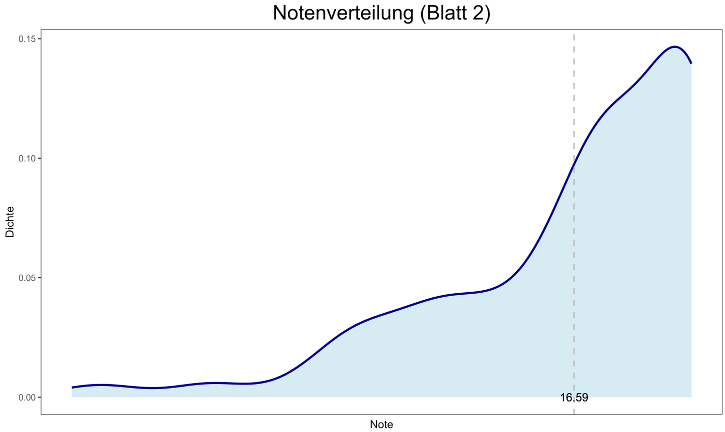
2. Übung: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Yichen Han

2. November 2023

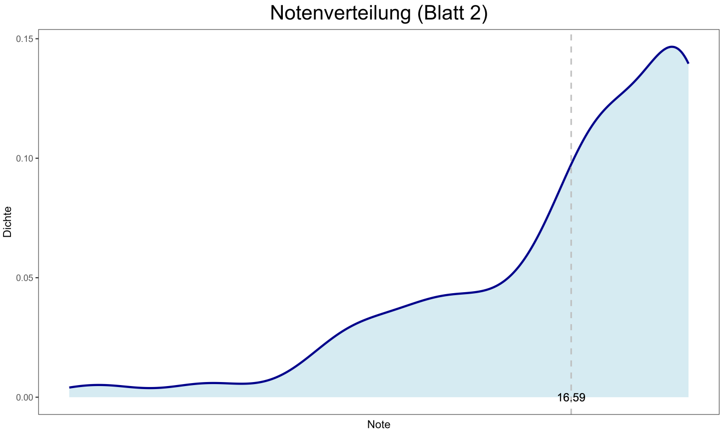
Feedback Korrektur

Feedback Korrektur



falsche Antwort $\neq$ 0 Pkt.
richtige Antwort $\neq$ alle Pkt.

Feedback Korrektur



falsche Antwort $\neq$ 0 Pkt.
richtige Antwort $\neq$ alle Pkt.
Ziel: Aufgaben richtig und sinnvoll lösen, ohne übermäßigen Aufwand.

Inhalt

Wiederholungsquiz

- Welche der folgenden Aussagen wird nicht von den Kolmogorov-Axiomen besagt? (A, B, C)
- Richtig oder falsch? $A \perp B \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Richtig oder falsch? Disjunkte Ereignisse sind auch unabhängig.
- Richtig oder falsch? Aus "stochastisch unabhängig" folgt "bedingt stochastisch unabhängig". D.h. $A \perp B \Rightarrow A \perp B | C$, mit C ein beliebiges Ereignis in Ω.
- Richtig oder falsch? Mit dem Satz von Bayes kann man mit neu erhobenen Daten überprüfen, wie plausibel eine aus vorherigen Daten generierten Annahme ist.

Quiz 3

Formeln 1

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1}$$

Kolmogorov-Axiome

$$\begin{aligned} &\forall A \subseteq \Omega,\ \ P(A) \geq 0 \\ &P(\Omega) = 1 \\ &P(A \cup B) = P(A) + P(B),\ \ A, B\ disjunkt \end{aligned} \tag{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3}$$

Satz von der totalen W.keit

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \tag{4}$$

Formeln 2

Siebformel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{5}$$

Stochastische Unabhängigkeit

$$A \perp B \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{6}$$

Bedingte Unabhängigkeit

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C) \tag{7}$$

Satz von Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \tag{8}$$

Disjunkt vs. Unabhängig:

Disjunktheit (mutual exklusiv)

- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Unabhängigkeit

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

Frequentists vs. Bayesians (Selbststudium)

Beispiel: Würfelwurf

	Frequentists	**Bayesians**
Parameter	keine Zufallsvariable	Zufallsvariable
Ziel	Entscheidung	Überzeugung
Antwort	r oder f	weder r noch f

Inhalt

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Aufgabe 1 (benotet)

Grundlegende Kombinatorik

5 Tage, 5 Mitglieder

1. 5 Möglichkeiten pro Tag; $5^5 = 3125$

Aufgabe 1 (benotet)

Grundlegende Kombinatorik
5 Tage, 5 Mitglieder

1. 5 Möglichkeiten pro Tag; $5^5 = 3125$
2. jeden Tag eine Möglichkeit weniger; $5! = 120$

Grundlegende Kombinatorik
5 Tage, 5 Mitglieder

1. 5 Möglichkeiten pro Tag; $5^5 = 3125$
2. jeden Tag eine Möglichkeit weniger; $5! = 120$
3. B wählt ohne Reihenfolge 2 Tage aus, dann 3 Personen jeweils 1 Tag; $\binom{5}{2} \cdot 3! = 60$

Grundlegende Kombinatorik
5 Tage, 5 Mitglieder

1. 5 Möglichkeiten pro Tag; $5^5 = 3125$
2. jeden Tag eine Möglichkeit weniger; $5! = 120$
3. B wählt ohne Reihenfolge 2 Tage aus, dann 3 Personen jeweils 1 Tag; $\binom{5}{2} \cdot 3! = 60$
4. B hat 6 Möglichkeiten: $(1,3),(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,5)$, und dann 3 Personen jeweils 1 Tag; $6 \cdot 3! = 36$
   Alternativ:
   4 Möglichkeiten fürs Aufeinanderfolgen (BBXXX, XBBXX, XXBBX, XXXBB), mit 3 Personen jeweils 1 Tag; $\binom{5}{2} \cdot 3! - 4 \cdot 3! = 36$

Kombinatorik und Laplace-W.keit

3 Sonderpreise, 6 Teilnehmende, 2 Autos (Kapazität 4)

1. $A :=$ "3 unterschiedliche Gewinner:innen"

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \cancel{\frac{\binom{6}{3}}{6^3}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} \approx 0.56$$

Aufgabe 2 (benotet)

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Kombinatorik und Laplace-W.keit

3 Sonderpreise, 6 Teilnehmende, 2 Autos (Kapazität 4)

1. $A :=$ "3 unterschiedliche Gewinner:innen"

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} \approx 0.56$$

2. 2:4 oder 3:3

$$\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{Autos}}\binom{6}{2}\binom{4}{4} + \binom{6}{3}\binom{3}{3} = 2 \cdot 15 + 20 = 50$$

Aufgabe 2 (benotet)

LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Kombinatorik und Laplace-W.keit

3 Sonderpreise, 6 Teilnehmende, 2 Autos (Kapazität 4)

1. $A :=$ "3 unterschiedliche Gewinner:innen"

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} \approx 0.56$$

2. 2:4 oder 3:3

$$\binom{2}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{4} + \binom{6}{3}\binom{3}{3} = 2 \cdot 15 + 20 = 50$$

3. Bedingt? Laplace! $C :=$ "Alle 3 Gewinner:innen im selben Auto", Ω wie in (b).

Loser Gw LoS Auto Loser LS

$$|C| = \binom{3}{2}\binom{3}{3}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{3}{3}\binom{3}{3} + \binom{3}{1}\binom{3}{3}\binom{2}{2} = 8$$

Loser Gw. Gw

$\Rightarrow P(C) = \frac{8}{50} = 0.16$

Aufgabe 3

z.Z.: P ist Wahrscheinlichkeitsmaß
Schritt für Schritt jede Eigenschaft validieren.

z.Z.: P ist Wahrscheinlichkeitsmaß
Schritt für Schritt jede Eigenschaft validieren.

A1) $P(A) = \sum_{i:\ \omega_i \in A} p_i \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega,$ da $p_i = P(\{\omega_i\}) \in [0,1] \qquad \checkmark$

A2) $P(\Omega) = \sum_{i:\ \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad \checkmark$

A3) betrachte zwei disjunkte Mengen $A, B \subset \Omega$:

$$P(A \cup B) = \sum_{w_i \in A \cup B} p_i$$

$$= \sum_{w_i \in A \vee w_i \in B} p_i = \sum_{w_i \in A} p_i + \sum_{w_i \in B} p_i - \overbrace{\underbrace{\sum_{w_i \in A \cap B} p_i}_{\emptyset}}^{0}$$

$$= \sum_{A} p_i + \sum_{B} p_i = P(A) + P(B)$$

z.Z.: P ist Wahrscheinlichkeitsmaß

Schritt für Schritt jede Eigenschaft validieren.

A1) $P(A) = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega, \text{ da } p_i = P(\{\omega_i\}) \in [0,1] \qquad \surd$

A2) $P(\Omega) = \sum_{i:\, \omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \qquad \surd$

A3) betrachte zwei disjunkte Mengen $A, B \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \sum_{i:\, \omega_i \in (A \cup B)} p_i = \sum_{i:\, \omega_i \in A \,\vee\, \omega_i \in B} p_i \\ &= \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i + \sum_{i:\, \omega_i \in B} p_i - \underbrace{\sum_{i:\, \omega_i \in A \,\wedge\, \omega_i \in B} p_i}_{= \sum_{i \in \varnothing} p_i = 0} = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Quiz 4:

Aufgabe 4

Quiz 4:

1. $P(A) = P(\overline{B}) \Rightarrow \overline{A} = B$
   Falsch. Gegenbeispiel: $\Omega = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, B = \{1\}$

Aufgabe 4

Quiz 4:

1. $P(A) = P(\overline{B}) \Rightarrow \overline{A} = B$
   Falsch. Gegenbeispiel: $\Omega = \{1,2,3\}, A = \{1,2\}, B = \{1\}$
2. $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
   Wahr. $0 \leq$
   Lösung 1 (Einschachtelung): $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$
   Lösung 2 (Bayes): $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0$

Aufgabe 4

Quiz 4:

1. $P(A) = P(\overline{B}) \Rightarrow \overline{A} = B$
   Falsch. Gegenbeispiel: $\Omega = \{1,2,3\}, A = \{1,2\}, B = \{1\}$
2. $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
   Wahr.
   Lösung 1 (Einschachtelung): $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$
   Lösung 2 (Bayes): $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0$
3. Berechne c für $P(\{\omega_i\}) = \frac{c}{n!}, \Omega = \mathbb{Z}_0^+$
   A1 $\Rightarrow c \geq 0$
   A2:

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{k!} = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = c \cdot e \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow c = e^{-1}$$

Aufgabe 5.1

$P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/3$, z.Z.: $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

$P(A) = 3/4,\ P(B) = 1/3$, z.Z.: $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \\
&= 3/4 + 1/3 - P(A \cap B) \leq 1 \\
&= 13/12 - P(A \cap B) \leq 1 \\
\Longrightarrow \quad P(A \cap B) &\geq 13/12 - 1 = 1/12 \quad \text{(untere Grenze)}
\end{aligned}
$$

$P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

"=" gdw. $B \subset A \Rightarrow P(B)$

Aufgabe 5.1

$P(A) = 3/4,\ P(B) = 1/3$, z.Z.: $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \\ &= 3/4 + 1/3 - P(A \cap B) \leq 1 \\ &= 13/12 - P(A \cap B) \leq 1 \\ \Longrightarrow \quad P(A \cap B) &\geq 13/12 - 1 = 1/12 \quad \text{(untere Grenze)} \end{aligned}$$

$P(A \cap B)$ ist maximal, falls $B \subset A$, d.h. wenn B eintritt ist auch A erfüllt :

$$\Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P(B) = 1/3 \quad \text{(obere Grenze)}$$

$$\text{Insgesamt gilt somit:} \quad \frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

Aufgabe 5.2

$P(A) = 3/4$, $P(B) = 1/3$, Wertebereich von $P(A \cup B)$?

Aufgabe 5.2

$P(A) = 3/4,\ P(B) = 1/3$, Wertebereich von $P(A \cup B)$?

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\geq 3/4 + 1/3 - 1/3 = 3/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\leq 3/4 + 1/3 - 1/12 = 1 \end{aligned}$$

somit: $\quad \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$

Zusatzaufgabe: Bayes in Medizin

Angenommen, eine seltene Krankheit betrifft 1 von 1000 Personen in einer Bevölkerung. Ein Test auf diese Krankheit ist zu 99% zuverlässig, d.h., die Wahrscheinlichkeit, dass eine kranke Person ein positives Testergebnis erhält, beträgt 99%, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine gesunde Person ein negatives Testergebnis erhält, beträgt ebenfalls 99%.

Wenn eine Person zufällig ausgewählt wird und ein positives Testergebnis erhält, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich die Krankheit hat?

Abbildung: Quiz 5

Zusatzaufgabe

$K :=$ "Person ist krank."
$T :=$ "Person wird als positiv getestet."
Wir wissen:

$$P(K) = 1 : 1000 = 0.001$$
$$P(T|K) = P(\overline{T}|\overline{K}) = 0.99$$
$$P(T|\overline{K}) = 0.01$$
$$P(\overline{K}) = 0.999$$

Wir suchen: $P(K|T)$. Satz von Bayes: $P(K|T) = \frac{P(T|K) \cdot P(K)}{P(T)}$
Satz v. tot. W.keit:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|K)P(K) + P(T|\overline{K})P(\overline{K}) \\ &= 0.99 \times 0.001 + 0.01 \times 0.999 = 0.01098 \end{aligned}$$

$$P(K|T) = \frac{0.99 \times 0.001}{0.01098} \approx 9.02\%$$