Cours de mécanique des fluides

Equations de conservation des écoulements monophasiques

Yann Berton 05/2024

Chapitres

Contexte & Rappels de cours

Hypothèse du milieu continue

- La structure est continue :
  Soit un système physique dont un ensemble de grandeurs physiques $V = (v_1, [...], v_n)$ sont étudiées avec $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse du milieu continue implique que $\forall v_i \in V, v_i(\vec{x}, t)$ est une fonction continue où M est un point matériel du solide.
- Condition de validité :
  - La longueur caractéristique du système L_c doit être très grande devant le libre parcours moyen l. Pour s'en assurer, on introduit le nombre adimensionnel de Knudsen : $K_n = \frac{l}{L}$. Ainsi l'hypothèse du milieu continu est valide si $K_n \ll 1$.

Thèorème de la divergence (Théorème de Green-Ostrogradski)

Thèorème de la divergence

$$\underbrace{\int_V \vec{\nabla}\vec{F}.\mathrm{dV}}_{\substack{\text{Divergence d'un champ}\\ \text{vectoriel sur un volume}\\ \text{de } \mathbb{R}^3}} = \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{F}.\overrightarrow{dS}}_{\substack{\text{Flux à travers}\\ \text{la frontière du}\\ \text{du volume}}}$$

Où :

- V : Volume de $\mathbb{R}^3$ $[m^3]$,
- ∂V : Frontière de V $[m^3]$,
- $\overrightarrow{dS}$: Vecteur normal à la surfaced tel que $\overrightarrow{dS} = \vec{n}.dS$
- $\vec{F}$: Fonction dérivable en tout point de V

Etude cinétique & Description eulerienne :

Lors de l'étude cinétique, seul le mouvement est étudié indépendemment de ses causes. La description du mouvement du fluide selon Euler nécessite :

- L'utilisation d'un champ de vecteurs,
- La connaissance de l'accélération du fluide :

Considérons une grandeur physique scalaire ou vectorielle quelconque du fluide, appelée G. Par définition, $G \hat{=} G(\vec{x}, t) = G(x, y, z, t)$. On donne la différentielle totale de G :

$$\mathrm{dG} = \frac{\partial G}{\partial x}.\mathrm{dx} + \frac{\partial G}{\partial y}.\mathrm{dy} + \frac{\partial G}{\partial z}.\mathrm{dz} + \frac{\partial G}{\partial t}.dt$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{dG}}{d}t = \frac{\partial G}{\partial x}.\frac{\mathrm{dx}}{d}t + \frac{\partial G}{\partial y}.\frac{\mathrm{dy}}{d}t + \frac{\partial G}{\partial z}.\frac{\mathrm{dz}}{d}t + \frac{\partial G}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{dG}}{d}t = \frac{\partial G}{\partial x}.\mathrm{vx} + \frac{\partial G}{\partial y}.\mathrm{vy} + \frac{\partial G}{\partial z}.\mathrm{vz} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

Il vient ainsi l'expression de la dérivée particulaire d'une grandeur physique G :

$$\boxed{\frac{\mathrm{dG}}{dt} = \frac{\mathrm{DG}}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} G\right).\vec{v}} \tag{1}$$

La description eulérienne s'intéresse à l'évolution des grandeurs physiques du fluide pour chaque point de l'espace en fonction du temps. L'accélération du fluide en fait partie. En évaluant l'équation (1) avec la vitesse du fluide, il vient :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \vec{v}\right).\vec{v}} \tag{2}$$

Théorème fondamental de Cauchy : Tenseur de contraintes

Théorème fondamental de Cauchy[1]

Il existe [...] en tout point M du milieu continu, un tenseur du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}(M)$, appelé tenseur des contrainte de Cauchy tel que : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}$

Le tenseur de contraintes représente l'action des forces de surface à l'intérieur du fluide et avec son environnement. Dans cette partie, on cherche à déterminer son expression mathématique.

Soit un repère orthonormé (M, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$). On considère un volume élémentaire Ω de forme tétraédrique. On repère son sommet M et trois des ses faces $\{S_i$ où $i \in (1, 2, 3)\}$ situées dans les plans des coordonnés. La $4^{\text{ème}}$ face, appellée S, a pour surface α et admet une normale $\vec{n}$.

[1] Source : https://savoir.ensam.eu/moodle/pluginfile.php/26945/mod_resource/content/0/Theoreme_de_Cauchy.pdf

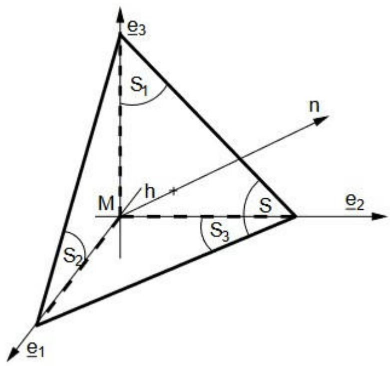

Figure 1: Tétrahèdre élémentaire[2]

On appelle les n_j les cosinus directeurs de $\vec{n}$ tels que $\vec{n} = \sum_{j=1}^{3} n_j.\vec{e_j}$. Trivialement, il vient l'expression des aires des surfaces A_j : $S_j = \alpha.n_j$.
Aller voir https://mmaya.fr/cours-mmc/poly/Contrainte/Contrainte_2.htm pour de meilleures explications
La hauteur issue de M est h, $\vec{\Gamma}$ est le vecteur des contraintes de cisaillement et $\vec{T}$ est le vecteur des contraintes normales appliquées au surfaces de Ω. On effectue un bilan des forces sur le volume Ω :

$$\underbrace{\int_\Omega \left(\rho.\vec{\Gamma}\right).d\Omega}_{\text{Efforts intérieurs}} = \underbrace{\int_\Omega \overrightarrow{F^d}.d\Omega}_{\text{Forces volumiques}} + \underbrace{\int_S \vec{T}(N,\vec{n}).dS}_{\text{Force appliquée sur } A} + \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \int_{S_j} \vec{T}\left(N_j, -\vec{e_j}\right).dS}_{\text{Somme des forces appliquées sur les } A_j}$$

$$\Rightarrow \frac{h.\alpha}{3}.\left(\rho.\vec{\Gamma} - \overrightarrow{F^d}\right) = \alpha.\vec{T}(M,\vec{n}) + \sum_{j=1}^{3} n_j.\alpha.\vec{T}\left(M_j, -\vec{e_j}\right)$$

Or, Ω étant un volume infinitésimal, h tend vers 0 dans l'expression précédente.
Il vient alors :

$$\alpha.\vec{T}(M,\vec{n}) = -\sum_{j=1}^{3} n_j.\alpha.\vec{T}\left(M_j, -\vec{e_j}\right)$$

En posant $\vec{T_j} = -\vec{T}\left(M_j, -\vec{e_j}\right)$, on obtient finalement la relation suivante :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = n_j\vec{T_j}$$

Puisque le vecteur $\vec{n}$ a une orientation quelconque, cette relation montre que toute surface de normale $\vec{n}$ admet un vecteur contrainte proportionnel au vecteur unitaire

[2]source : LA313 - Base de la MMC - L. Champaney

$\vec{n}$. Ainsi, tout point M du milieu continu admet un tenseur du second ordre $\underline{\underline{\sigma}}$ appelé tenseur des contrainte de Cauchy, tel que :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}$$

Conservation de la masse

<u>Définition du débit masse</u>

L'objectif de cette partie est de définir le débit masse. Soit un fluide s'écoulant dans un tube de section S. Considérons une surface infinitésimale dS de centre M. On appelle dm la masse s'écoulant au travers de cette section pendant un temps infinitésimal dt. On donne ci-après l'expression de sa variation temporelle :

$$\frac{d^2m}{dt.dS} = \rho(\vec{x},t).\vec{v}(\vec{x},t).\vec{n}$$

Triviallement, on peut isoler la différencielle totale de l'équation :

$$dm = \int_{M\in S} ((\rho(\vec{x},t).\vec{v}(\vec{x},t).\vec{n}).dS).dt$$

Il vient l'expression du débit masse Q_m :

$$Q_m \triangleq \frac{dm}{dt} = \oint_{M\in S} (\rho(\vec{x},t).\vec{v}.\vec{n}).dS$$

En définissant le vecteur densité de flux de masse $\vec{J}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t).\vec{v}(\vec{x},t)$, l'expression du débit masse devient :

$$Q_m = \oint_{M\in S} \left(\vec{J}(\vec{x},t).\vec{n}\right).dS$$

<u>Equation de continuité</u>

On considère un volume de contrôle fixe quelconque V délimité par une surface fictive fermée S. Par définition, on a :

$$m(t) = \int_{M\in V} (\rho(\vec{x},t)).d\tau$$

où $d\tau$ est un volume infinitésimale de V.
Cette masse varie dans le temps à travers la surface S, donc : Mieux expliquer avec le théorème de Reynolds !!!!

$$\frac{dm}{dt} = -\oint_{M\in S} \rho(\vec{x},t).\vec{v}.\overrightarrow{dS}_{\text{ext}}$$

Le signe "moins" vient du fait que $\vec{S}_{\text{ext}}$ est dirigé vers l'extérieur de la surface S. Or, $\frac{dm}{dt}$ peut également être exprimée à partir de la définition de la masse :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{M\in V} \frac{\partial(\rho(\vec{x},t))}{\partial t}.d\tau$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d'exprimer une intégrale de surface à une intégrale sur le volume :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{M\in V} \frac{\partial(\rho(\vec{x},t))}{\partial t}.d\tau = \int_{M\in V} -\vec{\nabla}(\rho(\vec{x},t).\vec{v}(\vec{x},t)).d\tau$$

Donc il vient :

$$\int_{M\in V} \left(\frac{\partial(\rho(\vec{x},t))}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho(\vec{x},t).\vec{v}(\vec{x},t))\right).d\tau = 0 \quad \forall M \in V$$

Il vient finalement l'**équation de continuité** (ou équation de conservation de la masse) :

$$\boxed{div(\rho.\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \tag{3}$$

Remarque : On peut exprimer l'équation 3 en fonction de la dérivée particulaire. En évaluant l'équation 1 avec la massse volumique, on obtient :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right).\rho$$
$$\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{D\rho}{Dt} - \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right).\rho$$

En remplaçant dans l'équation 3 on obtient :

$$\vec{\nabla}(\rho.\vec{v}) + \frac{D\rho}{dt} - \left(\vec{\nabla}\vec{v}\right).\rho = 0$$
$$\Rightarrow \rho\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) + \vec{v}.\left(\vec{\nabla}\rho\right) + \frac{D\rho}{Dt} - \vec{v}.\left(\vec{\nabla}\rho\right) = 0$$

Finalement il vient une seconde forme de l'équation 3.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\vec{\nabla}\vec{v}\right) = 0$$

Si le fluide est **incompressible**, la relation se simplifie :

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0$$

<u>Conservation de la quantité de mouvement</u>

L'évolution de la quantité de mouvement du volume de contrôle V est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{M\in V}(\rho.\vec{v}).\mathrm{dV}}_{\substack{\text{Variation de la QdM}\\ \text{dans V}}} + \underbrace{\oint_{M\in S}(\rho.\vec{v}.\vec{v}).\vec{n}.dS}_{\substack{\text{Flux de QdM}\\ \text{au travers S}}} = \underbrace{\int_{M\in V}\overrightarrow{F_V}.\mathrm{dV}}_{\substack{\text{QdM générée/absorbée}\\ \text{par les forces volumiques}}} + \underbrace{\int_{M\in S}\overrightarrow{F_S}.dS}_{\substack{\text{QdM générée/absorbée}\\ \text{par les forces surfaciques}}}$$

On se place dans le cas où la force gravitationnelle est la seule force à distance. Il vient alors : $\overrightarrow{F_V} = \rho.\vec{g}$. Egalement, le théorème fondamental de Cauchy nous permet d'obtenir l'expression des forces surfaciques : $\overrightarrow{F_S} = \vec{T}(N,\vec{n}).dS = \underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}$
Il vient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M\in V}(\rho.\vec{v}).\mathrm{dV} + \oint_{M\in S}(\rho.\vec{v}.\vec{v}.\vec{n}).dS = \int_{M\in V}(\rho.\vec{g}).\mathrm{dV} + \oint_{M\in S}\left(\underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}\right).dS$$

Afin de continuer le développement, l'utilisation du théorème de la divergence permet d'exprimer les intégrales de surface en intégrale sur le volume. Ainsi :

$$\begin{cases}\oint_{M\in S}(\rho.\vec{v}.\vec{v}.\vec{n}).dS = \int_{M\in V}\left(\vec{\nabla}(\rho.\vec{v}.\vec{v})\right).\ \mathrm{dV}\\ \oint_{M\in S}\left(\underline{\underline{\sigma}}.\vec{n}\right).dS = \int_{M\in V}\left(\nabla\underline{\underline{\sigma}}.\mathrm{dV}\right)\end{cases}$$

En remplaçant ces résultats dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{M\in V}(\rho.\vec{v}).\mathrm{dV} + \int_{M\in V}(\nabla(\rho.\vec{v}.\vec{v}.\vec{n})).\ \mathrm{dV} = \int_{M\in V}(\rho.\vec{g}).\mathrm{dV} + \int_{M\in V}\left(\nabla\underline{\underline{\sigma}}\right).\mathrm{dV}$$

dV étant une valeur arbitraire, on peut le considérer égal pour tous les termes de l'équation :

$$\int_{M\in V}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho.\vec{v})+\vec{\nabla}(\rho.\vec{v}.\vec{v})-\rho.\vec{g}-\nabla\underline{\underline{\sigma}}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho.\vec{v})+\vec{\nabla}(\rho.\vec{v}.\vec{v})=\rho.\vec{g}+\nabla\underline{\underline{\sigma}}$$

On développe le terme $\vec{\nabla}(\rho.\vec{v}.\vec{v}.)=\rho.\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})+\vec{v}.\vec{\nabla}(\rho.\vec{v})$:

$$\vec{v}.\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\rho.\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v})+\rho.\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v})+\vec{v}.\vec{\nabla}(\rho.\vec{v})=\rho.\vec{g}+\nabla\underline{\underline{\sigma}}$$

On remarque la seconde forme de l'équation 3 dans ce développement. Après simplification des termes, il vient **la première loi du mouvement de Cauchy** :

$$\boxed{\rho.\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v})+\rho.\vec{v}.\nabla\vec{v}=\rho.\vec{g}+\nabla\underline{\underline{\sigma}}} \tag{4}$$

Puisque le tenseur de Cauchy est symétrique à coefficients réels, il est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles. Ces valeurs propres sont appellées contraintes principales, orientées selon des vecteurs propres appelés directions principales.
De plus, on peut définir un champ scalaire P(vec(x),t) tel que lorsque le fluide est au repos, il se réduit à la pression statique. Ainsi définit, on peut l'exprimer en fonction du tenseur des contraintes de cauchy :

$$P(\vec{x},t)=\frac{1}{3}.(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{1}{3}.\mathrm{trace}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)$$

Il représente la contrainte normale moyenne du fluide.
En appellelant $\underline{\underline{\sigma_d}}$ le tenseur déviateur, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}}=-P(\vec{x},t).I+\underline{\underline{\sigma_D}}$$

Où $\mathrm{trace}\left(\underline{\underline{\sigma_D}}\right)=0$ et I la matrice identité.
En remplaçant la nouvelle expression du tenseur de Cauchy dans l'équation 4 on obtient :

$$\rho.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho.\vec{v}.\nabla\vec{v}=\rho.\vec{g}-\vec{\nabla}\left(-P(\vec{x},t).I+\underline{\underline{\sigma_D}}\right)$$

$$\Rightarrow\rho.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho.\vec{v}.\nabla\vec{v}=\rho.\vec{g}-\vec{\nabla}(-P.I)+\vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}$$

$$\Rightarrow\rho.\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho.\vec{v}.\nabla\vec{v}=\rho.\vec{g}-P.\vec{\nabla}I+I.\vec{\nabla}(-P)+\vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}$$

Finalement on peut réécrire l'équation 4 pour obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho.\vec{v}.\nabla\vec{v} = \rho.\vec{g} - \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}} \tag{5}$$

Conservation de l'énergie

Considérons l'équation 5 de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho.\vec{v}.\nabla\vec{v} = \rho.\vec{g} - \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}$$

En multipliant chaque terme par la vitesse $\vec{v}$, on obtient le bilan des puissances volumiques :

$$\vec{v}.\rho.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\rho.\vec{v}.\nabla\vec{v} = \vec{v}.\rho.\vec{g} - \vec{v}.\vec{\nabla}P + \vec{v}.\vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\rho.\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2}.\vec{v}.\rho.\nabla\vec{v}^2 = \vec{v}.\rho.\vec{g} - \vec{v}.\vec{\nabla}P + \vec{v}.\vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}$$

Finalement, on obtient l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\rho.\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}.||\vec{v}||^2\right) = -\vec{v}.\nabla P + \vec{v}.(\rho.\vec{g}) + \vec{v}.\vec{\nabla}\underline{\underline{\sigma_D}}} \tag{6}$$

Cette expression peut être inclue dans l'expression générale de **l'énergie massique totale e** d'une particule où :

$$e \mathrel{\hat{=}} e_{\text{méca}} + u = e_{\text{cinétique}} + e_{\text{potentielle}} + u$$

Avec u l'énergie interne de la particule.
L'objectif est d'établir un bilan d'énergie. Pour cela, les hypothèses suivantes sont réalisées :

- La seule force à distance en présence est le poids :
  - L'énergie potentielle d'une particule de fluide par unité de masse est : $-\vec{g}.\vec{z}$ avec z la hauteur,
- Il n'y a pas de réaction chimique, nucléaire ou de production/génération de chaleur au sein du fluide.

Ainsi, on peut poser l'équation de conservation d'énergie suivante :

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\rho.u+\frac{1}{2}.\rho.\vec{v}^2-\rho.\vec{g}.\vec{z}\right).dV}_{\text{Variation d'énergie dans V}}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_A\left(\rho.u+\frac{1}{2}.\rho.\vec{v}^2-\rho.\vec{z}.\vec{g}\right).\vec{v}.\vec{n}.dA}_{\text{Flux d'énergie à travers A}}=\underbrace{\int_A\left(\vec{q}.\vec{n}\right).dA}_{\substack{\text{Flux de chaleur}\\ \text{au travers A}}}+\underbrace{\int_A\vec{n}.(\sigma.\vec{n}).dA}_{\substack{\text{Variation d'énergie due}\\ \text{aux forces surfaciques}}}} \quad (7)$$

Où :

· $\vec{q}$ est le vecteur de densité de flux de chaleur au travers de la surface A,

· $\int_A \vec{n}.(\sigma.\vec{n}).dA$ est obtenu en appliquant le théorème de Cauchy à l'expression de la variation d'énergie due aux forces surfaciques $\int_A(\sigma.v).dA$,

En remarquant que le volume est indépendant du temps, puis en appliquant le théorème de la divergence, il vient :