

# **Cours de mécanique des fluides**

Equations de conservation des écoulements  
monophasiques

# Chapitres

Contexte & Rappels de cours .....	3
-----------------------------------	---

# Contexte & Rappels de cours

## Hypothèse du milieu continue

- La structure est continue :

Soit un système physique dont un ensemble de grandeurs physiques  $V = (v_1, [...], v_n)$  sont étudiées avec  $n \in \mathbb{N}$ . L'hypothèse du milieu continue implique que  $\forall v_i \in V, v_i(\vec{x}, t)$  est une fonction continue où  $M$  est un point matériel du solide.

- Condition de validité :

- La longueur caractéristique du système  $L_c$  doit être très grande devant le libre parcours moyen  $l$ . Pour s'en assurer, on introduit le nombre adimensionnel de Knudsen :  $K_n = \frac{l}{L}$ . Ainsi l'hypothèse du milieu continu est valide si  $K_n \ll 1$ .

## Théorème de la divergence (Théorème de Green-Ostrogradski)

### Théorème de la divergence

$$\underbrace{\int_V \vec{\nabla} \vec{F} \cdot dV}_{\text{Divergence d'un champ vectoriel sur un volume de } \mathbb{R}^3} = \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\text{Flux à travers la frontière du volume}}$$

Où :

- $V$  : Volume de  $\mathbb{R}^3$  [ $m^3$ ],
- $\partial V$  : Frontière de  $V$  [ $m^3$ ],
- $d\vec{S}$  : Vecteur normal à la surface tel que  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$
- $\vec{F}$  : Fonction dérivable en tout point de  $V$

## Etude cinétique & Description eulerienne :

Lors de l'étude cinétique, seul le mouvement est étudié indépendamment de ses causes. La description du mouvement du fluide selon Euler nécessite :

- L'utilisation d'un champ de vecteurs,
- La connaissance de l'accélération du fluide :

Considérons une grandeur physique scalaire ou vectorielle quelconque du fluide, appelée  $G$ . Par définition,  $G \hat{=} G(\vec{x}, t) = G(x, y, z, t)$ . On donne la différentielle totale de  $G$  :

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial G}{\partial t} \cdot dt \\ \Rightarrow \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial G}{\partial z} \cdot v_z + \frac{\partial G}{\partial t} \end{aligned}$$

Il vient ainsi l'expression de la dérivée particulaire d'une grandeur physique  $G$  :

$$\boxed{\frac{dG}{dt} = \frac{DG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{\nabla} G) \cdot \vec{v}} \quad (1)$$

La description eulérienne s'intéresse à l'évolution des grandeurs physiques du fluide pour chaque point de l'espace en fonction du temps. L'accélération du fluide en fait partie. En évaluant l'équation (1) avec la vitesse du fluide, il vient :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \vec{v}} \quad (2)$$

## Théorème fondamental de Cauchy : Tenseur de contraintes

### Théorème fondamental de Cauchy<sup>1</sup>

Il existe [...] en tout point  $M$  du milieu continu, un tenseur du second ordre  $\underline{\underline{\sigma}}(M)$ , appelé tenseur des contraintes de Cauchy tel que :  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Le tenseur de contraintes représente l'action des forces de surface à l'intérieur du fluide et avec son environnement. Dans cette partie, on cherche à déterminer son expression mathématique.

Soit un repère orthonormé  $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On considère un volume élémentaire  $\Omega$  de forme tétraédrique. On repère son sommet  $M$  et trois des ses faces  $\{S_i \text{ où } i \in$

<sup>1</sup>Source : [https://savoir.ensam.eu/moodle/pluginfile.php/26945/mod\\_resource/content/0/Theoreme\\_de\\_Cauchy.pdf](https://savoir.ensam.eu/moodle/pluginfile.php/26945/mod_resource/content/0/Theoreme_de_Cauchy.pdf)

$(1, 2, 3)$  situées dans les plans des coordonnés. La 4<sup>ème</sup> face, appelée  $S$ , a pour surface  $\alpha$  et admet une normale  $\vec{n}$ .

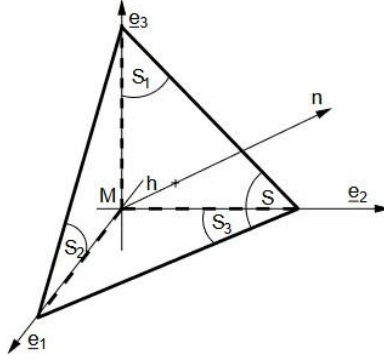


Figure 1: Tétrahédre élémentaire<sup>2</sup>

On appelle les  $n_j$  les cosinus directeurs de  $\vec{n}$  tels que  $\vec{n} = \sum_{j=1}^3 n_j \cdot \vec{e}_j$ . Trivialement, il vient l'expression des aires des surfaces  $A_j : S_j = \alpha \cdot n_j$ .

Aller voir [https://mmaya.fr/cours-mmec/poly/Contrainte/Contrainte\\_2.htm](https://mmaya.fr/cours-mmec/poly/Contrainte/Contrainte_2.htm) pour de meilleures explications

La hauteur issue de  $M$  est  $h$ ,  $\vec{\Gamma}$  est le vecteur des contraintes de cisaillement et  $\vec{T}$  est le vecteur des contraintes normales appliquées au surfaces de  $\Omega$ . On effectue un bilan des forces sur le volume  $\Omega$  :

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\rho \cdot \vec{\Gamma}) \cdot d\Omega}_{\text{Efforts intérieurs}} = \underbrace{\int_{\Omega} \vec{F}^d \cdot d\Omega}_{\text{Forces volumiques}} + \underbrace{\int_S \vec{T}(N, \vec{n}) \cdot dS}_{\substack{\text{Force appliquée sur} \\ A}} + \underbrace{\sum_{j=1}^3 \int_{S_j} \vec{T}(N_j, -\vec{e}_j) \cdot dS}_{\substack{\text{Somme des forces appliquées sur} \\ \text{les } A_j}}$$

$$\Rightarrow \frac{h \cdot \alpha}{3} \cdot (\rho \cdot \vec{\Gamma} - \vec{F}^d) = \alpha \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) + \sum_{j=1}^3 n_j \cdot \alpha \cdot \vec{T}(M_j, -\vec{e}_j)$$

Or,  $\Omega$  étant un volume infinitésimal,  $h$  tend vers 0 dans l'expression précédente.

Il vient alors :

$$\alpha \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = - \sum_{j=1}^3 n_j \cdot \alpha \cdot \vec{T}(M_j, -\vec{e}_j)$$

En posant  $\vec{T}_j = -\vec{T}(M_j, -\vec{e}_j)$ , on obtient finalement la relation suivante :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_j \vec{T}_j$$

<sup>2</sup>source : LA313 - Base de la MMC - L. Champaney

Puisque le vecteur  $\vec{n}$  a une orientation quelconque, cette relation montre que toute surface de normale  $\vec{n}$  admet un vecteur contrainte proportionnel au vecteur unitaire  $\vec{n}$ . Ainsi, tout point M du milieu continu admet un tenseur du second ordre  $\underline{\underline{\sigma}}$  appelé tenseur des contraintes de Cauchy, tel que :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

## Conservation de la masse

### Définition du débit masse

L'objectif de cette partie est de définir le débit masse. Soit un fluide s'écoulant dans un tube de section S. Considérons une surface infinitésimale dS de centre M. On appelle dm la masse s'écoulant au travers de cette section pendant un temps infinitésimal dt. On donne ci-après l'expression de sa variation temporelle :

$$\frac{dm}{dt \cdot dS} = \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}$$

Triviallement, on peut isoler la différentielle totale de l'équation :

$$dm = \int_{M \in S} ((\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}) \cdot dS) \cdot dt$$

Il vient l'expression du débit masse  $Q_m$  :

$$Q_m \triangleq \frac{dm}{dt} = \oint_{M \in S} (\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot dS$$

En définissant le vecteur densité de flux de masse  $\vec{J}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)$ , l'expression du débit masse devient :  $Q_m = \oint_{M \in S} (\vec{J}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}) \cdot dS$

### Equation de continuité

On considère un volume de contrôle fixe quelconque V délimité par une surface fictive fermée S. Par définition, on a :

$$m(t) = \int_{M \in V} (\rho(\vec{x}, t)) \cdot d\tau$$

où dτ est un volume infinitésimal de V.

Cette masse varie dans le temps à travers la surface S, donc : **Mieux expliquer avec le théorème de Reynolds !!!!**

$$\frac{dm}{dt} = - \oint_{M \in S} \rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}}$$

Le signe “moins” vient du fait que  $\vec{S}_{\text{ext}}$  est dirigé vers l’extérieur de la surface  $S$ . Or,  $\frac{dm}{dt}$  peut également être exprimée à partir de la définition de la masse :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{M \in V} \frac{\partial(\rho(\vec{x}, t))}{\partial t} \cdot d\tau$$

Le théorème de Green-Ostrogradski permet d’exprimer une intégrale de surface à une intégrale sur le volume :

$$\frac{dm}{dt} = \int_{M \in V} \frac{\partial(\rho(\vec{x}, t))}{\partial t} \cdot d\tau = \int_{M \in V} -\vec{\nabla}(\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)) \cdot d\tau$$

Donc il vient :

$$\int_{M \in V} \left( \frac{\partial(\rho(\vec{x}, t))}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)) \right) \cdot d\tau = 0 \quad \forall M \in V$$

Il vient finalement l’**équation de continuité** (ou équation de conservation de la masse) :

$$\boxed{\text{div}(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (3)$$

*Remarque* : On peut exprimer l’équation 3 en fonction de la dérivée particulière. En évaluant l’équation 1 avec la masse volumique, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \rho \\ \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{D\rho}{Dt} - (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \rho \end{aligned}$$

En remplaçant dans l’équation 3 on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{D\rho}{Dt} - (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot \rho &= 0 \\ \Rightarrow \rho(\vec{\nabla} \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \rho) + \frac{D\rho}{Dt} - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \rho) &= 0 \end{aligned}$$

Finalement il vient une seconde forme de l’équation 3.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\vec{\nabla} \vec{v}) = 0$$

Si le fluide est **incompressible**, la relation se simplifie :

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0$$

### Conservation de la quantité de mouvement

L'évolution de la quantité de mouvement du volume de contrôle V est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{M \in V} (\rho \cdot \vec{v}) \cdot dV}_{\text{Variation de la QdM dans V}} + \underbrace{\oint_{M \in S} (\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot dS}_{\text{Flux de QdM au travers S}} = \underbrace{\int_{M \in V} \vec{F}_V \cdot dV}_{\text{QdM générée/absorbée par les forces volumiques}} + \underbrace{\int_{M \in S} \vec{F}_S \cdot dS}_{\text{QdM générée/absorbée par les forces surfaciques}}$$

On se place dans le cas où la force gravitationnelle est la seule force à distance. Il vient alors :  $\vec{F}_V = \rho \cdot \vec{g}$ . Egalement, le théorème fondamental de Cauchy nous permet d'obtenir l'expression des forces surfaciques :  $\vec{F}_S = \vec{T}(N, \vec{n}) \cdot dS = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Il vient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{M \in V} (\rho \cdot \vec{v}) \cdot dV + \oint_{M \in S} (\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \int_{M \in V} (\rho \cdot \vec{g}) \cdot dV + \oint_{M \in S} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot dS$$

Afin de continuer le développement, l'utilisation du théorème de la divergence permet d'exprimer les intégrales de surface en intégrale sur le volume. Ainsi :

$$\begin{cases} \oint_{M \in S} (\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \int_{M \in V} (\vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v})) \cdot dV \\ \oint_{M \in S} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}) \cdot dS = \int_{M \in V} (\nabla \underline{\underline{\sigma}}) \cdot dV \end{cases}$$

En remplaçant ces résultats dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{M \in V} (\rho \cdot \vec{v}) \cdot dV + \int_{M \in V} (\nabla(\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n})) \cdot dV = \int_{M \in V} (\rho \cdot \vec{g}) \cdot dV + \int_{M \in V} (\nabla \underline{\underline{\sigma}}) \cdot dV$$

dV étant une valeur arbitraire, on peut le considérer égal pour tous les termes de l'équation :

$$\begin{aligned} \int_{M \in V} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}) - \rho \cdot \vec{g} - \nabla \underline{\underline{\sigma}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}) &= \rho \cdot \vec{g} + \nabla \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned}$$

On développe le terme  $\vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}) = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v})$  :



$$\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}) + \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = \rho \cdot \vec{g} + \nabla \underline{\underline{\sigma}}$$

On remarque la seconde forme de l'équation 3 dans ce développement. Après simplification des termes, il vient **la première loi du mouvement de Cauchy** :

$$\boxed{\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}) + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \cdot \vec{g} + \nabla \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4)$$

Puisque le tenseur de Cauchy est symétrique à coefficients réels, il est diagonalisable et admet trois valeurs propres réelles. Ces valeurs propres sont appelées contraintes principales, orientées selon des vecteurs propres appelés directions principales.

De plus, on peut définir un champ scalaire  $P(\text{vec}(\mathbf{x}), t)$  tel que lorsque le fluide est au repos, il se réduit à la pression statique. Ainsi définit, on peut l'exprimer en fonction du tenseur des contraintes de cauchy :

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \cdot \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}})$$

Il représente la contrainte normale moyenne du fluide.

En appelant  $\underline{\underline{\sigma_d}}$  le tenseur déviateur, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -P(\vec{x}, t) \cdot I + \underline{\underline{\sigma_D}}$$

Où  $\text{trace}(\underline{\underline{\sigma_D}}) = 0$  et  $I$  la matrice identité.

En remplaçant la nouvelle expression du tenseur de Cauchy dans l'équation 4 on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \left( -P(\vec{x}, t) \cdot I + \underline{\underline{\sigma_D}} \right) \\ \Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla}(-P \cdot I) + \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}} \\ \Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \rho \cdot \vec{g} - P \cdot \vec{\nabla} I + I \cdot \vec{\nabla}(-P) + \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}} \end{aligned}$$

Finalement on peut réécrire l'équation 4 pour obtenir l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}}} \quad (5)$$

## Conservation de l'énergie

Considérons l'équation 5 de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}}$$

En multipliant chaque terme par la vitesse  $\vec{v}$ , on obtient le bilan des puissances volumiques :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \rho \cdot \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \vec{v} \cdot \rho \cdot \vec{g} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \cdot \rho \cdot \nabla \vec{v}^2 &= \vec{v} \cdot \rho \cdot \vec{g} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'équation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\rho \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \cdot ||\vec{v}||^2 \right) = -\vec{v} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot (\rho \cdot \vec{g}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \underline{\underline{\sigma_D}}} \quad (6)$$

Cette expression peut être incluse dans l'expression générale de l'énergie massique totale  $e$  d'une particule où :

$$e \hat{=} e_{\text{méca}} + u = e_{\text{cinétique}} + e_{\text{potentielle}} + u$$

Avec  $u$  l'énergie interne de la particule.

En faisant les hypothèses suivantes on peut poser un bilan d'énergie:

- La seule force à distance en présence est le poids :
  - L'énergie potentielle d'une particule de fluide par unité de masse est :  $-\vec{g} \cdot \vec{z}$  avec  $z$  la hauteur,
- Il n'y a pas de réaction chimique, nucléaire ou de production/génération de chaleur au sein du fluide.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \rho \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \vec{v}^2 - \rho \cdot \vec{g} \cdot \vec{z} \right) \cdot dV}_{\text{Variation d'énergie dans V}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_A \left( \rho \cdot u + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \vec{v}^2 - \rho \cdot \vec{z} \cdot \vec{g} \right) \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dA}_{\text{Flux d'énergie à travers A}} = \underbrace{\int_A \left( \vec{q} \cdot \vec{n} \right) \cdot dA}_{\text{Flux de chaleur au travers A}} + \underbrace{\int_A \vec{n} \cdot \left( \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{n} \right) \cdot dA}_{\text{Variation d'énergie due aux forces surfaciques}}$$

Attention ici problème avec  $\tau$  dans la démonstration de cauchy : est-ce un scalaire ? un tenseur ?