Неделя 1

Теория

1) Закон Кулона для движущихся зарядов (в СГС и СИ). Единицы измерения заряда.

Приведем выражения для силы, действующей со стороны **движущегося** точечного заряда q_1 на другой **движущийся** точечный заряд q_2. Так, если скорости их движения равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а соединяющий их радиус-вектор равен $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, то упомянутая сила в системах СГС и СИ приближенно равна

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3}\left(\vec{r} + \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}_2 \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{r}\right)\right)\right) - \text{СГС} \qquad (1)$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{v}_2 \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{r}\right)\right)\right) - \text{СИ} \qquad (2)$$

Здесь $c -$ скорость света в вакууме. При этом слагаемые в скобках соответствуют электростатическому и магнитостатическому взаимодействию соответственно. В таком приближении магнитное взаимодействие можно считать релятивистской поправкой к электростатике.

Сопоставив (2) и (1), имеем следующее известное соотношение между константами системы СИ:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \qquad (3)$$

Как же теперь определить сами константы ε_0 и μ_0? Ответ – через определения **единицы измерения силы тока (ампера)**. По определению – если по двум бесконечно длинным параллельным проводам, расположенным на расстоянии $h = 1м$ друг от друга, течет ток $J_1 = J_2 = 1A$, то сила, действующая на каждый отрезок длиной $l = 1м$ каждого провода равна

$$\left|\vec{F}\right| = 2 * 10^{-7}\, H. \quad (4)$$

Ту же величину можно выразить через константу μ_0 следующим образом:

$$\left|\vec{F}\right| = 2\frac{\mu_0}{4\pi}J_1J_2\frac{l}{h} = 2\frac{\mu_0}{4\pi}*1A^2 = 2*10^{-7}H \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{H}{A^2} = 10^{-7}\frac{Тл}{A}м = 10^{-7}\frac{Вб}{A*м} = 10^{-7}\frac{Гн}{м}. \qquad (5)$$

Отсюда имеем следующее выражение для коэффициента, стоящего в электростатической части силы (2):

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\mu_0}{4\pi}c^2 \approx 9*10^9\frac{H}{Кл^2}м^2. \qquad (6)$$

Найдем теперь соотношение между единицами измерения заряда в СИ и СГС. Возьмем два неподвижных заряда $q_1 = q_2 = q = 1СГСЭ$, расположенных на расстоянии $r = 1см$ друг от друга. Тогда, согласно (1), сила их взаимодействия по модулю равна

$$F = 1дин = 10^{-5}H. \qquad (7)$$

Тот же результат должна давать и формула (2):

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi}c^2q^2*10^4\frac{1}{м^2} = 10^{-5}H \Rightarrow q^2 = \frac{4\pi}{\mu_0c^2}*10^{-9}H\,м^2 \qquad (8)$$

что, поскольку $q = 1СГСЭ$, можно переписать как

$$1СГСЭ = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0c^2}*10^{-9}H\,м^2} \approx \frac{1}{2,998}*10^{-9}Кл \approx \frac{1}{3}*10^{-9}Кл \qquad (9)$$

или $1Кл \approx 2,998*10^9 СГСЭ \approx 3*10^9 СГСЭ.$

Последнее численное равенство является приближенным, поскольку содержит величину скорости света. Для получения точного соотношения между единицами заряда в СИ и СГС можно использовать магнитостатическое определение единицы заряда, то есть единицу измерения величины

$$\left[\frac{q}{c}\right] = 1СГСМ \quad (10)$$

Повторим предыдущее рассуждение для магнитостатической части. Так если

$$\frac{q_1}{c} = \frac{q_2}{c} = \frac{q}{c} = 1СГСМ,$$

а

$$\left|\frac{\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{r})}{|\vec{r}|^3}\right| = 1сек^{-2},$$

то сила магнитного взаимодействия равна $F_м = 1дин = 10^{-5}\,Н$.

Тот же результат должно давать второе слагаемое из (2):

$$F_м = \frac{\mu_0}{4\pi} q^2 \left|\frac{\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})}{|\vec{r}|^3}\right| = q^2 * 10^{-7}\,\frac{Н}{Кл^2} = 10^{-5}\,Н \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q = 10Кл.$$

или

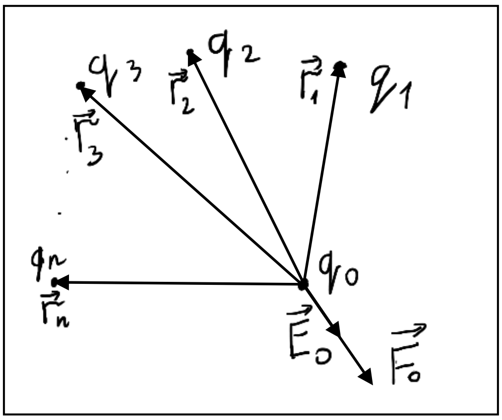
$$1СГСМ = 10Кл. \qquad (11)$$

Последнее соотношение является уже точным.

Тем не менее, **в электростатике** удобнее пользоваться единицами $СГСЭ$, а для пересчета заряда из СИ в СГС во всех предлагаемых задачах равенство (9) можно считать точным. Так величина элементарного заряда в СИ и СГС равна

$$e = 1,6 * 10^{-19}\,Кл \approx 4,8 * 10^{-10}\,СГСЭ. \quad (12)$$

2) Напряженность и индукция поля в вакууме. Теорема Гаусса.



В электростатике рассматриваются неподвижные (или почти неподвижные) заряды, вследствие чего в формулах (1) и (2) в скобках остается только первое слагаемое.

Рассмотрим теперь электростатическое взаимодействие нескольких зарядов, а именно выразим силу $\vec{F}_0$, действующую на заряд q_0 со стороны множества точечных зарядов $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Для этого соединим точку расположения заряда q_0 с точками расположения остальных зарядов радиус-векторами $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n\}$. Далее, применив формулу (1) и принцип суперпозиции, получим следующее выражение для искомой силы:

$$\vec{F}_0 = q_0 \sum_{i=1}^{n} -\frac{q_i}{\left|\vec{r}_i\right|^3}\vec{r}_i = q_0\vec{E}_0 \qquad (13)$$

Величину $\vec{E}_0$ назовем напряженностью электрического поля, создаваемого множеством зарядов $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ в точке расположения заряда q_0. Очевидно, что если пробный заряд переместить в точку с радиус-вектором $\vec{r}$, то сила, действующая на него, будет соответствовать напряженности

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i). \qquad (14)$$

Та же формула в системе СИ будет иметь вид

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3}(\vec{r} - \vec{r}_i). \qquad (15)$$

Если из формулы (15) убрать константу ε_0, то получится выражение для индукции электрического поля в вакууме $\vec{D}(\vec{r})$. Получается, что

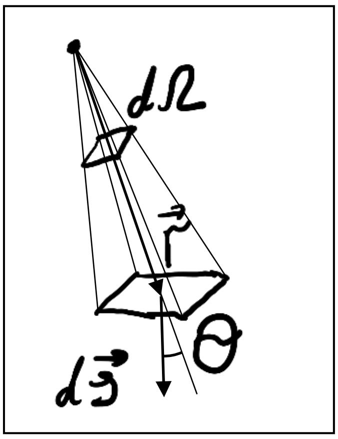
в вакууме в системе СГС индукция поля равна напряженности в то время **как в СИ** эти величины имеют даже разную размерность ввиду следующего равенства:

$$\vec{D}\left(\vec{r}\right) = \varepsilon_0 \vec{E}\left(\vec{r}\right). \qquad (16)$$

Найдем сразу соотношение между единицами напряженности поля E. В СИ единицами измерения напряженности являются $\left[E\right] = 1В/м = 1Н/Кл$. В СГС напряженности электрического и магнитного полей измеряются фактически в одних и тех же единицах, хотя их почему-то принято называть по-разному. Здесь для краткости назовем их гауссами $\left(Гс\right)$. Напряженность, по модулю равная $1Гс$, создается зарядом в $q_1 = 1СГСЭ = \left(1/3\right)*10^{-9}\,Кл$ на расстоянии в $\left|\vec{r}\right| = 1см = 10^{-2}\,м$ или

$$\begin{aligned} 1Гс &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\left|\vec{r}\right|^2} \approx 9*10^9\,\frac{Н\,м^2}{Кл^2}*\frac{1}{3}*\frac{10^{-9}\,Кл}{10^{-4}\,м^2} = \\ &= 3*10^4\,\frac{Н}{Кл} = 3*10^4\,\frac{В}{м}. \end{aligned} \qquad (17)$$

Для рассмотрения фундаментального интегрального свойства электрического поля следует ввести понятие **телесного угла** «видения» поверхности. Последний фактически представляет собой **меру множества направлений**, в которых пущенные из заданной точки лучи пересекают рассматриваемую поверхность. На самом деле для ориентированных поверхностей, каковой является граница любой ограниченной области, это не совсем так, но для начала определимся с мерой направлений. Для этого окружим точку, из которой рассматривается объект, сферой единичного радиуса. Тогда любому лучу, пущенному из данной точки, можно поставить в соответствие точку на упомянутой сфере. Взяв множество всех лучей, попадающих на рассматриваемую поверхность, можно таким образом получить ее «проекцию» на упомянутую сферу. Площадь полученной проекции при



определенных условиях можно считать телесным углом. Этим условиям заведомо удовлетворяет случай бесконечно малого элемента рассматриваемой поверхности. Так, если поверхность гладкая, то любой бесконечно малый ее элемент можно считать плоским. В свою очередь к плоскости можно провести нормаль. Проведем в направлении нормали вектор $d\vec{s}$, длина которого равна площади данного элемента поверхности. Если выбрать направление нормали так, как указано на рисунке, то в силу того, что для бесконечно малого элемента все лучи, пущенные к разным точкам элемента поверхности почти параллельны, нетрудно убедиться в том, что телесный угол этого элемента поверхности равен

$$d\Omega = \left|d\vec{s}\right| \frac{\cos\theta}{\left|\vec{r}\right|^2} = \frac{\left(d\vec{s},\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|} \bullet \frac{1}{\left|\vec{r}\right|^2} = \frac{\left(d\vec{s},\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^3}. \quad (18)$$

Обратим внимание, что направление вектора $d\vec{s}$ можно выбрать двумя способами, и от этого выбора будет зависеть знак выражения (18). Да, **телесный угол** для незамкнутой поверхности **может быть отрицательным.** В случае ориентированной поверхности направление упомянутого вектора определено однозначно. Так для ориентированной вовне границы области $d\vec{s}$ направлен в сторону, где ближайшие точки не принадлежат данной области. Именно такие поверхности фигурируют в **теореме Гаусса**. Возьмем ограниченную область G с ориентированной вовне границей ∂G. Рассмотрим поток напряженности поля точечного заряда q. Для простоты совместим начало отсчета с точкой расположения заряда. Тогда рассматриваемый поток, согласно известному определению, запишется в следующем виде:

$$\Phi_{\vec{E},\partial G} = \oiint\limits_{\partial G} \left(\vec{E}\left(\vec{r}\right), d\vec{s}\right) = q \oiint\limits_{\partial G} \frac{\left(\vec{r}, d\vec{s}\right)}{\left|\vec{r}\right|^3} = q \oiint\limits_{\partial G} d\Omega = q \bullet \Omega. \qquad (19)$$

Здесь $\Omega -$ телесный угол, под которым видна поверхность (в данном случае ∂G) из точки, в которой находится заряд. Обратим внимание, что последнее выражение верно для случая произвольной ориентированной (не обязательно замкнутой) поверхности. В случае же с ориентированной вовне границей телесный угол может принимать только два значения – либо ноль, если точка не принадлежит области G, либо 4π (площади сферы единичного радиуса) если принадлежит. Строгое доказательство последнего утверждения ищем в учебниках. Здесь отмечу лишь, что понятие телесного угла и упомянутое утверждение являются крайне важными для доказательства ключевых теорем курса.

Применив принцип суперпозиции, имеем

$$\Phi_{\vec{E},\partial G} = \oiint\limits_{\partial G} \left(\vec{E}(\vec{r}), d\vec{s} \right) = 4\pi Q \qquad (20)$$

или в системе СИ

$$\Phi_{\vec{D},\partial G} = \oiint\limits_{\partial G} \left(\vec{D}(\vec{r}), d\vec{s} \right) = Q. \quad (21)$$

Здесь $Q-$ суммарный заряд, заключенной внутри области G. Равенство (20) называется **теоремой Гаусса**.

Пусть теперь **заряд** не сосредоточен в отдельных точках, а **«размазан»** по пространству с в переменной общем случае плотностью $\rho(\vec{r})$. Тогда (20) перепишется в виде

$$\oiint\limits_{\partial G} \left(\vec{E}(\vec{r}), d\vec{s} \right) = 4\pi \iiint\limits_{G} \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} \qquad (22)$$

Если теперь ввести декартову ортогональную систему координат XYZ, а в качестве области G выбрать бесконечно малый прямоугольный параллелепипед с ребрами параллельными осям X, Y и Z длинами dx, dy и dz соответственно, то, предполагая все компоненты вектора $\vec{E}(x, y, z)$ дифференцируемыми, а функцию $\rho(x, y, z)-$ непрерывной, непосредственно из (22) можно получить

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = 4\pi\rho\, dx\, dy\, dz$$

или

$$\left(\nabla, \vec{E} \right) = 4\pi\rho. \qquad (23)$$

Более развернутый вывод формулы (23) ищем в учебниках или проделываем сами. Равенство (23) есть **теорема Гаусса в дифференциальной форме**, в то время как (22) – **в интегральной**

Несколько полезных формул для дивергенции $\left(\nabla,\vec{E}\right)$:

$$\text{Если } \vec{E}=\alpha\left(\vec{r}\right)\vec{a}\left(\vec{r}\right), \text{ то } \left(\nabla,\vec{E}\right)=\alpha\left(\nabla,\vec{a}\right)+\left(\vec{a},\nabla\alpha\right); \qquad (24.1)$$

$$\text{если } \alpha\left(\vec{r}\right)=\alpha\left(f\left(\vec{r}\right)\right), \text{ то } \nabla\alpha=\alpha'\left(f\left(\vec{r}\right)\right)\nabla f; \qquad (24.2)$$

$$\left(\nabla,\vec{r}\right)=3; \quad \left(\nabla,\vec{r}_{\perp}\right)=2; \quad \left(\nabla,\vec{r}_{n}\right)=1; \qquad (24.3)$$

$$\nabla\left|\vec{r}\right|=\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}; \quad \nabla\left|\vec{r}_{\perp}\right|=\frac{\vec{r}_{\perp}}{\left|\vec{r}_{\perp}\right|}; \quad \nabla\left|\vec{r}_{n}\right|=\frac{\vec{r}_{n}}{\left|\vec{r}_{n}\right|}=\vec{n}; \qquad (24.4)$$

Здесь $\alpha'\left(f\right)-$производная скалярной функции α по аргументу f; $\nabla\alpha$ − градиент скалярной функции α; $r_{\perp}$ − вектор, проведенный к данной точке от ближайшей точки выбранной прямой, а r_n − вектор, проведенный от ближайшей точки выбранной плоскости.

3) Электрический диполь

Электрический диполь в простейшем случае представляет собой два одинаковых по модулю и противоположных по знаку точечных заряда $+q$ и $-q$, расположенных друг от друга на фиксированном расстоянии l, малом по сравнению с размерами неоднородностей поля.

Диполь характеризуется **моментом** $\vec{p}$, определяемым величиной заряда q и вектором $\vec{l}$, проведенным между точками расположения зарядов $-q$ и $+q$:

$$\vec{p}\equiv q\vec{l}. \qquad (25)$$

Найдем сразу **момент сил,** действующих на диполь со стороны внешнего однородного поля с напряженностью $\vec{E}$. Взяв за точку расположения диполя $\vec{r}$ середину отрезка, соединяющего заряды, по определению момента сил получим

$$\vec{M} = \left(\left(\vec{r} + \vec{l}/2\right) \times q\vec{E}\right) + \left(\left(\vec{r} - \vec{l}/2\right) \times \left(-q\vec{E}\right)\right) = \vec{l} \times \left(q\vec{E}\right) = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (26)$$

Получившуюся простую связь между моментом силы и величиной $\vec{p}$ можно считать оправданием наличию слова **«момент»** в названии последней.

Теперь рассмотрим силу $\vec{F}$, действующую со стороны **неоднородного поля** $\vec{E}(\vec{r})$. Заметим, что **в случае однородного поля** $\left(\vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{const}\right)$ сила равна нулю, поскольку в этом случае силы, действующие на заряды, равны по модулю и противоположны по направлению, а потому компенсируют друг друга.

Если теперь разложить каждую компоненту поля $\vec{E}$ в ряд Тейлора с точностью до линейных слагаемых, можно получить:

$$\begin{aligned}
&\vec{F} = q\left(\vec{E}\left(\vec{r} + \vec{l}/2\right) - \vec{E}\left(\vec{r} - \vec{l}/2\right)\right) = \\
&= q\begin{pmatrix} l_x\left(\partial E_x/\partial x\right) + l_y\left(\partial E_x/\partial y\right) + l_z\left(\partial E_x/\partial z\right) \\ l_x\left(\partial E_y/\partial x\right) + l_y\left(\partial E_y/\partial y\right) + l_z\left(\partial E_y/\partial z\right) \\ l_x\left(\partial E_z/\partial x\right) + l_y\left(\partial E_z/\partial y\right) + l_z\left(\partial E_z/\partial z\right) \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} \left(\vec{l}, \nabla\right) E_x \\ \left(\vec{l}, \nabla\right) E_y \\ \left(\vec{l}, \nabla\right) E_z \end{pmatrix} = \qquad (27) \\
&= q\left(\vec{l}, \nabla\right)\vec{E} = \left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{E}.
\end{aligned}$$

Полученное выражение позволяет найти, например, силу $\vec{F}_{q_0,\vec{p}}$, действующую на диполь со стороны точечного заряда q_0, расположенного в начале координат.

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_{q_0,\vec{p}}\left(\vec{r}\right) = q_0\left(\vec{p}, \nabla\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = q_0\left(\vec{r}\left(\vec{p}, \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|^3}\right)\right) + \frac{1}{|\vec{r}|^3}\left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{r}\right) = \\
&q_0\left(-3\frac{\vec{r}\left(\vec{p}, \vec{r}\right)}{|\vec{r}|^5} + \frac{\left(\vec{p}, \nabla\right)\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right). \qquad (28)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождествами (24.2) и (24.3).

Для дальнейшего преобразования следует выписать еще одно полезное, но не совсем очевидное тождество: если $\vec{a}$ – произвольный вектор, то

$$\left(\vec{a},\nabla\right)\vec{r}=\begin{pmatrix} a_x\left(\partial x/\partial x\right)+a_y\left(\partial x/\partial y\right)+a_z\left(\partial x/\partial z\right) \\ a_x\left(\partial y/\partial x\right)+a_y\left(\partial y/\partial y\right)+a_z\left(\partial y/\partial z\right) \\ a_x\left(\partial z/\partial x\right)+a_y\left(\partial z/\partial y\right)+a_z\left(\partial z/\partial z\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}=\vec{a}. \qquad (29)$$

С учетом последнего (28) запишется как

$$\vec{F}_{q_0,\vec{p}}\left(\vec{r}\right)=q_0\left(\frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}\right|^3}-3\frac{\vec{r}\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^5}\right). \qquad (30)$$

Обратим внимание, что, если переместить заряд в противоположную от диполя точку, то ни величина, ни направление силы не изменится:

$$\vec{F}_{q_0,\vec{p}}\left(-\vec{r}\right)=\vec{F}_{q_0,\vec{p}}\left(\vec{r}\right). \qquad (31)$$

Поменяем теперь местами диполь и заряд. Тогда сила, действующая со стороны диполя на заряд, согласно третьему закону Ньютона, будет равна

$$\vec{F}_{\vec{p},q_0}\left(\vec{r}\right)=-\vec{F}_{q_0,\vec{p}}\left(-\vec{r}\right)=q_0\left(3\frac{\vec{r}\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^5}-\frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}\right|^3}\right)=q_0\vec{E}_{\vec{p}}\left(\vec{r}\right). \qquad (32)$$

Здесь $\vec{E}_{\vec{p}}\left(\vec{r}\right)$ – напряженность электрического поля диполя в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ (относительно диполя). Сама напряженность поля, согласно (32), равна

$$\vec{E}_{\vec{p}}\left(\vec{r}\right)=3\frac{\vec{r}\left(\vec{p},\vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^5}-\frac{\vec{p}}{\left|\vec{r}\right|^3}. \qquad (33)$$

Задачи группы I

1.14 Два параллельных тонких провода лежат на плоскости на расстоянии d друг от друга и заряжены с линейной плотностью $\kappa_1 = +\kappa$ и $\kappa_2 = -\kappa$ Точка наблюдения находится в плоскости симметрии системы на расстоянии h от плоскости, на которой лежат провода.

Найдем вначале в векторном виде напряженность поля $\vec{E}_\kappa(\vec{r})$, создаваемую одним проводом с погонным зарядом κ. Нетрудно доказать, что, если провода бесконечно длинные, то продольная (направленная вдоль проводов) компонента напряженности поля равна нулю, а также то, что поле направлено вдоль нормали к проводу $\vec{r}_\perp$, а ее абсолютная величина зависит только от расстояния $|\vec{r}_\perp|$:

$$\vec{E}_\kappa(\vec{r}) = E_\kappa(r_\perp)\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp}.$$

Применим теорему Гаусса, окружив отрезок одного из проводов провода цилиндрической (с осью симметрии, совпадающей с выбранным проводом) поверхностью радиусом $\vec{r}_\perp$ длиной l. Поток поля через границы указанного цилиндра (включая основания) равен

$$\Phi_{E_\kappa,\partial G} = 2\pi r_\perp l\, E_\kappa(r_\perp) = 4\pi\kappa l \Rightarrow E_\kappa(r_\perp) = 2\frac{\kappa}{r_\perp}$$

или с учетом выше написанного

$$\vec{E}_\kappa(\vec{r}) = 2\kappa\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}.$$

Восстановим теперь перпендикуляр с плоскости, в которой лежат провода, до точки наблюдения и обозначим его за вектор $\vec{h}$. Проведем через основание этого перпендикуляра между положительно и отрицательно заряженным проводом перпендикулярный им вектор $\vec{d}$. Тогда для первого провода $\vec{r}_{\perp 1} = \vec{h} + \vec{d}/2$; $\vec{r}_{\perp 2} = \vec{h} - \vec{d}/2$; $\vec{h} \perp \vec{d}$. Просуммируем векторы напряженностей поля, создаваемого разными проводами в точке наблюдения.

$$\vec{E} = \vec{E}_{\kappa_1}\left(\vec{r}_1\right) + \vec{E}_{\kappa_2}\left(\vec{r}_2\right) = 2\kappa_1 \frac{\vec{r}_{\perp 1}}{r_{\perp 1}^2} + 2\kappa_1 \frac{\vec{r}_{\perp 2}}{r_{\perp 1}^2} =$$

$$2\kappa\left(\frac{\vec{r}_{\perp 1}}{r_{\perp 1}^2} - \frac{\vec{r}_{\perp 2}}{r_{\perp 1}^2}\right) = 4\kappa \frac{\vec{d}/2}{h^2 + d^2/4} = \frac{8\kappa\vec{d}}{4h^2 + d^2}.$$

1.21 Найти объемную плотность $\rho(r)$ распределения заряда в шаре, если напряженность поля в каждой точке внутри него направлена вдоль радиуса и по абсолютной величине равна E_0.

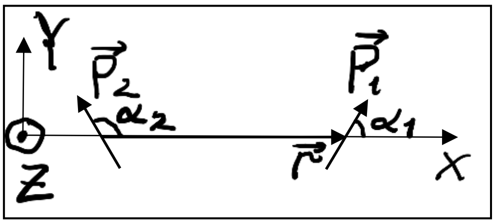
Данную задачу удобнее всего решать через теорему Гаусса в дифференциальной форме. Так, поскольку во всей интересующей нас области нам известно распределение напряженности поля:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = E_0 \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|} = E_0 \frac{\vec{r}}{r},$$

согласно (23), для решения задачи достаточно взять дивергенцию полученного выражения. С учетом равенств (24) имеем:

$$\rho\left(\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\nabla, \vec{E}\right) = \frac{E_0}{4\pi}\left(\nabla, \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}\right) = \frac{E_0}{4\pi}\left(\frac{3}{\left|\vec{r}\right|} - \frac{\left(\vec{r}, \vec{r}\right)}{\left|\vec{r}\right|^3}\right) = \frac{E_0}{2\pi r}.$$

Т1.1 Две молекулы воды с дипольным моментом $\left|\vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_2\right| = 1{,}84 * 10^{-18}$ *эрг/Гс* находятся на расстоянии $\left|\vec{r}\right| = 3{,}5 * 10^{-7}$ *см*, лежат в одной плоскости и наклонены к оси под углами α_1 и α_2. Найти силу $\vec{F}$ их взаимодействия действующие на молекулы относительно центров для случаев



а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0;$ б) $\alpha_1 = \pi/2;\ \alpha_2 = \pm\pi/2;$

в) $\alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = \pm\pi/2$

Найти также максимальное ускорение молекул.

Силу будем искать в общем векторном виде как действующую на первую молекулу.

По формуле (23) с учетом (33) получаем:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}_1, \nabla\right)\left(\frac{3\vec{r}\left(\vec{p}_2, \vec{r}\right)}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3}\right) =$$

$$= -15\frac{\vec{r}}{r^7}\left(\vec{p}_1, \vec{r}\right)\left(\vec{p}_2, \vec{r}\right) + 3\frac{\vec{r}}{r^5}\left(\vec{p}_2, \vec{p}_1\right) + 3\frac{\vec{p}_1}{r^5}\left(\vec{p}_2, \vec{r}\right) + 3\frac{\vec{p}_2}{r^5}\left(\vec{p}_1, \vec{r}\right).$$

Или по координатам, с учетом того, что $\left|\vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_2\right| = p$:

$$F_x = \frac{p^2}{r^4}\left(-15\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + 3\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) + 6\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right) =$$

$$= 3\frac{p^2}{r^4}\left(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\right);$$

$$F_y = 3\frac{p^2}{r^4}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1\right) = 3\frac{p^2}{r^4}\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right).$$

Варианты а) $F_x = -6\frac{p^2}{r^4} = -2F_0;\ F_y = 0;$ б) $F_x = \pm 3\frac{p^2}{r^4} = \pm F_0;\ F_y = 0;$

в) $F_x = 0;\ F_y = \pm 3\frac{p^2}{r^4}$.

Величина силы в обоих случаях одинакова и равна

$$F_0 = 3\frac{p^2}{r^4} = 3*\frac{1,84^2*10^{-36}}{3,5^4*10^{-28}}\,дин = 6,7*10^{-10}\,дин;$$

Максимальное ускорение реализуется в варианте а) и равно

$$a = 2\frac{F_0}{m} = \frac{2F_0}{18m_p} = 2\frac{6,7*10^{-10}\,дин}{18*1,67*10^{-24}\,г} = 4,5*10^{13}\,\frac{см}{с^2} = 4,5*10^{10}\,g.$$

В официальном ответе для ускорения дана вдвое меньшая величина.

1.22. В однородно заряженном шаре с объемной плотностью ρ имеется незаряженная сферическая полость. Центр полости O' смещен относительно центра шара O. $\overrightarrow{OO'} = \vec{r}$. Найти поле внутри полости.

Для решения задачи можно воспользоваться принципом суперпозиции и считать полость результатом наложения однородно заряженного шара без полости и также однородно, но противоположно заряженного шара, занимающего полость. Тогда полость принадлежит обоим шарам, а значит поле в точке A складывается из идентичных выражений для полей внутри шара. Так, пользуясь теоремой Гаусса в интегральном виде (22), нетрудно получить выражение для поля внутри однородно заряженного шара без полости (с центром в точке O), в точке с радиус-вектором $\vec{r}_A$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}_A - \vec{r}_O}{|\vec{r}_A - \vec{r}_O|}\frac{4}{3}\pi \bullet 4\pi\rho|\vec{r}_A - \vec{r}_O|^3\frac{1}{4\pi|\vec{r}_A - \vec{r}_O|^2} = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_A - \vec{r}_O).$$

Для получения ответа на вопрос, поставленный в задаче, достаточно к полученному добавить поле противоположно заряженного шара, с центром в точке O', формирующего полость:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{4}{3}\pi\rho\left((\vec{r}_A - \vec{r}_O) - (\vec{r}_A - \vec{r}_{O'})\right) = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_{O'} - \vec{r}_O) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} = \mathrm{const}.$$

1.23 Как следует распределить заряд по поверхности сферы $\sigma(\theta)$, чтобы внутри поле было однородным? Каким будет поле вне сферы?

Для простоты рассмотрим только случай, когда полный заряд сферы равен нулю. В рамках концепции решения задачи 1.22 возьмем два одинаковых противоположно заряженных шара радиусом R и разместим их так, чтобы центр положительно заряженного шара был смещен относительно центра отрицательно заряженного на $\vec{r} : |\vec{r}| << R.$ Тогда, согласно результату задачи 1.22, в области их перекрытия поле будет однородным и равным по модулю

$$\vec{E} = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} \Rightarrow \rho = \frac{3E}{4\pi|\vec{r}|}.$$

Знак «минус» в векторном выражении обусловлен тем, что, согласно результату задачи 1.22, поле в полости направлено вдоль отрезка от центра положительно заряженного шара к центру отрицательно заряженного.

При этом заряд сосредоточен в тонком поверхностном слое – множестве точек, принадлежащих только одному из шаров. Эффективная поверхностная плотность этого слоя переменна и в каждом направлении, задаваемому углом θ относительно вектора $\vec{r}$, равна произведению полученной плотности и его толщины $d(\theta)$.

Пусть $\vec{R} : |\vec{R}| = R -$ радиус-вектор, соединяющий центр отрицательно заряженного шара и точку на его поверхности, соответствующую выбранному направлению. Толщина положительно заряженного слоя (с учетом того, что отрезки, проведенные к упомянутой точке поверхности из центров двух шаров почти параллельны)

$$d(\vec{R}) \approx R - |\vec{R} - \vec{r}| \approx \frac{1}{R}(\vec{R}, \vec{r}) = |\vec{r}|\cos\theta = d(\theta).$$

Искомая поверхностная плотность

$$\sigma(\theta) = \rho d_- = \frac{3E}{4\pi}\cos\theta.$$

Поскольку, как нетрудно доказать из той же теоремы Гаусса, поле вне однородно заряженного шара идентично полю точечного заряда, поле вне сферы будет идентично полю диполя с моментом

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3\vec{r} = -\vec{E}R^3.$$

Дипольный момент направлен против (!!) поля внутри шара.