области с одним потенциалом и для него

$$W = \frac{e\varphi}{2} = \frac{e^2}{2r_e} = mc^2 \Rightarrow r_e = \frac{e^2}{2mc^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\left(4,8*10^{-10}\,Гс\,см^2\right)^2}{9,1*10^{-27}*9*10^{20}\,Гс^2см^3} = \frac{1}{2}*2,8*10^{-13}\,см = \frac{r_{кл}}{2}.$$

Для случая а) следует учесть распределение потенциала в шаре

$$\varphi(r) = \frac{e^2}{r_e}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_e^2}\right) \Rightarrow W = \frac{1}{2}\int_0^{r_e}\varphi(r)\rho(r)4\pi r^2 dr =$$

$$\frac{3}{2}\frac{e^2}{r_e^4}\int_0^{r_e}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2r_e^2}\right)r^2 dr = \frac{3}{2}\frac{e^2}{r_e}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_e} = mc^2$$

$$\Rightarrow r_e = \frac{3}{5}r_{кл}.$$

3.67,3.68 Имеется конденсатор в виде полудиска радиусом R, с расстоянием между пластинами d. заряженный до напряжения V. В него (без отключения источника питания) во всю толщину вставлена диэлектрическая пластина с проницаемостью ε и повернута относительно центра на угол θ. Найти момент силы, поворачивающий пластину обратно. Почему он обращается в нуль, когда $\theta = 0$?

Задача очевидно решается методом виртуальных перемещений. Поскольку тут постоянным является напряжение, и решать будем при постоянных потенциалах. При этом элемент работы пондеромоторных сил, согласно (26) и (24)

$$\delta A_{П} = +\delta W_{\varphi} = \frac{1}{2} V^2 \delta C.$$

Осталось найти связь емкости C конденсатора с углом θ. Конденсатор можно рассмотреть как два соединенных параллельно конденсатора (один без пластины, другой – с пластиной).

$$C(\theta) = \frac{S_1 + \varepsilon S_2}{4\pi d} = \frac{R^2}{8\pi d}\left(|\theta| + \varepsilon\left(\pi - |\theta|\right)\right) = \frac{R^2}{8\pi d}\left(\pi\varepsilon - (\varepsilon - 1)|\theta|\right).$$

$$\Rightarrow \delta A_n = -R^2 V^2 \frac{\varepsilon - 1}{16\pi d} \frac{|\theta|}{\theta} \delta\theta = M\,\delta\theta \Rightarrow |M| = R^2 V^2 \frac{\varepsilon - 1}{16\pi d}.$$

Как видим, направление момента при переходе через ноль резко меняет знак. Переход станет плавным, если учесть краевые эффекты.

4.36 Цепь постоянного тока состоит из длинной однопроводной линии со включенной ЭДС $\mathscr{E}$, замкнутой чрез два шара, зарытых в землю на большом расстоянии друг от друга (и на большой глубине). Найти заряды Q_1 и Q_2 каждого шара, если их радиусы равны r_1 и r_2, проводимость грунта в местах, где они закопаны – λ_1 и λ_2, а все сопротивления в цепи малы по сравнению с сопротивлением заземления.

Начнем с того, что задаче не хватает данных о диэлектрической проницаемости грунта, а потому будем ее считать равной единице (что, однако, не физично)

Поскольку все сопротивления кроме заземления малы, а расстояние между шарами (и глубина, на которой они закопаны) много больше их радиусов, данная в задаче ЭДС равна разности потенциалов между двумя изолированными шарами (поскольку грунт вблизи каждого шара считается однородным, объемных зарядов, искажающих поле, возникать не должно).

$$\mathscr{E} = \frac{Q_1}{r_1} - \frac{Q_2}{r_2}.$$

С другой стороны, токи J_1 и J_2, «вытекающие» из шаров, равные

$$J_{1,2} = 4\pi r_{1,2}^2 j_{1,2} = 4\pi\, r_{1,2}^2\, \lambda_{1,2}\, \frac{Q_{1,2}}{r_{1,2}^2} = 4\pi\, \lambda_{1,2}\, Q_{1,2}$$

Должны быть равны по модулю и противоположны по знаку, то есть

$Q_2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} Q_1 \cdot$ Подставив полученное соотношение в выражение для

ЭДС, имеем $Q_1 = \dfrac{\mathscr{E}\, \lambda_2\, r_1\, r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$; $\quad Q_2 = -\dfrac{\mathscr{E}\, \lambda_1\, r_1\, r_2}{\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2}$.