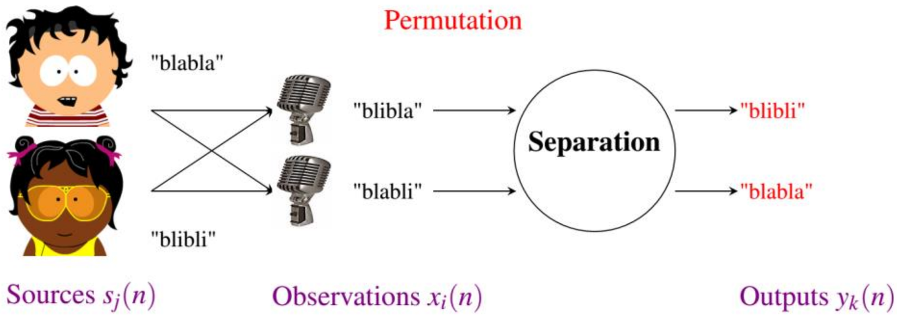
Sujet n° 3 : Séparation Aveugle de sources, mélange linéaire.

1) Données du problème

Exemple : *Cocktail Party Problem* :



On considère une situation où plusieurs sources (N_s) émettent simultanément. Ces sources constituent des signaux aléatoires et sont supposées statistiquement indépendantes.

On dispose de plusieurs capteurs ($N_c \geq N_s$) de positions différentes.

N_c capteurs enregistrent au cours du temps N_c observations

$$\boldsymbol{y}(t) = \left[y_1(t); y_2(t); \dots y_{N_c}(t)\right].$$

Chaque observation $y_i(t)$ s'écrit comme un mélange linéaire instantané non bruité de N_s sources (ou contributions de sources) réelles ou complexes $\boldsymbol{x}(t) = \left[x_1(t); x_2(t); \dots x_{N_s}(t)\right]$:

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)$$

où $\boldsymbol{M}$ est la matrice $N_c \times N_s$ de mélange à valeurs réelles ou complexes.

Dans cette étude, on se limitera à des signaux réels.

Objectif :

On ne connaît que les observations $y_i(t)$ qui ont été mesurées, et on désire connaître les sources $x_j(t)$.

C'est un problème de séparation de sources, aveugle puisqu'on ne connaît pas non plus les coefficients des mélanges (éléments de $\boldsymbol{M}$).

Remarques :

Notons que :

• dans chaque mélange, chaque source joue un rôle équivalent et en l'absence de toute connaissance supplémentaire géométrique ou spectrale . . ., permettant de les distinguer, l'ordre des composantes des signaux sources fixé dans le vecteur $\boldsymbol{x}$ ne pourra pas être retrouvé ($x_1 + x_2 = x_2 + x_1$).

• de la même façon, l'amplitude de chaque source peut être arbitrairement modifiée à condition de le compenser dans la matrice de mélange. Il sera donc impossible de retrouver l'amplitude exacte des signaux sources ($ax = \left(a\frac{1}{\lambda}\right)(\lambda x)$).

Hypothèses :

• les mesures ne sont connues que pour un ensemble fini d'échantillons : $k = 1$ à N correspondant aux dates $(k-1)\Delta t$.

• les sources sont des processus aléatoires centrés, stationnaires au second ordre (S2O),

• les sources sont non corrélées entre elles,

• les sources ont des densités spectrales de puissance distinctes.

Les observations étant des combinaisons linéaires de signaux aléatoires stationnaires, elles sont elles aussi des signaux aléatoires stationnaires.

Quelques définitions utiles :

Soit une séquence aléatoire $x[k]$; en toute rigueur, $\mathbb{E}\{x[k]\} = m_x[k]$ (sa moyenne évolue dans le temps). Mais si elle vérifie la relation $\mathbb{E}\{x[k]\} = m_x, \forall k$, on dit que $x[k]$ est stationnaire au premier ordre. De plus, $x[k]$ est centrée si $m_x = 0$.

On appelle fonction d'autocorrélation de la séquence $x[k]$ centrée :

$$\Phi_{xx}[k,i] = \mathbb{E}\{x[k]x[k-i]\}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

On considère que $x[k]$ est stationnaire au second ordre (S2O) que c'est-à-dire que $\Phi_{xx}[k,i]$ ne dépend pas de k. $\forall k, \Phi_{xx}[k,i] = \Phi_{xx}[i]$. On voit qu'alors $\mathbb{V}ar\{x[k]\} = \Phi_{xx}[0]$.

Cette fonction a comme propriété d'être maximale en $i = 0$.

Si l'on considère une seconde séquence aléatoire $y[k]$ centrée et S2O, on appelle fonction d'intercorrélation des séquences $x[k]$ et $y[k]$:

$$\Phi_{xy}[i] = \mathbb{E}\{x[k]y[k-i]\}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

Si les signaux sont décorrélés (et *a fortiori* indépendants), alors $\Phi_{xy}[i] = 0, \forall i$.

Si l'on considère 2 signaux aléatoires $x_1[k]$ et $x_2[k]$ de longueur N, on peut les mettre sous forme matricielle $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de dimension $2 \times N$ (on généralise aisément à $N_s \geq 2$ signaux).

On appelle alors matrice de covariance en i la matrice 2×2 $(N_s \times N_s)$ suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}(i) = \mathbb{E}\{\boldsymbol{x}[k]\boldsymbol{x}^T[k-i]\} = \begin{bmatrix} \Phi_{x_1x_1}[i] & \Phi_{x_2x_1}[i] \\ \Phi_{x_1x_2}[i] & \Phi_{x_2x_2}[i] \end{bmatrix}.$$

Quelques considérations pratiques :

Le calcul pratique d'une moyenne ou d'une fonction d'intercorrélation $\Phi_{xy}[i]$ nécessite le calcul d'une espérance mathématique $\mathbb{E}$. Cela n'est pas réalisable puisqu'on ne dispose que d'une seule séquence de chacun des signaux $x[k]$ et $y[k]$.

L'hypothèse ergodique permet de remplacer l'$\mathbb{E}$ par une moyenne temporelle (on fera attention aux bornes) ; ainsi, on a :

$$m_x \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x[k]$$

$$\Phi_{xy}[i] \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x[k]y[k-i]\,, \qquad i \in \mathbb{Z}$$

1) Cas où $N_c = N_s$

On fait l'hypothèse que $\boldsymbol{M}$ est carrée régulière. Mais elle est inconnue !

On a donc $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)$, où $\boldsymbol{M}$ est la matrice $N_c \times N_s$ de mélange à valeurs réelles.

Travail théorique demandé

1. Avec les hypothèses sur les sources, que peut-on dire de $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}(i)$? Que se passe-t-il si $i = 0$?
2. Montrer que $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(0)\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}(i_0)$ existe et est diagonale.
3. Montrer que $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(i) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}(i)\boldsymbol{M}^T, \forall i$.
4. On prendra $i = 0$: montrer que $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(0)$ est inversible. Quelles autres propriétés a-t-elle ?
5. Soit $i_0 \neq 0$ et $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{y}}(i_0) \equiv \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}^{-1}(0)\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(i_0)$. Montrer que $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{y}}(i_0) = \boldsymbol{M}^{-T}\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(0)\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{x}}(i_0)\boldsymbol{M}^T$.
6. Soit $\boldsymbol{U}$ la matrice dont les colonnes contiennent les vecteurs propres normés de $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{y}}(i_0)$. On notera $\boldsymbol{\Delta}$ la matrice des vecteurs propres. Quelle relation lie $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{y}}(i_0)$, $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Delta}$?
7. En déduire que $\boldsymbol{U}$ est égal à $\boldsymbol{M}^{-T}$ à une norme près et une permutation près.
   Vérifier que $\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}$ où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale positive consiste à modifier la norme des vecteurs colonne.
   Vérifier que $\boldsymbol{U}\boldsymbol{P}$ où $\boldsymbol{P}$ est une matrice de permutation consiste à permuter les vecteurs colonne. Une matrice de permutation contient des zéros et un et seul 1 par ligne et par colonne : par exemples, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ permutent les colonnes 1 et 2 de $\boldsymbol{U}$.
8. En déduire qu'une matrice séparante $\boldsymbol{S}$ peut être choisie égale à $\boldsymbol{U}^T$. $\boldsymbol{S}$ vérifie, en théorie,
   $$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)$$
   c'est-à-dire que $\boldsymbol{z}(t)$ contient les sources $\boldsymbol{x}(t)$ à un facteur et une permutation près.

Travail pratique demandé

On va prendre $N_s = 2$.

9. Créer les deux séquences sources $x_i[k]$ à partir des fichiers Matlab « handel.mat » et « laughter.mat ». On fixera N à la plus petite des longueurs.
10. On pourra écouter les signaux sources (fonction `soundsc` avec $f_e = 8192\ Hz$).
11. Tracer les sources sur une figure.
12. Calculer et tracer les fonctions d'autocorrélation et la fonction d'intercorrélation des sources.
13. On pose

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}1 & 1{,}3 \end{bmatrix}$$

générer les observations $y_i[k]$.

14. On pourra écouter les signaux observations.
15. Calculer $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}^{-1}(0)\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(i_0)$ en prenant $i_0 = 2$.
16. Calculer $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Delta}$.
17. En déduire $\boldsymbol{z}(t)$.
18. Ecouter les signaux séparés.

2) Cas où $N_c > N_s$

On a un système sur-déterminé.

La matrice $\boldsymbol{M}$ est rectangulaire, donc non inversible, mais de rang N_s. Elle est toujours inconnue !

On va se ramener au cas précédent en projetant les signaux.

Travail théorique demandé

1. Montrer que $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(0)$ est de taille N_c mais de rang N_s et n'est donc pas inversible.
2. Calculer $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Lambda}$ les éléments propres de $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(0)$. Quelles propriétés, dues à celles de $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(0)$, ont $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{\Lambda}$?
3. On note $\boldsymbol{U}_S$ les N_s vecteurs propres principaux de $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{y}}(0)$ (ceux correspondant aux valeurs propres non nulles). On appelle « sous-espace signal » le sous-espace engendré par les colonnes de $\boldsymbol{U}_S$.
   Soit $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_S^T$, on projette les observations dans le sous-espace signal : $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(t)$. Quelle est la dimension de $\boldsymbol{z}(t)$? On peut écrire $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{M}_z\boldsymbol{x}(t)$.
4. On applique maintenant l'algorithme utilisé pour $N_c = N_s$ à $\boldsymbol{z}(t)$. On obtient une matrice séparante $\boldsymbol{S}_z$: $\widehat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{S}_z\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{S}_z\boldsymbol{W}\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)$. La matrice séparante des observations non projetées est $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_z\boldsymbol{W}$.

Travail pratique demandé

On va prendre $N_s = 2$ et $N_c = 3$ puis 5.

Appliquer le nouvel algorithme avec $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.8 & 1.3 \\ 0.55 & 1.8 \end{bmatrix}$ puis $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.8 & 1.3 \\ 0.55 & 1.8 \\ 1.2 & 0.8 \\ 1 & 1.25 \end{bmatrix}$, et réaliser un travail identique à celui demandé au paragraphe précédent.