Интеграл Лебега и теория поля (ФПМИ/ПМФ, 2023)

Н.А. Гусев

27 января 2025 г.

Оглавление

Глава 52

Системы подмножеств. Борелевские функции и множества

В теории меры изучаются функции, отображающие некоторые множества в числа. Подобные функции встречаются в теории вероятностей, физике и многих других областях.

Например, *длина* представляет собой функцию μ, которая каждому множеству A из некоторого семейства $\mathcal{F}$ ставит в соответствие некоторое число $\mu(A) \in [0, +\infty]$. Естественной областью определения длины является семейство Θ всех конечных (ограниченных) числовых промежутков $I \subset \mathbb{R}$. А именно, длиной непустого промежутка $I \in \Theta$ называется число $\mu(I) := \sup I - \inf I$. Длина пустого промежутка (который тоже считается конечным) по определению равна нулю: $\mu(\emptyset) := 0$.

Легко видеть, что рассматриваемое семейство Θ замкнуто относительно операции пересечения множеств (то есть $A \cap B \in \Theta$ для любых $A, B \in \Theta$), но не замкнуто относительно операций объединения и теоретико-множественной разности (объединение двух промежутков не всегда является промежутком). Однако оказывается, что функцию μ можно продолжить с Θ на более широкое семейство подмножеств $\mathfrak{M}$ с сохранением всех важных свойств (о которых пойдёт речь далее). Для построения такого продолжения удобно использовать некоторые результаты теории множеств, о которых пойдёт речь в этом разделе.

52.1 Кольца, сигма-алгебры и другие системы подмножеств

Предположим, что X — множество и для каждого индекса i из некоторого множества индексов I (не обязательно счётного) задано некоторое множество $A_i \subset X$. Тогда *объединением семейства* $\mathcal{F} := \{A_i\}_{i \in I}$ называется множество

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \exists i \in I \text{ выполнено } x \in A_i\}. \tag{52.1}$$

Объединение семейства $\mathcal{F}$ также обозначается символом $\bigcup \mathcal{F}$. Множество

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X \mid \forall i \in I \text{ выполнено } x \in A_i\}. \tag{52.2}$$

называется *пересечением семейства* $\mathcal{F}$. Оно также обозначается символом $\bigcap \mathcal{F}$.

Если множества $\{A_i\}_{i \in I}$ попарно не пересекаются (то есть $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, где I — произвольное множество индексов), то семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ называется *дизъюнктным*. В этом случае объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ обозначается как $\bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Если $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, то говорят, что множества $\{A_i\}_{i\in I}$ *покрывают множество* A, а также что семейство $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ является *покрытием множества* A.

Если $A = \bigsqcup_{i\in I} A_i$, то говорят, что множество A *разбито на множества* $\{A_i\}_{i\in I}$, а также что семейство $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i\in I}$ является *разбиением множества* A.

Пусть X — некоторое множество, 2^X — семейство всех его подмножеств. Введём ряд терминов (наиболее важные выделены жирным шрифтом):

Определение 1. *Непустое семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется:*

1. **кольцом** (подмножеств множества X)*, если для всех $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A\cup B \in \mathcal{F}$, $A\cap B \in \mathcal{F}$ и $A \setminus B \in \mathcal{F}$.*

2. пи-системой*, если для всех $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{F}$;*

3. полукольцом*, если для всех $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{F}$ и существуют $n \in \mathbb{N}$ и множества $\{B_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$ такие, что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n B_k$;*

4. ***алгеброй**, если $\mathcal{F}$ — кольцо и $X \in \mathcal{F}$;*

5. сигма-кольцом*, если $\mathcal{F}$ — кольцо и $\forall\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ выполнено $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$;*

6. дельта-кольцом*, если $\mathcal{F}$ — кольцо и $\forall\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ выполнено $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}$;*

7. ***сигма-алгеброй**, если $\mathcal{F}$ — одновременно сигма-кольцо и алгебра;*

8. лямбда-системой*, если $X \in \mathcal{F}$, для любого $A \in \mathcal{F}$ выполнено $A^c := X \setminus A \in \mathcal{F}$ и для любых попарно непересекающихся $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ выполнено $\bigsqcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{F}$.*

Условия из определения кольца называется «замкнутость относительно взятия конечных объединений, пересечений и разностей». При этом условие $A \cap B \in \mathcal{F}$ избыточно, поскольку $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

По индукции можно проверить, что объединение любого конечного набора элементов любого кольца также является элементом этого кольца. Иначе говоря, любое кольцо замкнуто относительно взятия конечных объединений.

Приведём некоторые примеры:

- Семейство всех ограниченных подмножеств вещественной прямой является кольцом (но не является сигма-кольцом);

- Семейство всех подмножеств $\mathbb{R}$, которые конечны или имеют конечные дополнения, является алгеброй, но не является сигма-алгеброй;

- Семейство всех конечных промежутков является полукольцом (но не является кольцом).

Так как

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \setminus \left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right) = A_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k \right), \tag{52.3}$$

то всякое σ-кольцо является δ-кольцом. Обратное в общем случае неверно, так как, например, семейство всех конечных подмножеств множества $X = \mathbb{N}$ является δ-кольцом, но не является σ-кольцом.

Термин "кольцо"встречается также в общей алгебре, и это совпадение не случайно:

Утверждение 1. *Если на семействе 2^X всех подмножеств множества X ввести операции*

$$\begin{aligned} A + B &:= A \triangle B, \qquad \forall A, B \in 2^X, \\ A \cdot B &:= A \cap B, \qquad \forall A, B \in 2^X, \end{aligned} \tag{52.4}$$

а также под нейтральным элементом понимать $\emptyset$ и для любого $A \in 2^X$ определить противоположный элемент как $(-A) := A$, то оно будет образовывать кольцо в смысле общей алгебры. При этом семейство $\mathcal{F} \subset 2^X$ будет кольцом в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является подкольцом кольца 2^X в смысле общей алгебры.

Доказательство. Часть доказательства является задачей 1.14. ▲

Чтобы проверить, является ли непустое семейство $\mathcal{F}$ сигма-алгеброй, обычно используется один из следующих двух критериев:

Теорема 1 (основной критерий сигма-алгебры)**.** *Непустое семейство $\mathcal{F} \subset 2^X$ является сигма-алгеброй тогда и только тогда, когда*

1. *$\emptyset \in \mathcal{F}$;*
2. *для любого $A \in \mathcal{F}$ выполнено $A^c \in \mathcal{F}$;*
3. *для любого счётного набора $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ выполнено $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Ограничимся достаточностью, поскольку необходимость очевидна.

Так как для любых $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, то $\mathcal{F}$ замкнуто относительно взятия конечных пересечений (иначе говоря, является пи-системой). Но тогда $A \setminus B = A \cap B^c$ также принадлежит $\mathcal{F}$. Значит $\mathcal{F}$ — кольцо.

В силу первых двух пунктов $\mathcal{F}$ также является алгеброй. Наконец, в силу третьего пункта $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра. ▲

Теорема 2 (пи-лямбда-критерий сигма-алгебры)**.** *Непустое семейство $\mathcal{F}$ является сигма-алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ одновременно является пи-системой и лямбда-системой.*

Доказательство. Необходимость очевидна, ограничимся достаточностью. Так как $A \setminus B = A \cap B^c$ и $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, то $\mathcal{F}$ является кольцом. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathcal{F}$. Так как $\mathcal{F}$ является кольцом, то множества

$$B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \tag{52.5}$$

принадлежат $\mathcal{F}$. Так как они по построению попарно не пересекаются, то по определению лямбда-системы $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. ▲

Отметим, что не всякая λ-система является π-системой. Действительно если $X = \mathbb{R}^2$, то семейство

$$\mathcal{F} = \{A \times \mathbb{R} : A \subset \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \times B \;:\; B \subset \mathbb{R}\} \tag{52.6}$$

является λ-системой, но не является π-системой.

52.2 Порождённые кольца и сигма-алгебры

Пусть X - множество, $\mathcal{F} \subset 2^X$.

Утверждение 2. *Пусть I - множество (не обязательно счётное) и для любого $i \in I$ семейство $\mathcal{R}_i \subset 2^X$ является кольцом. Тогда $\mathcal{R} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{R}_i$ тоже является кольцом.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{R}$. Тогда для любого $i \in I$ выполнено $A, B \in \mathcal{R}_i$. Так как $\mathcal{R}_i$ является кольцом, то $A \cup B \in \mathcal{R}_i$. Последнее выполнено для любого $i \in I$, значит $A \cup B \in \mathcal{R}$ (по определению пересечения множеств).

Аналогично $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Значит $\mathcal{R}$ является кольцом. ▲

Часто возникает необходимость дополнить некоторое семейство $\mathcal{F}$ до кольца, добавив в него как можно меньше множеств. Для этого используется следующая конструкция:

Определение 2. *Пусть $\mathcal{F} \subset 2^X$. Тогда*

$$\mathscr{R}(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \subset 2^X \text{ - кольцо, } \mathcal{F} \subset \mathcal{R}\} \tag{52.7}$$

называется кольцом*, порождённым семейством $\mathcal{F}$.*

Заметим, что $\mathscr{R}(\mathcal{F})$ является кольцом в силу утверждению 2.

Утверждение 3. *Для любого семества $\mathcal{F} \subset 2^X$ кольцо $\mathscr{R}(\mathcal{F})$ является минимальным по вложению среди всех колец $\mathcal{R} \subset 2^X$ таких, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{R}$.*

Доказательство. В силу утверждения 2 семейство $\mathscr{R}(\mathcal{F})$ является одним из колец, включающих в себя $\mathcal{F}$. Если же $\mathcal{R}$ — другое кольцо, включающая в себя $\mathcal{F}$, то $\mathcal{R}$ является одним из колец, пересечение которых есть $\mathscr{R}(\mathcal{F})$. Следовательно, $\mathscr{R}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{R}$. ▲

Аналогичным образом определяются порождённые сигма-кольца и порождённые сигма-алгебры. В дальнейшем нам понадобяться лишь последние:

Определение 3. *Пусть $\mathcal{F} \subset 2^X$. Тогда*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ - сигма-алгебра, } \mathcal{F} \subset \mathcal{A}\} \tag{52.8}$$

называется сигма-алгеброй, *порождённой семейством $\mathcal{F}$.*

Аналогично утверждению 3 доказывается

Теорема 3 (минимальность по вложению порождённой сигма-алгебры)**.** *Для любого семейства $\mathcal{F} \subset 2^X$ семейство $\sigma(\mathcal{F})$ является минимальной по вложению сигма-алгеброй $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.*

Отметим, что операция взятия порождённого кольца (или сигма-алгебры) аналогична операции взятия линейной оболочки и аналогична операции взятия топологического замыкания.

52.3 Промежутки и клетки. Кольцо, порождённое полукольцом

Если $X = \mathbb{R}$, то семейство

$$\Theta := \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ — конечный промежуток}\} \tag{52.9}$$

является полукольцом (но не является кольцом). То же самое можно сказать о семействе всех *клеток (брусов)* в $\mathbb{R}^d$:

$$\Theta_d := \{I_1 \times \ldots \times I_d : I_k \in \Theta\}. \tag{52.10}$$

Опишем кольцо, порождённое полукольцом Θ_d. Для начала покажем, что кольцо, порождённое произвольным полукольцом, состоит из всевозможных конечных объединений элементов данного полукольца:

Лемма 1. *Для любого полукольца $\mathcal{S} \subset 2^X$ семейство*

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} P_k \;\middle|\; P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{S},\ \ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{52.11}$$

является кольцом, порождённым $\mathcal{S}$.

Доказательство.
Пусть $P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ и $Q = \bigcup_{l=1}^{m} Q_l$, где $P_k, Q_l \in \mathcal{S}$, $k \in \overline{1,n}$, $l \in \overline{1,m}$. Очевидно, что $P \cup Q = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} P_k \cup Q_l \in \mathcal{R}$. По определению полукольца $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall l \in \overline{1,m}$ выполнено $P_k \cap Q_l \in \mathcal{S}$, поэтому

$$P \cap Q = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m} P_k \cap Q_l \in \mathcal{R}. \tag{52.12}$$

Так же определению полукольца $\forall k \in \overline{1,n}$, $\forall l \in \overline{1,m}$ выполнено $P_k \setminus Q_l \in \mathcal{R}$. Тогда в силу (52.12) $\forall k \in \overline{1,n}$ имеем $\bigcap_{l=1}^{m} P_k \setminus Q_l \in \mathcal{R}$ и, следовательно,

$$P \setminus Q = \left(\bigcup_{k=1}^{n} P_k \right) \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{m} Q_l \right) = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{l=1}^{m} P_k \setminus Q_l \in \mathcal{R}.$$

Ясно, что всякое кольцо, содержащее $\mathcal{S}$, содержит и $\mathcal{R}$. Тогда по определению порождённого кольца $\mathcal{R} \subset \mathscr{R}(\mathcal{S})$. Но $\mathcal{R}$ — кольцо, содержащее $\mathcal{F}$, значит по утверждению 3 $\mathscr{R}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{R}$. ▲

Множество называется *клеточным (элементарным)*, если его можно представить в виде конечного объединения клеток. По доказанной выше лемме семейство всех клеточных множеств является кольцом, порождённым семейством всех клеток.

Обобщим одно из свойств полукольца:

Лемма 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ и $A \in \mathcal{S}$. Тогда найдутся дизъюнктные $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}$ такие, что $A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigsqcup_{l=1}^{m} B_l$.*

Доказательство. При $n = 1$ доказываемое утверждение следует из определения полукольца. Пусть утверждение верно для $n = N$, докажем что оно верно при $n = N + 1$.

Пусть $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}$ дизъюнктны и $A \setminus \bigcup_{k=1}^{N} A_k = \bigcup_{l=1}^{m} B_l$. По определению полукольца найдутся дизъюнктные $P_1, \ldots P_M \in \mathcal{S}$ такие, что $A \setminus A_{N+1} = \bigcup_{j=1}^{M} P_j$. Тогда

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcup_{k=1}^{N+1} A_k &= \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{N} A_k \right) \cap (A \setminus A_{N+1}) \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{M} P_j \right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{M} (B_k \cap P_j) \end{aligned}$$

Для всех $k \in \overline{1, N}$ и $j \in \overline{1, M}$ множество $Q_{kj} := B_k \cap P_j$ принадлежит $\mathcal{S}$. Кроме того, если $k \neq k'$ или $j \neq j'$, то $Q_{kj} \cap Q_{k'j'} = \emptyset$, поэтому семейство $\{Q_{kj}\}$ дизъюнктно. ▲

Лемма 3. *Для любых $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ найдутся дизъюнктные $D_1, \ldots, D_m \in \mathcal{S}$ такие, что $\bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcup_{j=1}^m D_j$.*

Доказательство. Рассмотрим множества $B_1 = A_1$, $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus \bigcup_{l=1}^k A_l$, $k \in \overline{1, n-1}$. В силу леммы для каждого $k \in \overline{1, n}$ множество B_k представимо в виде объединения элементов дизъюнктного семейства $\{P_k^j\}_{j=1}^{N_k} \subset \mathcal{S}$. Множества $\{B_k\}_{k=1}^n$ дизъюнктны, поэтому семейство $\mathcal{F} = \{P_k^j \mid k \in \overline{1, n},\ \ j \in \overline{1, N_k}\}$ дизъюнктно и $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcup_{k=1}^n A_k$. ▲

Из лемм 1, 2 и 3 следует общая теорема о структуре кольца, порождённого произвольным полукольцом:

Теорема 4 (о структуре кольца, порождённого полукольцом)**.** *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо подмножеств множества X. Тогда*

$$\mathscr{R}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigsqcup_{j=1}^m D_j \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \text{ и } D_1, \ldots, D_m \in \mathcal{S} \text{ дизъюнктны} \right\}.$$

52.4 Борелевские множества и функции

Определение 4. *Сигма-алгебра $\mathcal{B}_d := \sigma(\tau_d)$, порождённая семейством τ_d всех открытых множеств в $\mathbb{R}^d$, называется* борелевской*. Множество $A \subset \mathbb{R}^d$ называется* борелевским*, если $A \in \mathcal{B}_d$.*

Итак, по определению все открытые множества являются борелевскими. Из определения сигма-алгебры следует, что все замкнутые множества также являются борелевскими. Кроме того, все множества типа G_δ (то есть счётные пересечения открытых множеств) и все множества типа F_σ (то есть счётные объединения замкнутых множеств) являются борелевскими.

Для начала мы ограничимся случаем $d = 1$ и в этом случае для краткости обозначим $\tau := \tau_1$ и $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1$.

Утверждение 4. *Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всевозможных лучей вида $(-\infty, a)$, где $a \in \mathbb{R}$. Тогда $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{F} \subset \tau$, то $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\tau) = \mathcal{B}$. С другой стороны очевидно, что любые открытые интервалы войдут в $\sigma(\mathcal{F})$, так как $(a, b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b)$ и $[u, v) = (-\infty, v) \setminus (-\infty, u)$. Но любое открытое множество является не более чем счётным объединением открытых интервалов, а значит $\sigma(\mathcal{F}) \supset \tau$ и, следовательно, $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\tau)$. ▲

Несложно проверить, что утверждение 4 останется верным, если в качестве $\mathcal{F}$ взять семейство всевозмозможных открытых интервалов, концы которых являются рациональными числами.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — борелевское множество. Обобщим понятие непрерывной функции:

Определение 5. *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется* борелевской*, если для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ его полный прообраз под действием f является борелевским множеством.*

Отображение вида $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ называется *борелевским,* если каждая его компонента f_i является борелевской функцией (где $i \in \overline{1, m}$).

На практике бывает удобно работать с функциями вида $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, которые могут принимать бесконечные значения. Такая функция называется *борелевской*, если $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ для любого $A \in \mathcal{B} \cup \{\{+\infty\}, \{-\infty\}\}$.

Для проверки того, является ли некоторая функция борелевской, удобно использовать следующий критерий:

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{R}}$ таково, что $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, Для того, чтобы функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ была борелевской, необходимо и достаточно, чтобы полный прообраз любого $A \in \mathcal{F}$ под действием функции f являлся борелевским, а также $f^{-1}(\pm\infty)$ были борелевскими.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Рассмотрим семейство $\mathcal{G}$ всех тех $A \subset \mathbb{R}$, для которых $f^{-1}(A)$ явлется борелевским. Так как

- $\emptyset \in \mathcal{G}$,
- $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ для любого $A \subset \mathbb{R}$,
- $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$ для любых $A_i \subset \mathbb{R}$,

то $\mathcal{G}$ является σ-алгеброй. Так как $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, то $\sigma(\mathcal{G}) \supset \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$. ▲

Как правило, доказанное утверждение удобно использовать с $\mathcal{F} = \tau$ или с $\mathcal{F} = \{(-\infty, a)\}_{a \in \mathbb{R}}$.

Так как полный прообраз любого открытого множества под действием непрерывной функции открыт, то любая непрерывная функция является борелевской. Обратное в общем случае неверно, например функция $x \mapsto \operatorname{sign} x$ является борелевской, но при этом разрывна.

С помощью теоремы 5 можно доказать, что отображение вида $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ является борелевским (в смысле определения 5: полный прообраз под действием f любого борелевского подмножества $A \subset \mathbb{R}^m$ является борелевским) тогда и только тогда, когда каждая его компонента является борелевской функцией.

Проверим, что множество всех борелевских функций замкнуто относительно естественных операций:

Утверждение 5. *Композиция борелевских отображений является борелевским отображением.*

Доказательство. Следует сразу из определения. ▲

Утверждение 6. *Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — борелевские. Тогда*

1. *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $(\alpha f + \beta g)$ также является борелевской;*
2. *функции $\min(f, g)$ и $\max(f, g)$ — борелевские;*
3. *функция $f \cdot g$ — борелевская;*
4. *если $g \neq 0$ то функция f/g — борелевская.*

Доказательство. В силу утверждения 5 для проверки того, что $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является борелевской достаточно проверить, что множества $\{h < a\} := h^{-1}((-\infty, a))$ принадлежат $\mathcal{B}$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Если $h = \alpha \cdot f$, то такая проверка тривиальна. Поэтому случай $h = \alpha f + \beta g$ достаточно рассмотреть при $\alpha = \beta = 1$. В этом случае

$$\{f + g < c\} = \{f < c - g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < c - g\}, \tag{52.13}$$

откуда ясно, что $h = f + g$ — борелевская. Аналогично можно проверить, что f^2 является борелевской. Так как $2fg = (f+g)^2 - f^2 - g^2$, то тогда и fg является борелевской.

Поскольку $\{\max(f,g) < c\} = \{f < c\} \cap \{g < c\}$, то функция $\max(f,g)$ является борелевской. Оставшаяся часть утверждения доказывается аналогично. ▲

Отметим, что утверждение 6 можно получить как следствие утверждения 5.

В отличие от множества непрерывных функций, множество борелевских функций замкнуто относительно поточечной сходимости:

Утверждение 7. *Рассмотрим последовательность борелевских функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда функции $f, F, g, G\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ вида*

$$\begin{gathered} F(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \\ G(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad g(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \end{gathered} \tag{52.14}$$

также являются борелевскими. В частности, если последовательность борелевских функций сходится к функции f поточечно, то f является борелевской.

Доказательство. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ и любого $x \in \mathbb{R}$ неравенство $f(x) \geq c$ выполнено тогда и только тогда, когда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f_n(x) \geq c$. Поэтому

$$\{f \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq c\}, \tag{52.15}$$

откуда следует, что f — борелевская. Аналогично доказывается, что F — борелевская.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $g_n(x) := \inf_{k\geq n} f_k(x)$. Тогда $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ и, следовательно, $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$, то в силу уже доказанного g является борелевской. Для функции G рассуждение аналогично. ▲

52.5 Контрольные вопросы

Вопрос 52.1. Верно ли, что всякое δ-кольцо является σ-кольцом?

Вопрос 52.2. Верно ли, что всякое σ-кольцо является δ-кольцом?

Вопрос 52.3. Верно ли, что $\sigma(\Theta_d) = \mathcal{B}_d$?

Вопрос 52.4. Могут ли разные семейства подмножеств порождать одну и ту же сигма-алгебру?

Вопрос 52.5. Верно ли, что всякая монотонная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является борелевской?

Вопрос 52.6. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\omega_f(x) := \lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(U_\delta(x)) < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что функция ω_f — борелевская?

Вопрос 52.7. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — борелевская функция и $g(x) = f(x+1)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что g — борелевская?

Вопрос 52.8. Может ли бесконечная σ-алгебра быть счётной?

Вопрос 52.9. Пусть семейство $\mathcal{F}$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения множеств. Является ли $\mathcal{F}$ полукольцом?

Вопрос 52.10. Верно ли, что кольцо, порождённое π-системой $\mathcal{F}$, состоит из всевозможных множеств вида $A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ и $n \in \mathbb{N}$?

Вопрос 52.11. Пусть множество $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множеств множества X, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ и для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^{p} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{q} B_j \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N}, A_i, B_j \in \mathcal{F}_{n-1} \right\}. \tag{52.16}$$

Найдётся ли $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{F}_n$ будет кольцом, порождённым семейством $\mathcal{F}$?

Вопрос 52.12. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества X такое, что для любых $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B \in \mathcal{F}$ и $A \setminus B$ представляется в виде объединения (не обязательно дизъюнктного) конечного набора элементов $\mathcal{F}$. Является ли $\mathcal{F}$ полукольцом?

52.6 Клеточная мера

Напомним, что семейство всех конечных промежутков $I \subset \mathbb{R}$ мы обозначаем символом Θ. Для любых конечных промежутков $I_1, \ldots, I_d \subset \mathbb{R}$ множество $I_1 \times \ldots \times I_d$ называется *клеткой (брусом)*. Семейство всех таких множеств мы обозначаем символом Θ_d, а функция $\mu\colon \Theta_d \to [0, +\infty]$ вида

$$\mu(I_1 \times \ldots \times I_d) := \prod_{k=1}^{d} (\sup I_k - \inf I_k). \tag{52.17}$$

называется *клеточной мерой*.

Определение 6. *Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств множества X. Функция $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ называется:*

1. конечно-аддитивной, *если для любых $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$ таких, что $\bigsqcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$, выполнено $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$;*

2. конечно-субаддитивной, *если для любых $n \in \mathbb{N}$ и любых $A \in \mathcal{F}$ и $\{A_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$ из $A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$ следует, что $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$;*

3. счётно-аддитивной, *если для любых $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ таких, что $\bigsqcup_{k=1}^\infty A_k \in \mathcal{F}$, выполнено $\mu(\bigsqcup_{k=1}^\infty A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$;*

4. счётно-субаддитивной, *если для любых $A \in \mathcal{F}$ и $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ из $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ следует, что $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$;*

5. монотонной, *если для любых $A, B \in \mathcal{F}$ из $A \subset B$ следует $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

6. конечной, *если $\mu(X) < +\infty$.*

Определённая выше клеточная мера монотонна. Действительно, если $A, B \in \Theta$ — непустые конечные промежутки и $A \subset B$, то $\inf A \geq \inf B$ и $\sup A \leq \sup B$, следовательно $\mu(A) \leq \mu(B)$. В случае произвольной размерности если $I_1 \times \ldots \times I_d \subset J_1 \times \ldots \times J_d$, то $\mu(I_k) \leq \mu(J_k)$ для всех k и, следовательно, $\mu(I_1 \times \ldots \times I_d) \leq \mu(J_1 \times \ldots \times J_d)$.

Утверждение 8. *Клеточная мера конечно-аддитивна и конечно-субаддитивна.*

Доказательство. Докажем конечную аддитивность индукцией по n. При $n = 1$ доказывать нечего, а при $n = 2$ доказательство тривиально. Предположим, что для некоторого $n \geq 2$ из того, что клетка A разбита на клетки $A_1, \ldots, A_n$ (то есть $A = \bigsqcup_{k=1}^n A_k$) следует, что $\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$. Докажем, что то же самое верно для любых разбиений из $n + 1$ клетки.

Пусть клетка A разбита на клетки $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Так как клетки A_1 и A_2 не имеют общих точек, то с помощью некоторой гиперплоскости, перпендикулярной одной из координатных осей, клетку A можно разбить на некоторые клетки P и Q так, что $A_1 \subset P$

и $A_2 \subset Q$. Так как P и Q не имеют общих точек, то $A_1 \cap Q = \emptyset$ и $A_2 \cap P = \emptyset$. Значит разбиения

$$P = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} A_k \cap P, \qquad Q = \bigsqcup_{k=1}^{n+1} A_k \cap Q, \tag{52.18}$$

на самом деле состоят из не более чем n непустых клеток и, следовательно, в силу сделанного предположения

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap P), \qquad \mu(Q) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap Q). \tag{52.19}$$

Так как $\mu(A) = \mu(P) + \mu(Q)$ и $\mu(A_k) = \mu(A_k \cap P) + \mu(A_k \cap Q)$ для каждого $k \in \overline{1, n+1}$, то получаем

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k), \tag{52.20}$$

что и требовалось доказать.

Конечную субаддитивность также докажем индукцией по числу n покрывающих клеток. Пусть для некоторого натурального n для любых клеток $A, A_1, \ldots, A_n$ из того, что клетка A покрыта клетками $A_1, \ldots, A_n$ (то есть $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$) следует, что $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Докажем, что то же самое верно для любых покрытий из $n+1$ клетки.

Пусть клетка A покрыта клетками $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Тогда множество $A \setminus A_{n+1}$ покрывается клетками $A_1, \ldots, A_n$. Несмотря на то, что оно не является клеткой, его можно разбить на некоторые клетки $B_1, \ldots, B_m$. Для каждого $j \in \overline{1, m}$ имеем $B_j \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap B_j$. Значит в силу сделанного предположения $\mu(B_j) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap B_j) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap B_j)$.

Обозначим $B_{m+1} := A \cap A_{n+1}$. Тогда $\mu(B_{m+1}) = \mu(A_{n+1} \cap B_{m+1}) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap B_{m+1})$.

Итак, $A = \bigsqcup_{j=1}^{m+1} B_j$ и для каждого $j \in \overline{1, m+1}$

$$\mu(B_j) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap B_j). \tag{52.21}$$

Тогда в силу конечной аддитивности

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m+1} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k \cap B_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} \mu(A_k \cap B_j). \tag{52.22}$$

Но для каждого $k \in \overline{1, n+1}$ выполнено $A_k \cap A = \bigsqcup_{j=1}^{m+1} A_k \cap B_j$, значит в силу конечной аддитивности $\sum_{j=1}^{m+1} \mu(A_k \cap B_j) = \mu(A_k \cap A) \leq \mu(A_k)$. Поэтому $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k)$, что и требовалось доказать. ▲

Перейдём к исследованию клеточной меры на счётную аддитивность и счётную субаддитвность. В этот раз оказывается удобнее начать с счётной субаддитивности:

Утверждение 9. *Клеточная мера счётно-аддитивна и счётно-субаддитивна.*

Доказательство.

Докажем счётную субаддитивность. Пусть клетка A покрыта клетками $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\varepsilon > 0$. «Расширим» каждую клетку A_k до открытой клетки $\hat{A}_k \supset A_k$ так, чтобы $\mu(\hat{A}_k) < \mu(A_k) + 2^{-k}\varepsilon$ и «сузим» клетку A до замкнутой клетки $\check{A} \subset A$ так, что $\mu(\check{A}) > \mu(A) - \varepsilon$. Так как из открытого покрытия $\{\hat{A}_k\}_{k=1}^{\infty}$ компакта $\check{A}$ можно выделить конечное подпокрытие, то существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\check{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \hat{A}_k \tag{52.23}$$

Тогда $\check{A} = \bigcup_{k=1}^{n}(\check{A} \cap \hat{A}_k)$ и в силу конечной субаддитивности и монотонности

$$\mu(\check{A}) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(\hat{A}_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\hat{A}_k). \tag{52.24}$$

Следовательно,

$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + 2\varepsilon. \tag{52.25}$$

Остаётся воспользоваться произвольностью $\varepsilon > 0$.

Докажем счётную аддитивность. Пусть клетка A разбита на клетки $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, тогда в силу доказанной счётной субаддитивности $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Докажем противоположное неравенство. По теореме о структуре кольца, порождённого полукольцом для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ представимо в виде дизъюнктного объединения клеток $B_1, \ldots, B_m$, а значит в силу конечной аддитивности клеточной меры

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \ge \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \tag{52.26}$$

Переходя к пределу $n \to \infty$ получим

$$\mu(A) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{52.27}$$

▲

Таким образом, клеточная мера является конечно- и счётно- аддитивной и субаддитивной. Однако её область определения не является замкнутой относительно естественных теоретико-множественных операций. Кроме того, с точки зрения практики важна замкнутость относительно *счётных* объединений и пересечений, так как только таким образом можно "сконструировать"из клеточных множеств шары и другие геометрические фигуры. Поэтому возникает задача о продолжении клеточной меры на какую-нибудь сигма-алгебру, включающую в себя Θ_d, с сохранением указанных свойств. Лебег построил такое продолжение.

52.7 Внешняя мера Лебега

Определение 7. Внешней мерой Лебега *называется функция* $\lambda\colon 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, +\infty]$ *вида*

$$\lambda(A) := \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Theta_d \right\}, \tag{52.28}$$

где инфимум берётся по всевозможным счётным наборам клеток $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$*, покрывающих данное множество* $A \subset \mathbb{R}^d$.

Для краткости слово «внешняя» будем опускать.

Из определения очевидно, что внешняя мера Лебега монотонна, а также что мера Лебега любого не более чем счётного множества равна нулю.

Теперь проверим, что мера Лебега является *продолжением* клеточной меры:

Утверждение 10. *Мера Лебега любой клетки* $A \in \Theta_d$ *равна её клеточной мере:* $\lambda(A) = \mu(A)$.

Доказательство. По определению инфимума $\lambda(A) \leq \mu(A)$. С другой стороны, для любого счётного покрытия клетки A клетками $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в силу счётной субаддитивности клеточной меры

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{52.29}$$

Значит, снова по определению инфимума $\lambda(A) \geq \mu(A)$. ▲

Упражнение. Проверьте, что если клетки A и B не пересекаются, то $\lambda(A \sqcup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Следующее утверждение позволяет оценивать разность мер множеств через меру их симметрической разности:

Утверждение 11. *Для любых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^d$ с конечными мерами Лебега выполнено*

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq \lambda(A \triangle B). \tag{52.30}$$

Доказательство. Так как $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \subset (A \triangle B) \cup B$, то $\lambda(A) \leq \lambda(A \triangle B) + \lambda(B)$. Меняя местами A и B и используя оба полученных неравенства, получаем искомое. ▲

Утверждение 12. *Мера Лебега* трансляционно-инвариантна*, то есть для любых $A \subset \mathbb{R}^d$ и $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено $\lambda(A + x) = \lambda(A)$, где $A + x = \{a + x : a \in A\}$.*

Доказательство. По определению клеточная мера трансляционно инвариантна. Поэтому для любого покрытия множества A клетками можно указать покрытие $A + x$ клетками с той же суммой мер. Значит $\lambda(A + x) \leq \lambda(A)$ по определению инфимума. Но тогда $\lambda(A) = \lambda(A + x - x) \leq \lambda(A + x)$, значит $\lambda(A) = \lambda(A + x)$. ▲

Упражнение. Докажите, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ и любой константы $c > 0$ выполнено $\lambda(c \cdot A) = c^d \lambda(A)$, где $c \cdot A := \{c \cdot x \mid x \in A\}$.

Утверждение 13. *Мера Лебега счётно-субаддитивна.*

Доказательство. Пусть $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем клетки $\{A_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ так, что $A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{k,i}) \leq \lambda(A_k) + \varepsilon/2^k \tag{52.31}$$

(неравенство — нестрогое, так как возможна ситуация $\lambda(A_k) = +\infty$).

Так как $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{k,i}$ и сумма мер клеток $\{A_{k,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, независимо от порядка суммирования, равна $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{k,i})$, то

$$\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{k,i}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda(A_k) + \varepsilon/2^k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) + \varepsilon. \tag{52.32}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$, что и требовалось доказать. ▲

52.8 Пример Витали множества, не измеримого по Лебегу

Так как мера Лебега является продолжением клеточной меры и счётно-субаддитивна, то было бы естественно ожидать, что она счётно-аддитивна. Однако Витали показал, что это не совсем так (если принимается аксиома выбора).

Аксиома выбора. *Для любого множества X и любого семейства $\mathcal{F}$ непустых подмножеств множества X существует* функция выбора $v\colon \mathcal{F} \to X$ *такая, что* $v(A) \in A$ *для любого* $A \in \mathcal{F}$.

В частности для всякого такого семейства $\mathcal{F}$ его образ под действием функции v является множеством.

Построения контрпримера Витали разобъём на две части.

Утверждение 14. *Существует множество $V \subset [0,1]$ такое, что*

1. *расстояния между любыми различными точками множества V иррациональны;*
2. *сдвиги V на рациональные числа покрывают* $[0,1]$.

Доказательство. Для каждого $x \in [0,1]$ обозначим $E_x := \{y \in [0,1] : x - y \in \mathbb{Q}\}$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F} := \{E_x : x \in [0,1]\}$. Пусть $E, F \in \mathcal{F}$ и $E \neq F$. Тогда для любых точек $x \in E$ и $y \in F$ выполнено $x - y \notin \mathbb{Q}$, так как иначе $E = F$. В частности, $v(E) - v(F) \notin \mathbb{Q}$, где v — функция выбора.

Теперь определим $V := \{v(E_x) : x \in [0,1]\}$. Заметим, что V является образом отрезка под действием композиции отображения $f\colon [0,1] \to \mathcal{F}$ вида $f(x) = E_x$ с функцией Витали: $V = v(f([0,1]))$. Значит V — множество.

В силу доказанного выше для любых $x, y \in V$ выполнено $x - y \notin \mathbb{Q}$. С другой стороны, для любого $y \in [0,1]$ выполнено $y \in E_x$, где $x = v(E_y) \in V$. Так как $x, y \in E_y$, то $x - y \in \mathbb{Q}$. Значит $[0,1]$ покрывается сдвигами V на рациональные числа. ▲

Утверждение 15 (отсутствие аддитивности меры Лебега на множестве всех подмножеств)**.** *Внешняя мера Лебега не является ни счётно-, ни конечно-аддитивной, как функция на* $2^{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть V — множество, построенное в предыдущем утверждении. В силу трансляционной инвариантости меры Лебега для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda(V + t) = \lambda(V)$.

Если $\lambda(V) = 0$, то в силу счётной субаддитивности меры Лебега из вложения $[0,1] \subset \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} (V + t)$ следует, что $\lambda([0,1]) = 0$, что невозможно так как $\lambda([0,1]) = \mu([0,1]) = 1$. Значит $\lambda(V) > 0$.

Если предположить, что λ счётно-аддитивна, то

$$\lambda\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (V + 1/n)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(V + 1/n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(V) = +\infty. \tag{52.33}$$

С другой стороны, в силу монотонности $\lambda\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (V + 1/n)\right) \leq \lambda([0,2]) = 2$. Противоречие.

Если предположить, что λ конечно-аддитивна, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} (V + 1/k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(V + 1/k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(V) = n \cdot \lambda(V). \tag{52.34}$$

Так как $\lambda\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (V + 1/n)\right) \leq 2$, то при достаточно больших n получаем противоречие.

Покажем, что в общем случае конечная аддитивность нарушается даже для объединений двух дизъюнктных множеств. В силу сказанного выше можно выбрать максимальное натуральное число n такое, что $\lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} (V + 1/k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(V + 1/k)$. Тогда множества $A := \bigsqcup_{k=1}^{n} (V + 1/k)$ и $B := V + 1/(n+1)$ не пересекаются и

$$\lambda(A \sqcup B) < \lambda(A) + \lambda(B). \tag{52.35}$$

▲

Оказывается, что если рассматривать не произвольные множества, а ограничиться некоторой сигма-алгеброй (которую мы построим далее), то соответствующее сужение меры Лебега будет счётно-аддитивно (и субаддитивно). Мы покажем, что эта сигма-алгебра включает в себя, в частности, все клетки, все открытие и замкнутые (и, следовательно, борелевские) множества, благодаря чему формальное отсутствие аддитивности не приводит к возникновению проблем в большинстве практических приложений меры Лебега.

52.9 Измеримость множеств по Лебегу

Следующее определение измеримости по Лебегу дал Каратеодори:

Определение 8. *Множество* $A \subset \mathbb{R}^d$ *называется* измеримым по Лебегу*, если для любого* $T \subset \mathbb{R}^d$ *выполнено*

$$\lambda(T) = \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A). \tag{52.36}$$

Семейство всех измеримых по Лебегу множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ *будем обозначать как* $\mathfrak{M}_d$.

При $d = 1$ для краткости вместо $\mathfrak{M}_1$ будем писать $\mathfrak{M}$.

Теорема 6 (Каратеодори)**.** *Справедливы следующие утверждения:*

1. $\mathfrak{M}_d$ *является сигма-алгеброй;*

2. *мера Лебега счётно-аддитивна на* $\mathfrak{M}_d$*;*

3. $\Theta_d \subset \mathfrak{M}_d$.

Доказательство того, что $\mathfrak{M}_d$ *— сигма-алгебра..*

Шаг 1. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_d$. Покажем, что $A \cap B \in \mathfrak{M}_d$. Действительно, используя в качестве «пробного» множества сначала T, а затем $T \cap A$ и $T \cap A^c$, имеем

$$\begin{aligned}\lambda(T) &= \lambda(T \cap A) + \lambda(T \cap A^c)\\ &= \lambda(T \cap A \cap B) + \lambda(T \cap A \cap B^c) + \lambda(T \cap A^c \cap B) + \lambda(T \cap A^c \cap B^c)\\ &\geq \lambda(T \cap A \cap B) + \lambda(T \cap ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c))),\end{aligned}$$

поскольку

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cap B)^c. \tag{52.37}$$

Из определения $\mathfrak{M}_d$ ясно, что $A \in \mathfrak{M}_d$ тогда и только тогда, когда $A^c \in \mathfrak{M}_d$. Таким образом из доказанного уже следует, что $\mathfrak{M}_d$ является алгеброй. Следовательно, достаточно доказать что $\mathfrak{M}_d$ замкнуто относительно взятия счётных дизъюнктных объединений.

Шаг 2. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_d$ попарно не пересекаются. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lambda(T) = \lambda(T \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) + \lambda(T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) \tag{52.38}$$

Так как $T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \supset T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$\lambda(T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) \geq \lambda(T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k). \tag{52.39}$$

С другой стороны, из определения $\mathfrak{M}_d$ индукцией по n легко проверить, что

$$\lambda(T \cap \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(T \cap A_k). \tag{52.40}$$

Тогда, переходя к пределу $n \to \infty$, получаем

$$\lambda(T) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T \cap A_k) + \lambda(T \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k). \tag{52.41}$$

Остаётся заметить, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T \cap A_k) \geq \lambda(T \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ в силу счётной субаддитивности. ▲

Доказательство счётной аддитивности λ на $\mathfrak{M}_d$.. Из определения $\mathfrak{M}_d$ ясно, что для любых дизъюнктных $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}_d$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \lambda(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k)$, поэтому переходя к пределу $n \to \infty$ получаем $\lambda(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$. Обратное неравенство следует из счётной субаддитивности λ. Таким образом, λ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}_d$. ▲

Доказательство вложения $\Theta_d \subset \mathfrak{M}_d$.. Для любой клетки $A \in \Theta_d$ нужно проверить, что

$$\lambda(T) \geq \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A). \tag{52.42}$$

Пусть клетки $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ покрывают T. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существуют клетки $B_{k,1}, \ldots, B_{k,m_k}$ такие, что $A_k \setminus A = \bigsqcup_{j=1}^{m_k} B_{k,j}$. В силу конечной аддитивности μ выполнено

$$\mu(A_k) = \mu(A_k \cap A) + \mu(B_{k,1}) + \ldots + \mu(B_{k,m_k}) \tag{52.43}$$

Так как $T \cap A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap A$ и $T \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A$, то складывая записанные выше равенства для всех k и пользуясь определением внешней меры получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A) \tag{52.44}$$

Поскольку это верно для любых клеток $\{A_k\}$, покрывающих T, то получаем (52.42). ▲

Более простое доказательство вложения $\Theta_d \subset \mathfrak{M}_d$.. Так как $\mathfrak{M}_d$ — сигма-алгебра и любая клетка является конечным пересечением полупространств, то достаточно доказать, что для любого $i \in \overline{1, d}$ и любого $c \in \mathbb{R}$ множество

$$A = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_i < c\} \tag{52.45}$$

измеримо.

Пусть $T \subset \mathbb{R}^d$ и клетки $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ покрывают T. Тогда $A_k \cap A$ и $A_k \setminus A$ также являются клетками. Так как $T \cap A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap A$ и $T \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A$, то по определению внешней меры Лебега

$$\lambda(T \cap A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A), \qquad \lambda(T \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A). \tag{52.46}$$

При этом $A_k = (A_k \cap A) \sqcup (A_k \setminus A)$, значит в силу конечной аддитивности клеточной меры

$$\mu(A_k) = \mu(A_k \cap A) + \mu(A_k \setminus A). \tag{52.47}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \setminus A) \geq \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A). \tag{52.48}$$

По определению внешней меры Лебега это означает, что $\lambda(T) \geq \lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A)$. Это верно для любого $T \subset \mathbb{R}^d$, значит A измеримо. ▲

Из третьего пункта теоремы Каратеодори следует, что все борелевские множества измеримы по Лебегу:

$$\mathcal{B}_d = \sigma(\Theta_d) \subset \mathfrak{M}_d. \tag{52.49}$$

Обратное вложение не имеет места. А именно, существуют подмножества множества Кантора, не являющиеся борелевскими (доказательство этого факта выходит за рамки данного курса). Однако далее мы покажем, что всякое множество, измеримое по Лебегу, представимо в виде дизъюнктого объединения борелевского множества и множества меры нуль.

Напомним, что клеточным (элементарным) множеством называется конечное объединение клеток (брусов).

Теорема 7 (о приближении измеримых множеств клеточными)**.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу и $\lambda(A) < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся клеточное множество E такое, что $\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$.*

Доказательство. По определению меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существует счётное семейство клеток $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < \lambda(A) + \varepsilon/2. \tag{52.50}$$

Выберем n так, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(A_k) < \varepsilon/2 \tag{52.51}$$

и определим $E := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $A \setminus E \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, следовательно ввиду счётной субаддитивности меры Лебега

$$\lambda(A \setminus E) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(A_k) < \varepsilon/2. \tag{52.52}$$

С другой стороны, в силу измеримости A

$$\lambda(E \setminus A) \leq \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus A) \leq \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) - \lambda(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) - \lambda(A) < \varepsilon/2. \tag{52.53}$$

Значит $\lambda(E \triangle A) \leq \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) < \varepsilon$. ▲

Установим важное свойство меры Лебега, называемое *непрерывностью*:

Теорема 8 (непрерывность меры Лебега)**.** *Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ измеримы по Лебегу, то*

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n). \tag{52.54}$$

Доказательство.

По теореме Каратеодори множество $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ измеримо по Лебегу. Также измеримы по Лебегу множества $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$, $\ldots$, $B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$. По построению для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, а также $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. Значит в силу счётной аддитивности меры Лебега

$$\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(B_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right), \tag{52.55}$$

что и требовалось доказать. ▲

Отметим, что для пересечения последовательности вложенных множеств в общем случае аналогичное утверждение не имеет места. Например, $\emptyset = \bigcap_{k=1}^{\infty}(k, +\infty)$, но $0 = \lambda(\emptyset) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda((n,\infty)) = +\infty$. Однако если хотя бы одно из рассматриваемых вложенных множеств имеет конечную меру, то соответствующее свойство несложно получить как следствие доказанного выше.

Из непрерывности меры Лебега вытекают следующие свойства:

Следствие 1. *Если для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество A_k измеримо по Лебегу, то*

$$\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k). \tag{52.56}$$

Если, кроме того, $\lambda(A_1) < +\infty$, то

$$\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcap_{k=1}^{n} A_k). \tag{52.57}$$

Доказательство. Множества $B_k := \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ измеримы по Лебегу и $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, причём $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, поэтому в силу непрерывности меры Лебега $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda(B_k)$. Если $\lambda(A_1) < +\infty$, то в силу доказанного

$$\begin{gathered}\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lambda(A_1) - \lambda(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \\ \lambda(A_1) - \lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_1 \setminus A_k) = \lambda(A_1) - \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_1 \setminus A_k) = \\ \lim_{n\to\infty} (\lambda(A_1) - \lambda(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k)) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_1 \cap \bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\bigcap_{k=1}^{n} A_k).\end{gathered} \tag{52.58}$$

▲

Еще одним важным свойством меры Лебега является её *регулярность*:

Теорема 9 (внутренняя и внешняя регулярность меры Лебега)**.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$. Тогда*

1. $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) \mid U \subset \mathbb{R}^d$ *открыто и* $A \subset U\}$ (внешняя регулярность)*;*
2. *если A измеримо по Лебегу, то* $\lambda(A) = \sup\{\lambda(F) \mid F \subset \mathbb{R}^d$ *замкнуто и* $F \subset A\}$ (внутренняя регулярность)*;*
3. *если A измеримо по Лебегу, то $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт и $K \subset A\}$;*

Доказательство. Докажем внешнюю регулярность меры Лебега. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$. По определению меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ мы можем покрыть A счётным набором клеток $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ так, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \lambda(A) + \varepsilon/2$. Для каждого k мы можем выбрать открытую клетку U_k так, что $A_k \subset U_k$ и $\mu(U_k) \leq \mu(A_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Тогда множество $U := \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ открыто, покрывает A и по определению меры Лебега

$$\lambda(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + \varepsilon/2 \leq \lambda(A) + \varepsilon. \tag{52.59}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\inf\{\lambda(U) \mid U \subset \mathbb{R}^d$ открыто и $A \subset U\} \leq \lambda(A)$. Обратное неравенство очевидно из монотонности меры Лебега.

Для доказательства внутренней регулярности вначале предположим, что множество $A \in \mathfrak{M}_d$ ограничено. Тогда существует ограниченное замкнутое множество (например, клетка) $Q \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $A \subset Q$. В силу доказанной внешней регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $Q \setminus A \subset U$ и $\lambda(U) < \lambda(Q \setminus A) + \varepsilon$. Тогда множество

$$F := Q \setminus U \tag{52.60}$$

замкнуто, лежит в A и

$$\lambda(F) \geq \lambda(Q) - \lambda(U) > \lambda(Q) - \lambda(Q \setminus A) - \varepsilon = \lambda(A) - \varepsilon. \tag{52.61}$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\sup\{\lambda(F) \mid F \subset \mathbb{R}^d$ замкнуто и $F \subset A\} \geq \lambda(A)$, а обратное неравенство выполнено в силу монотонности.

Пусть теперь $A \subset \mathbb{R}^d$ произвольно. В силу непрерывности меры Лебега

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap B_n(0)), \tag{52.62}$$

где $B_n(0)$ — открытый шар радиуса $n \in \mathbb{N}$ с центром в нуле. В силу доказанного выше для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем выбрать замкнутое $F_n \subset A \cap B_n(0)$ так, что $\lambda(F_n) > \lambda(A \cap B_n(0)) - 1/n$. Тогда ясно, что $\lambda(F_n) \to \lambda(A)$ при $n \to \infty$. Таким образом, внутренняя регулярность доказана для произвольного измеримого множества A.

В ходе приведённого выше доказательства была построена последовательность компактов $F_n \subset A$ таких, что $\lambda(F_n) \to \lambda(A)$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) \mid K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт и $K \subset A\}$. ▲

Утверждение 16. *Множество $A \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда его можно представить в виде дизъюнктного объединения борелевского множества и множества меры нуль.*

Доказательство. В силу внутренней регулярности меры Лебега для любого $n \in \mathbb{N}$ существует замкнутое множество $F_n \subset A$ такое, что $\lambda(F_n) \geq \lambda(A) - 1/n$. Рассмотрим множество $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. По построению оно является борелевским (как счётное объединение замкнутых), лежит в A и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda(F_n) \geq \lambda(A) - 1/n$. Тогда $\lambda(B) \geq \lambda(A)$ и, следовательно, $\lambda(B) = \lambda(A)$ (так как $B \subset A$).

Так как все борелевские множества измеримы по Лебегу, то B измеримо по Лебегу и, следовательно, $N := A \setminus B$ тоже измеримо по Лебегу. Тогда $\lambda(N) = \lambda(A) - \lambda(B) = 0$. Итак, $A = B \sqcup N$, где $B \in \mathcal{B}_d$ и $\lambda(N) = 0$, что и требовалось доказать. ▲

Утверждение 17. *Если множества $A \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу, то для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ можество $A + x$ тоже измеримо. Если A — борелевское, то и $A + x$ борелевское.*

Доказательство. Для любого $T \subset \mathbb{R}^d$ в силу трансляционной инвариантности выполнено $\lambda(T \cap (A + x)) = \lambda(T \cap (A + x) - x) = \lambda((T - x) \cap A)$ и $\lambda(T \setminus (A + x)) = \lambda((T - x) \setminus A)$, поэтому

$$\lambda(T \cap A) + \lambda(T \setminus A) = \lambda(T \cap (A + x)) + \lambda(T \setminus (A + x)). \tag{52.63}$$

Отсюда видно, что измеримость A равносильна измеримости $A + x$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$ всех тех $A \subset \mathbb{R}^d$, для которых множество $A+x$ — борелевское. Так как $(A + x)^c = A^c + x$ и $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + x = \bigcup(A_n + x)$, то $\mathcal{A}$ — сигма-алгебра (по соответствующему критерию). Кроме того, для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^d$ непосредственно проверяется, что $U+x$ открыто. Итак $\mathcal{A}$ — сигма-алгебра, содержащая все открытые множества. Тогда в силу минимальности борелевской сигма-алгебры получаем $\mathcal{B}_d \subset \mathcal{A}$, что и требовалось доказать. ▲

Упражнение. Докажите, что если A измеримо по Лебегу, то для любого $s > 0$ множество sA тоже измеримо по Лебегу. Докажите, что если A борелевское, то sA тоже борелевское.

52.10 Контрольные вопросы

Во всех вопросах под мерой понимается мера Лебега.

Вопрос 53.1. Верно ли, что для любых $A, B \subset \mathbb{R}$ с конечной мерой Лебега выполнено $\lambda(A \setminus B) \geq \lambda(A) - \lambda(B)$?

Вопрос 53.2. Может ли множество меры нуль быть несчётным?

Вопрос 53.3. Верно ли, что для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ выполнено $\lambda(\partial U) = 0$?

Вопрос 53.4. Может ли множество положительной меры не иметь внутренних точек?

Вопрос 53.5. Пусть A измеримо по Лебегу, а B — нет, причём $A \cap B = \emptyset$. Верно ли, что $\lambda(A \sqcup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$?

Вопрос 53.6. Для любого $A \subset \mathbb{R}$ определим

$$\zeta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) \;\middle|\; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad A_k \in \mathfrak{M} \right\} \tag{52.64}$$

Верно ли, что ζ совпадает с внешней мерой Лебега на всём $2^{\mathbb{R}}$?

Вопрос 53.7. Верно ли, что для любого (не обязательно измеримого по Лебегу) множества $A \subset \mathbb{R}^d$ существует множество $B \subset \mathbb{R}^d$ типа G_δ такое, что $A \subset B$ и $\lambda(A) = \lambda(B)$?

Вопрос 53.8. Даны подмножества вещественной прямой $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, не обязательно измеримые по Лебегу. Верно ли, что $\lambda(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$?

Вопрос 53.9. Пусть множество $B \subset \mathbb{R}$ пересекает всякое несчётное замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$, но при этом не содержит его целиком (т.е. $F \setminus B \neq \emptyset$). Может ли такое множество B быть измеримым по Лебегу?

Вопрос 53.10. Пусть мера Лебега множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ равна нулю. Верно ли, что $A + B = \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$ также является множеством меры нуль?

Глава 53

Измеримые функции

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу.

Определение 9. *Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется* измеримой (по Лебегу)*, если полный прообраз любого борелевского множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ под действием f измерим по Лебегу, а также множества $f^{-1}(+\infty)$ и $f^{-1}(-\infty)$ измеримы по Лебегу.*

Для доказательства измеримости функций удобно использовать следующий критерий:

Теорема 10 (критерий измеримости функции)**.** *Пусть $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{R}}$ и $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_1$. Тогда для измеримости $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы $f^{-1}(\pm\infty)$ были измеримы и для любого $A \in \mathcal{F}$ было выполнено $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}_d$.*

Доказательство. Рассуждения те же, что и в доказательстве аналогичного критерия для борелевских функций.

Рассмотрим семейство $\mathcal{G}$ всех борелевских $A \subset \mathbb{R}$ таких, что $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}_d$. Так как $\mathfrak{M}_d$ — сигма-алгебра, то

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{M}_d$, значит $\emptyset \in \mathcal{G}$.
- если $A \in \mathcal{G}$, то $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}_d$. Значит $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{G}$;
- если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $A_n \in \mathcal{G}$, то $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathfrak{M}_d$. Значит $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

Таким образом, $\mathcal{G}$ является сигма-алгеброй. По условию $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, значит $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$ в силу минимальности порождённой сигма-алгебры. Также по условию $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_1$, значит теорема доказана. ▲

Замечание. На практике удобно использовать следствие данного критерия: *для измеримости функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{f < a\} := f^{-1}([-\infty, a))$ было измеримо.* Действительно, $f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{a\in\mathbb{N}}\{f < -a\}$ измеримо как счётное пересечение измеримых множеств. Аналогично $f^{-1}(+\infty) = X \setminus f^{-1}([-\infty, +\infty))$ измеримо. Остаётся применить критерий, взяв $\mathcal{F} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что в сформулированном утверждении неравенство $<$ можно заменить на любое из неравенств $\leq$, $>$ или $\geq$.

Если $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^D$ имеет компоненты f_i ($i \in \overline{1, D}$), то f называется измеримой тогда и только тогда, когда f_i измеримо для каждого i.

Упражнение. Проверьте, что отображение $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^D$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $A \in \mathcal{B}_D$ выполнено $f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}_d$.

Так как все борелевские множества измеримы по Лебегу, то любая борелевская функция измерима по Лебегу. Ниже мы покажем, что любую измеримую по Лебегу функцию можно изменить на множестве меры нуль таким образом, что полученная в результате функция будет борелевской.

Определение 10. *Если $N \subset \mathbb{R}^d$ имеет меру нуль ($\lambda(N) = 0$) и некоторое свойство выполнено для всех точек множества $X \subset \mathbb{R}^d$ за исключением, возможно, некоторых точек множества N, то говорят, что данное свойство выполнено* почти всюду *(сокращённо* п.в.*).*

В частности, последовательность функций $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ сходится п.в. на $X \subset \mathbb{R}^d$ тогда и только тогда, когда существует $N \subset \mathbb{R}^d$ меры нуль такое, что f_n сходится поточечно на множестве $X \setminus N$. При этом для $x \in X \cap N$ последовательность $\{f_n(x)\}$ может как сходиться, так и расходиться.

Утверждение 18. *Если $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ совпадают почти всюду, то f измерима тогда и только тогда, когда измерима g.*

Доказательство. Так как f и g совпадают почти всюду, то существует множество меры нуль $N \subset X$ такое, что $f = g$ на $X \setminus N$. Для любого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ множество $E := f^{-1}(A) \triangle g^{-1}(A)$ лежит в N и, следовательно, имеет меру нуль. Тогда $f^{-1}(A) = E \triangle g^{-1}(A)$ измеримо тогда и только тогда, когда измеримо $g^{-1}(A)$. ▲

Измеримые по Лебегу функции обладают практически теми же свойствами, что и борелевские:

Утверждение 19. *Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы. Тогда*

1. *для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $(\alpha f + \beta g)$ также измерима;*
2. *функции $\min(f, g)$ и $\max(f, g)$ измеримы;*
3. *функция $f \cdot g$ измерима;*
4. *если $g \neq 0$ то функция f/g измерима.*

Доказательство. Рассуждения такие же, как в доказательстве аналогичного утверждения для борелевских функций. ▲

В отличие от борелевских функций, композиция измеримых по Лебегу функций не всегда измерима по Лебегу. Однако преимущество измеримых функций состоит в том, что предел последовательности измеримых функций является измеримой функции не только в случае поточечной сходимости, но и в случае сходимости почти всюду:

Утверждение 20. *Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Пусть для почти всех $x \in X$*

$$\begin{aligned} F(x) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad & f(x) &= \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \\ G(x) &= \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad & g(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x). \end{aligned} \tag{53.1}$$

Тогда F, f, G и g измеримы. В частности, если для каждого n функция $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима и $f_n \to f$ почти всюду на X при $n \to \infty$, то предельная функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима.

Доказательство. Переопределив все функции на множестве меры нуль мы можем перейти к случаю поточечной сходимости всюду, а в этом случае рассуждения такие же как для борелевских функций. ▲

Определение 11. *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется* простой*, если множество $f(X)$ всех её значений конечно.*

Легко видеть, что функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ является простой тогда и только тогда, когда найдутся $m \in \mathbb{N}$, (попарно различные и отличные от нуля) числа $\{a_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{R}$ и дизъюнктные множества $\{A_k\}_{k=1}^m \subseteq X$ такие, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbf{1}_{A_k}(x)$$

для всех $x \in X$. При этом очевидно, что простая функция f измерима тогда и только тогда, когда $A_k \in \mathfrak{M}_d$ для всех $k \in \overline{1,n}$. Аналогичным образом простая функция f является борелевской тогда и только тогда, когда $A_k \in \mathcal{B}_d$ для всех $k \in \overline{1,n}$

Оказывается, что любую измеримую функцию можно представить как поточечный предел "подпирающих её снизу"простых измеримых функций:

Утверждение 21 (о приближении измеримой функции снизу простыми измеримыми)**.** *Для любой измеримой функции $f\colon X \to [0,+\infty]$ существует последовательность простых измеримых функций $s_n\colon X \to [0,+\infty)$ такая, что $s_n \uparrow f$ при $n \to \infty$, то есть для любого $x \in X$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.*

Доказательство. При каждом $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $\varphi_n\colon [0,+\infty] \to \mathbb{R}$ для всех $y \in [0,+\infty]$ формулой

$$\varphi_n(y) := \begin{cases} 2^{-n}[2^n y], & 0 \le y < n; \\ n, & y \ge n, \end{cases}$$

где $[t]$ — *целая часть* $t \in \mathbb{R}$, то есть

$$[t] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \cdot \mathbf{1}_{[k,k+1)}(t).$$

Так как при любом $t \in \mathbb{R}$ выполнено $[2t] \ge 2[t]$, то при любом $y \in \mathbb{R}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\varphi_{n+1}(y) \ge \varphi_n(y)$. Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(y) = y$.

Рассмотрим функции $s_n(x) := \varphi_n(f(x))$. Так как φ_n — борелевская, а f измерима, то s_n измерима. По построению функций φ_n имеем также $s_n(x) \le s_{n+1}(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. ▲

53.1 Измеримость образов множеств под действием функций

Обсудим теперь свойства *образов* измеримых множеств под действием измеримых отображений. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ измеримо.

Утверждение 22. *Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, то для любого (не обязательно измеримого) множества $A \subset X$ выполнено*

$$\lambda(f(A)) \le L\lambda(A).$$

Доказательство. Заметим, что для любого конечного промежутка I расстояния между точками $f(I \cap X)$ не превосходят $L\lambda(I)$, следовательно $\lambda(f(I \cap X)) \le L\lambda(I)$. Покроем A конечными промежутками I_k так, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) \le \lambda(A) + \varepsilon$. Тогда $f(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f(I_k \cap X)$, следовательно

$$\lambda(f(A)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(I_k \cap X)) \le \sum_{k=1}^{\infty} L\lambda(I_k) \le L\lambda(A) + L\varepsilon. \tag{53.2}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\lambda(f(A)) \le L\lambda(A)$. ▲

Следствие 2. *Образ множества меры нуль под действием липшицевой функции всегда имеет меру нуль.*

Следствие 3. *Образ любого измеримого множества $A \subset X$ под действием липшицевой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ измерим.*

Доказательство. Как известно, образ компакта под действием непрерывной функции является компактом, а всякая липшицева функция непрерывна. Поэтому рассматриваемая функция f переводит множества типа F_σ во множества типа F_σ. Рассмотрим произвольное измеримое множество $A \subset X$. В силу внутренней регулярности меры Лебега его можно представить в виде $A = E \sqcup N$, где E является множеством типа F_σ и $\lambda(N) = 0$. По следствию 2 имеем $\lambda(f(N)) = 0$, поэтому $f(N)$ измеримо. Следовательно, $f(A) = f(E) \cup f(N)$ является объединением двух измеримых множеств. ▲

Одной лишь непрерывности функции в общем случае недостаточно для того, чтобы образ измеримого множества под действием этой функции был измерим.

Аналогичным образом дело обстоит с борелевскими множествами: образ борелевского множества под действием непрерывной функции не всегда является борелевским (это доказал Суслин). Мы остановимся немного подробнее лишь на примерах, когда нарушается измеримость образа. Примеры, когда образ не является борелевским, значительно сложнее и выходят за рамки данного курса (отметим лишь что существует борелевское множество на плоскости, проекция которого на одну из осей не является борелевским множеством).

Рассмотрим *функцию Кантора*, которую можно построить итерационно следующим образом. Рассмотрим отображение $\mathcal{K}$, которое отображает любую функцию $y\colon [0,1] \to [0,1]$ в функцию $\tilde{y}\colon [0,1] \to [0,1]$, определённую формулой

$$\tilde{y}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}y(3x), & 0 \le x < \frac{1}{3}; \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{2}(1 + y(3x-2)), & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases} \tag{53.3}$$

Пусть $c_0(x) := x$, $x \in \mathbb{R}$. Положим $c_{n+1} := \mathcal{K}(c_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку отображение $\mathcal{K}$ переводит непрерывную функцию в непрерывную, при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено $c_n \in C[0,1]$.

Покажем, что функциональная последовательность $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно на отрезке $[0,1]$. Действительно, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(x) = x + \sum_{k=1}^{n} (c_k(x) - c_{k-1}(x)),$$

а ряд в правой части сходится равномерно, поскольку

$$|c_k(x) - c_{k-1}(x)| \le \frac{1}{2}|c_{k-1}(x) - c_{k-2}(x)| \le \ldots \le 2^{-k+1}|c_1(x) - c_0(x)|$$

в силу (53.3), и $\sup_{x\in[0,1]} |c_1(x) - c_0(x)| = \frac{1}{6}$.

Функция $c\colon [0,1] \to [0,1]$, определённая формулой $c(x) := \lim\limits_{n\to\infty} c_n(x)$, называется *(классической) функцией Кантора*. Она непрерывна (как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций) и нестрого возрастает (как поточечный предел последовательности нестрого возрастающих функций).

Рассмотрим *множество Кантора* $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n определяется следующим образом. Положим $C_1 := [0,1]$. Предположим, что C_n построено (где $n \in \mathbb{N}$) и состоит из конечного числа дизъюнктных отрезков: $C_n = \bigcup_{k=1}^{N_n} [a_k, b_k]$ (что при $n = 1$, очевидно, верно). Разделим каждый из этих отрезков на 3 равных части и выбросим средний открытый интервал, то есть положим $C_{n+1} := \bigcup_{k=1}^{N_n} [a_k, \frac{2}{3}a_k + \frac{1}{3}b_k] \cup [\frac{1}{3}a_k + \frac{2}{3}b_k, b_k]$. Тогда C_{n+1} состоит из $N_{n+1} = 2N_n$ дизъюнктных отрезков.

Дополнение множества Кантора $[0,1]\backslash C = (0,1)\backslash C$ открыто и, следовательно, является объединением счётного набора попарно непересекающихся открытых интервалов $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. По построению на каждом из них функция c постоянна. Следовательно, функция Кантора переводит $[0,1] \setminus C$ в счётное множество. Значит мера образа C под действием функции Кантора равна 1. Таким образом, непрерывная функция может переводить множество нулевой меры во множество, мера которого отлична от нуля.

Усовершенствуем функцию Кантора, чтобы привести пример измеримого по Лебегу множества, не являющегося борелевским. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x + c(x). \tag{53.4}$$

В отличие от функции Кантора функция $f\colon [0,1] \to [0,2]$ строго возрастает. На каждом из открытых интервалов I_k, объединением которых является $[0,1] \setminus C$, функция f имеет вид $f(x) = x + a$, где a — некоторая константа. Следовательно, $f([0,1] \setminus C)$ является объединением попарно непересекающихся открытых интервалов $f(I_k)$, сумма длин которых равна 1. Тогда $\lambda(f(C)) = \lambda(f([0,1])) - \lambda(f([0,1] \setminus C)) = 2 - 1 = 1$.

Так как $\lambda(f(C)) > 0$, то существует неизмеримое по Лебегу $V \subset f(C)$ (для построения V можно повторить конструкцию множества Витали). Множество $A := f^{-1}(V)$ лежит в C и, следовательно, измеримо (так как $\lambda(C) = 0$). Покажем, что оно не является борелевским. Пусть это не так. По теореме об обратной функции f^{-1} непрерывна. Тогда $V = f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ является полным прообразом борелевского множества A под действием f^{-1}. Следовательно, V — борелевское. Мы получили противоречие тому, что V неизмеримо.

53.2 Контрольные вопросы

Вопрос 54.1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём f^2 измерима. Верно ли, что f измерима?

Вопрос 54.2. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём f^3 измерима. Верно ли, что f измерима?

Вопрос 54.3. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и для любого иррационального a множество $f^{-1}((-\infty, a))$ измеримо. Будет ли f измерима?

Вопрос 54.4. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима. Будет ли функция $g(x) = f(x+1)$ измерима?

Вопрос 54.5. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и $K \subset [0,1]$ — множество Кантора. Верно ли, что функция $g(x) := \sup_{t\in K} f(x+t)$ измерима?

Вопрос 54.6. Пусть измеримая функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена. Всегда ли найдётся последовательность простых измеримых функций, сходящаяся к f равномерно на $\mathbb{R}$?

Вопрос 54.7. Верно ли, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна, то $f(\mathbb{R})$ измеримо по Лебегу?

Вопрос 54.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Верно ли, что образ любого измеримого множества под действием f измерим тогда и только тогда, когда f отображает любое множество меры нуль во множество меры нуль?

Вопрос 54.9. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго возрастает. Верно ли, что для любого борелевского $A \subset \mathbb{R}$ множество $f(A)$ — тоже борелевское?

Глава 54

Интеграл Лебега

54.1 Интегрирование неотрицательных функций

Пусть на измеримом по Лебегу множестве $X \subset \mathbb{R}^d$ задана неотрицательная функция $f\colon X \to [0, +\infty]$.

Если f измерима и является простой, то её интеграл Лебега по множеству X определяется как сумма всех её значений, умноженных на меры соответствующих полных прообразов:

$$\int_X f\,d\lambda := \sum_{y \in f(X)} y \cdot \lambda(\{f = y\}), \qquad \{f = y\} \equiv f^{-1}(y) \equiv \{x \in X : f(x) = y\}. \tag{54.1}$$

В данном выше определении множества $f^{-1}(a)$ и $f^{-1}(b)$ по определению полного прообраза не пересекаются для различных $a, b \in f(X)$. Таким образом, если числа $a_1, \ldots, a_n$ различны и X разбито на дизъюнктные измеримые множества $\{A_k\}_{k=1}^n$, то

$$\int_X \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}\,d\lambda = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k). \tag{54.2}$$

Записанное выше равенство справедливо и в том случае, когда значения a_k могут быть равны при различных k. Действительно, пусть $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$, и $f(X) = \{b_1, \ldots, b_m\}$. Тогда каждое из множеств B_j разбивается на конечный набор некоторых из множеств $\{A_k\}$, то есть существует $I_j \subset \{1, \ldots, n\}$ такое, что $B_j = \bigsqcup_{k \in I_j} A_k$. При этом для каждого $k \in I_j$ выполнено $a_k = b_j$, следовательно в силу измеримости множеств A_k

$$\sum_{j=1}^m b_j \lambda(B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \sum_{k \in I_j} \lambda(A_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{k \in I_j} a_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \lambda(A_k). \tag{54.3}$$

В общем случае интеграл Лебега от неотрицательной функции определяется как супремум интегралов от всевозможных неотрицательных простых измеримых функций, "подпирающих"её снизу:

Определение 12. Интегралом Лебега от функции $f\colon X \to [0, +\infty]$ по множеству X *называется*

$$\int_X f\,d\lambda := \sup \left\{ \int_X s\,d\lambda \;\middle|\; \begin{array}{c} s\colon X \to [0, +\infty) \text{ — простая,} \\ \text{измеримая,} \\ 0 \le s \le f. \end{array} \right\} \tag{54.4}$$

Вместо $\int_X f\,d\lambda$ также пишут $\int_X f(x)\,d\lambda(x)$, если требуется подчеркнуть, по какой переменной ведётся интегрирования (если f зависит от параметра). Если из контекста ясно, что понимается под X, то вместо $\int_X f\,d\lambda$ пишут $\int f\,d\lambda$. Наконец, ниже будет доказано, что для интегрируемых по Риману (в собственном смысле) функций интегралы Римана и Лебега совпадают, поэтому вместо $\int_X f\,d\lambda$ пишут просто $\int_X f(x)\,dx$.

Из определения непосредственно следует, что для любой неотрицательной функции f, заданной на X выполнены следующие свойства:

- если $f \le g$, то $\int_X f\,d\lambda \le \int_X g\,d\lambda$;
- если $A \subset X$ тоже измеримо, то $\int_A f\,d\lambda = \int \mathbf{1}_A \cdot f\,d\lambda$;
  В частности, $\int_A f\,dx \le \int_X f\,dx$.
- если $\int_X f\,d\lambda < +\infty$, то $f(x) < +\infty$ для λ-п.в. $x \in X$.
- для любого вектора $h \in \mathbb{R}^d$ выполнено $\int_{X-h} f(y+h)\,d\lambda(y) = \int_X f(x)\,d\lambda(x)$.
- для любого $c > 0$ выполнено $\int_{cX} f(y/c)\,d\lambda(y) = c^d \int_X f\,d\lambda(x)$.

Утверждение 23 (неравенство Чебышёва)**.** *Если $f\colon X \to [0,+\infty]$ измерима, то для любого $c \in (0,+\infty)$ выполнено*

$$\lambda(\{f \ge c\}) \le \frac{1}{c}\int f\,d\lambda.$$

Доказательство.. Функция $s = c\cdot\mathbf{1}_{\{f\ge c\}}$ является одной из простых измеримых функций, по которым берётся супремум в определении интеграла Лебега. Тогда по определению супремума $\int f\,d\lambda \ge \int s\,d\lambda = c\lambda(\{f \ge c\})$. ▲

Из неравенства Чебышёва следует, что интеграл от неотрицательной функции равен нулю тогда и только тогда, когда она равна нулю почти всюду (т.е. существует множество $N \in \mathfrak{M}_d$ нулевой меры такое, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X \setminus N$).

Заметим, что для любого $A \in \mathfrak{M}_d$ и любой простой измеримой функции s выполнено

$$\int_A s\,d\lambda = \sum_{y\in s(X)} y\cdot\lambda(s^{-1}(y)\cap A). \tag{54.5}$$

Отсюда ясно, что для любых $A, B \in \mathfrak{M}_d$ в силу конечной аддитивности λ выполнено $\int_{A\sqcup B} s\,d\lambda = \int_A s\,d\lambda + \int_B s\,d\lambda$. Тогда из общего определения получаем

$$\int_{A\sqcup B} f\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_B f\,d\lambda \tag{54.6}$$

для любой $f\colon X \to [0,+\infty]$.

Теорема 11 (Леви, о монотонной сходимости)**.** *Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon X \to [0,+\infty]$ измерима и для почти всех $x \in X$ выполнено $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \ldots \le +\infty$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\lambda = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda.$$

Доказательство. Переопределив все функции на множестве меры нуль можно считать, что в каждой точке $x \in X$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ нестрого возрастает и сходится к $f(x)$.

Из неравенств $f_n \le f_{n+1} \le f$ следует, что $\int f_n\,d\lambda \le \int f_{n+1}\,d\lambda \le \int f\,d\lambda$. Поэтому достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \ge \int f\,d\lambda$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что если $c \in (0,1)$ и $s\colon X \to [0,+\infty)$ — простая измеримая функция такая, что $s \le f$, то тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \ge \int cs \, d\lambda. \tag{54.7}$$

Рассмотрим множества $B_n = \{f_n \ge cs\}$. Так как $f_n \le f_{n+1}$, то $B_n \subset B_{n+1}$. С другой стороны, так как $f_n \to f$ при $n \to \infty$, то для любого $x \in X$ при достаточно больших n выполнено $f_n(x) \ge cs(x)$, то есть $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X$. Тогда для любого $y \in s(X)$ в силу непрерывности меры Лебега $\lambda(s^{-1}(y) \cap B_n) \to \lambda(s^{-1}(y))$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\int f_n \, d\lambda \ge \int_{B_n} cs \, d\lambda = \sum_{y\in s(X)} cy\lambda(s^{-1}(y) \cap B_n) \to \int cs \, d\lambda \tag{54.8}$$

при $n \to \infty$. ▲

Следствие 4. *Для любых неотрицательных измеримых функций $f_k\colon X \to [0,+\infty]$ выполнено*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, d\lambda = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\lambda. \tag{54.9}$$

Доказательство. Достаточно применить теорему Леви к функциям $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ и воспользоваться аддитивностью интеграла Лебега. ▲

Следствие 5. *Пусть $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любой неотрицательной измеримой функции $f\colon X \to [0,+\infty]$*

$$\int_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k} f \, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \, d\lambda. \tag{54.10}$$

Доказательство. Аналогично предыдущему следствию. ▲

Как мы уже видели, измеримость множеств важна для конечной (и тем более счётной) аддитивности меры Лебега. Аналогичным образом, измеримость функций важна для линейности интеграла Лебега, а точнее для его аддитивности:

Теорема 12 (аддитивность интеграла Лебега)**.** *Пусть $f, g\colon X \to [0,+\infty]$ измеримы Тогда $\int_X (f+g) \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda + \int_X g \, d\lambda$.*

Доказательство. Если f и g — простые функции, то доказываемое равенство легко проверить непосредственно по определению. Действительно, пусть $f(X) = \{a_i\}_{i=1}^{n}$, $g(X) = \{b_j\}_{j=1}^{m}$, и пусть $A_i = f^{-1}(a_i)$, $B_j = g^{-1}(b_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\lambda &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j)\lambda(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j\lambda(B_j) = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda. \end{aligned} \tag{54.11}$$

В общем случае существуют простые измеримые функции $s_n, t_n\colon X \to [0,+\infty)$ такие, что $s_n \uparrow f$ и $t_n \uparrow g$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме Леви

$$\int (f+g) \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int (s_n + t_n) \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left(\int s_n \, d\lambda + \int t_n \, d\lambda \right) = \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda. \tag{54.12}$$

▲

Теорема 13 (лемма Фату)**.** *Если при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n \colon X \to [0, +\infty]$ измерима, то*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\lambda \ge \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\lambda. \tag{54.13}$$

Доказательство.. Для любого $k \ge n$ выполнено $f_k \ge \inf_{k\ge n} f_k$, поэтому $\int_X f_k\, d\lambda \ge \int_X \inf_{k\ge n} f_k\, d\lambda$. Следовательно,

$$\inf_{k\ge n} \int_X f_k\, d\lambda \ge \int_X \inf_{k\ge n} f_k\, d\lambda. \tag{54.14}$$

По определению инфимума для каждого $x \in X$ последовательность $g_n(x) := \inf_{k\ge n} f_k(x)$ неотрицательна и нестрого возрастает. Значит по теореме Леви

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\lambda = \int \lim_{n\to\infty} g_n\, d\lambda.$$

Таким образом

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} \int_X f_k\, d\lambda \ge \lim_{n\to\infty} \int_X \inf_{k\ge n} f_k\, d\lambda = \int_X \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} f_k\, d\lambda, \tag{54.15}$$

что и требовалось доказать. ▲

54.2 Интегрирование знакопеременных функций

Пусть, как и раньше, $X \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу. Обозначим $f^\pm(x) = \max(0, \pm f(x))$.

Определение 13. *Если $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и хотя бы один из интегралов $\int_X f^\pm\, d\lambda$ конечен, то значение*

$$\int_X f\, d\lambda := \int_X f^+\, d\lambda - \int_X f^-\, d\lambda \tag{54.16}$$

называется интегралом Лебега от f по X. *(Иначе будем считать, что $\int_X f\, d\lambda = 0$. В случае, когда f зависит еще и от некоторого параметра y это позволит нам рассматривать интеграл $\int_X f(x, y)\, dx$ как функцию, определённую при* каждом *значении параметра y и принимающую значения в $\overline{\mathbb{R}}$.)*

Число $\|f\|_1 := \int |f|\, d\lambda$ называется L^1-нормой функции f.

Определение 14. *Функция f называется* интегрируемой по Лебегу*, если она измерима и интегралы $\int_X f^\pm\, d\lambda$ конечны. Множество всех интегрируемых (по Лебегу) функций $f \colon X \to \mathbb{R}$ будем обозначать как $L^1(X)$.*

В силу аддитивности интеграла Лебега $\int_X |f|\, d\lambda = \int_X f^+\, d\lambda + \int_X f^-\, d\lambda$. Поэтому измеримая функции f интегрируема тогда и только тогда, когда $\int_X |f|\, d\lambda < +\infty$.

По определению $-\int_X f^-\, d\lambda \le \int_X f\, d\lambda \le \int_X f^+\, d\lambda$, значит

$$\left| \int_X f\, d\lambda \right| \le \int_X |f|\, d\lambda. \tag{54.17}$$

Так как $(f+g)^\pm \le f^\pm + g^\pm$, то сумма (а также всевозможные линейные комбинации) любых двух интегрируемых по Лебегу функций также интегрируема по Лебегу. При этом

$$\int_X (f+g)\, d\lambda = \int_X f\, d\lambda + \int_X g\, d\lambda. \tag{54.18}$$

Действительно, пусть $h^\pm := (f+g)^\pm$, тогда

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+. \tag{54.19}$$

Интегрируя это равенство и пользуясь аддитивностью интеграла Лебега для неотрицательных функций, получаем (54.18).

Из определения видно, если значения подынтегральной функции изменить на множестве меры нуль, то это не повлияет на значение интеграла Лебега. Кроме того, из равенства интеграла $\int |f|\,d\lambda$ нулю не следует, что подынтегральная функция равна нулю *всюду*. В связи с этим иногда под $L^1(X)$ понимается множество $\mathbb{L}^1(X)$ всех классов эквивалентности интегрируемых функций по отношению равенства почти всюду (легко проверить, что такое отношение действительно будет отношением эквивалентности).

Теорема 14 (Лебега, об ограниченной (мажорируемой) сходимости)**.** *Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ измерима и для почти всех $x \in X$ существует конечный предел*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}. \tag{54.20}$$

Пусть существует $g \in L^1(X)$ такая, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|f_n(x)| \le g(x) \tag{54.21}$$

выполнено для почти всех $x \in X$ (такая g называется мажорантой*). Тогда $f \in L^1(X)$ и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\lambda = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\lambda.$$

Доказательство. По условию для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует множество $E_n \subset X$ меры нуль такое, что $|f_n(x)| \le g(x)$ для всех $x \in X \setminus E_n$. Так как $\lambda(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) \le \sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n) = 0$, то переопределив f_n и f нулём на $E := \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ мы не изменим значения интегралов от этих функций. При этом для каждого $x \in X$ получим $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, а также $|f_n(x)| \le g(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, не уменьшая общности можно считать, что предположения теоремы выполнены всюду, а не почти всюду.

Сначала докажем теорему при дополнительном предположении, что $f = 0$ и функции f_n неотрицательны. В этом случае по лемме Фату

$$\begin{aligned}
\int_X g\,d\lambda &= \int_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n)\,d\lambda \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\,d\lambda \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X g\,d\lambda - \int_X f_n\,d\lambda \right) \\
&= \int_X g\,d\lambda - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{54.22}$$

Отсюда

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\lambda \le 0.$$

В общем случае переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $|f_n(x)| \le g(x)$, получаем $|f(x)| \le g(x)$ для почти всех $x \in X$.

Значит $f \in L^1(X)$ и, в частности, интеграл $\int_X f\,d\lambda$ конечен.

Так как

$$\left| \int_X f_n\,d\lambda - \int_X f\,d\lambda \right| \le \int_X |f_n - f|\,d\lambda, \tag{54.23}$$

то достаточно доказать, что правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Для этого заметим, что $|f_n - f| \le 2g$ почти всюду и применим доказанную версию теоремы к последовательности $\tilde{f}_n := |f_n - f|$, имеющей мажоранту $\tilde{g} := 2g$. ▲

Замечание. Предположение об интегрируемости мажоранты g в условии (54.21) существенно. Например, если $X = (0, +\infty)$ и

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[n,n+1)}(x), \quad g(x) = 1 \tag{54.24}$$

то условие (54.21) выполнено и $f_n \to 0$ поточечно на X, но при этом

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = 1 \ne 0 = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda. \tag{54.25}$$

Теорема 15 (абсолютная непрерывность интеграла Лебега)**.** *Пусть $f\colon X \to [0, +\infty]$ измерима и $\int_X f \, d\lambda < +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого по Лебегу $A \subset X$ с $\lambda(A) < \delta$ выполнено $\int_A f \, d\lambda < \varepsilon$.*

Доказательство.. Для $C > 0$ обозначим $E_C := \{x \in X : f(x) > C\}$. Так как $\mathbf{1}_{E_C} f \to 0$ почти всюду при $C \to +\infty$ и $\mathbf{1}_{E_C} f \le f$ для всех C, то по теореме 14

$$\int_{E_C} f \, d\lambda \to 0 \tag{54.26}$$

при $C \to +\infty$. Выберем $C > 0$ так, что $\int_{E_C} f \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмём $\delta := \frac{\varepsilon}{2C}$. Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ измеримо и $\lambda(A) < \delta$. Тогда

$$\int_A f \, d\lambda = \int_{A\cap E_C} f \, d\lambda + \int_{A\setminus E_C} f \, d\lambda \le \frac{\varepsilon}{2} + C \cdot \lambda(A) < \varepsilon. \tag{54.27}$$

▲

54.3 Интеграл Лебега и интеграл Римана

Теорема 16 (о сравнении собственного интеграла Римана с интегралом Лебега)**.** *Пусть функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману (в собственном смысле). Тогда f измерима по Лебегу и*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda, \tag{54.28}$$

где интеграл в левой части понимается в смысле Римана, а в правой — в смысле Лебега.

Доказательство. Так как f интегрируема по Риману в собственном смысле, то существует $C \in \mathbb{R}$ такое, что $|f| \le C$ на $[a, b]$. Далее, рассмотрим разбиение $p_n = \{x_k\}_{k=0}^{2^n}$ отрезка $[a, b]$ на 2^n отрезков равной длины с концами в точках $x_k = a + k \cdot 2^{-n}(b - a)$, где $k \in \overline{0, 2^n}$. Рассмотрим простые функции

$$\varphi_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{1}_{I_k}(x) \cdot \inf_{y\in I_k} f(y), \quad \psi_n(x) := \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{1}_{I_k}(x) \cdot \sup_{y\in I_k} f(y),$$

где $I_k := (x_{k-1}, x_k)$, $k \in \overline{1, 2^n}$. По построению функции φ_n и ψ_n измеримы по Лебегу и для почти всех $x \in [a, b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\varphi_n(x) \le \varphi_{n+1}(x) \le \ldots \le f(x) \le \ldots \le \psi_{n+1}(x) \le \psi_n(x). \tag{54.29}$$

Поэтому для почти всех $x \in [a,b]$ существуют конечные

$$\underline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x), \quad \overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \psi_n(x),$$

причём $\underline{f}(x) \le f(x) \le \overline{f}(x)$. В силу утверждения о сохранении измеримости отображения при поточечном предельном переходе функции $\underline{f}$ и $\overline{f}$ измеримы по Лебегу. В силу (54.29) и критерия интегрируемости

$$\int_{[a,b]} (\overline{f}(x) - \underline{f}(x))\, dx \le \int_{[a,b]} (\psi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \le \Omega(f, p_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{54.30}$$

(где $\Omega(f, p_n)$ — взвешенное колебание f, отвечающее разбиению p_n). Значит

$$\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x) \tag{54.31}$$

для п.в. $x \in [a,b]$. Отсюда следует, что f измерима по Лебегу (так как совпадает п.в. с измеримой функцией $\underline{f}$).

В силу (54.29) для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_a^b \varphi_n\, dx \le \int_a^b f\, dx \le \int_a^b \psi_n\, dx \tag{54.32}$$

(где интегралы понимаются в смысле Римана). Тогда в силу (54.30)

$$\int_a^b f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx. \tag{54.33}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ интегралы от φ_n по $[a,b]$ в смысле Римана и Лебега совпадают (непосредственно по определению):

$$\int_a^b \varphi_n\, dx = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} \inf_{y\in I_k} f(y) = \int_{[a,b]} \varphi_n\, d\lambda. \tag{54.34}$$

Лишнее. Для каждого n выполнено $\varphi_n \le f$ (всюду за исключением конечного числа точек) и

$$\int_a^b f\, dx - \int_a^b \varphi_n\, dx = \int_a^b (f - \varphi_n)\, dx \le \Omega(f, p_n) \to 0 \tag{54.35}$$

при $n \to \infty$. Значит

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = \int_a^b f\, dx. \tag{54.36}$$

$\triangle$

С другой стороны, $\varphi_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|\varphi_n| \le C$ почти всюду. Значит по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n\, d\lambda = \int_{[a,b]} f\, d\lambda. \tag{54.37}$$

Таким образом, $\int_a^b f\, dx = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$. $\blacktriangle$

В силу доказанной теоремы собственный интеграл Римана совпадает с интегралом Лебега (для интегрируемых по Риману функций). Поэтому для любой интегрируемой по Лебегу на $[a,b]$ функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ вместо $\int_{[a,b]} f\, d\lambda$ обычно пишут $\int_a^b f(x)\, dx$, понимая этот интеграл в смысле Лебега.

Следствие 6 (о сравнении несобственного интеграла Римана от неотрицательной функции с интегралом Лебега). *Пусть $f\colon [a,b) \to [0,+\infty)$ интегрируема по Риману на $[a,b']$ для любого $b' \in (a,b)$. Тогда f измерима по Лебегу и несобственный интеграл Римана $\int_a^{\to b} f\,dx$ (конечный или бесконечный) совпадает с интегралом Лебега $\int_{[a,b)} f\,d\lambda$.*

Например, функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ интегрируема по Лебегу на $X = (0,1)$, так как существует конечный несобственный интеграл $\int_{\to 0}^{1} dx/\sqrt{x}. = 2$

Заметим, что из существования конечного несобственного интеграла Римана не вытекает интегрируемость по Лебегу. Например, несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится (если его понимать как несобственный интеграл Римана), но функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не принадлежит $L^1[1,+\infty)$, так как интеграл от её модуля (по следствию 6) равен несобственному интегралу Римана $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$.

54.4 Контрольные вопросы

Вопрос 55.1. Является ли функция $f(x) = 1/\sqrt{x}$ интегрируемой по Лебегу на $X = (0,1)$?

Вопрос 55.2. Является ли функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + 2^n(x - n\ln|\sin n|)^2} \tag{54.38}$$

интегрируемой по Лебегу на $X = \mathbb{R}$?

Вопрос 55.3. Пусть для каждого n функция $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ измерима и $f_n \to f$ почти всюду на $[0,1]$. Верно ли, что $\int_0^1 \sin(f_n)\,dx \to \int_0^1 \sin(f)\,dx$?

Вопрос 55.4. Пусть для каждого n функция $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ измерима и $f_n \to f$ почти всюду на $[0,1]$. Верно ли, что $\int_0^1 \exp(f_n)\,dx \to \int_0^1 \exp(f)\,dx$?

Вопрос 55.5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна. Верно ли, что $\lim\limits_{h\to 0} \int_0^1 f(x+h)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$?

Вопрос 55.6. Пусть для каждого n функция $f_n\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ интегрируема по Лебегу и $f_n \to 0$ почти всюду на $[0,1]$. Будет ли функция $F(x) = \sup_n f_n(x)$ интегрируема по Лебегу?

Вопрос 55.7. Пусть $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ интегрируема по Лебегу при каждом $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$. Пусть f также интегрируема по Лебегу. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx$?

Вопрос 55.8. Пусть функции $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ измеримы по Лебегу при каждом $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \le f_n$ и $f_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n\,dx = \int f\,dx$?

Вопрос 55.9. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ измерима по Лебегу. Верно ли, что

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,dx \le \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n\,dx\ ?$$

Вопрос 55.10. Пусть V — множество Витали. Верно ли, что $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_V\,d\lambda = 0$?

Глава 55

Теорема Витали о тонком покрытии

Шар $B \subset \mathbb{R}^d$ (открытый или замкнутый) будем называть *невырожденным*, если его радиус $r(B)$ строго больше нуля. Через $\widehat{B}$ будем обозначать концентрический с B шар, радиус которого в 5 раз больше по сравнению с радиусом B, то есть

$$\widehat{B} = x_B + 5(B - x_B), \tag{55.1}$$

где x_B — центр шара B.

Намомним, что семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества X называется *дизъюнктным*, если его элементы попарно не пересекаются, то есть для любых различных $A, B \in \mathcal{F}$ выполнено $A \cap B = \emptyset$.

Заметим, что любое дизъюнктное семейство $\mathcal{F}$, состоящее из невырожденных шаров, не более чем счётно. Действительно, занумеруем $\mathbb{Q}^d$ как $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Отображение $\nu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ вида $\nu(B) := \min\{k \ : \ q_k \in B\}$ инъективно. Следовательно, $\mathcal{F}$ равномощно множеству $\nu(\mathcal{F}) \subset \mathbb{N}$.

Лемма 4 (Витали, о покрытии)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство невырожденных шаров в $\mathbb{R}^d$ (открытых или замкнутых), радиусы которых ограничены (то есть $\sup_{B\in\mathcal{F}} r(B) < +\infty$). Тогда из $\mathcal{F}$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ такое, что для каждого шара $B \in \mathcal{F}$ найдётся шар $P \in \mathcal{G}$ такой, что*

$$B \cap P \neq \emptyset \tag{55.2}$$

и

$$B \subset \widehat{P}. \tag{55.3}$$

В частности,

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{P\in\mathcal{G}} \widehat{P}. \tag{55.4}$$

Доказательство. Положим $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и семейство $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ уже построено. Пусть $R_n := \sup_{B\in\mathcal{F}_n} r(B)$. Выберем из

$$\mathcal{F}'_n := \{B \in \mathcal{F}_n \mid R_n/2 < r(B) \leq R_n\} \tag{55.5}$$

максимальное по вложению дизъюнктное семейство $\mathcal{G}_n$. Для этого заметим, что внутри любого куба вида $[-m, m]^d$ ($m \in \mathbb{N}$) не может лежать бесконечно много попарно непересекающихся элементов $\mathcal{F}'_n$ (так как их меры ограничены снизу строго положительной константой). Значит для каждого m можно выделить максимальное конечное дизъюнктное подсемейство семейства шаров из $\mathcal{F}'_n$, лежащих в $[-m, m]^d$. Увеличивая m и дополняя полученное подсемейство конечными подсемействами, получим $\mathcal{G}_n$.

Теперь удалим из $\mathcal{F}_n$ все шары, пересекающиеся с шарами, выбранными ранее:

$$\mathcal{F}_{n+1} := \{B \in \mathcal{F}_n \mid B \cap P = \emptyset \quad \forall P \in \mathcal{G}_n\} \tag{55.6}$$

В силу максимальности $\mathcal{G}_n$ для любого $B \in \mathcal{F}'_n$ существует $P \in \mathcal{G}_n$ такой, что $B \cap P \neq \emptyset$. Следовательно, все оставшиеся в $\mathcal{F}_{n+1}$ шары B имеют радиусы $r(B) \leq R_n/2$ и не пересекаются с шарами из $\mathcal{G}_n$.

Продолжая по индукции для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы получим не более чем счётное дизъюнктное семейство $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$, причём по построению любые шары $P_1 \in \mathcal{G}_n$ и $P_2 \in \mathcal{G}_m$ не пересекаются при $n \neq m$. Тогда семейство $\mathcal{G} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ не более чем счётно, дизъюнктно и лежит в $\mathcal{F}$.

По построению любой шар $B \in \mathcal{F}$ удаляется на некотором шаге, то есть существует максимальное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $B \in \mathcal{F}_n$. Значит $B \cap P \neq$ для некоторого шара $P \in \mathcal{G}_n$. Если $y \in B \cap P$, то для любого $x \in B$ в силу неравенства треугольника

$$|x - x_P| \leq |x - y| + |y - x_P| \leq 2r(B) + r(P). \tag{55.7}$$

Так как $B \in \mathcal{F}_n$ и $P \in \mathcal{F}'_n$, то

$$r(B) \leq R_n < 2r(P), \tag{55.8}$$

поэтому $|x - x_P| \leq 5r(P)$. Следовательно, $x \in \widehat{P}$. ▲

Лемма Витали останется верной, если в определении $\widehat{B}$ константу $c = 5$ заменить на произвольную константу $c > 3$. Однако для $c = 3$ соответствующее утверждение не будет иметь места. Действительно, рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} := \{[0, 2x] : x \in (0, 1)\} \cup \{[-2x, 0] : x \in (0, 1)\}. \tag{55.9}$$

Данное семейство состоит из одномерных замкнутых шаров с центрами в $\pm x$ и радиусами $r = x$, где $x \in (0, 1)$. Объединение $\mathcal{F}$ есть $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{x \in (0,1)} [0, 2x] \cup \bigcup_{x \in (0,1)} [-2x, 0] = (-2, 2)$. Так как точка 0 принадлежит каждому шару из $\mathcal{F}$, то любое дизъюнктное семейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ содержит не более одного шара. Не уменьшая общности пусть $\mathcal{G} = \{P\}$, где $P = [0, 2x]$ для некоторого $x \in (0, 1)$. Для того, чтобы шар $x_P + c(P - x_p) = [x - cx, x + cx]$ покрывал $(-2, 2)$ необходимо, чтобы $x - cx \leq -2$. Значит $c \geq 1 + \frac{2}{x} > 3$.

Определение 15. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathcal{F}$ — семейство невырожденных шаров (открытых или замкнутых). Если для каждого $x \in A$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathcal{F}$ такой, что $x \in B$ и $r(B) < \varepsilon$, то $\mathcal{F}$ называется* тонким покрытием множества A.

Оказывается, что из любого тонкого покрытия произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное подсемейство, покрывающее A с точностью до множества меры нуль:

Теорема 17 (Витали, о тонком покрытии)**.** *Из любого тонкого покрытия $\mathcal{F}$ множества $A \subset \mathbb{R}^d$, можно выделить не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ такое, что*

$$\lambda(A \setminus \bigsqcup_{P \in \mathcal{G}} P) = 0, \tag{55.10}$$

$$A \subset \bigcup_{P \in \mathcal{G}} \widehat{P}. \tag{55.11}$$

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать что радиусы всех шаров, входящих в $\mathcal{F}$, не превосходят 1. Пусть $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ — дизъюнктное семейство, существующее по лемме 4.

Если A неограничено, то зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $U_m = (-m, m)^d$. (Если A ограничено, то можно зафиксировать достоточно большое m так, что $A \subset U_m$.) Обозначим $A_m := A \cap U_m$ и $\mathcal{G}' := \{P \in \mathcal{G} \colon P \cap U_m \neq \emptyset\}$. Докажем, что $\lambda(A_m \setminus \bigsqcup_{P \in \mathcal{G}'} P) = 0$.

Пусть $\mathcal{G}' = \{P_k\}_{k=1}^{\infty}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x \in A_m$ не принадлежит замыканиям шаров $P_1, \dots, P_n$. Тогда по определению тонкого покрытия существует $B \in \mathcal{F}$ такой, что $x \in B$, $B \subset U_m$ и

$$B \cap \bigcup_{k=1}^{n} \overline{P_k} = \emptyset. \tag{55.12}$$

По лемме 4 и по построению семейства $\mathcal{G}$ существует $P \in \mathcal{G}$ такой, что $B \cap P \neq$ и $B \subset \widehat{P}$. Так как $B \subset U_m$, то $P \cap U_m \neq \emptyset$. Поэтому $P \in \mathcal{G}'$ и, следовательно, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $P = P_k$. В силу (55.12) такой индекс k не может принадлежать $\{1, 2, \dots, n\}$, значит

$$x \in \bigcup_{k>n} \widehat{P_k}. \tag{55.13}$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$A_m \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \overline{P_k} \subset \bigcup_{k>n} \widehat{P_k}. \tag{55.14}$$

По построению $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset U_{m+2}$, следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) = \lambda\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k\right) \leq \lambda(U_{m+2}) < \infty. \tag{55.15}$$

Тогда $\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(P_k) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, в силу (55.14)

$$\lambda\left(A_m \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{P_k}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(\widehat{P}_k) \leq 5^d \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(P_k) \to 0 \tag{55.16}$$

при $n \to \infty$.

Итак, в случае неограниченного A мы доказали, что $\lambda(A_m \setminus \bigsqcup_{P \in \mathcal{G}'} P) = 0$. Следовательно, $\lambda(A_m \setminus \bigsqcup_{P \in \mathcal{G}} P) = 0$. Так как $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, то в силу счётной субаддитивности меры Лебега заключаем, что $\lambda(A \setminus \bigsqcup_{P \in \mathcal{G}} P) = 0$, что и требовалось доказать. ▲

В качестве примера применения теоремы Витали докажем, что мера Лебега любого множества равна инфимуму сумм мер шаров, которые его покрывают:

Утверждение 24. *Для любого $E \subset \mathbb{R}^d$ выполнено*

$$\lambda(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \text{ — шар}\right\}, \tag{55.17}$$

где инфимум берётся по всевозможным не более чем счётным покрытиям множества E шарами.

Доказательство. Обозначим через $\beta(E)$ инфимум сумм мер шаров, покрывающих E. В силу счётной субаддитивности меры Лебега для каждого такого покрытия $\{B_k\}$ выполнено

$$\lambda(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k). \tag{55.18}$$

Следовательно,
$$\lambda(E) \leq \beta(E). \tag{55.19}$$
Покажем, что $\beta(E) \leq \lambda(E)$.

Шаг 1. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda(E) = 0$. В силу внешней регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть E открытым множеством U таким, что $\lambda(U) < \varepsilon$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всевозможных невырожденных шаров, лежащих в U. Это семейство образует тонкое покрытие множества U. Следовательно, по теореме Витали из $\mathcal{F}$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное семейство $\{P_k\} \subset \mathcal{F}$ такое, что

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \widehat{P_k}. \tag{55.20}$$

В силу дизъюнктности семейства $\{P_k\}$

$$\sum_k \lambda(P_k) = \lambda\left(\bigsqcup_k P_k\right) \leq \lambda(U) < \varepsilon. \tag{55.21}$$

С другой стороны, так как $E \subset U$ и $U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \widehat{P_k}$, то

$$\lambda(E) \leq \sum_k \lambda(\widehat{P_k}) \leq 5^d \sum_k \lambda(P_k) < 5^d \varepsilon. \tag{55.22}$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ мы построили не более чем счётное покрытие множества E шарами $\{\widehat{P_k}\}$, сумма мер которых не превосходит $5^d\varepsilon$. Отсюда следует, что $\beta(E) = 0$.

Шаг 2. Теперь перейдём к случаю, когда $\lambda(E) > 0$. В силу внешней регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ можно покрыть E открытым множеством U таким, что $\lambda(U) \leq \lambda(E) + \varepsilon/2$. Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ всевозможных открытых шаров, лежащих в U. Это семейство образует тонкое покрытие множества U. Следовательно, по теореме Витали из $\mathcal{F}$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное семейство $\{P_k\} \subset \mathcal{F}$ такое, что
$$\lambda(N) = 0, \quad \text{где} \quad N := E \setminus \bigsqcup_k P_k. \tag{55.23}$$

В силу доказанного выше существует не более чем счётное семейство шаров $\{Q_k\}$ такое, что $N \subset \bigcup_k Q_k$ и $\sum_k \lambda(Q_k) < \varepsilon/2$. С другой стороны, $P_k \subset U$ для каждого k, поэтому

$$\sum_k \lambda(P_k) = \lambda\left(\bigsqcup_k P_k\right) \leq \lambda(U) \leq \lambda(E) + \varepsilon/2. \tag{55.24}$$

Итак, если взять $\{B_k\} := \{P_k\} \cup \{Q_k\}$, то $E \subset \bigcup_k B_k$ и

$$\sum_k \lambda(B_k) \leq \lambda(E) + \varepsilon. \tag{55.25}$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon > 0$ мы построили не более чем счётное покрытие множества E шарами $\{B_k\}$, сумма мер которых не превосходит $\lambda(E) + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\beta(E) \leq \lambda(E)$. ▲

Аналогичным образом доказывается

Следствие 7. *Любое непустое открытое множество можно представить в виде объединения не более чем счётного дизъюнктного семейства невырожденных открытых шаров и некоторого множества меры нуль.*

55.1 Дифференцирование интеграла Лебега

Определение 16. *Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Точка $x \in \mathbb{R}^d$ называется* точкой Лебега функции f*, если*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0. \tag{55.26}$$

Лемма 5 (о верхнем пределе средних значений неотрицательной интегрируемой функции)**.** *Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ измерима по Лебегу и $\int f\, dx < +\infty$. Для каждого $x \in \mathbb{R}^d$ обозначим*

$$\overline{f}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f\, dy. \tag{55.27}$$

Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено $\overline{f}(x) \le f(x)$.

Неформальный обзор доказательства.

Так как $\{x : \overline{f}(x) > f(x)\} = \bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}} \{x : \overline{f}(x) > t > s > f(x)\}$, то достаточно доказать, что для любых рациональных чисел s и t множество

$$A := \{x : \overline{f}(x) > t > s > f(x)\} \tag{55.28}$$

имеет меру нуль.

Для каждой точки $x \in A$ по определению верхнего предела для любого $\delta > 0$ существует $r \in (0, \delta)$ такое, что $\int_{B_r(x)} f(y)\, dy > t\lambda(B_r)$. Семейство $\mathcal{F}$ всех таких шаров образует тонкое покрытие множества A. По теореме Витали из $\mathcal{F}$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\mathcal{G}$, покрывающее A с точностью до множества меры нуль. Поэтому можно считать, что

$$A \approx \bigsqcup_{P\in\mathcal{G}} P. \tag{55.29}$$

Тогда с одной стороны

$$\int_A f\, dx = \sum_{P\in\mathcal{G}} \int_P f\, dx \ge \sum_{P\in\mathcal{G}} t\lambda(P) \approx t\lambda(A). \tag{55.30}$$

С другой стороны

$$\int_A f\, dx \le \int_A s\, dx = s\lambda(A). \tag{55.31}$$

Таким образом

$$t\lambda(A) \le \int_A f\, dx \le s\lambda(A), \tag{55.32}$$

откуда $(t - s)\lambda(A) = 0$. Значит $\lambda(A) = 0$.

На самом деле мера множества $\bigsqcup_{P\in\mathcal{G}} P \setminus A$ не обязана быть равна нулю, поэтому в настоящем доказательстве приходится контролировать возникающие в связи с этим погрешности. Для этого используется внешняя регулярность меры Лебега и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. При этом также необходимо доказать измеримость множества A.

▲

Доказательство. Сначала заметим, что при каждом $r > 0$ функция $f_r(x) := \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f\, dy$ непрерывна. Кроме того, при каждом $x \in \mathbb{R}$ значение $f_r(x)$ непрерывно зависит от $r > 0$, так что $\overline{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup_{r\in(0,1/n)\cap\mathbb{Q}} f_r(x)$ измерима по Лебегу.

Далее достаточно доказать, что для любых рациональных $R, t, s > 0$ мера Лебега множества

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < R,\ f(x) < s < t < \overline{f}(x)\} \tag{55.33}$$

равна нулю.

В силу внешней регулярности меры Лебега и абсолютной непрерывности интерала Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $U \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $A \subset U$ и $\int_{U\setminus A} f\,dx < \varepsilon$.

По определению $\overline{f}$ для каждой точки $x \in A$ для любого $\delta > 0$ найдётся $r \in (0, \delta)$ такое, что $f_r(x) > t$ и $B_r(x) \subset U$. Семейство всех таких шаров $\{B_r(x)\}$ образует тонкое покрытие $\mathcal{F}$ множества A, значит по теореме 17 из $\mathcal{F}$ можно выделить не более чем счётное дизъюнктное подмножество $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ такое, что $\lambda(A \setminus \bigsqcup_{P\in\mathcal{G}} P) = 0$.

Тогда

$$\int_A f\,dx + \varepsilon > \int_U f\,dx > \sum_{P\in\mathcal{G}} \int_P f\,dx > \sum_{P\in\mathcal{G}} t\lambda(P) \geq t\lambda(A). \tag{55.34}$$

С другой стороны, $\int_A f\,dx \leq s\lambda(A)$, так что $(t-s)\lambda(A) \leq \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда заключаем, что $\lambda(A) = 0$. ▲

Теорема 18 (о точках Лебега)**.** *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, то почти все $x \in \mathbb{R}^d$ являются точками Лебега функции f.*

Доказательство. Для любых $q \in \mathbb{Q}$ и $R \in \mathbb{N}$ обозначим $f_q(x) := |f(x) - q| \cdot \mathbf{1}_{B_R(0)}(x)$, где $x \in \mathbb{R}^d$. По лемме 5 существует множество меры нуль $N_{q,R} \subseteq \mathbb{R}^d$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^d \setminus N_{q,R}$

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f_q(y)\,dy \leq f_q(x).$$

Тогда множество $N := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \bigcup_{R\in\mathbb{N}} N_{q,R}$ имеет меру нуль и для любого $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ при всех $q \in \mathbb{Q}$ и $R \in \mathbb{N}$ таких, что $x \in B_R(0)$, выполнено

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\,dy \leq \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - q|\,dy + |q - f(x)| \leq 2|f(x) - q|.$$

Ввиду произвольности $q \in \mathbb{Q}$ заключаем, что x — точка Лебега. ▲

Определение 17. *Точка $x \in \mathbb{R}^d$ называется* точкой плотности множества $E \subset \mathbb{R}^d$, *если $\lambda(B_r(x) \cap E)/\lambda(B_r(x)) \to 1$ при $r \to 0$.*

Следствие 8. *Для любого измеримого по Лебегу $E \subset \mathbb{R}^d$ почти все точки $x \in E$ являются точками плотности множества E.*

Доказательство. Не уменьшая общности пусть $\lambda(E) < +\infty$. Тогда $\mathbf{1}_E$ интегрируема по Лебегу. Следовательно почти все точки $x \in E$ по теореме 8 являются точками Лебега функции $\mathbf{1}_E$, а значит точками плотности E. ▲

Упражнение. Докажите следствие 8 непосредственно с помощью теоремы Витали о тонком покрытии (не пользуясь теоремой 8, но рассуждая по аналогии с её доказательством).

Теорема 19 (о дифференцировании интеграла Лебега по верхнему пределу)**.** *Пусть $f \in L^1[a,b]$ и $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда для почти всех $x \in [a,b]$ существует $F'(x) = f(x)$.*

Доказательство. Пусть $x \in (a, b)$ — точка Лебега функции f. Тогда

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt \le \frac{2}{\lambda(B_h(x))}\int_{B_h(x)}|f(t)-f(x)|\,dt.\end{aligned} \tag{55.35}$$

Остаётся заметить, что по теореме 18 почти все $x \in (a, b)$ являются точками Лебега функции f, поэтому для всех таких x выполнено $\frac{2}{\lambda(B_h(x))}\int_{B_h(x)}|f(t)-f(x)|\,dt \to 0$ при $h \to 0$. ▲

55.2 Дифференцирование монотонных функций

Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — функция Кантора, а K — множество Кантора. Тогда $[0,1] \setminus K$ является объединением дизъюнктного семейства открытых интервалов, на каждом из которых функция f постоянна. Следовательно, в каждой точке $x \in [0,1] \setminus K$ существует $f'(x) = 0$. Значит f дифференцируема почти всюду. Оказывается, что любая монотонная функция обладает этим свойством.

Пусть функция $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ нестрого возрастает. Для любой точки $x \in [\alpha,\beta]$ обозначим через

$$\underline{D}f(x) := \limsup_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad \text{и} \quad \overline{D}f(x) := \liminf_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{55.36}$$

соответственно верхнюю и нижнюю производные f в точке x. По определению верхнего и нижнего предела $\underline{D}f(x) \le \overline{D}f(x)$, а для существования конечной или бесконечной производной функции f в точке x необходимо и достаточно, чтобы $\underline{D}f(x) = \overline{D}f(x)$. Если это не выполнено, то найдутся рациональные числа $s < t$ такие, что $\underline{D}f(x) < s < t < \overline{D}f(x)$.

Утверждение 25. *Пусть $s, t \in \mathbb{Q}$ и $s < t$. Тогда множество*

$$A = \{x \in (\alpha,\beta) \mid \underline{D}f(x) < s < t < \overline{D}f(x)\} \tag{55.37}$$

имеет меру нуль.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу внешней регулярности меры Лебега найдётся открытое множество $U \subset (\alpha,\beta)$ такое, что $A \subset U$ и $\lambda(U) < \lambda(A) + \varepsilon$.

Для каждой точки $x \in A$ для любого $\delta > 0$ найдётся невырожденный отрезок $[a, b] \subset U$ такой, что $x \in [a,b] \subset U_\delta(x)$ (причём либо $a = x$, либо $b = x$) и

$$f(b) - f(a) < s(b-a). \tag{55.38}$$

Семейство всех таких отрезков $[a, b]$ образует тонкое покрытие множества A. С помощью теоремы Витали выделим из него не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\{[a_i, b_i]\}$, покрывающее A с точностью до множества меры нуль. Так как множество концов отрезков $[a_i, b_i]$ не более чем счётно, то семейство интервалов $\{(a_i, b_i)\}$ также покрывает A с точностью до множества меры нуль.

Для каждой точки $x \in A \cap \bigsqcup_i (a_i, b_i)$ для любого $\delta > 0$ найдётся невырожденный отрезок $[u, v]$ такой, что $x \in [u,v] \subset U_\delta(x)$, $[u,v] \subset (a_i, b_i)$ для некоторого i и

$$f(v) - f(u) > t(v-u). \tag{55.39}$$

Семейство всех таких отрезков $[u,v]$ образует тонкое покрытие множества A. С помощью теоремы Витали выделим из него не более чем счётное дизъюнктное подсемейство $\{[u_j,b_j]\}$, покрывающее A с точностью до множества меры нуль. Тогда семейство $\{(u_j,v_j)\}$ также покрывает A с точностью до множества меры нуль.

Для каждого i обозначим через J_i множество всех j таких, что $(u_j,v_j)\subset(a_i,b_i)$. Легко видеть, что для каждого j существует единственное i такое, что $j\in J_i$. В силу монотонности f имеем

$$\sum_{j\in J_i}(f(u_j)-f(u_j))\le f(b_i)-f(a_i). \tag{55.40}$$

Тогда в силу (55.39), (55.40) и (55.38)

$$\begin{aligned}\lambda(A)&\le\sum_j(v_j-u_j)<\frac{1}{t}\sum_j(f(v_j)-f(u_j))\\&<\frac{1}{t}\sum_i(f(b_i)-f(a_i))<\frac{s}{t}\sum_i(b_i-a_i)\le\frac{s}{t}\lambda(U).\end{aligned} \tag{55.41}$$

Значит $\lambda(A)<\frac{s}{t-x}\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ заключаем, что $\lambda(A)=0$. ▲

Так как

$$\{\underline{D}f<\overline{D}f\}=\bigcup_{s,t\in\mathbb{Q}}\{x\in(\alpha,\beta)\mid \underline{D}f(x)<s<t<\overline{D}f(x)\}, \tag{55.42}$$

то по утверждению 25 имеем $\lambda(\{\underline{D}f<\overline{D}f\})=0$. Рассуждая по аналогии с доказательством утверждения 25 можно проверить, что $\lambda(\{f'=+\infty\})=0$. Таким образом, f дифференцируема почти всюду.

Упражнение. Пусть $f\in L^1[a,b]$ и $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ для всех $x\in[a,b]$. Так как F является разностью двух монотонных функций, то в силу доказанного выше F дифференцируема почти всюду. Пользуясь этим докажите следующие утверждения:

1. Если $F(x)=0$ для всех $x\in[a,b]$, то $f=0$ почти всюду.
2. Если f неотрицательна, то $\int_a^b F'(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx$.
3. Если f неотрицательна и ограничена, то $\int_a^b F'(x)\,dx\ge\int_a^b f(x)\,dx$.
4. Если f неотрицательна, то для п.в. $x\in[a,b]$ существует $F'(x)=f(x)$.
5. Для почти всех $x\in[a,b]$ выполнено $F'(x)=f(x)$.

55.3 Контрольные вопросы

Вопрос 56.1. Верно ли, что любое открытое множество можно представить в виде объединения не более чем счётного дизъюнктного семейства открытых шаров и множества меры нуль?

Вопрос 56.2. Пусть $\mathcal{F}=\{B_i\}_{i=1}^n$ — конечный набор открытых или замкнутых невырожденных шаров в $\mathbb{R}^d$. Существует ли дизъюнктное подмножество $\mathcal{G}=\{B_{i_k}\}_{k=1}^m\subset\mathcal{F}$ такое, что $\bigcup_{i=1}^n B_i\subset\bigcup_{k=1}^m\widetilde{B}_{i_k}$, где $\widetilde{P}:=x_P+3(P-x_p)$ для любого шара P?

Вопрос 56.3. Пусть семейство $\mathcal{F}\subset 2^{\mathbb{R}}$ дизъюнктно, причём каждое $A\in\mathcal{F}$ измеримо по Лебегу и $\lambda(A)>0$. Верно ли, что $\mathcal{F}$ не более чем счётно?

Вопрос 56.4. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство невырожденных открытых или замкнутых шаров в $\mathbb{R}^d$. Существует ли не более чем счётное дизъюнктное семейство $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ такое, что $\bigcup_{B\in\mathcal{F}}B\subset\bigcup_{P\in\mathcal{G}}\widehat{P}$?

Вопрос 56.5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечную производную. Верно ли, что если $f'(x) = 0$ в каждой точке множества $E \subset \mathbb{R}$, то $\lambda(f(E)) = 0$?

Вопрос 56.6. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечную производную. Верно ли, что для любого множества $N \subset \mathbb{R}$ нулевой меры Лебега выполнено $\lambda(f(N)) = 0$?

Вопрос 56.7. Существует ли измеримое по Лебегу множество $E \subset \mathbb{R}$ такое, что для любого конечного промежутка $I \subset \mathbb{R}$ выполнено $\frac{1}{3}\lambda(I) \le \lambda(I \cap E) \le \frac{2}{3}\lambda(I)$?

Вопрос 56.8. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт и $r > 0$. Верно ли, что граница множества $U_r(K) := \{x \in \mathbb{R}^d : \rho(x, K) < r\}$ имеет нулевую меру Лебега?

Вопрос 56.9. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонна. Верно ли, что f дифференцируема почти всюду?

Вопрос 56.10. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица. Верно ли, что f дифференцируема почти всюду?

Глава 56

Сведение кратных интегралов к повторным

Меру Лебега на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать как λ_n для того, чтобы явным образом указать размерность n. Одномерную меру Лебега λ_1 естественно называть *длиной*, двумерную λ_2 — *площадью*, трёхмерную λ_3 — *объёмом* и так далее.

Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f\colon X \to \mathbb{R}$. Интеграл $\int_X f\, d\lambda_n$ будем обозначать символом

$$\int_X f\, dx \equiv \int \dots \int_X f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \equiv \int_X f(x_1, \dots, x_n)\, d\lambda_n(x_1, \dots, x_n). \tag{56.1}$$

Интегралы такого вида (при $n > 1$) называются *кратными*. Если же проинтегрировать f сначала по переменной x_1, затем по переменной x_2 и т.д., то полученный интеграл будет называться *повторным*. Зависит ли значение повторного интеграла от порядка в котором производится интегрирование? Оказывается, что в общем случае — да.

Например, рассмотрим $X = (0, +\infty)^2$ и

$$f(x,y) = \begin{cases} +1, & (x,y) \in (k-1,k) \times (k-1,k),\ k \in \mathbb{N} \\ -1, & (x,y) \in (k,k+1) \times (k-1,k),\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{56.2}$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\, dx \right) dy = 0 \neq 1 = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\, dy \right) dx. \tag{56.3}$$

Рассмотрим ещё один аналогичный пример:

$$f(x,y) := \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \in (0,1)^2. \tag{56.4}$$

Для любого $y \in (0,1)$

$$\int_0^1 f(x,y)\, dx = \frac{-1}{1+y^2} \tag{56.5}$$

и аналогично для любого $x \in (0,1)$

$$\int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{1+x^2}, \tag{56.6}$$

поэтому

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx. \tag{56.7}$$

Несмотря на наличие подобных примеров оказывается, что для весьма широкого класса функций повторные интегралы не зависят от порядка интегрирования, и совпадают соответствующим кратным интегралом. Начнём с наиболее простого случая, когда f является индикатором некоторого измеримого множества.

Определение 18. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}$ множества*

$$A_x := \{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in A\}, \qquad A^y := \{t \in \mathbb{R} : (t,y) \in A\} \tag{56.8}$$

называются соответственно вертикальным сечением A (в точке x) *и* горизонтальным сечением A (в точке y).

Следующая теорема позволяет выразить площадь множества как интеграл от длин его сечений,

Теорема 20 (принцип Кавальери)**.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо по Лебегу. Тогда*

1. *для п.в. $x, y \in \mathbb{R}$ множества A_x и A^y измеримы по Лебегу;*
2. *функции*
$$\varphi(x) := \lambda_1(A_x), \qquad \psi(y) := \lambda_1(A^y) \tag{56.9}$$
измеримы по Лебегу;
3. *имеет место равенство*
$$\lambda_2(A) = \int \lambda_1(A_x)\, dx = \int \lambda_1(A^y)\, dy, \tag{56.10}$$
где интегрирование ведётся по всей вещественной прямой.

Доказательство. Мы докажем утверждение леммы лишь для горизонтальных сечений, так как доказательство для вертикальных сечений аналогично. Измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^2$ договоримся называть *слоистым,* если

- (i) для п.в. $y \in \mathbb{R}$ множество A^y измеримо по Лебегу;
- (ii) функция $\psi(y) := \lambda_1(A^y)$ измерима по Лебегу;
- (iii) имеет место равенство $\lambda_2(A) = \int \lambda_1(A^y)\, dy$, где интегрирование ведётся по всей вещественной прямой.

Семейство всех слоистых множеств $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим символом $\mathcal{F}$.

Несложно проверить, что $\Theta_2 \subset \mathcal{F}$. Для того, чтобы расширить $\mathcal{F}$, установим несколько общих свойств этого семейства.

- **(1)** *Если $A_k \in \mathcal{F}$ и $A_k \subset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то множество $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежит $\mathcal{F}$.*

  Доказательство. Для любого $y \in \mathbb{R}$ сечение объединения является объединением сечений:
$$A^y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^y. \tag{56.11}$$
  Значит для п.в. y множество A^y измеримо. (Действительно, для каждого k множество $E_k := \{y \in \mathbb{R} : A_k^y \text{ не измеримо}\}$ имеет меру нуль, следовательно объединение $E :=$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ тоже имеет меру нуль. Тогда для любого $y \in \mathbb{R} \setminus E$ множества A_k^y измеримы для *всех* $k \in \mathbb{N}$.)

В силу непрерывности меры Лебега для п.в. y имеем

$$\lambda_1(A_k^y) \to \lambda_1(A^y) \tag{56.12}$$

при $k \to \infty$. Тогда ψ измерима как п.в. предел измеримых функций.

Так как $A_k \in \mathcal{F}$, то

$$\lambda_2(A_k) = \int \lambda_1(A_k^y)\, dy. \tag{56.13}$$

В силу непрерывности меры Лебега $\lambda_2(A_k) \to \lambda(A)$ при $k \to \infty$. С другой стороны, по теореме Леви

$$\int \lambda_1(A_k^y)\, dy \to \int \lambda_1(A)\, dy. \tag{56.14}$$

$\triangle$

- **(2)** *Если* $A_k \in \mathcal{F}$ *и* $A_k \supset A_{k+1}$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$, *причём* $\lambda_2(A_1) < \infty$, *то множество* $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ *принадлежит* $\mathcal{F}$.

  Доказательство.

  Аналогично предыдущему пункту выберем множество меры нуль $E \subset \mathbb{R}$ так, что для всех $y \in \mathbb{R} \setminus E$ множество A_k^y измеримо для всех $k \in \mathbb{N}$. Для любого $y \in \mathbb{R} \setminus E$ множество

  $$A^y = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^y \tag{56.15}$$

  измеримо (как счётное пересечение измеримых).

  Так как $A_1 \in \mathcal{F}$, то

  $$\int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A_1^y)\, dy = \lambda_2(A_1) < \infty. \tag{56.16}$$

  Следовательно, $\lambda_1(A_1^y) < +\infty$ для почти всех y. Для каждого такого y в силу непрерывности меры Лебега

  $$\lambda_1(A_k^y) \to \lambda_1(A^y), \qquad k \to \infty. \tag{56.17}$$

  Следовательно, функция $\psi(y) = \lambda_1(A^y)$ измерима (как п.в. предел измеримых функций). Кроме того, из $A_k \subset A_1$ следует, что $A_k^y \subset A_1^y$, следовательно, $\lambda_1(A_k^y) \le \lambda_1(A_1^y)$. Тогда по теореме Лебега об ограниченной сходимости

  $$\lambda_2(A) = \lim_{k\to\infty} \lambda_2(A_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A_k^y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} \lambda_1(A_k^y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A^y)\, dy, \tag{56.18}$$

  где первое равенство выполнено в силу непрерывности меры Лебега. $\triangle$

- **(3)** *Если* $A, B \in \mathcal{F}$, *то* $A \sqcup B \in \mathcal{F}$.

  Доказательство.

  Так как $(A \sqcup B)^y = A^y \sqcup B^y$, то $(A \sqcup B)^y$ измеримо для почти всех y. Следовательно, в силу аддитивности меры Лебега

  $$\lambda_1((A \sqcup B)^y) = \lambda_1(A^y \sqcup B^y) = \lambda_1(A^y) + \lambda_1(B^y). \tag{56.19}$$

  Следовательно, функция $\varphi(y) = \lambda_1((A \sqcup B)^y)$ измерима (как сумма измеримых).

В силу аддитивности интеграла Лебега

$$\begin{aligned}\lambda_2(A \sqcup B) = \lambda_2(A) + \lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A^y)\,dy + \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B^y)\,dy \\ = \int_{\mathbb{R}} (\lambda_1(A^y) + \lambda_1(B^y))\,dy = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(A^y \sqcup B^y)\,dy.\end{aligned} \tag{56.20}$$

$\triangle$

- **(4)** *Если $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ и $\lambda_2(B) < \infty$, то $B \setminus A \in \mathcal{F}$.*

  Доказательство. Действительно, множество

  $$(B \setminus A)^y = B^y \setminus A^y \tag{56.21}$$

  измеримо для всех y для которых измеримы B^y и A^y (а значит для почти всех y). Так как $\lambda_2(B) = \int \lambda_1(B^y)\,dy < \infty$, то для почти всех y выполнено $\lambda_1(B^y) < \infty$. Тогда в силу аддитивности меры Лебега для п.в. y

  $$\lambda_1((B \setminus A)^y) = \lambda_1(B^y) - \lambda_1(A^y). \tag{56.22}$$

  Выражение в правой части является измеримой функцией переменной y (как разность двух измеримых функций). Проинтегрирова записанное выше равенство, в силу аддитивности интеграла Лебега получим

  $$\begin{aligned}\int \lambda_1((B \setminus A)^y)\,dy = \int \lambda_1(B^y)\,dy - \int \lambda_1(A^y)\,dy \\ = \lambda_2(B) - \lambda_2(A) = \lambda_2(B \setminus A)\end{aligned} \tag{56.23}$$

  Таким образом, $B \setminus A \in \mathcal{F}$. $\triangle$

Таким образом, $\mathcal{F}$ имеет достаточно много общих свойств с $\mathfrak{M}_2$. Однако мы не можем напрямую доказать, даже то, что $\mathcal{F}$ является сигма-алгеброй. Сложность здесь в том, чтобы доказать замкнутость $\mathcal{F}$ относительно взятия конечных объединений (или пересечений) не обязательно вложенных друг в друга множеств. Поэтому для доказательства равенства $\mathcal{F} = \mathfrak{M}_2$ мы будем последовательно расширять $\mathcal{F}$ с использованием установленных выше свойств (1)-(4).

- **(5)** *$\mathcal{F}$ включает в себя все клетки (брусы): $\Theta_2 \subset \mathcal{F}$.*

  Доказательство. Действительно, если $A = I \times J$, где $I, J \in \Theta_1$, то

  $$A^y = \begin{cases} I, & y \in J \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} \tag{56.24}$$

  измеримо. Функция

  $$\psi(y) = \lambda_1(A^y) = \begin{cases} \lambda_1(I), & y \in J \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{56.25}$$

  также измерима. Наконец, $\int \psi(y)\,dy = \lambda_1(I) \cdot \lambda_1(J) = \lambda_2(I \times J) = \lambda_2(A)$. $\triangle$

- **(6)** $\mathcal{F}$ *включает в себя все открытые множества.*

  Доказательство. Любое конечное объединение клеток можно представить в виде конечного дизъюнктного объединения клеток. Каждая клетка принадлежит $\mathcal{F}$ по свойству (5). Наконец, по свойству (3) для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$ выполнено $\bigsqcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{F}$. Значит все клеточные множества принадлежат $\mathcal{F}$.

  Как известно, любое открытое множество U можно представить в виде не более чем счётного объединения клеток: $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Множества $B_k = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ принадлежат $\mathcal{F}$ (так как являются клеточными) и $B_k \subset B_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда по свойству (1) их объединение U тоже принадлежит $\mathcal{F}$. $\triangle$

- **(7)** $\mathcal{F}$ *включает в себя все множества типа* G_δ.

  Доказательство. Пусть $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где $G_k \subset \mathbb{R}^2$ открыто для каждого $k \in \mathbb{N}$. Если A ограничено, то для некоторого $R > 0$ выполнено $A = U_R(0) \cap A$. Тогда $A \in \mathcal{F}$ по свойствам (2) и (6).

  В общем случае $A = \bigcup_{R=1}^{\infty} A_R$, где для каждого $R > 0$ множество $A_R = U_R(0) \cap A$ измеримо по Лебегу и $A_R \subset A_{R+1}$. Значит $A \in \mathcal{F}$ по свойству (1). $\triangle$

- **(8)** $\mathcal{F}$ *включает в себя все множества меры нуль.*

  Доказательство. Пусть $N \subset \mathbb{R}^2$ и $\lambda_2(N) = 0$. В силу внешней регулярности меры Лебега существует множество $M \subset \mathbb{R}^2$ типа G_δ такое, что $N \subset M$ и $\lambda_2(M) = 0$. По свойству (7) множество M принадлежит $\mathcal{F}$. Тогда из равенства

  $$\int_{\mathbb{R}} \lambda_1(M^y)\, dy = \lambda_2(M) = 0 \tag{56.26}$$

  и вложения $N \subset M$ следует, что для почти всех y выполнено

  $$\lambda_1(N^y) \le \lambda_1(M^y) = 0. \tag{56.27}$$

  Следовательно, N^y измеримо для почти всех y. При этом функция $\psi(y) = \lambda_1(N^y)$ равна нулю почти всюду и, следовательно, тоже измерима. Кроме того, $\int_{\mathbb{R}} \psi(y)\, dy = 0 = \lambda_2(N)$. $\triangle$

- **(9)** $\mathcal{F}$ *включает в себя все измеримые множества.*

  Доказательство. Любое ограниченное измеримое множество A в силу внешней регулярности меры Лебега можно представить в виде

  $$A = P \setminus Q, \tag{56.28}$$

  где P — множество типа G_δ, а Q — множество меры нуль. (Действительно, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует открытое U_k такое, что $A \subset U_k$ и $\lambda(U_k) < \lambda(A) + \frac{1}{k}$. Тогда достаточно взять $P := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ и $Q := P \setminus A$.) Следовательно, по свойствам (7) и (8) все ограниченные измеримые множества принадлежат $\mathcal{F}$.

  Произвольное измеримое $A \subset \mathbb{R}^2$ можно представить в виде объединения вложенных ограниченных измеримых множеств: $A = \bigcup_{R=1}^{\infty} A \cap U_R(0)$. Следовательно, $A \in \mathcal{F}$ по свойству (1). $\triangle$

▲

Измеримости сечений множества $A \subset \mathbb{R}^2$ в общем случае недостаточно для измеримости самого A. (Более того, Серпинский построил пример парадоксального множества $A \subset [0,1]^2$, которое пересекает любую прямую, параллельную какой-либо координатной оси, не более чем в одной точке.) Однако декартово произведение измеримых множеств всегда измеримо:

Утверждение 26. *Для любых измеримых по Лебегу множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ их декартово произведение измеримо.*

Доказательство. Так как

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B), \tag{56.29}$$

то достаточно доказать, что $A \times \mathbb{R}$ измеримо для любого измеримого A.

Так как

$$A \times \mathbb{R} = \bigcup_{R=1}^{\infty} A \times (-R, R), \tag{56.30}$$

то достаточно доказать, что $A \times (-R, R)$ измеримо для любого $R > 0$.

Если A открыто, то и $A \times (-R, R)$ открыто и, следовательно, измеримо.

Так как для любых $A_n \subset \mathbb{R}$ выполнено

$$(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \times (-R, R) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \times (-R, R)), \tag{56.31}$$

то $A \times \mathbb{R}$ измеримо для любого G_δ-множества A.

Если мера A равна нулю, то и $A \times (-R, R)$ имеет меру нуль. Действительно, в этом случае существует множество $M \subset \mathbb{R}$ типа G_δ такое, что $A \subset M$ и $\lambda(M) = 0$. Тогда в силу доказанного выше $M \times (-R, R)$ измеримо. Следовательно, по принципу Кавальери

$$\lambda_2(A) \leq \lambda_2(M) = \int_M 2R\, dx = 2R\lambda(M) = 0. \tag{56.32}$$

Наконец, произвольное измеримое $A \subset \mathbb{R}$ можно представить в виде $A = B \setminus N$, где B — множество типа G_δ, а N — множество меры нуль. Тогда $A \times \mathbb{R} = (B \times \mathbb{R}) \setminus (N \times \mathbb{R})$ измеримо. ▲

Теорема 21 (геометрический смысл интеграла Лебега)**.** *Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}$ задана неотрицательная измеримая функция f. Тогда подграфик функции f*

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X,\ 0 < y < f(x)\} \tag{56.33}$$

измерим и

$$\int_X f\, d\lambda = \lambda(G) = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > y\})\, dy. \tag{56.34}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность простых измеримых функций s_n таких, что $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$ и $s_n \to f$ поточечно на X при $n \to \infty$. Заметим, что подграфик функции f является объединением подграфиков

$$G_n := \{(x, y) : x \in X,\ 0 < y < s_n(x)\} \tag{56.35}$$

функций s_n. Так как для каждого n функция s_n — простая, то множество $s_n(X)$ конечно и, следовательно,

$$G_n = \bigsqcup_{c \in s(X)} \{s_n = c\} \times (0, c) \tag{56.36}$$

В силу утверждения 26 и измеримости s_n для каждого c множество $\{s_n = c\} \times (0, c)$ измеримо. Следовательно множество G_n тоже измеримо. Так как $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, то и G измеримо.

По принципу Кавальери

$$\lambda_2(G) = \int \lambda_1(G_x)\,dx = \int \lambda_1(G^y)\,dy. \tag{56.37}$$

Так как $G_x = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < f(x)\}$, то $\lambda_1(G_x) = f(x)$. С другой стороны, $G^y = \{f > y\}$. Поэтому из (56.37) следует (56.34). ▲

Если функция $f = f(x,y)$ задана на множестве $A \subset \mathbb{R}^2$, то для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ под $f(\cdot, y)$ и $f(x, \cdot)$ будем понимать соответственно функции $u(t) = f(t, y)$ (где $t \in A^y$) и $v(t) = f(x,t)$ (где $t \in A_x$).

Теорема 22 (Тонелли)**.** *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ измеримы и на $X \times Y$ задана неотрицательная измеримая функция f. Тогда*

1. *для всех почти всех $x \in X$ и $y \in Y$ функции $f(\cdot, y)$ и $f(x, \cdot)$, измеримы;*
2. *функции $\psi(y) := \int_X f(t,y)\,dt$ и $\varphi(x) := \int_Y f(x,t)\,dt$ измеримы;*
3. *кратный интеграл от f сводится к повторным:*

$$\int_{X\times Y} f\,d\lambda_2 = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right) dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right) dx. \tag{56.38}$$

Доказательство. Не уменьшая общности будем считать, что $X = Y = \mathbb{R}$, так как для $(x,y) \notin X \times Y$ всегда можно доопределить $f(x,y) := 0$ (и продолженная таким образом функция f будет измерима).

Пусть $\mathcal{F}$ — семейство всех измеримых функций f, для которых выполнено доказываемое утверждение. Если $A \subset \mathbb{R}^2$ измеримо, то по принципу Кавальери $f := \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}$. Действительно, для почти всех $x, y \in \mathbb{R}$ множества A_x и A^y измеримы. Следовательно, функции $\mathbb{1}_{A_x}$ и $\mathbb{1}_{A^y}$ измеримы. Функции $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_x}(t)\,dt = \lambda(A_x)$ и $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A^y}(t)\,dt = \lambda(A^y)$ измеримы по принципу Кавальери. Наконец, снова по принципу Кавальери $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\,dy$.

Если $f, g \in \mathcal{F}$, то $f + g \in \mathcal{F}$ Действительно, для почти всех $x, y \in \mathbb{R}$ функции $t \mapsto f(x,t) + g(x,t)$ и $t \mapsto f(t,y) + g(t,y)$ измеримы (как суммы измеримых). Следовательно, в силу аддитивности интеграла Лебега

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \int_{\mathbb{R}} (f(x,t) + g(x,t))\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} g(x,t)\,dt \\ \psi(y) &:= \int_{\mathbb{R}} (f(y,t) + g(y,t))\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(y,t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} g(y,t)\,dt. \end{aligned} \tag{56.39}$$

Следовательно, φ и ψ измеримы как суммы измеримых функций. В силу аддитивности интеграла Лебега

$$\int \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda_2 + \int_{\mathbb{R}^2} g\,d\lambda_2 \tag{56.40}$$

так как $f, g \in \mathcal{F}$. Снова пользуясь аддитивностью интеграла Лебега получаем $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} (f+g)\,d\lambda_2$ и аналогично $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} (f+g)\,d\lambda_2$. Таким образом, действительно $f + g \in \mathcal{F}$.

Непосредственно проверяется, что если $f \in \mathcal{F}$, то для любой константы $\alpha \in (0, +\infty)$ выполнено $\alpha \cdot f \in \mathcal{F}$.

Следовательно, все простые измеримые функции принадлежат $\mathcal{F}$.

По теореме о приближении измеримой функции снизу простыми для любой неотрицательной измеримой функции f существует последовательность простых измеримых функций s_n таких, что $0 \le s_n \le s_{n+1} \le f$ и $s_n \to f$ поточечно на X при $n \to \infty$. Для каждого n выполнено $s_n \in \mathcal{F}$, значит существует множество меры нуль $E_n \subset \mathbb{R}$ такое, что для всех $x, y \in \mathbb{R} \setminus E_n$ функции $t \mapsto s_n(x,t)$ и $t \mapsto s_n(t,y)$ измеримы. Следовательно, множество $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ имеет меру нуль и для всех $x, y \in \mathbb{R} \setminus E$ функции $t \mapsto f(x,t)$ и $t \mapsto f(t,y)$ измеримы (как поточечные пределы измеримых функций). При этом по теореме Леви

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,t)\,dt, \\ \int_{\mathbb{R}} f(t,y)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(t,y)\,dt. \end{aligned} \tag{56.41}$$

Так как $\int_{\mathbb{R}} s_n(x,t)\,dt \le \int_{\mathbb{R}} s_{n+1}(x,t)\,dt$ и $\int_{\mathbb{R}} s_n(t,y)\,dt \le \int_{\mathbb{R}} s_{n+1}(t,y)\,dt$, то снова по теореме Леви

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dt\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,t)\,dt\,dx, \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t,y)\,dt\,dy &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(t,y)\,dt\,dy, \end{aligned} \tag{56.42}$$

Так как $s_n \in \mathcal{F}$, то

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(x,t)\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s_n(t,y)\,dt\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} s_n\,d\lambda_2. \tag{56.43}$$

Наконец, снова по теореме Леви $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} s_n\,d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda_2$. Таким образом, $f \in \mathcal{F}$. ▲

Теорема 23 (Фубини)**.** *Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ измеримы и $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда для п.в. $x \in X$ и п.в. $y \in Y$ функции $f(x,\cdot)$ и $f(\cdot,y)$ интегрируемы по Лебегу, функции $\int f(\cdot,t)\,dt$ и $\int f(t,\cdot)\,dt$ интегрируемы по Лебегу и выполнено* (56.38).

Доказательство. По теореме Тонелли

- функции $f^+(x,\cdot)$ и $f^-(\cdot,y)$ измеримы для почти всех $x \in X$ и $y \in Y$.
- функции $\psi^{\pm}(y) := \int_X f^{\pm}(t,y)\,dt$ и $\varphi^{\pm}(x) := \int_Y f^{\pm}(x,t)\,dt$ измеримы;
- кратный интеграл от $f^{\pm}$ сводится к повторным:

$$\int_{X\times Y} f^{\pm}\,d\lambda_2 = \int_Y \psi^{\pm}(y)\,dy = \int_X \varphi^{\pm}(x)\,dx. \tag{56.44}$$

В силу (56.44) и интегрируемости f интегралы $\int_X \varphi^{\pm}(x)\,dx$ и $\int_Y \psi^{\pm}(y)\,dy$ конечны. Значит функции $\varphi^{\pm}$ и $\psi^{\pm}$ интегрируемы и множества

$$N_{\pm} := \{x \in X \mid \varphi^{\pm}(x) = +\infty\}, \qquad M_{\pm} := \{y \in Y \mid \psi^{\pm}(y) = +\infty\} \tag{56.45}$$

имеют меру нуль. Так как объединение любых двух множеств меры нуль также имеет меру нуль, то для п.в. $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $\varphi^{\pm}(x) < +\infty$ и $\psi^{\pm}(y) < +\infty$. Для всех таких x и y функции $f(x,\cdot) = f^+(x,\cdot) - f^-(x,\cdot)$ и $f(\cdot,y) = f^+(\cdot,y) - f^-(\cdot,y)$ интегрируемы. Тогда в силу аддитивности интеграла Лебега

$$\int_Y f(x,t)\,dt = \int_Y f^+(x,t)\,dt - \int_Y f^-(x,t)\,dt = \varphi^+(x) - \varphi^-(x). \tag{56.46}$$

Аналогично, для п.в. $y \in Y$

$$\int_X f(t,y)\,dt = \int_X f^+(t,y)\,dt - \int_X f^-(t,y)\,dt = \psi^+(y) - \psi^-(y). \tag{56.47}$$

Из полученных равенств в силу интегрируемости функций $\varphi^\pm$ и $\psi^\pm$ следует интегрируемость функций $\int f(\cdot,t)\,dt$ и $\int f(t,\cdot)\,dt$. Наконец, пользуясь аддитивностью интеграла в силу (56.44) и (56.46) получаем

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\,d\lambda_2 = \int_{X\times Y} f^+\,d\lambda_2 - \int_{X\times Y} f^-\,d\lambda_2 = \int_X \varphi^+(x)\,dx - \int_X \varphi^-\,dx \\ = \int_X (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))\,dx = \int_X \left(\int_Y f(x,t)\,dt\right)\,dx.\end{aligned} \tag{56.48}$$

Аналогично получаем соответствующее равенство для повторного интеграла, взятого в другом порядке. ▲

При использовании теоремы Фубини, как правило, для проверки предположения $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ кратный интеграл $\int_{\mathbb{R}^2} |f|\,d\lambda_2$ сначала сводится к повторным с помощью теоремы Тонелли (в которой не предполагается конечность интеграла от $|f|$). Затем, убедившись в конечности повторного интеграла от $|f|$, по теореме Фубини кратный интеграл от f тоже можно свести к повторному.

56.1 Обобщения на случай произвольных размерностей

Если $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ (где $n, m \in \mathbb{N}$) то для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и любого $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ обозначим $(x,y) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ и

$$\begin{aligned} A_x &:= \{z \in \mathbb{R}^m : (x,z) \in A\}, \\ A^y &:= \{z \in \mathbb{R}^n : (z,y) \in A\}. \end{aligned} \tag{56.49}$$

Принцип Кавальери непосредственно обобщается на случай произвольной размерности:

Теорема 24 (общий принцип Кавальери)**.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ измеримо ($n, m \in \mathbb{N}$). Тогда*

1. *для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $y \in \mathbb{R}^m$ множества A_x и A^y измеримы по Лебегу;*
2. *функции*
$$\varphi(x) := \lambda_m(A_x), \qquad \psi(y) := \lambda_n(A^y) \tag{56.50}$$
измеримы по Лебегу;
3. *имеет место равенство*
$$\lambda_{n+m}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(A_x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(A^y)\,dy. \tag{56.51}$$

Аналогичным образом обобщаются остальные утверждения, полученные выше:

Утверждение 27. *Для любых измеримых по Лебегу множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ их декартово произведение измеримо.*

Теорема 25 (геометрический смысл интеграла Лебега (общий случай))**.** *Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана неотрицательная измеримая функция f. Тогда подграфик функции f*

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X,\ 0 < y < f(x)\} \tag{56.52}$$

измерим и

$$\int_X f\, d\lambda_n = \lambda_{n+1}(G) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{f > y\})\, dy. \tag{56.53}$$

Теорема 26 (Тонелли (общий случай))**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ измеримы и на $X \times Y$ задана неотрицательная измеримая функция f. Тогда*

1. *для всех почти всех $x \in X$ и $y \in Y$ функции $f(\cdot, y)$ и $f(x, \cdot)$, измеримы;*
2. *функции $\psi(y) := \int_X f(t, y)\, dt$ и $\varphi(x) := \int_Y f(x, t)\, dt$ измеримы;*
3. *кратный интеграл от f сводится к повторным:*

$$\int_{X\times Y} f\, d\lambda_{n+m} = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, dx\right) dy = \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, dy\right) dx. \tag{56.54}$$

Теорема 27 (Фубини (общий случай))**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ измеримы и $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда для п.в. $x \in X$ и п.в. $y \in Y$ функции $f(x, \cdot)$ и $f(\cdot, y)$ интегрируемы по Лебегу, функции $\int f(\cdot, t)\, dt$ и $\int f(t, \cdot)\, dt$ интегрируемы по Лебегу и выполнено* (56.54).

Отметим, что теорему Тонелли можно получить как следствие теоремы 25.

56.2 Контрольные вопросы

Вопрос 57.1. Пусть на $(0, 1)$ задана интегрируемая по Лебегу функция f. Рассмотрим функцию $g(y) = \int_y^1 \frac{f(x)}{x}\, dx$. Верно ли, что g интегрируема на $(0, 1)$?

Вопрос 57.2. Пусть на вещественной прямой задана неотрицательная измеримая функция f. Рассмотрим функцию $g(x) := \frac{1}{2}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy$. Верно ли, что g интегрируема на $\mathbb{R}$?

Вопрос 57.3. Пусть $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ измерима и для почти всех $x, y \in \mathbb{R}$ функции $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy$ и $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx$ интегрируемы. Верно ли, что f интегрируема?

Вопрос 57.4. Пусть функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ измерима, а функция $g(x, y) = f(x) - f(y)$ интегрируема на $[0, 1]^2$. Верно ли, что f интегрируема на $[0, 1]$?

Вопрос 57.5. Верно ли, что для измеримой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ её график $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ является измеримым множеством на плоскости?

Вопрос 57.6. Пусть попарно непересекающиеся круги, содержащиеся в квадрате, исчерпывают его с точностью до множества меры нуль. Верно ли, что сумма длин соответствующих граничных окружностей конечна?

Вопрос 57.7. Измерима ли ортогональная проекция измеримого множества?

Вопрос 57.8. Измеримо ли $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in V\}$ где V — множество Витали?

Вопрос 57.9. Пусть $B \subset \mathbb{R}^2$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}$ множества B_x и B^y — борелевские. Будет ли B борелевским?

Вопрос 57.10. Является ли декартово произведение борелевских множеств борелевским?

Глава 57

Замена переменной в кратном интеграле

57.1 Некоторые свойства норм векторов и матриц

Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ под

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \tag{57.1}$$

будем понимать его евклидову норму (длину).

Обобщим это понятие на матрицы.

Определение 19. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Тогда*

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} \tag{57.2}$$

называется евклидовой нормой матрицы A. *(Также эту норму называют нормой Фробениуса, или нормой Гильберта-Шмидта.)*

О приложениях этой нормы в курсе дифференциальных уравнений можно прочитать в методичке А.М. Тер-Крикорова.

Единичную матрицу размера $n \times n$ будем обозначать символом I :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{57.3}$$

Заметим, что для рассматриваемой нами евклидовой нормы выполнено $\|I\| = \sqrt{n}$, то есть $\|I\| \neq 1$.

Лемма 6. *Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство*

$$|Ax| \leq \|A\| \cdot |x|. \tag{57.4}$$

Доказательство. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$|(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{57.5}$$

Возведём обе части в квадрат и просуммируем по i. Получим $|Ax|^2 \leq \|A\|^2|x|^2$, что и требовалось доказать. ▲

Аналогичным образом доказывается

Лемма 7. *Для любых матриц $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ выполнено*

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|. \tag{57.6}$$

Доказательство. Для любых $i \in \overline{1,m}$ и $j \in \overline{1,p}$ по неравенству Коши–Буняковского

$$|(A \cdot B)_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{ij}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2}. \tag{57.7}$$

Значит

$$\|A \cdot B\|^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right). \tag{57.8}$$

Остаётся заметить, что

$$\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right) \cdot \|B\|^2. \tag{57.9}$$

▲

Лемма 8. *Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная вектор-функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt. \tag{57.10}$$

Аналогичное верно для непрерывных матричнозначных функций.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\nu := \int_a^b f(t)\,dt$. По определению $\nu_i = \int_a^b f_i(t)\,dt$. Тогда

$$|\nu|^2 = \sum_{i=1}^{n}\nu_i\int_a^b f_i(t)\,dt = \int_a^b\sum_{i=1}^{n}\nu_i f_i(t)\,dt = \int_a^b(\nu, f(t))\,dt. \tag{57.11}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $(\nu, f(t)) \leq |\nu||f(t)|$. Остаётся сократить на $|\nu|$. ▲

Если квадратная матрица A невырождена, то лемму 6 можно дополнить оценкой снизу:

Лемма 9. *Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ невырождена, то существует константа $C > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $|Ax| \geq C|x|$.*

Доказательство. Если доказываемое утверждение неверно, то существует последовательность $\{x_k\}$ ненулевых векторов такая, что $|Ax_k| \leq \frac{1}{k}|x_k|$. Для $y_k = x_k/|x_k|$ выполнено $|y_k| = 1$. По теореме Больцано-Вейерштрасса мы можем выделить подпоследовательность $\{y_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому вектору $y \in \mathbb{R}^n$ при $j \to \infty$, причём $|y| = 1$.

Так как $y_{k_j} \to y$, то по лемме 6 имеем $Ay_{k_j} \to Ay$ при $j \to \infty$. С другой стороны, $|Ay_{k_j}| \leq 1/k_j \to 0$ при $j \to \infty$. Значит $Ay = 0$, что противоречит невырожденности матрицы A. ▲

57.2 Некоторые свойства липшицевых отображений

Для любого отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, введём обозначение

$$\operatorname{Lip}(f) := \sup_{\substack{x,y\in U\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}. \tag{57.12}$$

Легко видеть, что если $\operatorname{Lip}(f) < +\infty$, то f удовлетворяет условию Липшица с константой $\operatorname{Lip}(f)$.

Следующая лемма показывает, что если у отображения матрицы Якоби ограничены по норме, то оно липшицево:

Лемма 10. *Если на выпуклом открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задано непрерывно дифференцируемое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, то*

$$\operatorname{Lip}(f) \le \sup_{x\in U} \|Df(x)\|. \tag{57.13}$$

Доказательство. Для каждой компоненты отображения f по формуле Ньютона-Лейбница

$$f_i(x) - f_i(y) = f_i(tx+(1-t)y)|_{t=0}^1 = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_i(tx+(1-t)y)\,dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(tx+(1-t)y)}{\partial x_j}(x_j-y_j)\,dt. \tag{57.14}$$

Значит

$$f(x)-f(y) = \int_0^1 Df(tx+(1-t)y)\cdot(x-y)\,dt. \tag{57.15}$$

По лемме 8 с учётом того, что $x-y$ не зависит от t получаем

$$|f(x)-f(y)| \le |x-y| \int_0^1 \|Df(tx+(1-t)y)\|\,dt \le |x-y|\cdot \sup_{x\in U}\|Df(x)\|. \tag{57.16}$$

▲

Следствие 9. *Если отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на выпуклом открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, и $\|Df(x) - I\| < \varepsilon$ для всех $x \in U$ и некоторой константы ε, то*

$$\operatorname{Lip}(f) < 1+\varepsilon. \tag{57.17}$$

(Действительно, для отображения $g(x) := f(x) - x$ по лемме 10 получаем $\operatorname{Lip}(g) < \varepsilon$. Но $|f(x)-f(y)| \le |x-y| + |g(x)-g(y)|$. Значит $\operatorname{Lip}(f) < 1+\varepsilon$.)

Как и в одномерном случае, условие Липшица позволяет оценивать меру образа множества:

Лемма 11. *Пусть на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ задано отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Если $L := \operatorname{Lip}(f) < +\infty$, то для любого $E \subset U$ выполнено*

$$\lambda(f(E)) \le L^n \lambda(E). \tag{57.18}$$

Доказательство. В силу внешней регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдётся открытое множество $V \subset U$ такое, что $E \subset V$ и $\lambda(V) \le \lambda(E) + \varepsilon$.

Так как мера Лебега множества E равна инфимуму сумм мер открытых шаров, покрывающих E, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся не более чем счётное семейство $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ шаров, лежащих в U, покрывающих E и таких, что

$$\sum_i \lambda(B_{r_i}(x_i)) \le \lambda(E) + \varepsilon. \tag{57.19}$$

Так как шары $\{B_{r_i}(x_i)\}$ покрывают E, то

$$f(E) \subset \bigcup_i f(B_{r_i}(x_i)) \tag{57.20}$$

Так как $\mathrm{Lip}(f) = L$, то для каждого i

$$f(B_{r_i}(x_i)) \subset B_{L\cdot r_i}(f(x_i)). \tag{57.21}$$

Следовательно,

$$\lambda(f(E)) \leq \sum_i \lambda(B_{L\cdot r_i}(f(x_i))) = L^n \sum_i \lambda(B_{r_i}(f(x_i))) \leq L^n(\lambda(E) + \varepsilon). \tag{57.22}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда заключаем, что $\lambda(f(E)) \leq L^n \lambda(E)$. ▲

57.3 Диффеоморфизмы и их свойства

Напомним, что если отображение $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x \in U$ (где $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто), то определитель матрицы Якоби отображения φ в точке x

$$J\varphi(x) := \det D\varphi(x) \tag{57.23}$$

называется *якобианом* φ в точке x.

Если отображение φ непрерывно дифференцируемо, то его якобиан непрерывен. (Действительно, $J\varphi(x)$ представляет собой однородный многочлен от частных производных компонет φ, взятых в точке x.)

Определение 20. *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты. Если отображение $\varphi\colon U \to V$ взаимно однозначно, непрерывно дифференцируемо и обратное отображение φ^{-1} также непрерывно дифференцируемо, то φ называется* диффеоморфизмом, отображающим U на V.

Если $\varphi\colon U \to V$ — диффеоморфизм, то из теоремы о о дифференцируемости композиции отображений следует, что его якобиан всюду отличен от нуля.

Если биекция $\varphi\colon U \to V$ непрерывно дифференцируема и её якобиан всюду отличен от нуля, то по теореме о локальной обратимости непрерывно дифференцируемого отображения с ненулевым якобианом отображение φ^{-1} непрерывно дифференцируемо. Следовательно, всякое такое отображение φ является диффеоморфизмом.

57.4 Афинные отображения

Начнём со случая, когда отображение φ является *аффинным*, то есть $\varphi(x) = z + A \cdot x$ для некоторой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а также $U = V = \mathbb{R}^n$. Ясно, что такое отображение φ будет взаимно однозначним тогда и только тогда, когда A невырождена. При этом для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $J\varphi(x) = \det A$.

Лемма 12 (о геометрическом смысле модуля определителя)**.** *Если отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является аффинным и взаимно однозначно, то для любого измеримого по Лебегу множества $Q \subset \mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\lambda(\varphi(Q)) = |J\varphi| \cdot \lambda(Q). \tag{57.24}$$

Доказательство.

Ясно, что утверждение достаточно доказать для случая когда $z = 0$.

Пусть A — матрица Якоби отображения φ. Если матрица A является диагональной, то утверждение очевидно.

Теперь рассмотрим случай, когда A является ортогональной матрицей. В этом случае φ сохраняет расстояния, так как для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполнено

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 = (x - y, A^T A(x - y)) = |x - y|^2. \tag{57.25}$$

Следовательно, φ и φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица с постоянной 1. По лемме 11 имеем $\lambda(\varphi(Q)) \le \lambda(Q)$ и $\lambda(Q) = \lambda(\varphi^{-1}(\varphi(Q))) \le \lambda(\varphi(Q))$. Значит $\lambda(\varphi(Q)) = \lambda(Q)$.

Общий случай с помощью SVD-разложения матрицы A сводится к двум частным случаям, рассмотренным выше.

▲

Доказанную выше лемму можно проинтерпретировать следующим образом: модуль якобиана аффинного отображения равен отношению меры образа множества под действием данного отображения к мере самого множества (если его мера отлична от нуля).

57.5 Замена переменной в кратном интеграле

Обобщим доказанную выше лемму 12 на случай диффеоморфизмов. Так как (по определению дифференцируемости) в окрестности любой точки $x \in U$ диффеоморфизм φ хорошо приближается своим дифференциалом, то естественно ожидать, что для множеств, лежащих в соответствующей окрестности, меры образов под действием φ будут увеличиваться примерно в $|J\varphi(x)|$ раз.

Теорема 28 (геометрический смысл модуля якобиана). *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\varphi\colon U \to V$ — диффеоморфизм. Тогда для любого $x \in U$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $Q \subset U_\delta(x)$ с $\lambda(Q) > 0$ выполнено*

$$\left| \frac{\lambda(\varphi(Q))}{\lambda(Q)} - |J\varphi(x)| \right| < \varepsilon. \tag{57.26}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in U$ и рассмотрим отображение

$$\psi(y) = \varphi(x) + D\varphi(x) \cdot (y - x) \tag{57.27}$$

Данное отображение представляет собой линеаризацию φ в окрестности точки x.

Из равенства

$$\varphi = \varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \tag{57.28}$$

следует, что для любого $Q \subset U$ множество $\varphi(Q)$ является образом $\psi(Q)$ под действием отображения $\varphi \circ \psi^{-1}$. Мы покажем, что в некоторой окрестности точки $\varphi(x)$ это отображение мало отличается от тождественного (в том смысле, что матрица Якоби отображения $\varphi \circ \psi^{-1}$ мало отличается от единичной). Следовательно, мера множества $\varphi(Q)$ будет близка к мере множества $\psi(Q)$, если Q лежит в подходящей окрестности точки x. А по лемме 12 мера множества $\psi(Q)$ равна $|J\varphi(x)|\lambda(Q)$.

Шаг 1. Пусть y принадлежит некоторой окрестности $\psi(x)$. Так как ψ является аффинным, то $D\psi^{-1}(y) = (D\varphi(x))^{-1}$. По теореме о дифференцируемости композиции отображений

$$D(\varphi \circ \psi^{-1})(y) = D\varphi(\psi^{-1}(y)) \cdot (D\varphi(x))^{-1}. \tag{57.29}$$

Следовательно, по лемме 7

$$\begin{aligned} M_y := \|D(\varphi\circ\psi^{-1})(y) - I\| = \|(D\varphi(\psi^{-1}(y)) - D\varphi(x))\cdot(D\varphi(x))^{-1}\| \\ \le \|D\varphi(\psi^{-1}(y)) - D\varphi(x)\|\cdot\|(D\varphi(x))^{-1}\|. \end{aligned} \tag{57.30}$$

Так как отображение φ непрерывно дифференцируемо, то $\|D\varphi(z) - D\varphi(x)\| \to 0$ при $z \to x$. Так как отображение ψ^{-1} непрерывно, то $\psi^{-1}(y) \to \psi^{-1}(\psi(x)) = x$ при $y \to \varphi(x) = \psi(x)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $y \in U_{\delta_1}(\varphi(x))$ выполнено $M_y < \varepsilon$.

В силу непрерывности φ найдётся $\delta_2 > 0$ такое, что для всех $z \in U_{\delta_2}(x)$ выполнено $\varphi(z) \in U_{\delta_1}(\varphi(x))$. Тогда по следствию 9 и лемме 11 для любого измеримого $Q \subset U_{\delta_2}(x)$ выполнено

$$\lambda(\varphi(Q)) = \lambda((\varphi\circ\psi^{-1})(\psi(Q))) \le (1+\varepsilon)^n\lambda(\psi(Q)). \tag{57.31}$$

Шаг 2. Проведём аналогичные рассуждения для композиции $\psi\circ\varphi^{-1}$. Для любой точки y из некоторой окрестности $\varphi(x)$ выполнено

$$D(\psi\circ\varphi^{-1})(y) = (D\varphi(x))\cdot D\varphi^{-1}(y) \tag{57.32}$$

Следовательно, по лемме 7

$$\begin{aligned} N_y := \|D(\psi\circ\varphi^{-1})(y) - I\| = \|D\varphi(x)\cdot(D\varphi^{-1}(y) - (D\varphi(x))^{-1})\| \\ \le \|D\varphi(x)\|\cdot\|D\varphi^{-1}(y) - (D\varphi(x))^{-1}\|. \end{aligned} \tag{57.33}$$

Так как отображение φ^{-1} непрерывно дифференцируемо и $D\varphi^{-1}(\varphi(x)) = (D\varphi(x))^{-1}$, то $\|D\varphi^{-1}(y) - (D\varphi(x))^{-1}\| \to 0$ при $y \to \varphi(x)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_3 > 0$ такое, что для всех $y \in U_{\delta_3}(\varphi(x))$ выполнено $N_y < \varepsilon$.

В силу непрерывности φ найдётся $\delta_4 > 0$ такое, что для всех $z \in U_{\delta_4}(x)$ выполнено $\varphi(z) \in U_{\delta_3}(\varphi(x))$. Тогда по следствию 9 и лемме 11 для любого измеримого $Q \subset U_{\delta_4}(x)$ выполнено

$$\lambda(\psi(Q)) = \lambda((\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(Q))) \le (1+\varepsilon)^n\lambda(\varphi(Q)). \tag{57.34}$$

Шаг 3. Из проведённых выше рассуждений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \min(\delta_2, \delta_4)$ такое, что для любого измеримого $Q \subset U_\delta(x)$ выполнены равенства (57.31) и (57.34):

$$(1+\varepsilon)^{-n} \le \frac{\lambda(\varphi(Q))}{\lambda(\psi(Q))} \le (1+\varepsilon)^n. \tag{57.35}$$

По лемме 12 имеем $\lambda(\psi(Q)) = |J\varphi(x)|\lambda(Q)$. Остаётся заметить, что $(1+\varepsilon)^n \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. ▲

Теорема 29 (о мере образа измеримого множества под действием диффеоморфизма)**.** *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\varphi\colon U \to V$ — диффеоморфизм. Тогда для любого множества $E \subset U$*

1. *E измеримо тогда и только тогда, когда измеримо $\varphi(E)$;*
2. *если E измеримо, то*

$$\lambda(\varphi(E)) = \int_E |J\varphi(x)|\,dx. \tag{57.36}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем, что для любой замкнутой клетки $Q \subset U$ выполнено

$$\lambda(\varphi(Q)) \le \int_Q |J\varphi|\,dx. \tag{57.37}$$

Допустим, что это неравенство не выполнено для некоторой клетки $Q = Q_1$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что

$$\lambda(\varphi(Q)) > (1+\delta)\int_Q |J\varphi|\,dx. \tag{57.38}$$

Представим Q_1 в виде объединения 2^n подобных ей замкнутых клеток. Если для каждой из них неравенство (57.38) не выполняется, то для $Q = Q_1$ в силу конечной субаддитивности меры Лебега

$$\lambda(\varphi(Q)) \le (1+\delta)\int_Q |J\varphi|\,dx. \tag{57.39}$$

Это противоречит (57.38). Значит среди рассматриваемых 2^n клеток должна найтись клетка $Q = Q_2$, для которой выполнено (57.38).

Продолжая аналогичным образом, получим последовательность вложенных замкнутых клеток $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, для каждой из которых выполнено

$$\frac{1}{\lambda(Q_k)}\lambda(\varphi(Q_k)) \;> (1+\delta)\frac{1}{\lambda(Q_k)}\int_{Q_k} |J\varphi|\,dx \tag{57.40}$$

(с одним и тем же δ, не зависящем от k). По построению длина рёбер клетки Q_k есть $O(2^{-k})$, следовательно последовательность $\{Q_k\}$ стягивается к некоторой точке $x \in Q$.

В силу непрерывности якобиана

$$\frac{1}{\lambda(Q_k)}\int_{Q_k} |J\varphi|\,dx \to |J\varphi(x)|. \tag{57.41}$$

при $k \to \infty$. С другой стороны, по лемме 12

$$\frac{1}{\lambda(Q_k)}\int_{Q_k} |J\varphi|\,dx \to |J\varphi(x)|. \tag{57.42}$$

Тогда переходя к пределу при $k \to \infty$ в (57.40) получаем

$$|J\varphi(x)| \ge (1+\delta)|J\varphi(x)|. \tag{57.43}$$

Из полученного противоречия следует, что (57.37).

Шаг 2. Аналогичным образом доказывается, что для любой замкнутой клетки $Q \subset U$ выполнено

$$\lambda(\varphi(Q)) \ge \int_Q |J\varphi|\,dx. \tag{57.44}$$

С учётом (57.37) мы приходим к выводу, что доказываемая теорема верна для любой замкнутой клетки $Q \subset U$.

Шаг 3. Итак, равенство (57.36) доказано для случая, когда E является замкнутой клеткой, лежащей в U. В силу аддитивности интеграла Лебега равенство (57.36) также верно в случае, когда E является конечным объединением попарно непресекающихся замкнутых клеток. По лемме 11 отображения φ и φ^{-1} переводят множества меры нуль во множества нулевой меры. Так как произвольное открытое множество можно представить в виде счётного дизъюнктного объединения замкнутых клеток и множества меры нуль, то по теореме Леви равенство (57.36) также верно для произвольного открытого множества $E \subset U$.

Шаг 4. Пусть множество $E \subset U$ ограничено и замкнуто. Рассмотрим множества $U_k = \{x \in U \mid \rho(x,E) < 1/k\}$. Эти множества открыты, $U_{k+1} \subset U_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $E = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$, а значит $\varphi(E) = \bigcap_{k=1}^\infty \varphi(U_k)$. В силу предыдущего шага для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda(\varphi(U_k)) = \int_{U_k} |J\varphi|\,dx. \tag{57.45}$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lambda(\varphi(U_k)) = \int_V 1_{\varphi(U_k)}\, dy \to \int_V 1_{\varphi(E)}\, dy = \lambda(\varphi(E)), \quad k \to \infty. \tag{57.46}$$

Аналогично, по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_{U_k} |J\varphi|\, dx \to \int_E |J\varphi|\, dx, \quad k \to \infty. \tag{57.47}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что функция $|J\varphi|$ ограничена в некоторой окрестности множества E.) Переходя в (57.45) к пределу при $k \to \infty$ получаем (57.36).

Шаг 5. Любое измеримое по Лебегу $E \subset U$ можно представить в виде дизъюнктного объединения множества типа F_σ и множества меры нуль. Так как φ переводит множества меры нуль во множества меры нуль, то достаточно доказать (57.36) в случае, когда E является множеством типа F_σ.

Любое множество типа F_σ можно представить в виде объединения ограниченных замкнутых множеств E_k таких, что $E_k \subset E_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу предыдущего шага для каждого k выполнено

$$\lambda(\varphi(E_k)) = \int_{E_k} |J\varphi|\, dx. \tag{57.48}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ с помощью теоремы Леви, получаем (57.36) для множеств типа F_σ и, следовательно, для всех измеримых множеств. ▲

Теорема 30 (о замене переменной в кратном интеграле)**.** *Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\varphi\colon U \to V$ — диффеоморфизм. Пусть $E \subset U$ измеримо и функция $f\colon \varphi(E) \to \mathbb{R}$ измерима. Тогда*

1. *если f неотрицательна, то*

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\, dy = \int_E f(\varphi(x))|J\varphi(x)|\, dx \tag{57.49}$$

2. *$f \in L^1(\varphi(E))$ тогда и только тогда, когда $(f \circ \varphi) \cdot |J\varphi| \in L^1(E)$, причём в случае интегрируемости выполнено* (57.49)*.*

Доказательство. Начнём со случая, когда f неотрицательна. Если f постоянна, то (57.49) сразу следует из (57.36). Тогда в случае, когда f является простой, равенство (57.49) следует из аддитивности интеграла Лебега. В общем случае существует последовательность простых неотрицательных функций $s_k\colon \varphi(E) \to [0, +\infty)$ таких, что $0 \le s_k \le s_{k+1} \le f$ и $s_k \to f$ поточечно при $k \to \infty$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int_{\varphi(E)} s_k(y)\, dy = \int_E s_k(\varphi(x))|J\varphi(x)|\, dx \tag{57.50}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ с помощью теоремы Леви, получаем (57.49).

В случае знакопеременной функции f равенство (57.49) можно записать для $|f|$, откуда следует, что $f \in L^1(\varphi(E))$ тогда и только тогда, когда $(f \circ \varphi) \cdot |J\varphi| \in L^1(E)$. В случае интегрируемости мы можем записать (57.49) для положительной и отрицательной частей функции f и, вычитаяя второе равенство из первого, получим (57.49). ▲

Заметим, что на практике удобна следующая форма записи равенства (57.49), аналогичная соответствующей формуле в одномерном случае:

$$\int_{\varphi(E)} f(y)\, dy = \int_E f(\varphi(x)) \left| \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx. \tag{57.51}$$

57.6 Контрольные вопросы

Вопрос 58.1. Является ли отображение $\varphi\colon (0,+\infty)^2 \to (0,+\infty)^2$ вида $\varphi(x,y) = (xy, x/y)$ диффеоморфизмом?

Вопрос 58.2. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^2$ открыты и $\varphi\colon U \to V$ — диффеоморфизм. Верно ли, что функция $|J\varphi|$ ограничена на U?

Вопрос 58.3. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм и $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^2$ такая, что $\lambda(Q_n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\sup_{x\in Q_n} |x| \to 0$ при $n \to \infty$. Верно ли, что

$$\frac{\lambda(\varphi(Q_n))}{\lambda(Q_n)} \to |J\varphi(0)| \tag{57.52}$$

при $n \to \infty$?

Вопрос 58.4. Пусть отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ липшицево и $\mathrm{Lip}(\varphi) \geq L > 0$. Верно ли, что для любого измеримого $E \subset \mathbb{R}^2$ выполнено $\lambda(\varphi(E)) \geq L^2\lambda(E)$?

Вопрос 58.5. Пусть отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ непрерывно дифференцируемо. Верно ли, что

$$\lambda(\varphi([0,1]^2)) \leq \int_{[0,1]^2} |J\varphi|\, dx? \tag{57.53}$$

Вопрос 58.6. Пусть последовательность диффеоморфизмов $\psi_n\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сходится равномерно к диффеоморфизму $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ при $n \to \infty$. Верно ли, что

$$\lambda(\psi_n([0,1]^2)) \to \lambda(\varphi([0,1]^2)) \tag{57.54}$$

при $n \to \infty$?

Глава 58

Криволинейные интегралы 1 и 2 рода

58.1 Гладкие кривые

Понятие кривой уже обсуждалось ранее. Если кривая Γ задана параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^d$, где $t \in [a, b]$, то под Γ мы также будем понимать и множество всех точек данной кривой (называемое её годографом):

$$\Gamma = \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [a, b]\}. \tag{58.1}$$

Напомним, что кривая Γ называется *гладкой,* если $\mathbf{r}$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$ (в концах отрезка рассматриваются соответствующие односторонние производные). (Точки t, для которых $\mathbf{r}'(t) = 0$, называются особыми.)

Также напомним, что кривая Γ называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения, за исключением, возможно, своего начала и конца. Говоря более формально, Γ называется простой, если задающая её параметризация $\mathbf{r}$ инъективна на $[a, b)$. Если $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой.*

58.2 Ориентация кривой

Нестрого говоря, под ориентацией кривой понимается направление её обхода. Дадим более строгое определение ориентации кривой.

Если кривая Γ задана непрерывной вектор-функцией $\mathbf{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$, то наряду с $\mathbf{r}$ естественно рассматривать и другие непрерывные вектор-функции вида $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, где $t\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — непрерывная биекция. Все параметризации $\mathbf{q}$, получаемые таким образом из $\mathbf{r}$, будем называть *допустимыми.*

Любая непрерывная биекция $s\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ либо строго возрастает, либо строго убывает. По теореме об обратной фунции для любых двух допустимых параметризаций $\mathbf{q}_1(s) = \mathbf{r}(t_1(s))$ (где $s \in [\alpha_1, \beta_1]$) и $\mathbf{q}_2(s) = \mathbf{r}(t_2(s))$ (где $s \in [\alpha_2, \beta_2]$) существует монотонная функция $\theta\colon [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$ такая, что $\mathbf{q}_1(s) = \mathbf{q}_2(\theta(s))$ для всех $s \in [\alpha_1, \beta_1]$. Если θ строго возрастает, то параметризации $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ назовём *эквивалентными.* Легко проверить, что определённое таким образом отношение $\mathbf{q}_1 \sim \mathbf{q}_2$ является отношением эквивалентности на множестве всех допустимых параметризаций кривой.

Ориентацией кривой называется класс эквивалентности всех её допустимых параметризаций. Кривая, для которой выбран соответствующий класс эквивалентности, называется *ориентированной.* Это означает, что говоря об ориентированной кривой, мы рассматриваем только те её допустимые параметризации, которые принадлежат выбранному классу эквивалентности.

Любая непрерывная биекция $s\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ либо строго возрастает, либо строго убывает. Поэтому у любой кривой имеется всего две возможных ориентации.

58.3 Ориентация простой гладкой кривой

В случае простой гладкой кривой ориентацию можно задать более явно, указав поле её направляющих векторов.

Предположим, что простая гладкая кривая Γ задана параметризацией $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$. Для простоты предположим дополнительно, что Γ незамкнута, то есть $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$. К общему случаю вернёмся при рассмотрении кусочно-гладких кривых.

По определению простой кривой для каждой точки $\mathbf{x} \in \Gamma$, не являющейся концом Γ, существует единственное $t = t(\mathbf{x}) \in [a,b]$ такое, что $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x}$. Покажем, что определённая таким образом функция $t = t(\mathbf{x})$ непрерывна (на всей своей области определения). Для этого нам понадобится лемма, которая справедлива в том числе для кривых, не являющихся гладкими:

Лемма 13. *Если вектор-функция $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ инъективна и непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $s,t \in [a,b]$ из $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| < \delta$ следует $|s-t| < \varepsilon$.*

Доказательство. Допустим, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $s_n, t_n \in [a,b]$ такие, что $|\mathbf{r}(s_n) - \mathbf{r}(t_n)| < \frac{1}{n}$ и $|s_n - t_n| \geq \varepsilon$. В силу компактности отрезка $[a,b]$ из последовательностей $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательности, сходящиеся к s и t соответственно. Тогда $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(t)$ и $|s-t| \geq \varepsilon$, что противоречит инъективности. ▲

Таким образом, на множестве всех точек $\mathbf{x} \in \Gamma$, за исключением концов, мы можем определить

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) := \left.\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right|_{t=t(\mathbf{x})}. \tag{58.2}$$

Данное векторное поле будем называть *полем направляющих векторов, порождённым параметризацией* $\mathbf{r}$.

Утверждение 28. *Векторное поле* (58.2) *непрерывно на* $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \{\mathbf{r}(a), \mathbf{r}(b)\}$.

Доказательство. Выберем произвольным образом $t_0 \in (a,b)$. По лемме 13 векторное поле $\boldsymbol{\tau}$ непрерывно на множествах $\tilde{\Gamma}_1 := \{\mathbf{r}(t) \mid t \in (a,t_0]\}$ и $\tilde{\Gamma}_2 := \{\mathbf{r}(t) \mid t \in [t_0,b)\}$. Следовательно, $\boldsymbol{\tau}$ непрерывно на объединении этих множеств. ▲

Простая гладкая кривая называется *ориентированной*, если на ней задано непрерывное поле единичных направляющих векторов (называемое *ориентацией*):

Определение 21. *Пусть Γ — простая гладкая кривая. Говорят, что ориентация кривой Γ задана непрерывным векторным полем $\boldsymbol{\nu}\colon \tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^d$, где $\tilde{\Gamma} := \Gamma \setminus \{\mathbf{r}(a), \mathbf{r}(b)\}$ если для каждого $t \in (a,b)$ выполнено $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}(t)) \parallel \mathbf{r}'(t)$ и $|\boldsymbol{\nu}(\mathbf{r}(t))| = 1$.*

По утверждению 28 поле (58.2) задаёт ориентацию кривой. Будем говорить, что такая ориентация порождается соответствующей параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Покажем, что у любой простой гладкой кривой существует всего две возможных ориентации:

Утверждение 29. *Если векторное поле $\boldsymbol{\nu}$ задаёт ориентацию простой гладкой кривой Γ, заданной параметризацией $\mathbf{r}$, то либо $\boldsymbol{\nu} \equiv +\boldsymbol{\tau}$, либо $\boldsymbol{\nu} \equiv -\boldsymbol{\tau}$.*

Доказательство. Для каждой точки $\mathbf{x}$ рассматриваемой кривой определим $s(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\nu}(x) \cdot \boldsymbol{\tau}(x)$. По определению ориентации функция s непрерывна на $\tilde{\Gamma}$ и может принимать только значения $+1$ и -1. Если существуют $\mathbf{x} \in \tilde{\Gamma}$ и $\mathbf{y} \in \tilde{\Gamma}$ такие, что $s(\mathbf{x}) \neq s(\mathbf{y})$, то по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции s должна принимать значение 0, что невозможно. Значит s принимает одно и то же значение на всей $\tilde{\Gamma}$. ▲

Легко видеть, что если параметризация $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (где $t \in [a,b]$) порождает ориентацию $\boldsymbol{\tau}$, то ориентация $-\boldsymbol{\tau}$ порождается параметризацией $\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(b+a-t)$.

58.4 Криволинейные интегралы 1 и 2 рода

Далее нам будет удобно разделять отображения на *скалярные* и *векторные* поля. Если на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ задано отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, то в случае $m = 1$ это отображение называется скалярным, а в случае $m = d$ — векторным полем. (Обычно при $m = d$ для обозначения отображения f используется символ $\mathbf{f}$, набранный полужирным шрифтом.)

Пусть ориентированная гладкая кривая Γ задана параметризацией $\mathbf{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$. (Это подразумевает, что ориентация Γ порождается параметризацией $\mathbf{r}$.) Так как непрерывные отображения переводят компакты в компакты, то множество $\mathbf{r}([a, b])$ всех точек гладкой кривой является компактом.

Определение 22. *Для любой непрерывной функции (скалярного поля) $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ выражение*

$$\int_\Gamma f\,ds := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt, \tag{58.3}$$

называется криволинейным интегралом 1 рода.

Для непрерывного отображения вида $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}^m$ криволинейный интеграл $\int_\Gamma f\,ds$ понимается покомпонентно:

$$\left(\int_\Gamma f\,ds\right)_i = \int_a^b f_i\,ds. \tag{58.4}$$

Как известно, для переменной длины дуги $s = s(t)$ имеет место равенство $ds = |r'(t)|dt$. Этим обусловлено использование символа ds в обозначении криволинейного интеграла 1 рода. Так как $d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)\,dt$, то для интеграла 1 рода иногда используется обозначение $\int_\Gamma f\,|d\mathbf{r}|$.

Определение 23. *Для любого непрерывного векторного поля $\mathbf{f}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^d$ выражение*

$$\int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \tag{58.5}$$

называется криволинейным интегралом 2 рода, или работой векторного поля $\mathbf{f}$ вдоль кривой Γ. (Здесь $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ означает скалярное произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$.) Также криволинейный интеграл 2 рода называют циркуляцией $\mathbf{f}$ *по* Γ.

Так как одну и ту же кривую можно задать различными параметризациями, то необходимо проверить, что определённые выше криволинейные интегралы не зависят от выбора параметризации, задающей данную кривую. Напомним, что функция $t = t(s)$ называется *допустимой заменой параметра* гладкой кривой Γ, если t непрерывно-дифференцируема на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ и $t'(s) > 0$ в каждой точке $s \in [\alpha, \beta]$ и $t(\alpha) = a$. В этом случае вектор-функция $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(t(s))$, где $s \in [\alpha, \beta]$, также задаёт кривую Γ.

Утверждение 30. *Криволинейные интегралы 1 и 2 рода не меняются при допустимой замене параметра.*

Доказательство. Данная теорема сразу следует из теоремы о замене переменной в интеграле Римана. ▲

Утверждение 31. *При замене ориентации кривой на противоположную криволинейный интеграл 1 рода сохраняет своё значение, а криволинейный интеграл 2 рода меняет знак.*

Доказательство. Действительно, параметризация $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(b + a - s)$ задаёт ориентацию, противоположную ориентации, заданной параметризацией $\mathbf{r}$. Тогда для ориентированной кривой $\tilde{\Gamma}$, заданной $\mathbf{q}$, по теореме о замене переменной под знаком интеграла имеем

$$\int_{\tilde{\Gamma}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{q}(s)) \cdot (-\mathbf{r}'(b + a - s))\, ds = \int_b^a \mathbf{f}(\mathbf{q}(b + a - t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = -\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}. \quad (58.6)$$

По предыдущему утверждению значение криволинейного интеграла будет таким же для всех других параметризаций, получаемых из $\mathbf{q}$ допустимой заменой параметра. ▲

Установим связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода:

Утверждение 32. *Пусть ориентированная кривая Γ задана непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\mathbf{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ и векторное поле $\mathbf{f}\colon \Gamma \to \mathbb{R}^d$ непрерывно. Тогда*

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}\, ds, \quad (58.7)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — поле единичных направляющих векторов, порождённое параметризацией $\mathbf{r}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|$. ▲

Если $d = 2$ (и аналогично в случае $d = 3$) и векторное поле $\mathbf{f}$ имеет компоненты $f_1 = P$ и $f_2 = Q$, то криволинейный интеграл 2 рода также обозначают символом

$$\int_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy. \quad (58.8)$$

Это обозначение оправдано тем, что если $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, то

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot r'(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t), \quad (58.9)$$

а по определению дифференциала $dx = x'(t)dt$ и $dy = y'(t)dt$. В частности, если $x(t) = t$, то

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\, dx. \quad (58.10)$$

Важно отметить, что циркуляция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной системы координат, в которой она вычислена. Действительно, если S является матрицей перехода к новому ортонормированному базису, то она ортогональна. В новом базисе векторное поле $\mathbf{a}$ имеет координаты $S \cdot \mathbf{a}$, а параметризация кривой имеет вид $S \cdot \mathbf{r}(t)$. Остаётся воспользоваться известным свойством скалярного произведения: $(S \cdot \mathbf{a}, S \cdot \mathbf{r}'(t)) = (\mathbf{a}, \mathbf{r}'(t))$.

58.5 Формула конечных приращений для отображений

Усилим лемму 13 при дополнительном предположении о непрерывной дифференцируемости вектор-функции, задающей кривую. Для этого нам понадобится несколько вспомогательных утверждений, которые полезны и в других ситуациях.

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ под $[x, y]$ будем понимать отрезок, соединяющий x и y:

$$[x, y] := \{tx + (1 - t)y : t \in [0, 1]\}. \quad (58.11)$$

Лемма 14. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто и отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо. Пусть $z \in \Omega$ и матрица $Df(z)$ невырождена. Тогда существуют константы $L, M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $x, y \in U_\varepsilon(z)$ выполнено*

$$L|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le M|x - y|. \quad (58.12)$$

Доказательство. Так как матрица $A = Df(z)$ невырождена, то существует константа $C > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$|A(x-y)| \geq C|x-y|. \tag{58.13}$$

В силу непрерывности Df в точке z существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in U_\delta(z)$ выполнено

$$\|Df(x) - A\| < C/2. \tag{58.14}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \partial_t f(tx + (1-t)y)\,dt = \int_0^1 Df(tx+(1-t)y)\cdot(x-y)\,dt \\ &= A\cdot(x-y) + \int_0^1 (Df(tx+(1-t)y) - A)\cdot(x-y)\,dt. \end{aligned} \tag{58.15}$$

Тогда по [???], [???] и в силу (58.14) имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |A\cdot(x-y)| + \int_0^1 |(Df(tx+(1-t)y) - A)\cdot(x-y)|\,dt \\ &\leq \|A\|\cdot\|x-y\| + \int_0^1 \|Df(tx+(1-t)y) - A\|\cdot|x-y|\,dt \\ &\leq (\|A\| + C/2)|x-y| \end{aligned} \tag{58.16}$$

Следовательно, в качестве M можно взять $\|A\| + C/2$.

Рассуждая аналогично с использованием (58.13), с другой стороны получаем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\geq C|x-y| - \left|\int_0^1 (Df(tx+(1-t)y) - A)\cdot(x-y)\,dt\right| \\ &\geq C|x-y| - \int_0^1 \|Df(tx+(1-t)y) - A\|\cdot|x-y|\,dt \\ &\geq C|x-y| - (C/2)|x-y| \geq (C/2)|x-y|. \end{aligned} \tag{58.17}$$

Следовательно, в качестве L можно взять $C/2$. ▲

Лемма 15. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто и выпукло, а функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда функция $g\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ вида*

$$g(x,y) = \int_0^1 f(tx + (1-t)y)\,dt \tag{58.18}$$

также непрерывна.

Доказательство. В силу выпуклости Ω для любых $x, y \in \Omega$ отрезок $[x, y]$ лежит в Ω. Так как замкнутое множество $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ не пересекает компакт $[x, y]$, то существует $r > 0$ такое, что $\overline{[x, y] + B_r(0)} \subset \Omega$. (Здесь $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ для любых $A, B \subset \mathbb{R}^n$.)

На компакте $K := \overline{[x, y] + B_{r/2}(0)}$ функция f равномерно непрерывна по теореме Кантора. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon$ для всех $\xi, \eta \in K$, удовлетворяющих $|\xi - \eta| < \delta$. Всегда можно считать, что $\delta < r/2$.

Заметим, что если $x' \in B_\delta(x)$ и $y' \in B_\delta(y)$, то при каждом $t \in [0, 1]$

$$\rho(tx' + (1-t)y', tx + (1-t)y) \leq t|x - x'| + (1-t)|y - y'| < \delta. \tag{58.19}$$

Тогда при каждом $t \in [0, 1]$ выполнено $|f(tx + (1-t)y) - f(tx' + (1-t)y')| < \varepsilon$, следовательно, $|g(x, y) - g(x', y')| < \varepsilon$. ▲

Лемма 16 (о конечных приращениях)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто и выпукло, а отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо. Тогда существует непрерывное отображение $A\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ такое, что для всех $x, y \in \Omega$ выполнено*

$$f(x) - f(y) = A(x, y) \cdot (x - y), \tag{58.20}$$

причём $A(x, x) = Df(x)$. (Непрерывность A понимается как непрерывность компонент матрицы $A = A(x, y)$ как функций от x, y.)

Доказательство. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница и теоремой о производной сложной функции (для каждого $i \in \overline{1, m}$):

$$\begin{gathered} f_i(x) - f_i(y) = f_i(tx + (1-t)y)|_{t=0}^{t=1} \\ = \int_0^1 \partial_t(f_i(tx + (1-t)y))\,dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n (Df(tx + (1-t)y))_{ij}(x_j - y_j)\,dt \end{gathered} \tag{58.21}$$

Определим

$$(A(x, y))_{ij} := \int_0^1 (Df(tx + (1-t)y))_{ij}\,dt \tag{58.22}$$

В силу непрерывности компонент матрицы Якоби и предыдущей леммы эти функции непрерывны.

Если $x = y$, то $tx + (1-t)y = x$, поэтому $A(x, x) = Df(x)$. ▲

Теорема 31. *Если вектор-функция $\mathbf{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^d$ инъективна, непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек, то существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что*

$$C_1|s - t| \le |\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| \le C_2|s - t| \tag{58.23}$$

для всех $s, t \in [a, b]$.

Доказательство. В качестве C_2, очевидно, можно взять $C_2 := \sup_{t\in[a,b]} |\mathbf{r}'(t)|$. С константой C_1 дело обстоит несколько сложнее.

По лемме 16 существует непрерывное отображение $A = A(s, t)$ такое, что $\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t) = A(s, t) \cdot (s - t)$ и $A(s, s) = \mathbf{r}'(s)$ для всех $s, t \in [a, b]$. Тогда

$$\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t) = A(s, s)(s - t) + (A(s, t) - A(s, s))(s - t). \tag{58.24}$$

Ввиду отсутствия особых точек у $\mathbf{r}$ и непрерывности $\mathbf{r}'$ на компакте $[a, b]$ существует $\alpha > 0$ такое, что $|A(s, s)| \ge \alpha$ для всех $s \in [a, b]$.

Отображение A непрерывно на компакте $[a, b]^2$, значит по теореме Кантора о равномерной непрерывности существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|s-t| < \varepsilon$ выполнено $|A(s, t)-A(s, s)| < \alpha/2$. По лемме 13 существует $\delta > 0$ такое, что если $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| < \delta$, то $|s - t| < \varepsilon$. В силу (58.24) в этом случае имеем оценку

$$|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| \ge |A(s, s)(s - t)| - \frac{\alpha}{2}|s - t| \ge \frac{\alpha}{2}|s - t|, \tag{58.25}$$

поскольку $|A(s, s)(s - t)| \ge \alpha|s - t|$. С другой стороны, в случае когда $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)| \ge \delta$ имеет место оценка

$$|s - t| \le \frac{b - a}{\delta}\delta \le \frac{b - a}{\delta}|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)|. \tag{58.26}$$

Таким образом, в качестве C_1 можно взять $C_1 := \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{\delta}{b-a})$. ▲

58.6 Разбиение единицы

Иногда возникает задача гладким образом "склеить"функции, заданные лишь локально (то есть в окрестностях некоторых точек). В подобных ситуациях бывает полезна конструкция, известная как *разбиение единицы.*

Определение 24. Носителем *функции* $f\colon G \to \mathbb{R}^m$*, где* $G \subset \mathbb{R}^n$*, называется замыкание (в* $\mathbb{R}^n$*) множества точек* $x \in G$*, в которых* f *отлична от нуля. Носитель функции* f *обозначается как* $\operatorname{supp} f$.

Для любого открытого $U \subset \mathbb{R}^d$ под $C_0^\infty(U)$ мы будем понимать множество всех бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых лежит в U.

Определение 25. *Пусть* $M \subset \mathbb{R}^d$ *и* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *— открытое покрытие множества* M*. Конечный набор функций* $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *называется* разбиением единицы на M, подчинённым покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *если*

1. *для каждого* $i \in I$ *выполнено* $0 \le \varphi_i \le 1$.
2. *для каждой точки* $x \in M$ *выполнено*
$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1 \tag{58.27}$$
3. *для каждого* $i \in I$ *существует* $\alpha \in A$ *такое, что* $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U_\alpha$.

Утверждение 33. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^d$ *— компакт,* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *— его открытое покрытие. Тогда существует разбиение единицы* $\{\varphi_i\}_{i\in I}$*, подчинённое* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Доказательство. Пусть функция $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема, равна 0 на $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ и принимает строго положительные значения в остальных точках. (Достаточно положить $\omega(x) := \exp(-1/(1-x^2))$ при $x \in (-1,1)$.)

Для каждого $x \in K$ существует $\alpha = \alpha(x) \in A$ такое, что $x \in U_\alpha$. Так как U_α открыто, то существует $\delta = \delta(x) > 0$ (зависящее от α) такое, что $[x_1-\delta, x_1+\delta] \times \ldots \times [x_d-\delta, x_d+\delta] \subset U_\alpha$. Обозначим $V_x := (x_1-\delta, x_1+\delta) \times \ldots \times (x_d-\delta, x_d+\delta)$.

Положим $\psi_x(y) := \omega(\frac{y_1-x_1}{\delta}) \cdot \ldots \cdot \omega(\frac{y_d-x_d}{\delta})$, $y \in \mathbb{R}^d$. По построению $\psi_x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{supp}\psi_x \subset U_{\alpha(x)}$.

Так как $\{V_x\}_{x\in K}$ образуют открытое покрытие компакта K, то по лемме Гейне-Бореля из него можно выделить конечное подпокрытие $\{V_{x_j}\}_{j=1}^N$, где $x_1,\ldots,x_N \in K$. Обозначим $\psi_j := \psi_{x_j}$.

Заметим, что для любого $x \in K$ выполнено
$$\begin{aligned}
1 &= \psi_1 + (1-\psi_1) = \\
&= \psi_1 + (1-\psi_1)\psi_2 + (1-\psi_1)(1-\psi_2) \\
&= \ldots \\
&= \psi_1 + (1-\psi_1)\psi_2 + (1-\psi_1)(1-\psi_2)\psi_3 + \ldots \\
&+ (1-\psi_1)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_{N-1})\psi_N + (1-\psi_1)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_N).
\end{aligned} \tag{58.28}$$

Тогда $1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N + \varphi_{N+1}$, где
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \psi_1, \\
\varphi_2 &:= (1-\psi_1)\psi_2, \\
\varphi_3 &:= (1-\psi_1)(1-\psi_2)\psi_3, \\
&\ldots \\
\varphi_{N+1} &:= (1-\psi_1)\cdot\ldots\cdot(1-\psi_N).
\end{aligned} \tag{58.29}$$

Очевидно, что эти функции бесконечно дифференцируемы. При $j \le N$ носитель функции φ_j лежит в носителе ψ_j, а значит в V_{x_j}. С другой стороны, по определению подпокрытия для любого $x \in K$ существует $j \in \overline{1, N}$ такое, что $\psi_j(x) = 1$. Значит $\varphi_{N+1} \equiv 0$ на K. Следовательно, $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ образует разбиение единицы на K, подчинённое покрытию $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$. ▲

58.7 Кусочно-гладкие кривые

Пусть дан набор $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ простых незамкнутых гладких ориентированных кривых в $\mathbb{R}^d$ таких, что каждая точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ принадлежит не более чем двум из этих кривых, и если $\mathbf{x} \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ при $i \ne j$, то $\mathbf{x}$ является началом одной из них и концом другой. Тогда $\Gamma := \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ называется *ориентированной простой кусочно-гладкой кривой.*

Заметим, что любую простую кусочно-гладкую кривую Γ можно задать одной непрерывной кусочно-непрерывно-дифференцируемой вектор-функцией $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$, инъективной на $[a,b)$.

Если кривая $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ задана параметризацией $\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t)$, где $t \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$, то говорят, что ориентация $\tilde{\Gamma}$ *индуцирована ориентацией кривой* Γ. (Аналогично обстоит дело с любым конечным набором попарно непересекающихся ориентированных кусочно-гладких кривых.)

58.8 Криволинейные интегралы по кусочно-гладким кривым

В случае когда Γ является объединением попарно непересекающихся кусочно-гладких кривых, состоящих из кусков $\{\Gamma_i\}_{i=1}^N$, заданных параметризациями $\mathbf{r}_i\colon [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^d$, интеграл по Γ естественно понимать как сумму интегралов по кускам:

$$\int_\Gamma \varphi\,ds := \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \varphi\,ds, \qquad \int_\Gamma \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} := \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}. \tag{58.30}$$

Чтобы убедиться в корректности такого определения, необходимо проверить, что сумма интегралов в правой части не зависит от способа разбиения Γ на гладкие кривые. Мы докажем даже несколько более общее утверждение:

Утверждение 34. *Пусть простые гладкие кривые G и Γ заданы параметризациями $\mathbf{g}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ и $\boldsymbol{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^d$ соответственно. Пусть функция $f\colon G\cup\Gamma \to \mathbb{R}$ непрерывна и равна нулю на $G \triangle \Gamma$. Тогда*

$$\int_G f\,ds = \int_\Gamma f\,ds. \tag{58.31}$$

Доказательство. Так как отображения $\mathbf{g}\colon [a,b] \to G$ и $\boldsymbol{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \Gamma$ взаимно однозначны, то между $I := \mathbf{g}^{-1}(G\cap\Gamma)$ и $J := \boldsymbol{\gamma}^{-1}(G\cap\Gamma)$ имеется взаимно однозначное соответствие $\varphi\colon I \to J$.

Заметим, что в силу непрерывности $f(\mathbf{g}(t)) = 0$ при $t \in [a,b] \setminus \operatorname{int} I$. Поэтому $\int_G f\,ds = \int_{\operatorname{int} I} f(\mathbf{g}(t))\,dt$ и аналогично $\int_\Gamma f\,ds = \int_{\operatorname{int} J} f(\boldsymbol{\gamma}(t))\,dt$.

По лемме 13 φ является гомеоморфизмом, значит $\varphi(\operatorname{int} I) = \operatorname{int} J$.

По теореме 31 отображения φ и φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица. Тогда отображение $\varphi\colon \operatorname{int} I \to \operatorname{int} J$ является диффеоморфизмом. Действительно, пусть $t_0 \in \operatorname{int} I$ и $s_0 = \varphi(t_0)$. Тогда

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0) = \boldsymbol{\gamma}'(\varphi(t_0))(\varphi(t)-\varphi(t_0)) + o(\varphi(t)-\varphi(t_0)) \tag{58.32}$$

при $t \to t_0$. Так как φ удовлетворяет условию Липшица, то $o(\varphi(t)-\varphi(t_0)) = o(t-t_0)$. Тогда из равенства (58.32) видно, что у $\mathbf{g}'(t_0)$ и $\boldsymbol{\gamma}'(s_0)$ одни и те же ненулевые компоненты, и записав проекцию (58.32) на соответствующую ось можно выразить $\varphi(t)-\varphi(t_0)$ через $t-t_0$ и убедиться в дифференцируемости φ в t_0. Аналогично проверяется дифференцируемость φ^{-1}, а непрерывная дифференцируемость φ и φ^{-1} следует из непрерывности $\mathbf{g}'$ и $\boldsymbol{\gamma}'$ (и выраженных через них производных φ и φ^{-1}).

По теореме о замене переменной в кратном интеграле (которая применима и к обычным интегралам)

$$\int_{\operatorname{int} J} f(\boldsymbol{\gamma}(s))|\boldsymbol{\gamma}'(s)|\,ds = \int_{\operatorname{int} I} f(\boldsymbol{\gamma}(\varphi(t)))|\boldsymbol{\gamma}'(\varphi(t))||\varphi'(t)|\,dt = \int_{\operatorname{int} I} f(\mathbf{g}(t))|\mathbf{g}'(t)||\varphi'(t)|\,dt, \tag{58.33}$$

В записанном выше равенстве мы воспользовались тем, что $\boldsymbol{\gamma}(\varphi(t)) = \mathbf{g}(t)$ и теоремой о производной сложной функции. Таким образом равенство (58.31) доказано. ▲

Утверждение 35. *Интеграл от непрерывной функции по кусочно-гладкой кривой Γ не зависит от способа разбиения Γ на простые незамкнутые гладкие кривые.*

Доказательство. Пусть Γ разбита на простые гладкие кривые двумя способами: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$ и $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{M} \Gamma_j$, где G_i задана параметризацией $\mathbf{g}_i\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^d$, а Γ_j задана параметризацией $\boldsymbol{\gamma}_j\colon [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{R}^d$.

Прежде всего заметим, что для любой простой гладкой кривой G и любой точки $x \in G$ (в том числе для концов G) множество $B_\varepsilon(x) \cap G$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ является простой гладкой кривой и имеет длину $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Функцию f всегда можно изменить в окрестности концов кривых $\{G_i\}$ и $\{\Gamma_j\}$ так, что полученная функция будет непрерывной и обратится в нуль в некоторых окрестностях концов кривых $\{G_i\}$ и $\{\Gamma_j\}$. При этом интегралы от f по G_i и Γ_j изменятся на $O(\varepsilon)$ ввиду ограниченности функции f.

Таким образом, утверждение достаточно доказать в случае, когда $f = 0$ в некоторых окрестностях концов рассматриваемых кривых, или, другими словами, когда носитель f не пересекает концы рассматриваемых кривых.

В этом случае для любой точки $x \in \operatorname{supp} f$ существует окрестность U_x такая, что $U_x \cap G_i \neq \emptyset$ для единственного $i = i_x$ и $U_x \cap \Gamma_j \neq \emptyset$ для единственного $j = j_x$. Если $x \notin \operatorname{supp} f$, то в качестве U_x возьмём такую окрестность точки x, в которой $f \equiv 0$.

Так как Γ — компакт, то по утверждению 33 существует разбиение единицы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$, подчинённое открытому покрытию $\{U_x\}_{x\in\Gamma}$.

По определению разбиения единицы для любого индекса k существует $x \in \Gamma$ такое, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_x$. Начнём со случая, когда $x \in \operatorname{supp} f$. По построению φ_x функция $f \cdot \varphi_x$ отлична от нуля только в тех точках $y \in \Gamma$, которые принадлежат пересечению $G_i \cap \Gamma_j$. Тогда по утверждению 34

$$\int_{G_i} f \cdot \varphi_k\,ds = \int_{\Gamma_j} f \cdot \varphi_k\,ds. \tag{58.34}$$

при $i = i_x$ и $j = j_x$. Для остальных значений индексов i, j интегралы в правой и левой частях равны нулю. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{G_i} f \cdot \varphi_k\,ds = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} f \cdot \varphi_k\,ds. \tag{58.35}$$

То же самое верно и в случае, когда $x \notin \operatorname{supp} f$, так как в этом случае $f \equiv 0$ на $U_x \supset \operatorname{supp} \varphi_k$.

Так как на Γ имеет место равенство $1 = \sum_k \varphi_k$, то просуммировав записанное выше равенство по k, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{G_i} f\, ds = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j} f\, ds, \tag{58.36}$$

что и требовалось доказать. ▲

Глава 59

Формула Грина

59.1 Области с кусочно-гладкими границами

Для любого вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ вектор

$$\mathbf{a}^\perp := (-a_2, a_1) \tag{59.1}$$

называется *поворотом* **a** *на 90 градусов против часовой стрелки.*

Прямоугольную систему координат будем называть *правой,* если базис из направляющих векторов её координатных осей имеет такую же ориентацию, что и исходный базис $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ (то есть определитель соответствующей матрицы перехода должен быть положителен).

Любая простая замкнутая кривая (не обязательно кусочно-гладкая) называется *контуром.*

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область и ∂D состоит из конечного числа попарно непересекающихся кусочно-гладких контуров Γ_i, $i \in \overline{1, n}$, причём

$$\forall \mathbf{x} \in \partial D \quad \forall \delta > 0 \quad U_\delta(\mathbf{x}) \cap \operatorname{int} D^c \neq \emptyset. \tag{59.2}$$

В этом случае говорят, что D является *областью с кусочно-гладкой границей.* При этом гладкие кривые, являющиеся кусками Γ_i, будем называть *гладкими кусками* ∂D.

Условие (59.2) носит технический характер и, как мы покажем позже, оно может быть опущено без потери общности. Однако в большинстве конкретных ситуаций, встречающихся на практике, проверка этого условия не представляет сложности.

Лемма 17. *Пусть вектор-функция* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *непрерывна,* $\mathbf{r}(a) \in D$ *и* $\mathbf{r}(b) \in \operatorname{int} D^c$. *Тогда существует* $t \in (a, b)$ *такое, что* $\mathbf{r}(t) \in \partial D$.

Доказательство. В силу открытости множеств D и $\operatorname{int} D^c$ точки $\mathbf{r}(a)$ и $\mathbf{r}(b)$ не принадлежат ∂D. Поэтому если $\partial D \cap \mathbf{r}((a, b)) = \emptyset$, то

$$\mathbf{r}([a, b]) \subset D \cup \operatorname{int} D^c \tag{59.3}$$

Доопределим $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}(a)$ при $t < a$ и $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}(b)$ при $t > b$. Тогда в силу непрерывности $\mathbf{r}$ полные прообразы $\mathbf{r}^{-1}(D)$ и $\mathbf{r}^{-1}(\operatorname{int} D^c)$ открыты и

$$\mathbb{R} = \mathbf{r}^{-1}(D) \sqcup \mathbf{r}^{-1}(\operatorname{int} D^c), \tag{59.4}$$

что противоречит связности $\mathbb{R}$. ▲

Точку $\mathbf{x} \in \partial D$ назовём *регулярной,* если существует окрестность $Q = Q(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$ такая, что в некоторой прямоугольной системе координат (ξ, η) с началом в точке $\mathbf{x}$ выполнено

$$\begin{gathered} Q = (-a, a) \times (-b, b) \\ Q \cap D = \{(\xi, \eta) \ : \ -a < \xi < a, \ -b < \eta < f(\xi)\}, \end{gathered} \tag{59.5}$$

где функция $f\colon [-a, a] \to (-b, b)$ непрерывно дифференцируема. Окрестность Q, обладающую указанными выше свойствами (а также систему координат $O\xi\eta$), будем называть *канонической окрестностью точки* $\mathbf{x}$, а функцию f будем называть *канонической параметризацией* $\partial D \cap Q$.

Касательная к графику функции f в точке $(0, 0)$ (координаты указаны в системе $O\xi\eta$) называется *касательной к* ∂D *в точке* $\mathbf{x}$. Нормаль $\mathbf{n}$ к этой касательной называется *нормалью к* ∂D *в точке* $\mathbf{x}$. Эта нормаль $\mathbf{n}$ называется

- *внутренней нормалью к* D *в точке* $\mathbf{x}$, если существует $\delta > 0$ такое, что $\mathbf{x} + t\mathbf{n} \in D$ для всех $t \in (0, \delta)$;

- *внешней нормалью к* D *в точке* $\mathbf{x}$, если существует $\delta > 0$ такое, что $\mathbf{x} + t\mathbf{n} \in \operatorname{int} D^c$ для всех $t \in (0, \delta)$.

Из определения регулярной точки следует, что любая нормаль к ∂D в регулярной точке $\mathbf{x} \in \partial D$ является либо внешней, либо внутренней относительно D.

Легко видеть, что в канонической системе координат единичная внешняя нормаль имеет вид

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(0)^2}} \begin{pmatrix} -f'(0) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{59.6}$$

Геометрический смысл регулярной точки границы состоит в том, что в некоторой окрестности этой точки можно выбрать прямоугольную систему координат, в которой область D представляет собой подграфик некоторой гладкой функции, являющейся параметризацией части ∂D (с точностью до ориентации).

Оказывается, что все точки ∂D, за исключением, возможно, конечного их числа, являются регулярными:

Утверждение 36. *Все точки ∂D за исключением, возможно, концов гладких кусков ∂D, являются регулярными.*

Доказательство. Пусть гладкий кусок $\Gamma_i \subset \partial D$ задан параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$. Возьмём $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и перейдём в прямоугольную систему координат с началом в точке $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t_0)$, направляющими векторами координатных осей которой являются $\mathbf{r}'(t_0)$ и $(\mathbf{r}'(t_0))^\perp$. В этой системе координат $\mathbf{r}(t) = (u(t), v(t))$, причём $u(t_0) = v(t_0) = 0$, $u'(t_0) > 0$ и $v'(t_0) = 0$. В силу непрерывности u существует $\delta_1 > 0$ такое, что $u'(t) > 0$ для всех $t \in [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \subset (\alpha, \beta)$.

Так как u непрерывно дифференцируема и строго возрастает на открытом интервале $U_{\delta_1}(t_0)$, то по теореме об обратной функции множество $I := u(U_{\delta_1}(t_0))$ является открытым интервалом и существует строго возрастающая непрерывно дифференцируемая функция $u^{-1}\colon I \to U_{\delta_1}(t_0)$, обратная к u.

Так как $u(t_0) = 0 \in I$, то для некоторого $\delta_2 > 0$ имеем $U_{\delta_2}(0) \subset I$. Для каждого $\xi \in U_{\delta_2}(0)$ определим

$$f(\xi) := v(u^{-1}(\xi)) \tag{59.7}$$

Для любого $t \in u^{-1}(U_{\delta_2}(0))$

$$f'(u(t)) = \frac{v'(t)}{u'(t)} \tag{59.8}$$

Функция v' ограничена (так как непрерывна на $[\alpha,\beta]$). Функция $1/u'$ также ограничена (в силу выбора δ_1). Значит производная функции f ограничена некоторой константой C. Следовательно, $|f(\xi)| \le C|\xi|$ для всех $\xi \in U_{\delta_2}(0)$.

Рассмотрим Q прямоугольник

$$Q := (-a,a) \times (-2Ca, 2Ca), \tag{59.9}$$

где число $a \in (0,\delta_2)$ мы выберем далее. Заметим, что в общем случае значение $a = \delta_2$ может не подойти, так как в Q могут найтись точки границы D, не лежащие на графике f.

Для выбора подходящего значения a рассмотрим множество

$$K := (\partial D \setminus \Gamma_i) \cup \mathbf{r}([\alpha,\beta] \setminus U_{\delta_1}(t_0)). \tag{59.10}$$

(Заметим, что концы Γ_i принадлежат K.) Множество K является конечным объединением компактов и, следовательно, само является компактом. При этом $(0,0) \notin K$, значит расстояние от $(0,0)$ до K положительно. Опишем вокруг $(0,0)$ круг B достаточно малого радиуса так, чтобы $B \cap K = \emptyset$. При достаточно малых a, очевидно, $Q \subset B$. Зафисируем такое a.

По построению $Q \cap \partial D = \{(\xi, f(\xi)) \mid -a < \xi < a\}$. Множества

$$\begin{aligned} Q^+ &:= \{(\xi,\eta) \ : \ -a < \xi < a, \ f(\xi) < \eta < 2Ca\}, \\ Q^- &:= \{(\xi,\eta) \ : \ -a < \xi < a, \ -2Ca < \eta < f(\xi)\} \end{aligned} \tag{59.11}$$

связны (так как они открыты и любые две точки каждого из них можно соединить П-образной ломаной, лежащей в соответствующем множестве). Кроме того, эти множества не пересекают ∂D (в силу выбора параметра a). Тогда по лемме 17 каждое из них лежит либо в D, либо в $\operatorname{int} D^c$. В силу условия (59.2) эти множества не могут одновременно лежать в D. В силу открытости D они также не могут одновременно лежать в $\operatorname{int} D^c$. Значит одно из них лежит в D, а другое лежит в $\operatorname{int} D^c$.

Если Q^- лежит в $\operatorname{int} D^c$, то заменим направление оси $O\eta$ на противоположное. Таким образом, не уменьшая общности $Q^- \subset D$ и $Q^+ \subset \operatorname{int} D^c$. Значит Q является искомой окрестностью точки $\mathbf{x}$. ▲

59.2 Непрерывная дифференцируемость в замыкании области

Определение 26. *Если $G \subset \mathbb{R}^d$ - открытое множество, $u \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$ и существуют непрерывные функции $v_1, \ldots, v_d \in C(\overline{G})$ такие, что $v_i = \partial_i u$ на G для всех $i \in \overline{1,d}$, то u называется* непрерывно дифференцируемой в замыкании G. *Множество всех таких u обозначают $C^1(\overline{U})$.*

Ясно, что если $U \subset \mathbb{R}^d$ открыто, $\overline{G} \subset U$ и $u \in C^1(U)$, то $u \in C^1(\overline{G})$. Однако функцию, непрерывно дифференцируемую в замыкании области не всегда удаётся продолжить до функции, непрерывно дифференцируемой в окрестности замыкания.

Утверждение 37. *Пусть $G = ((-1,0) \times (-1,1)) \cup \{(x,y) : 0 \le x < 1, \ e^{-1/x} < |y| < 1\}$ и $u \colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ задана формулой*

$$u(x,y) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \text{ и } y > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{59.12}$$

Тогда $u \in C^1(\overline{G})$, но не существует открытого множества $U \subset \mathbb{R}^2$ и функции $\tilde{u} \in C^1(U)$ таких, что $\tilde{u} = u$ в G.

Доказательство. Если бы такая $\tilde{u}$ нашлась, то $\tilde{u}$ удовлетворяла бы условию Липшица в некоторой окрестности нуля. Тогда для некоторой константы $C > 0$ при достаточно малых (x, y) выполнено $|u(x, y) - u(x, -y)| \leq C \cdot 2|y|$. Подставляя $y = e^{-1/x}$ получаем $x^2 \leq 2Ce^{-1/x}$, что невозможно так как $\lim\limits_{x\to+0} x^2 e^{1/x} = +\infty$. ▲

Тем не менее, для некоторых областей функцию, непрерывно дифференцируемую в замыкании области, можно продолжить до функции, непрерывно дифференцируемой в окрестности замыкания области.

Утверждение 38. *Пусть $u \in C^1(\overline{G})$, где $G = (0, 1)^2$. Тогда функция*

$$\tilde{u}(x, y) := \begin{cases} u(x, y), & x \geq 0, \\ 2u(0, y) - u(-x, y), & x < 0 \end{cases} \tag{59.13}$$

непрерывно дифференцируема в замыкании $(-1, 1) \times (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $v = v(x, y)$ и $w = w(x, y)$ непрерывны на $\overline{G}$, причём $u_x(x, y) = v(x, y)$ и $u_y(x, y) = w(x, y)$ для всех $(x, y) \in G$.

Переходя к пределу $x \to 0$ в равенстве

$$u(x, y) = u(x, 0) + \int_0^y w(x, t)\, dt \tag{59.14}$$

получаем

$$u(0, y) = u(0, 0) + \int_0^y w(0, t)\, dt, \tag{59.15}$$

откуда ясно что функция $y \mapsto u(0, y)$ непрерывно дифференцируема и $w(0, y)$ является её производной.

Переходя к пределу $z \to 0$ в равенстве

$$u(x, y) = u(z, y) + \int_z^x v(t, y)\, dt \tag{59.16}$$

получаем

$$u(x, y) = u(0, y) + \int_0^x v(t, y)\, dt, \tag{59.17}$$

откуда ясно что $v(0, y)$ является правой односторонней производной функции $x \mapsto u(x, y)$ в $x = 0$.

Используя сделанные наблюдения несложно убедиться в том, что в любой точке $(x, y) \in (-1, 1) \times (0, 1)$ функция $\tilde{u}$ имеет частные производные

$$\tilde{u}_y(x, y) = \begin{cases} w(x, y), & x \geq 0 \\ w(-x, y), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde{u}_x(x, y) = \begin{cases} v(x, y), & x \geq 0 \\ v(-x, y), & x < 0, \end{cases} \tag{59.18}$$

которые, очевидно, непрерывны в $(-1, 1) \times (0, 1)$. ▲

59.3 Формула Грина

Рассмотрим ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂D, ориентированной полем единичных направляющих векторов $\boldsymbol{\tau}$. Если в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in \partial D$ вектор $(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}))^\perp$ является внутренней нормалью к D, то говорят, что ∂D *ориентирована положительно относительно* D. Говоря менее формально, граница области D ориентирована положительно, если при движении вдоль ∂D область D остаётся слева.

Теорема 32. *Пусть ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^2$ имеет кусочно-гладкую границу, ориентированную положительно относительно D. Тогда для любых $P, Q \in C^1(\overline{D})$ выполнено*

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{59.19}$$

Круг в интеграле по ∂D означает, что интегрирование ведётся по объединению замкнутых кривых, образующих границу области D.

Сначала мы докажем формулу Грина для так называемых *элементарных (простых)* областей, а затем перейдём к общему случаю. Заметим вначале, что при переходе в любую правую прямоугольную систему координат интегралы в обеих частях равенства (59.19) не изменятся.

Определение 27. *Область D называется* элементарной (простой) относительно оси Ox, *если существуют непрерывно дифференцируемые функции $\varphi, \psi \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$D = \{(x,y)\ :\ a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \tag{59.20}$$

Определение области, элементарной (простой) относительно оси Oy, аналогично. Если область элементарна относительно осей Ox и Oy одновременно, то она называется элементарной (простой).

Предположим, что $Q \equiv 0$ и D элементарна относительно Ox. Тогда по теореме Фубини и формуле Ньютона-Лейбница

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)))\,dx. \tag{59.21}$$

С другой стороны, по определению криволинейного интеграла

$$\oint_{\partial D} P\,dx = -\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx. \tag{59.22}$$

(интегралы по "вертикальным частям"границы ∂D будут равны нулю, так как для любой их параметризации $(x,y) = (x(t), y(t))$ выполнено $x'(t) \equiv 0$.) Значит

$$\oint_{\partial D} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{59.23}$$

Аналогично проверяется, что если $P \equiv 0$ и D элементарна относительно оси Oy, то

$$\oint_{\partial D} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy. \tag{59.24}$$

Ввиду аддитивности интеграла обе части равенства (59.19) линейно зависят от векторного поля $\mathbf{a} = (P,Q) = (P,0) + (0,Q)$. Если область D элементарна (относительно обеих осей), то складывая доказанные формулы Грина для $(P,0)$ и $(0,Q)$ получим искомое равенство (59.19).

Утверждение 39. *Для каждой регулярной точки $\mathbf{x} \in \partial D$ найдётся такая каноническая окрестность $U = U(\mathbf{x})$, что $U \cap D$ является элементарной областью (в канонической системе координат) и*

$$U \cap \partial(U \cap D) = Q \cap \partial D. \tag{59.25}$$

Если ∂D ориентирована положительно относительно D, то соотвествующая каноническая система координат будет правой. При этом положительная ориентация $\partial(U \cap D)$ относительно $U \cap D$ индуцирует ту же самую ориентацию кривой $U \cap \partial D$, что и положительная ориентация ∂D относительно D.

Доказательство. Достаточно повторить доказательство утверждения 36, вместо $v'(t_0) = 0$ потребовав, чтобы $v' \neq 0$ в соответствующей окрестности точки t_0. (В этом случае v' будет иметь один и тот же знак в силу непрерывности, а в силу монотонности v соответствующий подграфик будет элементарной областью.)

При этом, если ∂D ориентирована положительна, то необходимость заменить направление оси $O\eta$ на противоположное не возникнет. ▲

Доказательство формулы Грина в общем случае.. Пусть $\omega = \omega(t)$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, причём $0 \le \omega(t) \le 1$ для всех $t \in [0, +\infty)$ и

$$\omega(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/2 \\ 1, & t \ge 1. \end{cases} \tag{59.26}$$

Пусть $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ — множество всех нерегулярных точек ∂D. Для каждого $i \in \overline{1, n}$ определим

$$\omega_i(\mathbf{y}) := \omega(|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i|/\delta). \tag{59.27}$$

Обозначим $\mathbf{a} := (P, Q)$ и $\mathbf{a}_\delta := (P_\delta, Q_\delta)$, где

$$P_\delta := \prod_{i=1}^n \omega_i \cdot P, \qquad Q_\delta := \prod_{i=1}^n \omega_i \cdot Q \tag{59.28}$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{\delta \to 0} \oint_{\partial D} \mathbf{a}_\delta \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial D} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \tag{59.29}$$

Заметим, что

$$\max_{(x,y) \in \overline{D}} \max \left(\left| \frac{\partial P_\delta}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial Q_\delta}{\partial x} \right| \right) = O(1/\delta) \tag{59.30}$$

и

$$\lambda \left(\left\{ \frac{\partial Q_\delta}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} \cup \left\{ \frac{\partial P_\delta}{\partial y} \neq \frac{\partial P}{\partial y} \right\} \right) = O(\delta^2) \tag{59.31}$$

при $\delta \to 0$. Поэтому

$$\lim_{\delta \to 0} \iint_D \left(\frac{\partial Q_\delta}{\partial x} - \frac{\partial P_\delta}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{59.32}$$

Отсюда ясно, что формулу (59.19) достаточно доказать для векторных полей $\mathbf{a}$, обращающихся в нуль в некоторых фиксированных окрестностях всех нерегулярных точек. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех таких векторных полей $\mathbf{a} = (P, Q)$.

Для каждой регулярной точки $\mathbf{x} \in \partial D$ выберем каноническую окрестность $U = U(\mathbf{x})$ с помощью утверждения 39. Для каждой нерегулярной точки $\mathbf{x} \in \partial D$ выберем прямоугольную окрестность $U = U(\mathbf{x})$ так, что $P = Q = 0$ в U. Наконец, для любой $\mathbf{x} \in D$ возьмём в качестве $U = U(\mathbf{x})$ произвольную открытую клетку, замыкание которой лежит в D.

Полученное семейство $\{U(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \overline{D}}$ является открытым покрытием компакта $\overline{D}$. Следовательно, существует конечное разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, подчинённое покрытию $\{U(\mathbf{x})\}_{\mathbf{x} \in \overline{D}}$. Мы докажем, что для каждого i формула Грина верна для векторного поля $(\varphi_i P, \varphi_i Q)$:

$$\oint_{\partial D} \varphi_i P\, dx + \varphi_i Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{59.33}$$

Сложив соответствующие равенства по всем значениям индекса i, получим (59.19).

По определению разбиения единицы для каждого i существует $\mathbf{x} \in \overline{D}$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi_i \subset U = U(\mathbf{x})$.

Если $\mathbf{x} \in D$, то по формуле Грина для прямоугольной области

$$\iint_D \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_U \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y}\right) dx\,dy$$
$$= \oint_{\partial U} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy = 0 = \oint_{\partial D} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy, \tag{59.34}$$

так как $\varphi_i = 0$ вне U (и в том числе на ∂U в силу непрерывности).

Если $\mathbf{x} \in \partial D$ и $\mathbf{x}$ не является регулярной точкой, то в силу выбора $U(\mathbf{x})$ имеем $\varphi_i P \equiv \varphi_i Q \equiv 0$ на $\overline{D}$, следовательно имеет место равенство (59.33).

Остаётся рассмотреть случай, когда $x \in \partial D$ является регулярной точкой.

Так как область $U \cap D$ элементарна, то

$$\int_{\partial(U\cap D)} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy = \iint_{U\cap D} \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{59.35}$$

В силу (59.25)

$$\int_{\partial(U\cap D)} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy = \int_{U\cap\partial D} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy = \int_{\partial D} \varphi_i P\,dx + \varphi_i Q\,dy, \tag{59.36}$$

так как $\varphi_i = 0$ вне U. По той же причине

$$\iint_{U\cap D} \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial(\varphi_i Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\varphi_i P)}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{59.37}$$

так что равенство (59.33) доказано во всех возможных случаях. ▲

59.4 Теорема Жордана

Формула Грина позволяет выразить циркуляцию векторного поля по кусочно-гладкому контуру, если этот контур ограничивает некоторую область $D \subset \mathbb{R}^2$ (в замыкании которого это векторное поле непрерывно дифференцируемо). Но верно ли, что любой контур ограничивает некоторую область? Следующий пример показывает, что этот вопрос не так тривиален, как может показаться:

Теорема 33 (Жордан)**.** *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *— контур (не обязательно кусочно-гладкий). Тогда существуют ограниченная область* G *и неограниченная область* E *такие, что* $\mathbb{R}^2 = G \sqcup E$ *и* $\Gamma = \partial G = \partial E$.

Доказательство. В общем случае доказательство достаточно нетривиально. Его можно найти, например, в [статье А. Ф. Филиппова](http://mi.mathnet.ru/umn8482) или в [статье H. Tverberg](https://doi.org/10.1112/blms/12.1.34). Основную трудность представляет то, что контур не обязан быть кусочно-гладким (а лишь непрерывен).

Мы ограничимся тем, что приведём основные идеи доказательства теоремы Жордана для гладкого контура. Итак, пусть Γ можно задать непрерывно дифференцируемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (u(t), v(t))$, где $t \in [0,1]$, $\mathbf{r}' \neq 0$ на $[0,1]$ и $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}'(1)$.

Для любой точки $\mathbf{p} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ определим *индекс* как

$$J(\mathbf{p}) \equiv J(\mathbf{p},\Gamma) := \int_0^1 \frac{(u(t)-x)v'(t) - (v(t)-y)u'(t)}{(u(t)-x)^2 + (v(t)-y)^2}\,dt, \tag{59.38}$$

В частности, при $\mathbf{p} = 0$ мы можем записать этот криволинейный интеграл в виде $J(0) = \int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Шаг 1. Функция J принимает только значения, принадлежащие $2\pi\mathbb{Z}$.

Достаточно доказать это для $\mathbf{p} = 0$, дополнительно предположив, что $u(0) > 0$ и $v(0) = 0$. В этом случае определим

$$\varphi(t) := \int_0^t \frac{u(t)v'(t) - v(t)u'(t)}{u^2(t) + v^2(t)}\,dt. \tag{59.39}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= |\mathbf{r}(t)| \cos\varphi(t), \\ \tilde{v}(t) &= |\mathbf{r}(t)| \sin\varphi(t), \end{aligned} \tag{59.40}$$

где $|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$. В силу сделанных предположений $\tilde{u}(0) = u(0)$ и $\tilde{v}(0) = v(0)$. Дифференцируя по правилу Лейбница несложно проверить, что

$$\tilde{u}'(t) = u(t) \ \text{ и } \ \tilde{v}'(t) = v(t) \tag{59.41}$$

для всех $t \in [0,1]$. Значит $\tilde{u}(t) = u(t)$ и $\tilde{v}(t) = v(t)$ для всех $t \in [0,1]$. Так как $u(1) = u(0)$ и $v(1) = v(0)$, то

$$\cos\varphi(1) = 1, \quad \sin\varphi(1) = 0. \tag{59.42}$$

Отсюда следует, что $\varphi(1) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Из проделанных выкладок ясно, что J можно интерпретировать как "число оборотов"кривой Γ вокруг точки $\mathbf{p}$ (умноженное на 2π).

Шаг 2. Функция J непрерывна на $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Действительно, если $\mathbf{p} \notin \Gamma$, то в силу компактности Γ расстояние от $\mathbf{p}$ до Γ строго положительно. Поэтому в некоторой окрестности точки $\mathbf{p}$ знаменатель подынтегральной дроби в определении J ограничен снизу. Тогда непрерывность J непосредственно вытекает, например, из теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

Шаг 3. Существует $\delta > 0$ такое для любого $t \in [0,1]$ и любого $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$

$$\mathbf{r}(t) + h\boldsymbol{\nu}(t) \notin \Gamma, \tag{59.43}$$

где

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \left(\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right)^{\perp}. \tag{59.44}$$

Действительно, для каждого $s \in [0,1]$ у точки $\mathbf{r}(s)$ найдётся квадратная окрестность, в которой Γ можно представить как график непрерывно дифференцируемой функции в некоторой прямоугольной системе координат с центром в точке $\mathbf{r}(s)$, ось абсцисс которой параллельна $\mathbf{r}'(s)$. Поэтому найдутся $\delta_s > 0$ и открытый интервал $I_s \subset \mathbb{R}$ такие, что (59.43) выполнено для всех $t \in [0,1] \cap I_s$ и $0 < h < \delta_s$.

По лемме Гейне-Бореля мы можем выделить из открытого покрытия $\{I_s\}$ отрезка $[0,1]$ конечное подпокрытие $\{I_{s_1}, \ldots, I_{s_n}\}$. Тогда можно взять $\delta := \min(\delta_{s_1}, \ldots, \delta_{s_n})$.

Таким образом, для каждого $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ вектор-функция

$$\mathbf{q}_h(t) := \mathbf{r}(t) + h\boldsymbol{\nu}(t), \quad t \in [0,1] \tag{59.45}$$

задаёт замкнутую кривую (не обязательно простую), не пересекающую Γ. Кривые такого вида мы будем называть кривыми, параллельными Γ.

Шаг 4. Множества

$$T^{\pm} := \{\mathbf{r}(t) \pm h\boldsymbol{\nu}(t) \mid 0 \le t \le 1, \quad 0 < h < \delta\}. \tag{59.46}$$

линейно связны. Это следует из предыдущего шага, так как он позволяет нам соединить любые две точки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T^+$ (или T^-) непрерывной кривой, лежащей в T^+ (или T^- соответственно).

Шаг 5. На каждом из множеств T^+ и T^- функция J постоянна. Это следует из их линейной связности, непрерывности J и того, что J принимает только значения, принадлежащие $2\pi\mathbb{Z}$.

Шаг 6. На множествах T^+ и T^- функция J принимает значения, отличающиеся на 2π или на -2π.

Действительно, рассмотрим окрестность точки $\mathbf{p} \in \Gamma$, пересечение которой с Γ можно представить в виде графика непрерывно дифференцируемой функции (в некоторой прямоугольной системе координат). Возьмём точку $\mathbf{a}$ над графиком и точку $\mathbf{b}$ под графиком. Ясно, что одна из этих точек принадлежит T^+, а другая — T^-.

Рассмотрим контур γ, состоящий из части графика и трёх отрезков, параллельных осям, и ограничивающий некоторую область P под графиком, которой принадлежит $\mathbf{b}$. Также рассмотрим контур $\tilde{\Gamma}$, получаемый из Γ заменой данной части графика на эти три отрезка. Ориентацию на γ и на $\tilde{\Gamma}$ зададим в соответствии с ориентацией Γ. Тогда

$$\begin{aligned} J(\mathbf{b}, \Gamma) &= J(\mathbf{b}, \tilde{\Gamma}) + J(\mathbf{b}, \gamma), \\ J(\mathbf{a}, \Gamma) &= J(\mathbf{a}, \tilde{\Gamma}) + J(\mathbf{a}, \gamma) \end{aligned} \tag{59.47}$$

Так как $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ можно соединить кривой, не пересекающей $\tilde{\Gamma}$, то $J(\mathbf{b}, \tilde{\Gamma}) = J(\mathbf{b}, \tilde{\Gamma})$. Так как $\mathbf{b} \in P$ и $\mathbf{a} \notin P$, то

$$\begin{aligned} J(\mathbf{b}, \gamma) &= \pm 2\pi, \\ J(\mathbf{a}, \gamma) &= 0. \end{aligned} \tag{59.48}$$

(В этом можно убедиться, например, с использованием формулы Грина, исключив из P достаточно малый круг с центром в $\mathbf{b}$.)

Шаг 7. Рассмотрим множества D^+ и D^-, состоящие из всех точек, которые можно соединить с T^+ или T^- соответственно непрерывной кривой, не пересекающей Γ.

$\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma = D^+ \cup D^-$, так как любую точку, не лежащую на Γ, можно соединить отрезком с ближайшей к ней точкой множества Γ (последняя существует ввиду компактности Γ).

Множества D^+ и D^- линейно связны, как T^+ и T^- линейно связны. Тогда по предыдущему шагу J принимает на D^+ и D^- разные значения. Следовательно, множества D^+ и D^- не пересекаются.

Таким образом, J принимает всего два значения. Одно из этих значений равно нулю, так как для точек, достаточно далёких от Γ, индекс J представляет собой циркуляцию потенциального векторного поля вдоль замкнутой кривой. Обозначим

$$E := \{J = 0\}, \quad G := \{J \neq 0\}. \tag{59.49}$$

Множества E и G открыты, так как их можно представить в виде полных прообразов открытых множеств под действием непрерывной функции J.

Множество E неограничено. Если и G неограничено, то получаем противоречие ограниченности Γ, так как на любом отрезке, соединяющем E и G, должна найтись точка, принадлежащая Γ.

Шаг 8. По построению $\Gamma \subset \partial E$ и $\Gamma \subset \partial G$. (Например, это видно из шага 3.) С другой стороны, любая точка, не принадлежащая Γ, является либо внутренней точкой E, либо внутренней точкой G. Поэтому $\partial E \subset \Gamma$ и $\partial G \subset \Gamma$. Таким образом, $\Gamma = \partial E = \partial G$. ▲

Область G называется *областью, ограниченной контуром* Γ.

Определение 28. *Область* $D \subset \mathbb{R}^2$ *называется* односвязной, *если для любого кусочно-гладкого контура* $\Gamma \subset D$ *область, ограниченная* Γ, *лежит в* D.

Допустим, что область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена кусочно-гладким контуром Γ. Тогда по теореме Жордана множество $E = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} = \operatorname{int} D^c$ является областью и в окрестности любой точки $x \in \partial D$ содержатся точки множеств D и E. Таким образом, условие (59.2) в определении области с кусочно-гладкой границей можно опустить.

В заключение упомянем также следующий результат:

Теорема 34 (Шёнфлис)**.** *Для любого контура* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *существует гомеоморфизм* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *такой, что* $\varphi(\Gamma)$ *является единичной окружностью.*

Глава 60

Поверхностные интегралы

60.1 Простые гладкие поверхности

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$ имеет кусочно-гладкую границу. Пусть множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ открыто и $\overline{D} \subset \Omega$. Пусть отображение $\mathbf{r}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ инъективно в $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемо в Ω, причём

$$\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) \neq 0 \tag{60.1}$$

в любой точке $(u,v) \in \overline{D}$. Тогда $S := \mathbf{r}(D)$ называется *простой гладкой поверхностью, заданной параметризацией* $\mathbf{r}$. (При этом D называется *областью параметризации.*) Множество $\partial S := \mathbf{r}(\partial D)$ называется *краем поверхности* S. Важно отметить, что ∂S не совпадает с топологической границей множества S. Однако несложно проверить, что $\overline{S} = S \sqcup \partial S$.

Заметим, что иногда относительно $\mathbf{r}$ предполагается лишь непрерывная дифференцируемость в замыкании D, а существование непрерывно-дифференцируемого продолжения на некоторую окрестность замыкания D не требуется. Для достаточно широкого класса областей D такое продолжение можно построить с помощью теоремы Уитни, но мы не будем на этом подробно останавливаться.

В общем случае отображение $\mathbf{r}$ имеет некоторые компоненты (P,Q,R), являющиеся функциями переменных u и v:

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} P(u,v) \\ Q(u,v) \\ R(u,v) \end{pmatrix}. \tag{60.2}$$

Если D лежит в плоскости Oxy и отображение $\mathbf{r}$ имеет вид

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ R(x,y) \end{pmatrix}, \tag{60.3}$$

то поверхность S называется *элементарной относительно оси Oz.* Аналогично определяются поверхности, элементарные относительно осей Ox и Oy.

Определение 29. Краем *поверхности S называется множество $\partial S := \mathbf{r}(\partial D)$.*

Не следует путать край поверхности с границей множества всех её точек. Как мы увидим далее, любая простая гладкая поверхность совпадает со своей границей.

Так как $\mathbf{r}$ инъективна в $\overline{D}$, непрерывно дифференцируема в окрестности $\overline{D}$ и композиция непрерывно-дифференцируемых функций также непрерывно-дифференцируема, то край S является объединением кусочно-гладких кривых, которые в качестве общих точек могут иметь только концы.

Приведём еще одно важное следствие инъективности параметризации $\mathbf{r}$.

Утверждение 40. *Для любого $\gamma > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $a, b \in \overline{D}$ и $|a - b| \geq \gamma$, то $|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \geq \varepsilon$.*

В частности, для всех $a \in \overline{D}$ выполнено $S \cap U_\varepsilon(\mathbf{r}(a))) \subset \mathbf{r}(U_\gamma(a))$.

Доказательство. В противном случае существуют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ точек $\overline{D}$ такие, что $|a_n - b_n| \geq \gamma$ и $|\mathbf{r}(a_n) - \mathbf{r}(b_n)| \leq \frac{1}{n}$. Применив дважды теорему Больцано–Вейерштрасса мы получим последовательности $\{a_{n_k}\}$ и $\{b_{n_k}\}$ такие, что $a_{n_k} \to a$ и $b_{n_k} \to b$ для некоторых a и b из $\overline{D}$ при $k \to \infty$. Тогда с одной стороны $|a - b| \geq \gamma$, а с другой стороны в силу непрерывности $\mathbf{r}$ имеем $|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| = 0$. Мы получили противоречие инъективности $\mathbf{r}$. ▲

Теперь усилим утверждение 40:

Теорема 35. *Существуют константы $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любых $a, b \in \overline{D}$ выполнено*

$$C_1|a - b| \leq |\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \leq C_2|a - b|. \tag{60.4}$$

Доказательство. В силу оценки приращений непрерывно дифференцируемого отображения для любого $z \in \overline{D}$ существуют константы $L_z, M_z > 0$ и $\delta(z) > 0$ такое, что для всех $a, b \in U_{\delta(z)}(z)$ выполнено

$$L_z|a - b| \leq |\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \leq M_z|a - b|. \tag{60.5}$$

По лемме Гейне-Бореля из открытого покрытия $\{U_{\delta(z)}(z) \mid z \in \overline{D}\}$ компакта $\overline{D}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{\delta(z_j)} \mid z_j \in \overline{1, N}\}$. Обозначим $\delta := \min(\delta(z_1), \ldots, \delta(z_N))$, $L := \min(L_{z_1}, \ldots, L_{z_N})$, $M := \max(M_{z_1}, \ldots, M_{z_N})$.

Если расстояние между точками $a, b \in \overline{D}$ меньше $\delta/2$, то обе этих точки принадлежат одной и той же окрестности $U_{\delta(z_j)}$ (для некоторого $j \in \overline{1, N}$). Поэтому

$$L|a - b| \leq |\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \leq M|a - b|. \tag{60.6}$$

Оценка сверху. Пусть $C_0 := \sup_{a,b \in \overline{D}} |\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)|$. В силу компактности $\overline{D}$ и непрерывности $\mathbf{r}$ имеем $C_0 < +\infty$. Если расстояние между точками $a, b \in \overline{D}$ не меньше $\delta/2$, то

$$|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \leq C_0 \cdot \frac{|a - b|}{|a - b|} \leq C_0 \frac{|a - b|}{\delta/2}. \tag{60.7}$$

Если же $|a - b| < \delta/2$, то в силу (60.6) имеем $|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \leq M|a - b|$. Значит в качестве C_2 можно взять $\max(M, 2C_0/\delta)$.

Оценка снизу. Так как $\overline{D}$ ограничено, то величина $D_0 := \sup_{a,b \in \overline{D}} |a - b|$ конечна. По утверждению 40 существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $|a - b| \geq \delta/2$, то $|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \geq \varepsilon$. В этом случае

$$|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \geq \varepsilon \frac{|a - b|}{|a - b|} \geq \varepsilon \frac{|a - b|}{D_0} \tag{60.8}$$

Если же $|a - b| < \delta/2$, то в силу (60.6) имеем $|\mathbf{r}(a) - \mathbf{r}(b)| \geq L|a - b|$. Значит в качестве C_1 можно взять $\min(L, \varepsilon/D_0)$. ▲

Для любой точки $(u, v) \in D$ плоскость, проходящая через точку $\mathbf{x} = \mathbf{r}(u, v)$ параллельно векторам $\mathbf{r}_u(u, v)$ и $\mathbf{r}_v(u, v)$, называется *касательной плоскостью к S в точке* $\mathbf{x}$. Нормаль к этой плоскости называется *нормалью к S в точке* $\mathbf{x}$. Нетрудно видеть, что векторы

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \pm \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{60.9}$$

являются единичными нормалями к поверхности в данной точке. (Знаменатель в (60.9) не обращается в нуль в силу (60.1).)

Определение 30. *Квадратичная форма*

$$k(du, dv) := |\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv|^2 = |\mathbf{r}_u|^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \, du \, dv + |\mathbf{r}_v|^2 dv^2 \tag{60.10}$$

называется первой квадратичной формой поверхности S в точке $\mathbf{r}(u, v)$. *Симметричную билинейную форму, порождающую* k, *обозначим символом* β.

Определитель матрицы M первой квадратичной формы k равен

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix} = |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 \cos^2 \varphi = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2, \tag{60.11}$$

где φ — угол между $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$. Следовательно, существует константа $C > 0$ такая, что

$$k(du, dv) \geq C\sqrt{du^2 + dv^2}. \tag{60.12}$$

Заметим также, что если векторы $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ лежат в плоскости области параметризации D, то под действием дифференциала отображения $\mathbf{r}$ они переходят в векторы $\mathbf{a}^* = a_1 \mathbf{r}_u + a_2 \mathbf{r}_v$ и $\mathbf{b}^* = b_1 \mathbf{r}_u + b_2 \mathbf{r}_v$ соответственно. Легко видеть, что

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}^* = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{60.13}$$

где M — матрица первой квадратичной формы, а β — соответствующая симметричная билинейная форма. В частности, $|\mathbf{a}^*| = k(\mathbf{a})$. Таким образом, первая квадратичная форма поверхности позволяет вычислять длины образов векторов (лежащих в плоскости области параметризации) под действием дифференциала отображения $\mathbf{r}$ (а также находить углы между ними).

Аналогично одномерному случаю, касательная плоскость является той плоскостью, которая наилучшим образом приближает поверхность в окрестности данной точки:

Утверждение 41. *Для того, чтобы плоскость* α, *проходящая через точку* $\mathbf{x}$ *простой гладкой поверхности* S, *была касательной к* S *в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho(\mathbf{y}, \alpha) = o(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \tag{60.14}$$

при $\mathbf{y} \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in S$. *(Здесь* $\rho(\mathbf{y}, \alpha)$ *— расстояние от точки* $\mathbf{y}$ *до плоскости* α.*)*

Доказательство. Для удобства будем считать, что $\mathbf{x} = \mathbf{r}(0, 0)$. Тогда

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{r}_u u + \mathbf{r}_v v + o(\sqrt{u^2 + v^2}) \tag{60.15}$$

Пусть плоскость α имеет единичную нормаль $\mathbf{n}$. Тогда

$$\rho(\mathbf{y}, \alpha) = |(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}| = |u\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} + v\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n}| + o(\sqrt{u^2 + v^2}). \tag{60.16}$$

Так как $\mathbf{r}$ удовлетворяет условию Липшица, то $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = O(\sqrt{u^2 + v^2})$ при $(u, v) \to 0$. Значит $\rho(\mathbf{y}, \alpha) = o(|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$ тогда и только тогда, когда

$$u\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{n} + v\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{n} = o(\sqrt{u^2 + v^2}). \tag{60.17}$$

Ясно, что это выполнено в том и только том случае, когда $\mathbf{n} \parallel \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$, что и требовалось доказать. ▲

Определение 31. *Диффеоморфизм* $\varphi \colon \Omega \to W$ *будем называть* допустимой заменой параметров.

Если φ является допустимой заменой параметров, то по принципу сохранения области $G := \varphi(D)$ является областью. При этом $\varphi(\partial D) = \partial G$ и в силу непрерывной дифференцируемости $\mathbf{r}$ граница G будет кусочно-гладкой.

Обозначим через u и v компоненты отображения φ^{-1}:

$$\varphi^{-1}(s,t) = (u(s,t), v(s,t)), \qquad (s,t) \in W. \tag{60.18}$$

Рассмотрим отображение

$$\mathbf{R}(s,t) := \mathbf{r}(u(s,t), v(s,t)), \qquad (s,t) \in W. \tag{60.19}$$

В силу взаимной однозначности φ легко видеть, что $\mathbf{R}(G) = \mathbf{r}(D) = S$, а также $\mathbf{R}(\partial G) = \mathbf{r}(\partial D)$. Поэтому $\mathbf{R}$ естественно рассматривать как новую параметризацию той же самой поверхности S.

Утверждение 42. *Для определённого выше отображения* $\mathbf{r}$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} \tag{60.20}$$

где левая часть и якобиан в правой части вычислены в $(s,t) \in G$*, а векторное произведение* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ *вычислено в* $(u(s,t), v(s,t))$.

Доказательство. По теореме о производной сложной функции $\mathbf{R}_s = \mathbf{r}_u u_s + \mathbf{r}_v v_s$, $\mathbf{R}_t = \mathbf{r}_u u_t + \mathbf{r}_v v_t$. Тогда (60.20) следует из свойств векторного произведения и определения якобиана.

Остальные свойства следуют из свойств отображения φ. ▲

Утверждение 43. *Пусть множества* $\Omega, W \subset \mathbb{R}^2$ *открыты, отображения* $\mathbf{r}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *и* $\mathbf{R}\colon W \to \mathbb{R}^3$ *инъективны и непрерывно дифференцируемы, причём* $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ *на* Ω *и* $\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t \neq 0$ *на* W*. Если* $\mathbf{r}(\Omega) = \mathbf{R}(W) = S$*, то существует диффеоморфизм* $\varphi\colon \Omega \to W$ *такой, что*

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \circ \varphi. \tag{60.21}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ имеет компоненты (x,y,z), а $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s,t)$ имеет компоненты (X,Y,Z). Так как отображения $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ инъективны, то они взаимно однозначно отображают Ω на S и W на S соответственно. Определим

$$\varphi := \mathbf{R}^{-1} \circ \mathbf{r}. \tag{60.22}$$

По построению φ взаимно однозначно отображает Ω на W. Проверим, что φ является диффеоморфизмом. Для этого рассмотрим произвольную точку $(s_0,t_0) \in \Omega$ и соответствующую ей точку $(u_0,v_0) = \varphi(s_0,t_0)$. В силу условия (60.1) хотя бы одна из компонент нормали к поверхности $\mathbf{r}(\Omega)$ в точке $(x_0,y_0,z_0) := \mathbf{r}(u_0,v_0)$ отлична от нуля. Допустим, что отлична от нуля компонента вдоль оси Oz, тогда в точке (u_0,v_0) выполнено

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{60.23}$$

Значит по теореме об обратном отображении существуют окрестности точек (u_0,v_0) и (x_0,y_0), между которыми отображение $\psi\colon (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, являющееся диффеоморфизмом.

Так как касательная плоскость к поверхности не зависит от выбора параметризации последней (например, это следует из утверждения 41), то нормаль к поверхности $\mathbf{R}(W)$

в точке (x_0, y_0, z_0) параллельна нормали к поверхности $\mathbf{r}(\Omega)$ в этой точке. Тогда в точке (s_0, t_0) выполнено

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix} \neq 0. \tag{60.24}$$

Значит по теореме об обратном отображении существуют окрестности точек (s_0, t_0) и (x_0, y_0), между которыми отображение $\chi\colon (s,t) \mapsto (X(s,t), Y(s,t))$ устанавливает взаимно однозначное соответствие, являющееся диффеоморфизмом.

Таким образом, в некоторой окрестности точки (t_0, s_0) отображение φ имеет вид $\varphi = \chi^{-1} \circ \psi$. Следовательно, φ и φ^{-1} непрерывно дифференцируемы в точках (t_0, s_0) и (u_0, v_0) соответственно. В силу произвольности (s_0, t_0) отсюда заключаем, что φ является диффеоморфизмом. ▲

Аналогичным образом доказывается

Теорема 36. *Пусть кусочно-гладкая поверхность $S = \mathbf{r}(D)$ задана параметризацией $\mathbf{r}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$. Если кусочно-гладкая кривая Γ лежит в S, то $\mathbf{r}^{-1}(\Gamma)$ является кусочно-гладкой кривой, лежащей в D.*

Доказательство. Предположим, что кривая Γ задана непрерывно-дифференцируемой параметризацией $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ где $t \in [0,1]$. Для каждого $t_0 \in [0,1]$ нормаль к S в точке $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ имеет хотя бы одну ненулевую компоненту. Допустим, что отлична от нуля компонента вдоль оси z. Пусть $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = \mathbf{r}(u_0, v_0)$, где $(u_0, v_0) \in D$. Тогда по теореме об обратном отображении существует диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность точки $(x(t_0), y(t_0))$ на некоторую окрестность точки (u_0, v_0). Значит существует окрестность I точки t_0 такая, что $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{q}(I \cap [0,1]))$ является гладкой кривой, лежащей в D. Все такие интервалы образуют открытое покрытие компакта $[0,1]$, а значит по лемме Гейне-Бореля из данного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $I_1, \ldots, I_m$. Тогда $\mathbf{r}^{-1}(\mathbf{q}([0,1]))$ можно разбить на конечный набор простых гладких кривых. ▲

Фактически, в доказательствах теорем 43 и 36 мы пользовались тем, что *локально* (то есть в некоторой окрестности каждой своей точки) любая простая кусочно-гладкая поверхность является элементарной относительно одной из своих осей.

60.2 Сапог Шварца

Длина кривой определялась ранее как супремум длин вписанных в неё ломаных. С этой точки зрения было бы естественно определить площадь поверхности как супремум сумм площадей треугольников, вписанных в поверхность. Однако даже для таких поверхностей, как цилиндр, такой подход не приводит к нужному результату, как показал Шварц. Действительно, рассмотрим цилиндр, радиус и высота которого равны 1. Разобъём его на k равных цилиндрических слоёв плоскостями, параллельными оси цилиндра. В каждый такой слой впишем $2n$ треугольников следующим образом: выберем n равноудалённых точек на его верхней окружности и n равноудалённых точек на его нижней окружности так, чтобы точки на нижней окружности получались переносами параллельно оси цилиндра середин дуг с концами в точках, выбранных на верхней окружности. Рассмотрим треугольники, имеющие в качестве вершин две соседних точки на верхней окружности и ближайшую к соответствующей дуге точку нижней окружности, а также аналогичные треугольники, имеющие две вершины на нижней окружности. Ортогональные проекции полученных треугольников на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, имеют площади $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{n} \cdot (1 - \cos\frac{\pi}{n}) \sim \frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^3$ при $n \to \infty$. Площади самих треугольников не меньше площадей их ортогональных проекций, а число всех таких треугольников равно

$2nk$. Поэтому сумма их площадей не меньше чем $S_n \cdot 2nk \sim \pi^3 \frac{k}{n^2}$ при $n \to \infty$. Если $k = 2^n$, то полученная величина стремится к бесконечности, а не к 2π. Поэтому приходится определять понятие площади другим способом.

60.3 Поверхностный интеграл 1 рода

Пусть простая гладкая поверхность $S = \mathbf{r}(D)$ задана параметризацией $\mathbf{r}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область и $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$. Напомним, что по определению ПГП $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ на $\overline{D}$, а также D имеет кусочно-гладкую границу.

Определение 32. *Пусть задано ограниченное борелевское скалярное поле* $f\colon S \to \mathbb{R}$. Поверхностным интегралом 1 рода от f по S *называется*

$$\int_S f\,d\sigma := \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv. \tag{60.25}$$

Площадью поверхности S *называется*

$$\sigma(S) := \int_S 1\,d\sigma. \tag{60.26}$$

В данном выше определении рассматриваются борелевские функции, так как в этом случае функция $f \circ \mathbf{r}$ измерима. Если же предполагать лишь измеримость f по Лебегу, то эта композиция вообще говоря не является измеримой.

Теперь необходимо проверить, что значение поверхностного интеграла не зависит от выбора параметризации $\mathbf{r}$. Для начала покажем, что это значение не изменяется при допустимой замене параметра.

Теорема 37 (об инвариантности поверхностного интеграла при допустимой замене параметра)**.** *Пусть* $U, V \subset \mathbb{R}^2$ *открыты и* $\varphi\colon U \to V$ *— диффеоморфизм. Пусть* $\mathbf{r}\colon U \to \mathbb{R}^3$ *и* $\mathbf{R}\colon V \to \mathbb{R}^3$, *причём* $\mathbf{r} = \mathbf{R} \circ \varphi$. *Пусть* $K \subset V$ *— компакт. Тогда для любой ограниченной борелевской функции* $f\colon \mathbf{r}(K) \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\int_K f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv = \int_{\varphi^{-1}(K)} f(\mathbf{R}(s,t))|\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t|\,ds\,dt. \tag{60.27}$$

Доказательство. Данная теорема сразу следует из утверждения 42 и теоремы о замене переменной в кратном интеграле. ▲

Так как вообще говоря не все возможные параметризации связаны друг с другом допустимой заменой параметра, то в общем случае нам понадобится еще одно свойство.

Теорема 38. *Пусть последовательность равномерно ограниченных борелевских функций* $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно на* S *к функции* $f\colon S \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\int_S f_n\,d\sigma \to \int_S f\,d\sigma. \tag{60.28}$$

Доказательство. После перехода к параметризации данная теорема сразу следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. ▲

Теорема 39. *Пусть простые гладкие поверхности* $S = \mathbf{r}(D)$ *и* $T = \mathbf{R}(G)$ *заданы параметризациями* $\mathbf{r}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *и* $\mathbf{R}\colon W \to \mathbb{R}^3$, *где* D *и* G *— лежащие вместе со своими* *замыканиями в Ω и W соответственно ограниченные области с кусочно-гладкими границами. Пусть для некоторого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^3$ выполнено*

$$S \cap T = S \cap U = U \cap T. \tag{60.29}$$

Тогда для любой ограниченной борелевской функции $f\colon S \cup T \to \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_S 1_T f\, d\sigma = \int_T 1_S f\, d\sigma, \tag{60.30}$$

где интеграл в левой части вычисляется с помощью параметризации $\mathbf{r}$, а интеграл в правой части вычисляется с помощью параметризации $\mathbf{R}$.

Доказательство. Значения обоих интегралов не зависят от значений f вне $S \cap T$, поэтому можно считать, что $f = 0$ вне этого множества.

Рассмотрим последовательность открытых множеств $U_n := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \rho(x, \partial S \cup \partial T > \frac{1}{n})\}$. Определим $f_n := 1_{U_n} \cdot f$. Ясно, что $f_n \to f$ поточечно при $n \to \infty$. В силу (60.30) и теоремы 38 достаточно доказать (60.30) для $f = f_n$.

В силу непрерывности $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ множества $\Omega := \mathbf{r}^{-1}(U)$ и $W := \mathbf{R}^{-1}(U)$ открыты, причём $\mathbf{r}(\Omega) = \mathbf{R}(W)$. По теореме 43 существует диффеоморфизм $\varphi\colon \Omega \to W$ такой, что $\mathbf{R} = \mathbf{r} \circ \varphi$. Тогда по теореме 37

$$\int_S 1_T f_n\, d\sigma = \int_T 1_S f_n\, d\sigma. \tag{60.31}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ с помощью теоремы 38, получаем (60.30). ▲

Из доказанной теоремы следует, что значение поверхностного интеграла не зависит от выбора параметризации.

60.4 Ориентация простой гладкой поверхности и её края

Определение 33. *Простая гладкая поверхность S называется* ориентированной*, если задано непрерывное отображение $\mathbf{n} \to \mathbb{R}^3$ такое, что для каждой точки $\mathbf{x} \in S$ вектор $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ является единичной нормалью к S в точке $\mathbf{x}$.*

Заметим, что любая параметризация поверхности задаёт ориентацию этой поверхности полем нормалей $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ вида (60.9), где для каждой точки $\mathbf{x}$ выбран знак "$+$". То, что полученное поле нормалей действительно является непрерывным отображением точек поверхности, [проверяется так же, как для кривых](SD4kcCSyY-GWy019vlVQ).

Если, кроме того, задана ориентация границы области D, то параметризация $\mathbf{r}$ будет также задавать ориентацию края S. Действительно, пусть параметризация $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$, задаёт ориентацию куска границы области параметризации. Тогда композиция $\mathbf{r} \circ \gamma$ будет параметризацией куска края поверхности. Таким образом, ∂S становится ориентированной кусочно-гладкой кривой.

При этом если граница области D ориентирована положительно, а ориентация поверхности S и её края заданы параметризацией поверхности, то говорят, что *ориентация края S согласована с ориентацией S.*

60.5 Поверхностные интегралы 2 рода

Пусть $(S, \mathbf{n})$ — ориентированная поверхность (то есть ориентация S задана непрерывным полем единичных нормалей $\mathbf{n}\colon S \to \mathbb{R}^3$). Пусть на S задано ограниченное борелевское векторное поле $\mathbf{v}\colon S \to \mathbb{R}$. Тогда *потоком* $\mathbf{v}$ *через* $(S, \mathbf{n})$ называется

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\,\boldsymbol{\sigma} := \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma. \tag{60.32}$$

Допустим, что S элементарна относительно оси Oz и задана параметризацией вида $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, где $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Пусть ориентация S задана полем нормалей

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{60.33}$$

Если $\mathbf{v} = (0, 0, R)$ (то есть поле $\mathbf{v}$ параллельно оси Oz), то по определению поверхностного интеграла 1 рода

$$\int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_D (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\, dx\, dy = \iint_D R\, dx\, dy. \tag{60.34}$$

В силу линейности поверхностного интеграла 1 рода в общем случае, если S элементарна относительно всех трёх осей одновременно и $\mathbf{v} = (P, Q, R)$ получаем

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\,\boldsymbol{\sigma} = \iint_D P\, dx\, dy + \iint_E Q\, dy\, dz + \iint_G R\, dz\, dz, \tag{60.35}$$

где E и G — проекции S на плоскости Oyz и Ozx соответственно. В силу этого наблюдения поток векторного поля $\mathbf{v}$ через ориентированную поверхность $(S, \mathbf{n})$ на практике часто обозначается символом

$$\iint_S P\, dx\, dy + Q\, dy\, dz + R\, dz\, dx := \int_S \mathbf{v} \ \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{60.36}$$

причём даже когда S не является элементарной относительно какой-либо из осей.

60.6 Кусочно-гладкие поверхности

Определение 34. *Пусть даны набор простых гладких кривых* $\{\gamma_k\}_{k=1}^m$ *и набор простых кусочно-гладких поверхностей* $\{S_i\}_{i=1}^n$ *такие, что*

1. $S_i \cap S_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$,
2. *кривые* $\{\gamma_k\}$ *не имеют общих точек, кроме, возможно, концов;*
3. *для каждого* i *край* ∂S_i *является объединением некоторых из* $\{\gamma_k\}$;
4. *каждая из кривых* $\{\gamma_k\}$ *является частью края одной из поверхностей* $\{S_i\}$, *причём одна и та же кривая* γ_k *принадлежит не более чем двум различным поверхностям (в последнем случае она называется* смежным ребром *соответствующих поверхностей). Обозначим через* P *объединение всех смежных рёбер.*

В этом случае говорят, что кусочно-гладкая поверхность $S = \bigcup_i S_i \cup \bigcup_{\gamma \in P} \gamma$ разбита на простые гладкие поверхности $\{S_i\}$. *(Последние называют* кусками поверхности S.*)*

Совокупность кривых $\{\gamma_k\}$, *не являющихся смежными рёбрами, называется* краем S. *Объединение этих кривых обозначается символом* ∂S.

Теорема 40 (о независимости поверхностного интеграла от выбора разбиения)**.** *Пусть кусочно-гладкая поверхность S двумя способами разбита на простые гладкие поверхности: $\{S_i\}_{i=1}^n$ и $\{T_j\}_{j=1}^m$. Тогда для любой ограниченной борелевской функции $f\colon S \to \mathbb{R}$ выполнено*

$$\sum_i \int_{S_i} f\,d\sigma = \sum_j \int_{T_j} f\,d\sigma \tag{60.37}$$

Доказательство. В силу теоремы 36 не уменьшая общности можно считать, что $f = 0$ на $\bigcup_i \partial S_i \cup \bigcup_j \partial T_j$. Тогда

$$f = \sum_i \mathbb{1}_{S_i} f = \sum_j \mathbb{1}_{T_j} f \tag{60.38}$$

Для любых $i \in \overline{1,n}$ и $j \in \overline{1,m}$ рассмотрим открытое множество $U = U_{ij} := \mathbb{R}^3 \setminus (\bigcup_{k\neq i} \overline{S_k} \cup \bigcup_{k\neq j} \overline{T}_k)$. Тогда $S_i \cap T_j = U \cap T_j = S_i \cap U$. Значит по теореме 39

$$\int_{S_i} \mathbb{1}_{T_j} f\,d\sigma = \int_{T_j} \mathbb{1}_{S_i} f\,d\sigma. \tag{60.39}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_i \int_{S_i} f\,d\sigma &= \sum_i \int_{S_i} \sum_j \mathbb{1}_{T_j} f\,d\sigma = \sum_i \sum_j \int_{S_i} \mathbb{1}_{T_j} f\,d\sigma \\ &= \sum_j \sum_i \int_{T_j} \mathbb{1}_{S_i} f\,d\sigma = \sum_j \int_{T_j} \sum_i \mathbb{1}_{S_i} f\,d\sigma = \sum_j \int_{T_j} f\,d\sigma,\end{aligned} \tag{60.40}$$

что и требовалось доказать. ▲

60.7 Ориентация края кусочно-гладкой поверхности

Допустим, что кусочно-гладкая поверхность S разбита на простые гладкие куски S_i, ориентация каждого из которых задана векторным полем $\boldsymbol{\nu}_i$. При этом для каждого i каждую из кривых γ_k, составляющих край S_i, можно единственным способом ориентировать так, чтобы полученная ориентация ∂S_i была согласована с ориентацией S_i. Такую ориентацию γ_k будем называть *ориентацией, индуцированной ориентацией поверхности S_i*.

Если при этом на каждом смежном ребре γ_k кусков S_i и S_j их ориентации индуцируют противоположные ориентации γ_k, то говорят, что векторное поле

$$\boldsymbol{\nu}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\nu}_1, & x \in S_1, \\ \boldsymbol{\nu}_2, & x \in S_2, \\ \dots \\ \boldsymbol{\nu}_n, & x \in S_n \end{cases} \tag{60.41}$$

задаёт ориентацию кусочно-гладкой поверхности S. Сама поверхность S при этом называется *ориентируемой.*

Важно отметить, что не все кусочно-гладкие поверхности являются ориентируемыми. Например, лист Мёбиуса, который можно составить из двух ПГП, не является ориентируемой поверхностью.

Если задана ориентация кусочно-гладкой поверхности S, то ориентации краёв S_i, согласованные с ориентациями S_i, однозначным образом задают ориентации кривых γ_k, не являющихся смежными рёбрами различных кусков S. Определённая таким образом ориентация ∂S называется *ориентацией, согласованной с ориентацией S.*

Глава 61

Формула Стокса

Зафиксируем правую прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ в $\mathbb{R}^3$.

61.1 Градиент, дивергенция, ротор

Напомним, что градиентом дифференцируемого скалярного поля $\varphi = \varphi(x, y, z)$ называется векторное поле

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}. \tag{61.1}$$

Если ввести символический вектор (называемый "набла")

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \tag{61.2}$$

то с точки зрения линейной алгебры $\nabla\varphi$ можно интерпретировать как произведение вектора ∇ на скаляр φ. При этом с точки зрения анализа ∇ является *оператором*, так как он ставит одно отображение в соответствие другому, подобно оператору дифференцирования (которые ставит функции f в соответствие функцию f').

Более подробно прочитать про правила работы с оператором "набла"можно, например, в методичке Л.И. Коваленко.

Дивергенцией дифференцируемого векторного поля

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{61.3}$$

называется скалярное поле

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = P_x + Q_y + R_z = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \tag{61.4}$$

С точки зрения линейной алгебры $\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}$, то есть $\operatorname{div}\mathbf{v}$ является скалярным произведением ∇ и $\mathbf{v}$.

Оператор $\Delta := \nabla\cdot\nabla$ называется *оператором Лапласа*. $\Delta\varphi$ отображает φ в $\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}$.

Наконец, ротором векторного поля $\mathbf{v}$ называется

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} := \nabla\times\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} R_y - Q_z \\ P_z - R_x \\ Q_x - P_y \end{bmatrix}. \tag{61.5}$$

В координатах ротор векторного поля $\mathbf{v}$ можно записать с использованием соглашения Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам и символа Леви-Чивиты ε_{ijk}:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j v_k. \tag{61.6}$$

Основная техника работы с этим символом изложена, например, в методичке Г.Е. Иванова и С.Л. Огаркова.

Отметим, что дивергенция является следом матрицы Якоби отображения $\mathbf{v}$. Если же рассмотреть антисимметричную часть матрицы Якоби этого отображения,

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}(D\mathbf{v} - (D\mathbf{v})^T) &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & P_y - Q_x & P_z - R_x \\ Q_x - P_y & 0 & Q_z - R_y \\ R_z - R_y & R_y - Q_z & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{61.7}$$

то можно заметить, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\Phi^{-1}(A), \tag{61.8}$$

где

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \tag{61.9}$$

Заметим, что данное отображение Φ является изоморфизмом между $\mathbb{R}^3$ и пространством кососимметрических матриц размера 3×3.

61.2 Основные свойства операторов $\nabla, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$.

Для операторов $\nabla, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ выполняются соотношения, вытекающие из правила Лейбница:

Утверждение 44. *Если скалярные поля $\varphi, \psi \colon U \to \mathbb{R}$ дифференцируемы, то*

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi. \tag{61.10}$$

Если, кроме того, векторные поля $\mathbf{a}, \mathbf{b} \colon U \to \mathbb{R}^3$ дифференцируемы, то

$$\begin{gathered} \operatorname{div}(\varphi\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\nabla\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{b}, \\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{b}) = (\nabla\varphi)\times\mathbf{b} + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{b}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}, \\ \operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}. \end{gathered} \tag{61.11}$$

Доказательство. Доказательства этих свойств можно прочитать, например, в методичке Л.И. Коваленко. ▲

Утверждение 45. *Если скалярное поле $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируемо (где $U \subset \mathbb{R}^3$ открыто), то*

$$\operatorname{rot}\nabla\varphi = 0. \tag{61.12}$$

Доказательство. По теореме о равенстве о равенстве смешанных частных производных дважды дифференцируемой функции для любых $i, j \in \overline{1,3}$ имеем $\partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi$. Тогда

$$\operatorname{rot}\nabla\varphi = \begin{bmatrix} (\varphi_z)_y - (\varphi_y)_z \\ (\varphi_x)_z - (\varphi_z)_x \\ (\varphi_y)_x - (\varphi_x)_y \end{bmatrix} = 0. \tag{61.13}$$

▲

Утверждение 46. *Если векторное поле* $\mathbf{v}\colon U \to \mathbb{R}^3$ *дважды дифференцируемо, то*

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0. \tag{61.14}$$

Доказательство. По теореме о равенстве о равенстве смешанных частных производных дважды дифференцируемой функции имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} &= (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z \\ &= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0.\end{aligned} \tag{61.15}$$

▲

61.3 Формула Стокса

Теорема 41. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^3$ *- кусочно-гладкая поверхность, ориентиция которой согласована с ориентацией края. Пусть векторное поле* $\mathbf{A}\colon U \to \mathbb{R}^3$ *непрерывно-дифференцируемо в открытом множестве* U *и* $S \subset U$*. Тогда*

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S}\mathbf{A}\cdot d\ell \tag{61.16}$$

Доказательство. Ограничимся случаем, когда S является простой кусочно-гладкой поверхностью, заданной параметризацией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, где $(u,v) \in D$, а D - ограниченная область с кусочно-гладкой границей.

Также сделаем дополнительное предположение, что $\mathbf{A}$ дважды непрерывно дифференцируемо. (В общем случае необходимо проводить сглаживание $\mathbf{A}$.)

В силу линейности формулы относительно $\mathbf{A}$ достаточно предположить, что лишь первая компонента $\mathbf{A}$ отлична от нуля, то есть $\mathbf{A} = (A, 0, 0)$, где $A = A(x,y,z)$. Тогда

$$I := \int_{\partial S}\mathbf{A}\,d\ell = \int_{\partial D} A(x_u\,du + x_v\,dv). \tag{61.17}$$

Проинтегрировав по частям получим

$$I = -\int_{\partial D} A_u x\,du + A_v x\,dv \tag{61.18}$$

Теперь подынтегральное выражение непрерывно дифференцируемо и мы можем применить формулу Грина

$$I = \iint_D ((A_u x)_v - (A_v x)_u)\,du\,dv = \iint_D (A_u x_v - A_v x_u)\,du\,dv. \tag{61.19}$$

Так как $A_u = A_x x_u + A_y y_u + A_z z_u$ и $A_v = A_x x_v + A_y y_v + A_z z_v$, то

$$A_u x_v - A_v x_u = A_y(y_u x_v - y_v x_u) + A_z(z_u x_v - z_v x_u). \tag{61.20}$$

Так как

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_z \\ -A_y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} y_u z_v - y_v z_u \\ x_v z_u - x_u z_v \\ x_u y_v - x_v y_u \end{bmatrix}, \tag{61.21}$$

то мы приходим к тому, что

$$I = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]\,du\,dv = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\,d\mathbf{S}, \tag{61.22}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что в общем случае ориентированной кусочно-гладкой поверхности можно применить доказанное утверждение для каждого её куска и заметить, что криволинейные интегралы по смежным рёбрам, соответствующие разным кускам, сократятся, так как эти куски индуцируют противоположные ориентации таких рёбер. ▲

Из формулы Стокса и теоремы о среднем сразу вытекает следующее утверждение:

Следствие 10 (геометрическое определение ротора)**.** *Пусть векторное поле* $\mathbf{A}$ *непрерывно дифференцируемо в окрестности точки* $x \in \mathbb{R}^d$. *Тогда для любого единичного вектора* $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \tag{61.23}$$

где интеграл в правой части берётся по окружности γ_r *радиуса* r, *лежащей в плоскости* α *с нормалью* $\boldsymbol{\nu}$, *причём ориентация* γ_r *предполагается согласованной с ориентацией ограниченного ей круга, лежащего в плоскости* α *и ориентированного вектором* $\boldsymbol{\nu}$.

61.4 Потенциальные и безвихревые векторные поля

Определение 35. *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^d$ *- ограниченная область. Векторное поле* $\mathbf{A} \colon G \to \mathbb{R}^d$ *называется* потенциальным*, если существует непрерывно-дифференцируемая функция* $\varphi \colon G \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\mathbf{A}(x) = \nabla \varphi(x) \tag{61.24}$$

для всех $x \in G$.

Утверждение 47 (критерий потенциальности векторного поля)**.** *Пусть векторное поле* $\mathbf{A}$ *непрерывно в ограниченной области* $G \subset \mathbb{R}^3$. *Следующие 3 условия эквивалентны:*

1. $\mathbf{A}$ *потенциально*

2. $\forall x, y \in G$ *для любой кусочно-гладкой кривой* $\Gamma \subset G$*, соединяющей* x *с* y*, работа* $\int_\Gamma \mathbf{A}\, d\ell$ *не зависит от выбора* Γ

3. циркуляция поля $\mathbf{A}$ *по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой* $\Gamma \subset G$ *равна нулю.*

4. циркуляция поля $\mathbf{A}$ *по любой замкнутой ломаной* $\Gamma \subset G$ *равна нулю.*

Доказательство. Доказательство удобно проводить по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

Наименее тривиальным является то, что четвёртое условие влечёт первое. Из четвёртого условия сразу следует, что работа поля $\mathbf{A}$ по ломаной, соединяющей точки x и $\mathbf{y}$, не зависит от выбора такой ломаной. Тогда мы можем определить функцию

$$\varphi(x) := \int_z^x \mathbf{A}\, d\mathbf{r}, \tag{61.25}$$

где интегрирование ведётся по произвольной ломаной, соединяющей некоторую фиксированную точку z с точкой x.

Зафиксируем $x \in G$ и найдём дифференциал φ в точке x. Так как G открыто, то для всех y из некоторой окрестности x отрезок γ_{xy}, соединяющий x с y, лежит в G. Тогда в силу независимости работы от выбора ломаной

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \int_{\gamma_{xy}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \tag{61.26}$$

где γ_{xy} задана параметризацией $\mathbf{r}(t) = ty + (1-t)x$. В силу непрерывности $\mathbf{A}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|y - x| < \delta$ для всех $t \in [0, 1]$ имеем $|\mathbf{A}(ty + (1 -$

$t)x) - \mathbf{A}(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$\int_{\gamma_{xy}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}(ty + (1-t)x) \cdot (y - x)\, dt = \mathbf{A}(x) \cdot (y - x) + o(|y - x|). \qquad (61.27)$$

при $y \to x$. Значит по определению дифференцируемости $\nabla\varphi(x) = \mathbf{A}(x)$. ▲

Определение 36. *Кусочно-гладкая поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ называется* замкнутой*, если существуют ограниченная область D и неограниченная область G такие, что $\mathbb{R}^3 \setminus S = D \sqcup G$ и D ограничена. При этом говорят, что S ограничивает область D.*

Определение 37. *Если для любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset G$ существует кусочно-гладкая поверхность S такая, что $\overline{S} \subset G$ и Γ является краем S (ориентация которого согласована с ориентицией S), то область G называется* поверхностно-односвязной*.*

Теорема 42. *Для потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{A}$ в области необходимо, а в случае поверхностно-односвязной области и достаточно, чтобы* $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную замкнутую ломаную, лежащую в рассматриваемой области G. Эта ломаная может не быть простой (возможны самопересечения), но циркуляция поля $\mathbf{A}$ по ней будет равна конечной сумме циркуляций по простым замкнутым ломаным Γ_j.

В силу поверхностной односвязности каждая из этих ломаных является краем некоторой кусочно-гладкой поверхности S_j, лежащей вместе со своим замыканием в G. Зададим на S_j ориентацию, согласованную с ориентацией Γ_j.

По формуле Стокса для S_j циркуляция $\mathbf{A}$ по Γ_j равна нулю для всех j. Значит по утверждению 47 векторное поле $\mathbf{A}$ потенциально в G. ▲

Глава 64

Разные виды сходимости

64.1 Сходимость почти всюду и по мере

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ измеримо по Лебегу.

Напомним, что последовательность функций $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ сходится п.в. на X тогда и только тогда, когда существует $M \subset X$ меры нуль такое, что f_n сходится поточечно на множестве $X \setminus M$. При этом для $x \in M$ последовательность $\{f_n(x)\}$ может как сходиться, так и расходиться.

Определение 38. *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ измерима. Пусть также $f \colon X \to \mathbb{R}$ измерима. Если для каждого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0, \tag{64.1}$$

то говорят, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f по мере Лебега на множестве X при $n \to \infty$. *Обозначение: $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ на X при $n \to \infty$.*

Равенство (64.1) можно интерпретировать следующим образом: мера множества всех точек x, в которых значение f_n отклоняется от значения f более чем на ε, стремится к нулю при $n \to \infty$. (В силу измеримости функций f_n и f множество $\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ измеримо.)

Несложно проверить, что $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0. \tag{64.2}$$

Приведём пример сходящейся по мере последовательности. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности неотрицательных чисел. Если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то $f_n := b_n \mathbf{1}_{[0,a_n]} \xrightarrow{\lambda} 0$ при $n \to \infty$ (даже если $b_n \to \infty$ при $n \to \infty$).

Если функциональная последовательность сходится по мере, то единственность предела имеется лишь почти всюду.

Утверждение 48 (единственность предела сходящейся по мере последовательности)**.** *Если $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ и $f_n \xrightarrow{\lambda} g$ при $n \to \infty$, то $f = g$ почти всюду.*

Доказательство. Из неравенства $|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\{|f - g| > \varepsilon\} \subset \{|f - f_n| > \varepsilon/2\} \cup \{|f_n - g| > \varepsilon/2\} \tag{64.3}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу субаддитивности меры Лебега

$$\lambda(\{|f - g| > \varepsilon\}) \leq \lambda(\{|f - f_n| > \varepsilon/2\}) + \lambda(\{|f_n - g| > \varepsilon/2\}). \tag{64.4}$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, получаем $\lambda(\{|f-g| > \varepsilon\}) = 0$. Так как

$$\{|f-g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f-g| > 1/k\}, \tag{64.5}$$

то в силу счётной субаддитивности меры Лебега $\lambda(\{|f-g| > 0\}) = 0$. Значит $f = g$ почти всюду. ▲

В общем случае сходимость по мере не следует из сходимости почти всюду. Например, для $X = \mathbb{R}$ функциональная последовательность $f_n = \mathbf{1}_{[n,+\infty)}$ сходится к нулю поточечно, но не сходится к нулю по мере. Однако в случае, когда мера множества X конечна, сходимость почти всюду влечёт сходимость по мере:

Теорема 43 (Лебег)**.** *Если $\lambda(X) < +\infty$ и $f_n \to f$ почти всюду на X при $n \to \infty$, то $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\lambda(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = \int_X \mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \, d\lambda. \tag{64.6}$$

Так как $f_n \to f$ почти всюду, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \to 0 \tag{64.7}$$

почти всюду. Так как $\mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \leq \mathbf{1}_X$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\int_X \mathbf{1}_X \, d\lambda = \lambda(X) < +\infty$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \mathbf{1}_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} \, d\lambda = 0. \tag{64.8}$$

В силу (64.6) отсюда следует, что $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ при $n \to \infty$. ▲

Обратное в общем случае неверно, даже когда мера множества X конечна. Приведём соответствующий контрпример, известный как *примера Рисса.*

Утверждение 49 (пример Рисса)**.** *Последовательность $\{f_n\}$ индикаторов промежутков*

$$\begin{array}{llll} [0,1), & & & \\ [0,\frac{1}{2}), & & [\frac{1}{2},1), & \\ [0,\frac{1}{4}), & [\frac{1}{4},\frac{2}{4}), & [\frac{2}{4},\frac{3}{4}), & [\frac{3}{4},1), \\ \ldots & & & \end{array} \tag{64.9}$$

сходится по мере, но не сходится почти всюду.

Доказательство. Так как длины рассматриваемых промежутков стремятся к нулю, то $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ при $n \to \infty$. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к некоторой функции f почти всюду. Тогда по теореме 43 имеем $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ при $n \to \infty$. С другой стороны, мы уже проверили, $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ при $n \to \infty$. Тогда из утверждения 48 следует, что $f = 0$ почти всюду.

Следовательно, для почти всех $x \in [0,1)$ должна иметь место сходимость $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Однако для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $[0,1)$ является объединением промежутков вида $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n})$, где $k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n$, Следовательно, для любых $x \in [0,1)$ и $N \in \mathbb{N}$ найдётся натуральное $k > N$ такое, что $f_k(x) = 1$. Значит для любого $x \in [0,1)$ имеем $f_n(x) \not\to 0$ при $n \to \infty$. ▲

Несмотря на то, что сходимость по мере не влечёт сходимость почти всюду, оказывается, что в случае сходимости по мере можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Вначале докажем одну лемму.

Лемма 18 (первая лемма Бореля-Кантелли). *Пусть $E_k \subset X$ измеримо при каждом $k \in \mathbb{N}$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) < +\infty$, то почти все $x \in X$ принадлежит не более чем конечному числу множеств E_k.*

Доказательство. Пусть A — множество. Обозначим

$$\#A := \begin{cases} n, & A \text{ состоит из } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ элементов} \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{64.10}$$

Рассмотрим функцию $f := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_k}$. Ясно, что для каждого $x \in X$ выполнено

$$f(x) = \#\{k \in \mathbb{N} : x \in E_k\}, \tag{64.11}$$

то есть $f(x)$ равно количеству множеств E_k, которым принадлежит x (при этом возможно $f(x) = +\infty$).

По теореме Леви

$$\int_X f(x)\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{E_k}\,d\lambda < +\infty.$$

Отсюда следует, что $f(x) < +\infty$ для п.в. $x \in X$. ▲

Теорема 44 (Рисс). *Если последовательность измеримых функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) сходится к измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по мере, то найдётся строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ такая, что $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к f почти всюду.*

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$A_n^k := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

По определению сходимости по мере при каждом $k \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda(A_n^k) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $n_k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\lambda(A_{n_k}^k) < 2^{-k},$$

причём последовательность $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ можно выбрать таким образом, что $n_k < n_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $E_k := A_{n_k}^k$.

По определению множеств E_k выполнено $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$, значит по лемме 18 существует множество меры нуль $M \subset X$ такое, что для любого $x \in X \backslash M$ точка x принадлежит не более чем конечному числу множеств $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Значит существует $K = K(x)$ такое, что для всех $k > K(x)$ выполнено $x \notin E_k$, то есть

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}. \tag{64.12}$$

Таким образом, для любого $x \in X \setminus M$ выполнено $f_{n_k}(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$. ▲

Усилим теорему Лебега:

Утверждение 50 (усиленная теорема Лебега). *Если $\lambda(X) < +\infty$ и $f_n \to f$ почти всюду на X при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(R_n(\varepsilon)) = 0, \tag{64.13}$$

где

$$R_n(\varepsilon) := \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|f - f_m| > \varepsilon\}. \tag{64.14}$$

Доказательство. По определению сходимости почти всюду существует множество меры нуль $M \subset X$ такое, что для всех $x \in X \setminus M$ выполнено $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению множеств $R_n(\varepsilon)$ имеем

$$X \supset R_1(\varepsilon) \supset R_2(\varepsilon) \supset R_3(\varepsilon) \supset \dots \tag{64.15}$$

Так как $\lambda(X) < +\infty$, то в силу непрерывности меры Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(R_n(\varepsilon)) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)\right). \tag{64.16}$$

Если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \geq n$ такое, что $|f(x) - f_m(x)| > \varepsilon$. Значит $f_n(x) \not\to f(x)$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $x \notin X \setminus M$. Таким образом,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon) \subset M, \tag{64.17}$$

откуда ясно, что $\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon)) = 0$. ▲

Теорема 45 (Егоров)**.** *Пусть $\lambda(X) < +\infty$. Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ задана измеримая функция $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится почти всюду к функции $f\colon X \to \mathbb{R}$, то для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $M \subset X$ такое, что $\lambda(M) < \delta$ и последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится* равномерно *на $X \setminus M$.*

Доказательство. Возьмём $\varepsilon_k := 1/k$.

По усиленной теореме Лебега для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lambda(R_n(\varepsilon_k)) \to 0 \tag{64.18}$$

при $n \to \infty$. Значит существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ такая, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda(R_{n_k}(\varepsilon_k)) < 2^{-k}\delta. \tag{64.19}$$

В силу счётной субаддитивности меры Лебега множество

$$M := \bigcup_{k=1}^{\infty} R_{n_k}(\varepsilon_k) \tag{64.20}$$

имеет меру

$$\lambda(M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_{n_k}(\varepsilon_k)) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta = \delta. \tag{64.21}$$

Для любого $x \in X \setminus M$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x \notin R_{n_k}(\varepsilon_k)$. Значит для каждого $k \in \mathbb{N}$ для любого $x \in X \setminus M$ для всех $m \geq n_k$ выполнено

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_k. \tag{64.22}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмём k так, что $\varepsilon_k < \varepsilon$. Тогда для любого $x \in X \setminus M$ при $m \geq n_k$ выполнено

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon_k < \varepsilon. \tag{64.23}$$

Так как n_k не зависит от x, то это и означает, что $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на $X \setminus M$.
▲

64.2 Пространства L^p

Напомним, что для любого измеримого $X \subset \mathbb{R}^d$ под $L^1(X)$ понимается множество всех интегрируемых по Лебегу функций $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. В силу аддитивности интеграла Лебега измеримая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда $\int_X |f|\,d\lambda < +\infty$.

Далее вместо $+\infty$ для краткости будем писать ∞.

Определение 39. *Пусть $p \in [1,\infty]$. Пусть функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима. Тогда величина*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}, & p \in [1,+\infty), \\ \inf\limits_{\substack{N\subset X\\ \lambda(N)=0}} \sup\limits_{x\in X\setminus N} |f(x)|, & p=\infty \end{cases} \tag{64.24}$$

называется L^p-нормой *функции f.*

Если f измерима и $\|f\|_p < \infty$, то говорят, что $f \in L^p(X)$.

Строго говоря, $\|\cdot\|_p$ не является нормой, так как из $\|f\|_p = 0$ следует лишь то, что $f = 0$ почти всюду. Однако далее мы проверим, что остальные аксиомы нормы (положительная однородность и неравенство треугольника) выполнены. Значит $\|\cdot\|_p$ является *полунормой.* Несмотря на это, принято называть $\|\cdot\|_p$ нормой. Это может быть оправдано тем, что $\|\cdot\|_p$ является (настоящей) нормой на множестве $\mathbb{L}^p(X)$, состоящем из всех классов эквивалентности множества $L^p(X)$ по отношению

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ п.в.} \tag{64.25}$$

(Несложно проверить, что данное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, и если $f \sim g$ то $\|f\|_p = \|g\|_p$.)

Положительная однородность $\|\cdot\|_p$ следует непосредственно из определения. Однако проверка того, что $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет неравенству треугольника, нетривиальна (при $p \in (1,+\infty)$). Установим сначала несколько вспомогательных результатов.

Утверждение 51 (неравенство Юнга)**.** *Пусть $a,b \in [0,+\infty)$, $p \in (1,\infty)$ и $q = p/(p-1)$. Тогда*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Доказательство. Заметим, что при фиксированном $b \ge 0$ функция $f\colon a \mapsto ab - a^p p^{-1}$ достигает наибольшее значение в точке x, удовлетворяющей равенству $b - x^{p-1} = 0$. Поэтому при любом $a \ge 0$ выполнено $f(a) \le f(x) = b^q - b^q p^{-1} = b^q q^{-1}$. ▲

Заметим, что для любых чисел $p,q \in (1,\infty)$ равенства $q = p/(p-1)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $p = q/(q-1)$ равносильны.

Обобщим неравенство Коши-Буняковского:

Теорема 46 (неравенство Гёльдера)**.** *Пусть $p \in (1,\infty)$, $q = p/(p-1)$, $f \in L^p(X)$ и $g \in L^q(X)$. Тогда $fg \in L^1(X)$, причём*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Доказательство. В силу утверждения про операции с измеримыми функциями функция fg измерима. Несложно проверить, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$. Так как искомое неравенство достаточно доказать для функций $f/\|f\|_p$ и $g/\|g\|_q$ вместо функций f и g, то не уменьшая общности можно считать, что $\|f\|_p = \|f\|_q = 1$. В этом случае в силу неравенства Юнга для любого $x \in X$ имеем

$$|f(x)g(x)| \le \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}.$$

Интегрируя данное неравенство получаем $\|fg\|_1 \le 1$, что и требовалось доказать. ▲

Теорема 47 (неравенство Минковского)**.** *Если $p \in [1, \infty]$ и $f, g \in L^p(X)$, то $f + g \in L^p(X)$ и*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. При $p = 1$ или $p = \infty$ доказываемое утверждение непосредственно следует из неравенства треугольника $|f + g| \le |f| + |g|$. Пусть $p \in (1, +\infty)$.

В силу выпуклости функции $|\cdot|^p$ для любого $x \in X$ выполнено

$$|f(x) + g(x)|^p = 2^p|2^{-1}f(x) + 2^{-1}g(x)|^p \le 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p),$$

поэтому $f + g \in L^p(X)$.

Для любого $x \in X$ выполнено

$$|f + g|^p \le |f + g|^{p-1}|f| + |f + g|^{p-1}|g|.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned}\int_X |f + g|^{p-1}|f|\, d\lambda \le \left(\int_X |f|^p\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{q(p-1)}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} \\ = \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q}.\end{aligned}$$

и, аналогично, $\int_X |f + g|^{p-1}|g|\, d\lambda \le \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q}$. Тогда

$$\|f + g\|_p^p = \int_X |f + g|^p\, d\lambda \le \|f + g\|_p^{p/q}(\|f\|_p + \|g\|_p),$$

откуда следует искомое неравенство, так как $p - (p/q) = 1$. ▲

64.3 Сходимость в среднем и среднем квадратичном

Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^d$ заданы измеримые функции f и f_n ($n \in \mathbb{N}$).

Ещё одним важным видом сходимости является сходимость в среднем. Если $\|f_n - f\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что f_n сходится к f в $L^p(X)$ при $n \to \infty$. При $p = 1$ такая сходимость называется *сходимостью в среднем*, а при $p = 2$ — *сходимостью в среднем квадратичном*. Сходимость в $L^\infty(X)$ является равномерной сходимостью на дополнении множества нулевой меры.

Сходимость в среднем влечёт сходимость по мере:

Утверждение 52. *Если $f_n \to f$ в $L^1(X)$ при $n \to \infty$, то $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ на X при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу неравенства Чебышева

$$\lambda(\{|f_n - f| \ge \varepsilon\}) \le \frac{1}{\varepsilon}\|f_n - f\|_1 \to 0 \tag{64.26}$$

при $n \to \infty$. ▲ Обратное в общем случае неверно. Например, $n\mathbf{1}_{[0,1/n]} \to 0$ по мере при $n \to \infty$, но сходимости в среднем нет.

Определение 40. *Пусть* $f_n \in L^p(X)$ *при каждом* $n \in \mathbb{N}$. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для любых* $m, n \geq N(\varepsilon)$ *выполнено*

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon,$$

то говорят, что последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в $L^p(X)$.

Легко видеть, что если функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем, то она фундаментальна. Действительно, пусть $f_n \to f$ в $L^1(X)$. Тогда $\|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\|$. В силу сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что при $n \geq N$ выполнено $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$. Тогда для всех $m, n > N$ имеем $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, то есть $\{f_n\}$ фундаментальна. Верно и обратное:

Теорема 48 (о полноте L^1)**.** *Пусть* $f_n \in L^1(X)$ *при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\{f_n\}$ *фундаментальна по норме* $L^1(X)$. *Тогда существует* $f \in L^1(X)$ *такая, что* $\|f_n - f\|_1 \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Выберем натуральные числа $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ так, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $n_k > N(2^{-k})$ и $n_{k+1} > n_k$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < 2^{-k}. \tag{64.27}$$

Определим для любого $x \in X$

$$h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|. \tag{64.28}$$

По теореме Леви в силу (64.27) выполнено $h \in L^1(X)$. Тогда существует $M \subset X$ меры нуль такое, что для всех $x \in X \setminus M$ выполнено $h(x) < +\infty$. Значит в силу сходимости ряда (64.28) существует конечный предел

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, $|f_{n_k}(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + h(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу $k \to \infty$ в данном неравенстве, получим

$$|f(x)| \leq |f_{n_1}(x)| + h(x). \tag{64.29}$$

Следовательно, $f \in L^1(X)$.

Так как $f_{n_k} \to f$ почти всюду и для любого $k \in \mathbb{N}$

$$|f_{n_k} - f| \leq 2(|f_{n_1}(x)| + h(x)) \in L^1(X), \tag{64.30}$$

то по теореме Лебега об ограниченной сходимости $\|f_{n_k} - f\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда из фундаментальности $\{f_n\}$ следует, что вся последовательность $\{f_n\}$ сходится к f по норме L^1. ▲

Аналогичную теорему для пространств $L^p(X)$ при $p \in (1, +\infty]$ можно доказать с помощью небольшой модификации приведённых выше рассуждений.

64.4 Контрольные вопросы

Вопрос 64.1. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ измерима. Верно ли, что $f_n \to 0$ почти всюду тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ последовательность индикаторов $1_{\{|f_n|\geq\varepsilon\}}$ сходится к нулю почти всюду?

Вопрос 64.2. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима и $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ при $n \to \infty$. Верно ли, что для любой измеримой функции $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ последовательность $f_n \cdot g$ также сходится к нулю по мере при $n \to \infty$?

Вопрос 64.3. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима и $f_n \xrightarrow{\lambda} 0$ при $n \to \infty$. Верно ли, что для любого $\varepsilon > 0$ меры множеств $R_n(\varepsilon) = \bigcup_{m=n}^{\infty}\{|f_m| > \varepsilon\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$?

Вопрос 64.4. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ задана функция $f_n \in L^1[0,1]$ и $f_n \to 0$ в среднем при $n \to \infty$. Можно ли выделить из f_n подпоследовательность, сходящуюся к нулю почти всюду?

Вопрос 64.5. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ задана функция $f_n \in L^1[0,1]$, причём последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем при $n \to \infty$. Существуют ли функция $g \in L^1[0,1]$ и подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ такие, что $|f_{n_k}| \le g$ почти всюду для всех $k \in \mathbb{N}$?

Вопрос 64.6. Сходится ли последовательности $f_n(x) = \sin(nx)$ (где $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$) почти всюду?

Вопрос 64.7. Сходится ли последовательность $f_n(x) = \sin(nx)$ (где $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$) в среднем?

Вопрос 64.8. Сходится ли последовательность $f_n(x) = \sin(nx)$ (где $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$) по мере?

Вопрос 64.9. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима и $f_n \xrightarrow{\lambda} f$ при $n \to \infty$. Пусть $g \in L^1[0,1]$ и для каждого n выполнено $|f_n| \le g$ почти всюду. Верно ли, что тогда $\int_0^1 f_n\,dx \to \int_0^1 f\,dx$ при $n \to \infty$?

Вопрос 64.10. Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима и для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует $N > 0$ такое, что для всех $n, m \ge N$ выполнено

$$\lambda(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) < \delta. \tag{64.31}$$

Верно ли, что последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере?

Глава 65

Свёртка и приближения интегрируемых функций.

65.1 Свёртка и её свойства

Определение 41. *Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Если функция $t \mapsto f(t)g(x-t)$ интегрируема по Лебегу, то*

$$(f * g)(x) := \int f(t)g(x-t)\,dt \tag{65.1}$$

называется свёрткой f и g в точке x.

В силу инвариантности меры Лебега относительно сдвигов в интеграле можно сделать замену $z = x - t$ и тогда получим $(f*g)(x) = \int f(x-z)g(z)\,dz = (g*f)(x)$.

Утверждение 53. *Пусть $g \in L^1(\mathbb{R})$. Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то для п.в. $x \in \mathbb{R}$ существует $(f*g)(x) \in \mathbb{R}$, причём $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ и*

$$\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \tag{65.2}$$

Если $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует $(f*g)(x) \in \mathbb{R}$, причём $f*g \in L^\infty(\mathbb{R})$ и

$$\|f*g\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1. \tag{65.3}$$

Если $1 \le p < \infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$\|f*g\|_p \le \|f\|_p \cdot \|g\|_1. \tag{65.4}$$

Доказательство. Так как отображение $(t,x) \mapsto (t, x-t)$ является диффеоморфизмом, то функция $h(t,x) = g(x-t)$ измерима по Лебегу. По теореме Тонелли $\int\int |f(t)g(x-t)|\,dt\,dx = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < +\infty$, значит по теореме Фубини для почти всех x функция $t \mapsto f(t)g(x-t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{R})$.

Теперь рассмотрим случай, когда f ограничена. Сначала дополнительно предположим, что f имеет компактный носитель. Тогда $f \in L^1(\mathbb{R})$ и по доказанной части теоремы функция $f*g$ измерима. При этом

$$|(f*g)(x)| \le \int |f(t)||g(x-t)|\,dt \le \|f\|_\infty \int |g(x-t)|\,dt, \tag{65.5}$$

откуда следует искомая оценка.

В общем случае, когда носитель f не является компактом, рассмотрим функции $f_R(x) = \mathbf{1}_{[-R,R]}(x) \cdot f(x)$, где $R \in \mathbb{N}$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости $f_R * g \to f * g$

поточечно при $R \to \infty$. Кроме того, $\|f_R * g\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$ получаем искомую оценку.

Наконец, рассмотрим случай $1 < p < \infty$. Не уменьшая общности предположим, что f и g неотрицательны. Тогда запишем

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)\,dt \tag{65.6}$$

Так как $f(t)g(x-t) = f(t)(g(x-t))^{\frac{1}{p}}(g(x-t))^{\frac{1}{q}}$, где $q = \frac{p}{p-1}$, то в силу неравенства Гёльдера получаем

$$|(f * g)(x)| \le \left(\int |f(t)|^p g(x-t)\,dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int g(x-t)\,dt\right)^{1/q}. \tag{65.7}$$

Тогда

$$|(f * g)(x)|^p \le \int |f(t)|^p g(x-t)\,dt \cdot \|g\|_1^{p/q} \tag{65.8}$$

Следовательно по теореме Тонелли

$$\|f * g\|_p^p \le \|f\|_p^p \|g\|_1 \|g\|_1^{p/q}. \tag{65.9}$$

Возведя обе части в степень $1/p$ получим искомое неравенство. ▲

65.2 Приближения функций

Определение 42. *Под $C_c^\infty(\mathbb{R})$ будем понимать множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющих компактный носитель.*

(Напомним, что носителем функции f называется замыкание множества всех тех $x \in \mathbb{R}$, где $f(x) \ne 0$. Носитель f обозначается как $\operatorname{supp} f$.)

Мы уже сталкивались с понятием всюду плотного множества. Вспомним (и обобщим) соответствующие определения.

Определение 43. *Множество функций $F \subset L^p(\mathbb{R})^d$ называется* всюду плотным в $L^p(\mathbb{R}^d)$, *если для любой $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in F$ такая, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$.*

Если на векторном пространстве X задана (полу)норма $\|\cdot\|$, то множество $Y \subset X$ называется всюду плотным в X *если для любого $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in Y$ такое, что $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Если (X, ρ) — метрическое пространство, то множество $Y \subset X$ называется всюду плотным в X *если для любого $x \in X$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in Y$ такое, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.*

Утверждение 54. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Тогда множество всех ограниченных измеримых функций с компактным носителем всюду плотно в $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Для любого $R > 0$ определим

$$f_R := 1_{\{|f|<R\} \cap B_R(0)} \cdot f. \tag{65.10}$$

По построению $f_R \to f$ почти всюду при $R \to +\infty$. Кроме того, $|f_R| \le f$ почти всюду для всех $R > 0$. Тогда по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\|f_R - f\|_p \to 0 \tag{65.11}$$

при $R \to +\infty$.

Остаётся заметить, что для каждого $R > 0$ функция f_R ограничена и её носитель лежит в $\overline{B}_R(0)$. ▲

Пусть

$$\omega(t) := \begin{cases} c\exp(\frac{1}{t^2-1}), & t \in (-1,1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \tag{65.12}$$

где $c > 0$ выбрано так, что $\int \omega(t)\,dt = 1$. Определённая таким образом функция ω называется «шапочкой».

Утверждение 55. *Функция ω, определённая в (65.12), принадлежит $C_c^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость функции

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{65.13}$$

была установлена ранее. Тогда $\omega(t) = cg(1-t)g(1+t)$ также бесконечно дифференцируема. Наконец, $\operatorname{supp}\omega = [-1,1]$, очевидно, является компактом. ▲

Определим для любого $\varepsilon > 0$

$$\omega_\varepsilon(t) := \tfrac{1}{\varepsilon}\omega(\tfrac{t}{\varepsilon}) \tag{65.14}$$

и

$$(f)_\varepsilon := f * \omega_\varepsilon. \tag{65.15}$$

Функцию $(f)_\varepsilon$ (которую для краткости будем обозначать также как f_ε) будем называть *регуляризацией*, или *сглаживанием* функции f. Обоснаванием данного названия служит следующий результат.

Теорема 49 (о сглаживании)**.** *Пусть $p \in [1,+\infty]$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функция $f_\varepsilon := f * \omega_\varepsilon$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$*

$$\|f_\varepsilon\|_p \le \|f\|_p. \tag{65.16}$$

Кроме того, при $p < \infty$

$$f_\varepsilon \to f \tag{65.17}$$

почти всюду при $\varepsilon \to 0$ и

$$\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0 \tag{65.18}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)}{h} = \int f(t)\frac{\omega_\varepsilon(x-t+h) - \omega_\varepsilon(x-t)}{h}\,dt \to \int f(t)\omega_\varepsilon'(x-t)\,dt \tag{65.19}$$

при $h \to 0$ по теореме Лебега об ограниченной сходимости (применяя которую, мы пользуемся определением предела по Гейне). Значит f_ε всюду дифференцируема. Применяя те же рассуждения к $(f_\varepsilon)'$ и старшим производным функции f_ε по индукции получаем, что $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Неравенство (65.16) следует из утверждения 53. Таким образом, $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$.

Далее будем считать, что $p < \infty$.

По утверждению 54 для любого $\delta > 0$ существует ограниченная измеримая функция g с компактным носителем такая, что $\|f - g\| < \delta$. По теореме о точках Лебега для почти всех

$x \in \mathbb{R}$ имеем $(g)_\varepsilon(x) \to (g)(x)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда (в силу ограниченности g и компактности её носителя) по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\|g - g_\varepsilon\|_p \to 0 \tag{65.20}$$

при $\varepsilon \to 0$. Тогда при достаточно малых ε имеем

$$\|f - (g)_\varepsilon\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - g_\varepsilon\|_p < 2\delta. \tag{65.21}$$

В силу произвольности $\delta > 0$ заключаем, что $C_c^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L^p(\mathbb{R})$.

Более того, из неравенств (65.16) и

$$\|f - (f)_\varepsilon\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - (g)_\varepsilon\|_p + \|(g - f)_\varepsilon\|_p \tag{65.22}$$

следует, свойство (65.18). ▲

Следствие 11 (о приближении интегрируемой функции бесконечно дифференцируемой с компактным носителем)**.** *Пусть* $p \in [1, +\infty)$ *и* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *такая, что* $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Следующая теорема, установленная Лузиным, показывает, что, говоря неформально, всякая измеримая функция почти что непрерывна (примерно так выразился Литлвуд):

Теорема 50 (Лузин)**.** *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^d$ *измеримо и* $\lambda(E) < \infty$. *Функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *измерима тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует компакт* $K_\varepsilon \subset E$ *такой, что* $\lambda(E \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ *и* $f \in C(K_\varepsilon)$.

Доказательство. Достаточность. По условию для любого $n \in \mathbb{N}$ существует компакт K_n такой, что $f \in C(K_n)$ и $\lambda(E \setminus K_n) < 2^{-n}$. Определим

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \in K_n \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{65.23}$$

Так как K_n измеримо, то f_n измерима. Так как $\sum_{n=1}^\infty \lambda(E \setminus K_n) < \infty$, то по первой лемме Бореля-Кантелли $f_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$. Значит f измерима.

Необходимость. Для каждого $R > 0$ рассмотрим функцию

$$f_R := \mathbf{1}_{\{|f| < R\}} \cdot f. \tag{65.24}$$

По построению f_R измерима для каждого $R > 0$. В силу непрерывности меры Лебега $\lambda(N_R) \to 0$ при $R \to \infty$, где $N_R := \{f_R \ne f\}$

Пусть $\gamma > 0$. Выберем R так, чтобы $\lambda(N_R) < \gamma/3$.

По построению f_R ограничена и, следовательно, принадлежит $L^1(E)$ ввиду конечности меры множества E. Продолжив f_R нулём вне E получим функцию из $L^1(\mathbb{R}^d)$.

По теореме 49 имеем $(f_R)_{(1/k)} \to f_R$ почти всюду при $k \to \infty$. По теореме Егорова существует измеримое множество $M_\gamma \subset (E \setminus N_R)$ такое, что $(f_R)_{1/k} \rightrightarrows f_R$ на $E_\gamma := (E \setminus N_R) \setminus M_\gamma$ при $k \to \infty$ и $\lambda(M_\gamma) < \gamma/3$. Заметим, что $\lambda(E_\gamma) \ge \lambda(E) - \lambda(N_R) - \lambda(M_\gamma) > \lambda(E) - 2\gamma/3$ В силу внутренней регулярности меры Лебега существует компакт $K \subset E_\gamma$ такой, что $\lambda(K) > \lambda(E_\gamma) - \gamma/3 > \lambda(E) - \gamma$. По построению $(f_R)_{1/k} \rightrightarrows f_R$ на K, причём на K также имеем $f_R = f$. Тогда f непрерывна на K как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. ▲

65.3 Контрольные вопросы

Вопрос 65.1. Пусть $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ и $\varepsilon > 0$. Верно ли, что $(f)'_\varepsilon = (f')_\varepsilon$?

Вопрос 65.2. Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируемы по Лебегу. Верно ли, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ функция $h(t) = f(t)g(x-t)$ интегрируема по Лебегу?

Вопрос 65.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}$ открыто и ограничено. Верно ли, что $C^\infty(U)$ всюду плотно в $L^\infty(U)$?

Вопрос 65.4. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима. Верно ли, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ такое, что $\lambda(U) < \varepsilon$ и $f \in C(\mathbb{R} \setminus U)$?

Вопрос 65.5. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $f_n(x) := f(x + \frac{1}{n})$. Верно ли, что $f_n \to f$ в L^1 при $n \to \infty$?

Вопрос 65.6. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $f_n(x) := f(x + \frac{1}{n})$. Верно ли, что $f_n \to f$ по мере при $n \to \infty$?

Вопрос 65.7. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $f_n(x) := f(x + \frac{1}{n})$. Верно ли, что $f_n \to f$ почти всюду при $n \to \infty$?