11. Stetige Verteilungen & Zufallsvektoren

Yichen Han

18. Januar 2024

Inhalt

Interessant zu überlegen: (Stoff für höhere Semester)
Welche Bias könnte so eine Umfrage haben?
sprich: Die Ergebnisse sind nicht 100% zuverlässig, weil...

Inhalt

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sei $Z = X + Y$ mit $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass Z Gamma-verteilt ist mit $Z \sim \mathcal{G}(\alpha = 2, \beta = \lambda)$.

Aufgabe 1.1

Sei $Z = X + Y$ mit $X, Y \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$. Zeigen Sie, dass Z Gamma-verteilt ist mit $Z \sim \mathcal{G}(\alpha = 2, \beta = \lambda)$.

$$\text{Faltung: } f_Z(z = x + y) = \int f_X(x) f_Y(z - x)\ dx \tag{1}$$

$$\mathcal{E}(\lambda) : f(x) = \lambda \exp\left(-\lambda x\right) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x) \tag{2}$$

$$G(\alpha, \beta) : f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\beta x\right) \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x) \tag{3}$$

$$\Gamma(\alpha) := \alpha!,\ \forall \alpha = 1, 2, 3, \dots \tag{4}$$

Aufgabe 1.2

Zu zeigen: $f_Z(z) = \lambda^2 z \exp(-\lambda z)$ für $z \in \mathbb{R}^+$

Zu zeigen: $f_Z(z) = \lambda^2 z \exp(-\lambda z)$ für $z \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(z-x)f(x)dx &= \int_0^z (\lambda \exp(-\lambda(z-x)))(\lambda \exp(-\lambda x))dx \\
&= \int_0^z \lambda^2 \exp(-\lambda z)dx \\
&= \lambda^2 \exp(-\lambda z) \int_0^z 1dx \\
&= \lambda^2 z \exp(-\lambda z).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.1

Sei die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben als

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 < y \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Was ist der Träger von (X, Y)?
2. Zeigen Sie dass die Randverteilung von X eine Gleichverteilung auf $(0, 1)$ ist.
3. Bestimmen Sie die Randverteilung von Y.
4. Zeigen Sie dass die bedingte Verteilung von $Y|X = x$ eine Gleichverteilung auf $(0, x)$ ist.
5. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sei die gemeinsame Dichte von (X, Y) gegeben als

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 < y \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Was ist der Träger von (X, Y)?
2. Zeigen Sie dass die Randverteilung von X eine Gleichverteilung auf $(0, 1)$ ist.
3. Bestimmen Sie die Randverteilung von Y.
4. Zeigen Sie dass die bedingte Verteilung von $Y|X = x$ eine Gleichverteilung auf $(0, x)$ ist.
5. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von $X|Y = y$.

$$\text{Randverteilung: } f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)\ dx \tag{5}$$

$$\text{bedingte Verteilung: } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \tag{6}$$

Aufgabe 2.2

1. Der Träger ist $\{(x, y) : 0 < y \leq x \wedge 0 < x \leq 1\}$

Aufgabe 2.2

1. Der Träger ist $\{(x, y) : 0 < y \leq x \wedge 0 < x \leq 1\}$
2. Die Randverteilung von X ist

$$f_X(x) \;=\; \int_0^x \frac{1}{x}\, dy \;=\; \frac{1}{x}\,[x-0] \;=\; 1 \qquad \text{für} \quad 0 < x < 1,$$

eine Gleichverteilung auf $(0, 1)$.

1. Der Träger ist $\{(x, y) : 0 < y \leq x \wedge 0 < x \leq 1\}$
2. Die Randverteilung von X ist

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}\,dy = \frac{1}{x}[x - 0] = 1 \qquad \text{für} \quad 0 < x < 1,$$

eine Gleichverteilung auf $(0, 1)$.

3. Die Randverteilung von Y ist

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log(x)]_y^1 = \log\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{für} \quad 0 < y < 1.$$

Aufgabe 2.3

1. Für die bedingte Dichte von Y, gegeben $X = x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1} \quad \text{für} \quad 0 < y \leq x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 < y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

d.h. $Y|X = x$ ist gleichverteilt auf $(0, x)$ ($Y|X \sim \mathcal{U}(0, x)$).

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

1. Für die bedingte Dichte von Y, gegeben $X = x$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{x}}{1} \quad \text{für} \quad 0 < y \leq x \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 < y \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

d.h. $Y|X = x$ ist gleichverteilt auf $(0, x)$ ($Y|X \sim \mathcal{U}(0, x)$).

2. Für die Dichte von X, gegeben $Y = y$ erhält man:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{\frac{1}{x}}{\log(\frac{1}{y})} \quad \text{für} \quad y \leq x < 1 \\ &= \begin{cases} -1/(x\log(y)) & \text{für} \quad y \leq x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

Für die zweidimensionale Standardnormalverteilung finden Sie in Entsprechung zu den Vorlesungs-Folien

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho)^2}\right)$$

als Dichte.

(a) Leiten Sie diese Gleichung aus der allgemeinen Form her:

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

Beachten Sie dabei, dass es sich bei $\boldsymbol{z}$ und $\boldsymbol{\mu}$ um Vektoren der Dimension d handelt.

Var(X) Cov(X,Y)

Im Fall $d = 2$ haben wir $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ als zweidimensionale

Kovarianzmatrix. Cov(Y,X) Var(Y)

Aufgabe 3.2

$$(X, Y) =: \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ mit } X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

$$(X, Y) =: \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ mit } X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right) \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{z}\right) \end{aligned}$$

Definition: Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Das Produkt AB ist definiert als die $m \times p$-Matrix C, wobei jedes Element c_{ij} gegeben ist durch:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Beispiel: Vektor-Matrix-Multiplikation
Betrachten Sie den Vektor $\mathbf{x}$ als $1 \times n$-Matrix und A als $n \times m$-Matrix. Die Multiplikation $\mathbf{x}A$ ist definiert als:

$$\mathbf{x}A = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{k1}, \sum_{k=1}^{n} x_k a_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} x_k a_{km} \right)$$

Linear Algebra 2: Inverse und Determinante für 2×2-Matrix

Determinante: Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Die Determinante von A ist definiert als:

$$\det(A) = ad - bc$$

Inverse: Die Inverse einer 2×2-Matrix A, vorausgesetzt, dass $\det(A) \neq 0$, ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beispiel: Betrachten Sie die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Die Determinante von B ist $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Die Inverse von B, falls $\det(B) \neq 0$, ist:

$$B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$(X, Y) =: \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ mit } X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det(\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{z}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$(X, Y) =: \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ mit } X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{z}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} x - \rho y & y - \rho x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

$$(X,Y) =: \boldsymbol{Z} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}),\ \text{mit } X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{z}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\begin{pmatrix} x-\rho y & y-\rho x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \\
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho)^2}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

(b) Wie ist der Parameter ρ zu interpretieren?

Aufgabe 3.3

(b) Wie ist der Parameter ρ zu interpretieren?

Der Parameter ρ gibt die **Kovarianz** zwischen den Zufallskomponenten / ZV X, Y an.

(b) Wie ist der Parameter ρ zu interpretieren?

Der Parameter ρ gibt die **Kovarianz** zwischen den Zufallskomponenten / ZV X, Y an.

(c) Zeigen Sie für $d = 2$ dass aus $\rho = 0$ die stochastische Unabhängigkeit von X und Y folgt.

(b) Wie ist der Parameter ρ zu interpretieren?

Der Parameter ρ gibt die **Kovarianz** zwischen den Zufallskomponenten / ZV X, Y an.

(c) Zeigen Sie für $d = 2$ dass aus $\rho = 0$ die stochastische Unabhängigkeit von X und Y folgt.

$$X \perp Y \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$\begin{aligned} f_X(x) f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{-x^2 - y^2}{2}\right) \\ &\overset{\rho=0}{=} f_{X,Y}(x,y) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

1. Bestimmen Sie den Erwartungswert des täglichen Gesamtumsatzes.
2. Bestimmen Sie die Varianz des täglichen Gesamtumsatzes.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.

Aufgabe 4.1

Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

1. Bestimmen Sie den Erwartungswert des täglichen Gesamtumsatzes.
2. Bestimmen Sie die Varianz des täglichen Gesamtumsatzes.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.

$$\text{Gesamtumsatz: } U = \Sigma_{i=1}^{N} U_i, \text{ mit } U|(N = n) \sim \mathcal{G}(n\alpha, \beta)$$

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Sei $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ die Poisson-verteilte Anzahl an Kund:innen an einem gegebenen Tag. Seien die Umsätze U_i für die i-te Person des Tages unabhängig und identisch Gamma-verteilt: $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{G}(\alpha, \beta)$

1. Bestimmen Sie den Erwartungswert des täglichen Gesamtumsatzes.
2. Bestimmen Sie die Varianz des täglichen Gesamtumsatzes.

Hinweis: Die Summe von n unabhängigen $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$-Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}(n\alpha, \beta)$-verteilt.

$$\text{Gesamtumsatz: } U = \Sigma_{i=1}^{N} U_i, \text{ mit } U|(N = n) \sim \mathcal{G}(n\alpha, \beta)$$

$$E(U|(N)) = \frac{N\alpha}{\beta}$$

Satz vom iterierten Erwartungswert:

$$E(U) = E_N(E(U|N)) = E_N(\frac{N\alpha}{\beta}) = \frac{\alpha}{\beta} E(N) = \frac{\alpha}{\beta}\lambda$$

Aufgabe 4.2

$$Var(U|N) = \frac{N\alpha}{\beta^2}$$

Satz von der totalen Varianz:

$$\begin{aligned} Var(U) &= E(Var(U|N)) + Var(E(U|N)) \\ &= E(\tfrac{N\alpha}{\beta^2}) + Var(\tfrac{N\alpha}{\beta}) \\ &= \frac{\lambda\alpha}{\beta^2} + \frac{\lambda\alpha^2}{\beta^2} \\ &= \frac{\lambda\alpha(1+\alpha)}{\beta^2} \end{aligned}$$

Varianz quadratisch!

Aufgabe 4.3

Aus der Angabe können wir schließen, dass $E(N) = 120 = \lambda$ und $E(U_i) = 10 = \frac{\alpha}{\beta}$ und $Var(U_i) = 10 = \frac{\alpha}{\beta^2}$, also $\alpha = 10; \beta = 1$. Also ist hier $E(U) = 1200$ und $Var(U) = 13200$
Siehe R Simulation.