

Oscilaciones en Sistemas Biológicos: Testosterona

Alejandro Hernández de la Vega
César Daniel Rodríguez Rosenblueth
Eva Yazmín Santiago Santos

Facultad de Ciencias. UNAM

Índice

Introducción

Osciladores Biológicos

Testosterona

Comportamiento del Sistema

Resultados

Modelos Simples

Modelo con Fuente Externa

Modelo de Castración

Pubertad

Referencias

Osciladores Biológicos

Su estudio se basa en ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

Donde, para sistemas periódicos se tiene:

$$u(t + T) = u(t)$$

con el periodo $T > 0$

Osciladores Biológicos

En algunas ocasiones el sistema está regulado por un control de retroalimentación.

→ Serie de reacciones ligadas → La primera está regulada por una función de retroalimentación.

$$\frac{du_1}{dt} = f(u_n)k_1u_1$$

$$\frac{du_r}{dt} = u_{r-1} - k_ru_r$$

con $r = 2, 3, \dots, n$, $k_r > 0$ constantes determinadas por el sistema en cuestión y $f(u)$ la función de retroalimentación.

Testosterona

Características

- Es una hormona cuya función principal es estimular el desarrollo de los caracteres sexuales masculinos.
- Cambios de personalidad relacionados con la concentración de testosterona en la sangre.

Hombres

- Nivel: 10-35 nanomoles por litro de sangre
- Oscilan con un periodo de 2 a 3 horas

Mujeres

- Nivel: 0.7-2.7 nanomoles por litro

Secreción de Testosterona

Testosterona (T) \rightarrow Hormona Liberadora de Hormona Luteinizante (LHRH) \rightarrow Hormona Luteinizante (LH) \rightarrow Testosterona (T)

Se denota a T, LH y LHRH por $T(t)$, $L(t)$ y $R(t)$ respectivamente.

Comportamiento del Sistema

Está representado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dR}{dt} = f(T) - b_1 R$$

$$\frac{dL}{dt} = g_1 R - b_2 L$$

$$\frac{dT}{dt} = g_2 L - b_3 T$$

b_1, b_2, b_3, g_1, g_2 son parámetros positivos.

g_1, g_2 y $f(T)$ son las tasas de secreción

g_1, g_2 son los valores de prealimentación

Puntos de Estabilidad

Las ecuaciones anteriores tienen solución en:

$$R_0 = \frac{f(T_0)}{b_1}$$

$$L_0 = \frac{b_3}{g_2} T_0$$

Donde $T_0 > 0$ satisface $g_1 g_2 f(T_0) = b_1 b_2 b_3 T_0$.

Puntos de Estabilidad

Alrededor del punto de equilibrio:

$$\frac{dx}{dt} = f'(T_0)z - b_1x$$

$$\frac{dy}{dt} = g_1x - b_2y$$

$$\frac{dz}{dt} = g_2yt - b_3T$$

Donde

$$z(t) = T(t) - T_0$$

$$y(t) = L(t) - L_0$$

$$x(t) = R(t) - R_0$$

Inestabilidad

Cuando $f'(T_0) < 0$ no hay estabilidad:

(i) si y sólo si

$$-\frac{g_1 g_2 f'(T_0)}{b_1} > \frac{a_1 a_2}{a_3} - 1$$

Donde:

$$a_1 = b_1 + b_2 + b_3$$

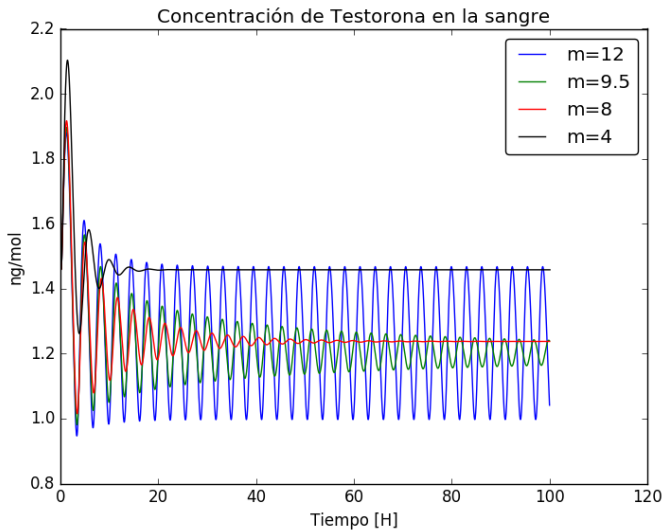
$$a_2 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3$$

$$a_3 = b_1 b_2 b_3$$

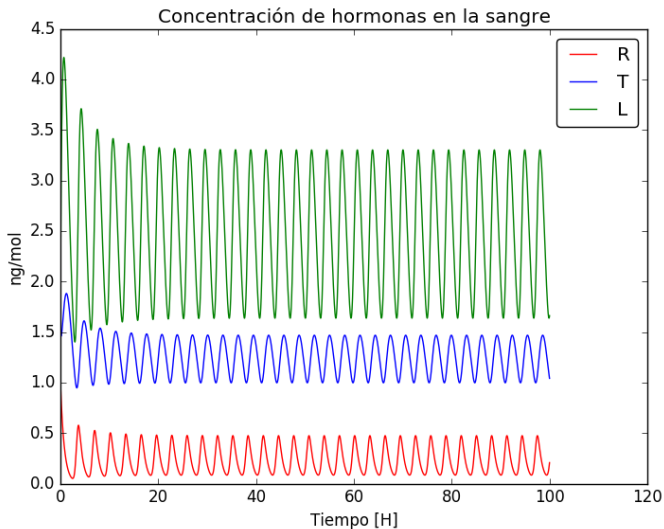
(ii) si

$$-\frac{T_0 f'(T_0)}{f(T_0)} > 8$$

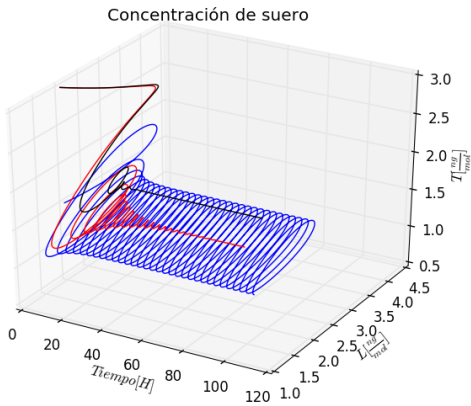
Modelo Simple



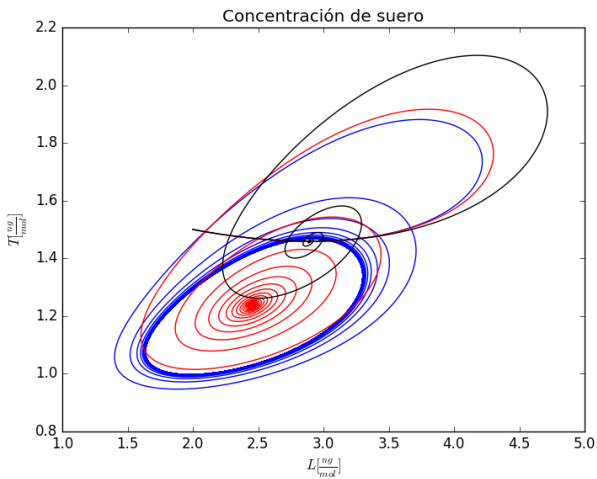
Modelo Simple



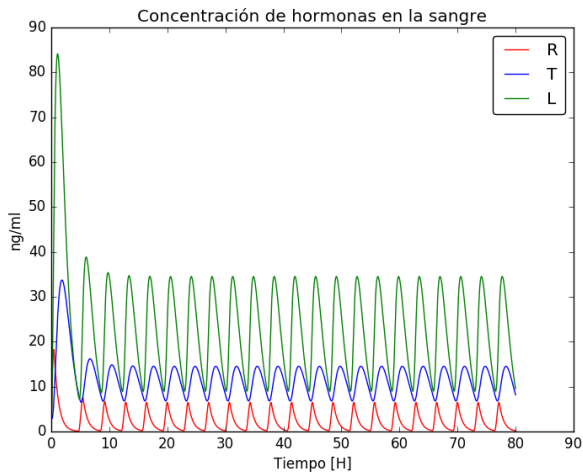
Modelo Simple



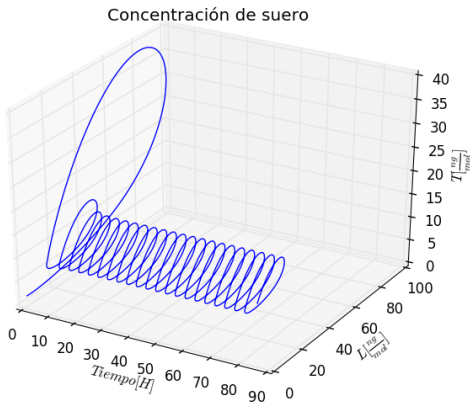
Modelo Simple



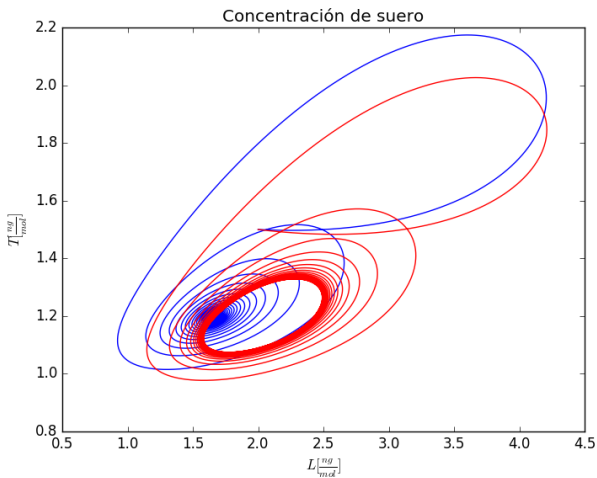
Modelo Simple



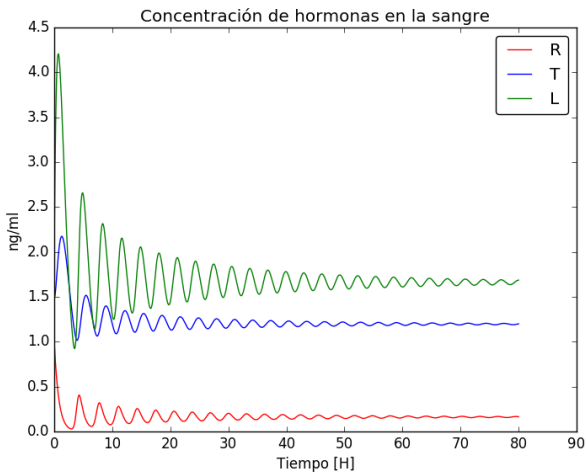
Modelo Simple



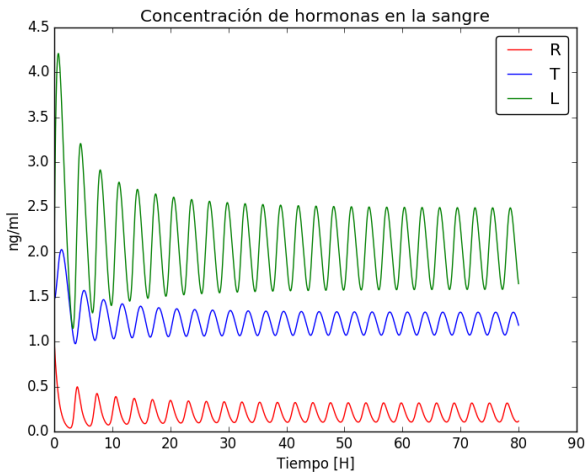
Modelo con Fuente Externa



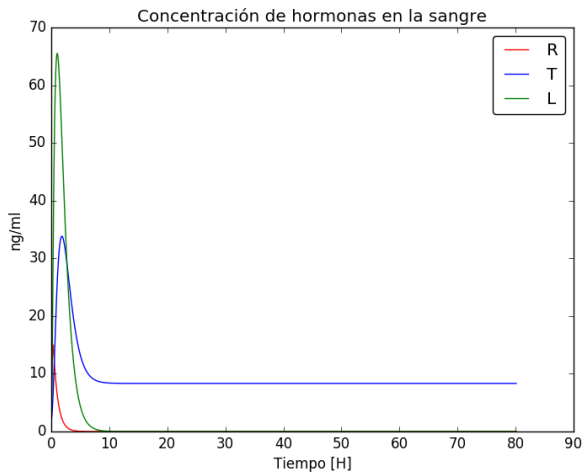
Modelo con Fuente Externa



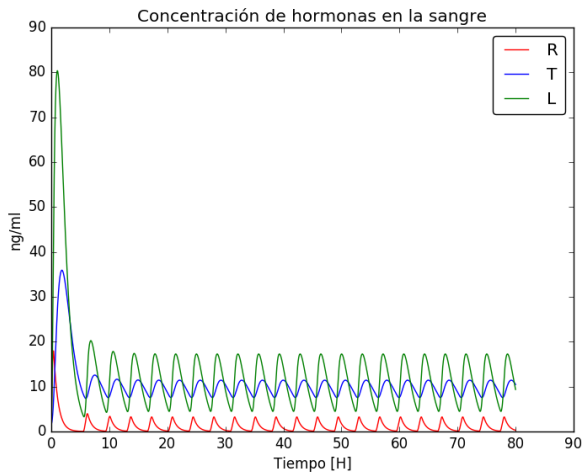
Modelo con Fuente Externa



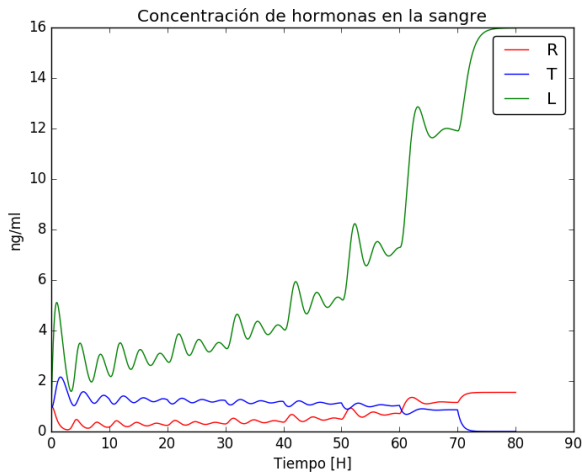
Modelo con Fuente Externa



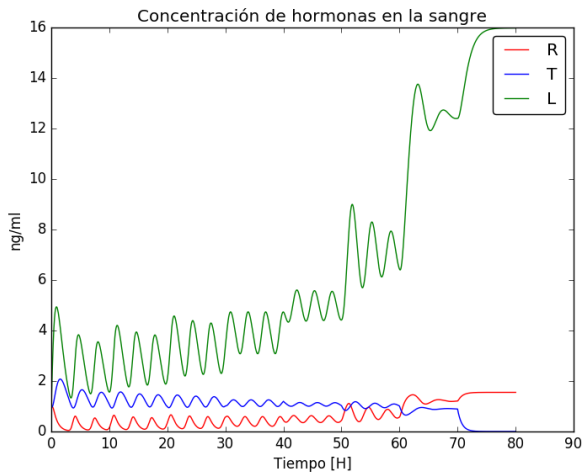
Modelo con Fuente Externa



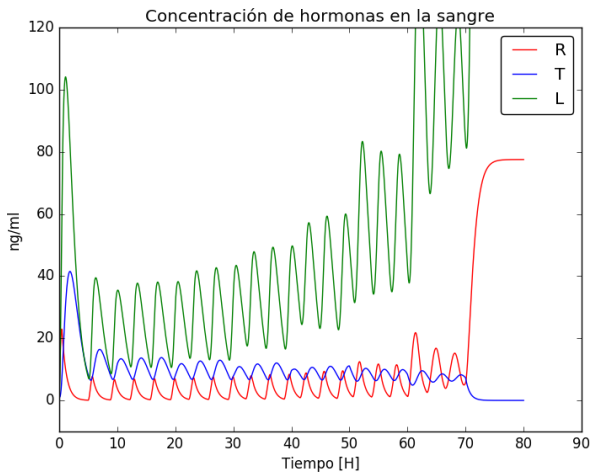
Modelo de Castración



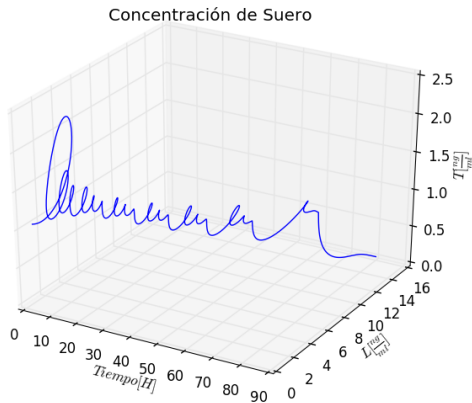
Modelo de Castración



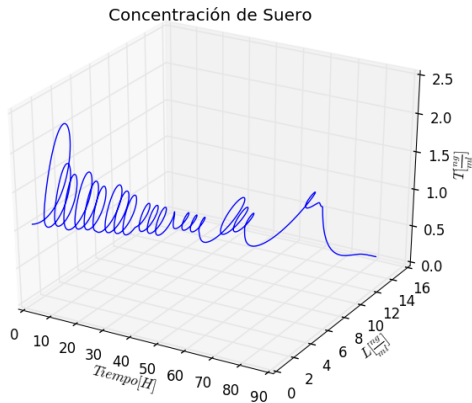
Modelo de Castración



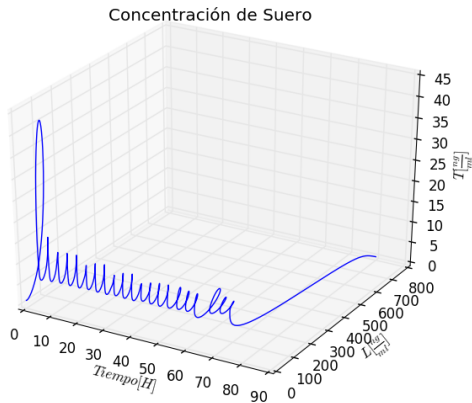
Modelo de Castración



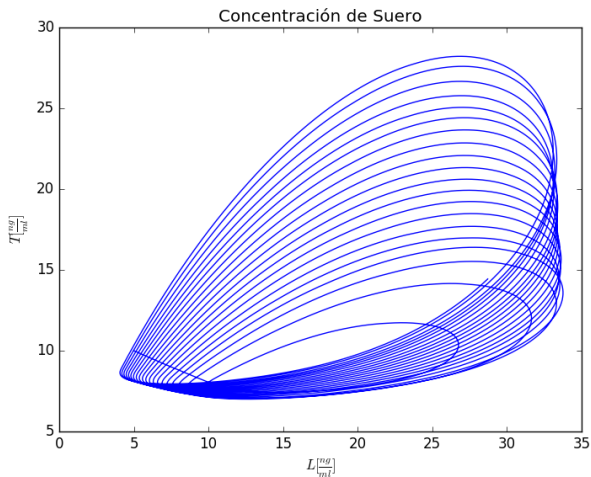
Modelo de Castración



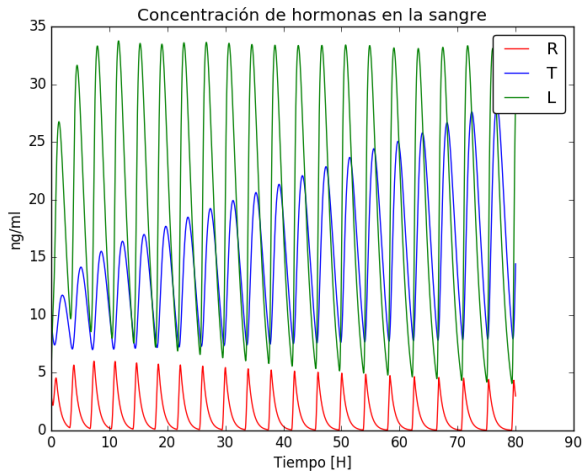
Modelo de Castración



Modelo de Pubertad



Modelo de Pubertad



Referencias

- [1] Murray, J. D. 1989. Mathematical Biology. Volume 19.
- [2] Smith, William R. "Hypothalamic regulation of pituitary secretion of luteinizing hormone—II feedback control of gonadotropin secretion." Bulletin of Mathematical Biology 42.1 (1980): 57-78.