Chapter 1

高斯消去法

1.1 引言

1.2 高斯消去法举例

Exercise 1.2.1
用消元和反向代入解方程组

$$
\begin{aligned}
2u-3v &= 3 && (1)\\
4u-5v+w &= 7 && (2)\\
2u-v-3w &= 5 && (3)
\end{aligned}
$$

写出主元素，列出从其余的行中减去一行倍数的三个运算.

Solution 1.2.1
(2)-(1)×2:

$$v+w=1. \tag{4}$$

(3)-(1)×1:

$$2v-3w=2. \tag{5}$$

联立(1),(4),(5):

$$
\begin{aligned}
2u-3v &= 3\\
v+w &= 1\\
2v-3w &= 2
\end{aligned}
$$

(5)-(4)×2:

$$-5w=0. \tag{6}$$

联立(1),(4),(6):

$$\begin{aligned} 2u-3v \quad &= 3 \\ v+w &= 1 \\ -5w &= 0. \end{aligned}$$

解得 $w=0, v=1, u=3$. 主元素分别为 $2, 1, -5$.

Exercise 1.2.2

解方程组

$$2u-v \qquad = 0 \tag{1}$$
$$-u+2v-w \quad = 0 \tag{2}$$
$$-v+2w-z = 0 \tag{3}$$
$$-w+2z = 5 \tag{4}$$

Solution 1.2.2

(2)-(1)$\times -\frac{1}{2}$:

$$\frac{3}{2}v-w=0. \tag{5}$$

联立(1),(5),(3),(4):

$$\begin{aligned} 2u-v \qquad &= 0 \\ \frac{3}{2}v-w \quad &= 0 \\ -v+2w-z &= 0 \\ -w+2z &= 5. \end{aligned}$$

(3)-(5)$\times\frac{-2}{3}$:

$$\frac{4}{3}w-z=0. \tag{6}$$

联立 (1),(5),(6),(4):

$$\begin{aligned} 2u-v \qquad &= 0 \\ \frac{3}{2}v-w \quad &= 0 \\ \frac{4}{3}w-z &= 0 \\ -w+2z &= 5. \end{aligned}$$

(4)-(6)$\times\frac{-3}{4}$:

$$\frac{5}{4}z=5,$$

解得 $z=4, w=3, v=2, u=1$.

Exercise 1.2.3
试用消去法解方程组

$$u+v+w=-2 \tag{1}$$
$$3u+3v-w=6 \tag{2}$$
$$u-v+w=-1 \tag{3}$$

遇到为零主元素时，请将它所在方程与下面的方程对调. 然后继续进行消去. 问：第三个方程中 v 的系数 -1 换为什么数，消去法将不能进行.

Solution 1.2.3
(2)-(1)×3:

$$0\cdot u+0\cdot v-4w=12. \tag{4}$$

(3)-(1):

$$0\cdot u-2v+0\cdot w=1. \tag{5}$$

联立方程(5)和方程(4), 得

$$\begin{aligned}0\cdot u-2v+0\cdot w&=1\\ 0\cdot u+0\cdot v-4w&=12.\end{aligned}$$

解得 $v=\frac{-1}{2}$,$w=-3$,$u=\frac{3}{2}$. 将第三个方程中 v 的系数 -1 换为 1, 消去法将不能进行.

Exercise 1.2.4
$n=2$ 时 $P=2$. 试列出用消去法解方程组

$$au+bv=0 \tag{1}$$
$$cu+dv=1 \tag{2}$$

时，对左端所进行的运算.

Solution 1.2.4

- 当 $a\neq 0$ 时，(2)-(1)×$\frac{c}{a}$:

  $$(d-\frac{bc}{a})v=1. \tag{3}$$

  联立方程(1),(3), 可得

  $$\begin{aligned}au+bv&=0\\ (d-\frac{bc}{a})v&=1.\end{aligned}$$

  若 $ad-bc=0$, 则 v 无解. 即当 $a\neq 0, ad-bc=0$ 时, 方程组无解；若 $ad-bc\neq 0$, 则 $v=\frac{a}{ad-bc}$,$u=\frac{-b}{ad-bc}$. 即当 $a\neq 0, ad-bc\neq 0$ 时, 方程组有唯一解 $u=\frac{-b}{ad-bc}$,$v=\frac{a}{ad-bc}$.

- 当 $a = 0$ 时, 若 $c \neq 0$, 则交换方程(1)和方程 (2)的顺序, 得到

$$\begin{aligned} cu + dv &= 1 \\ bv &= 0 \end{aligned}$$

此时若 $b \neq 0$, 则 $v = 0$,$u = \frac{1}{c}$; 若 $b = 0$, 则方程组有无数个解.

反之，若 $c = 0, d = 0$, 则无解. 若 $c = 0, d \neq 0, b = 0$, 则有无穷解. 若 $c = 0, d \neq 0, b \neq 0$, 无解.

Exercise 1.2.5

设解线性方程组所需运算次数为 $\frac{n^3}{3}$, 计算机的速度为每秒一百万次，收费标准为每小时 1000 元. 试问化 1 元钱可以解多大的方程组，化 1000 元可以解多大的方程组？

Solution 1.2.5

花一元钱，可以使用 $\frac{1}{1000}$ 小时，即 3.6 秒. 此时计算机可以算 3.6×10^7 次. 由 $\frac{n^3}{3} = 3.6 \times 10^7$ 解得 $n \approx 476$. 花 1000 元, 可以使用 1 小时，即 3600 秒. 此时计算机可以算 3.6×10^{10} 次. 由 $\frac{n^3}{3} = 3.6 \times 10^{10}$, 解得 $n \approx 4762$.

Exercise 1.2.6

略.

Exercise 1.2.7

试用消去法解

$$u + v + w = 6 \tag{1}$$
$$u + 2v + 2w = 11 \tag{2}$$
$$2u + 3v - 4w = 3 \tag{3}$$

Solution 1.2.7

(2)-(1):

$$v + w = 5. \tag{4}$$

(3)-(1)×2:

$$v - 6w = -9. \tag{5}$$

联立方程(1),(4),(5), 可得

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ v + w &= 5 \\ v - 6w &= -9 \end{aligned}$$

(5)-(4):

$$-7w = -14. \tag{6}$$

联立方程(1),(4),(6), 可得

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ v + w &= 5 \\ -7w &= -14. \end{aligned}$$

解得 $w = 2, v = 3, u = 1$.

1.3 矩阵和矩阵乘法

Exercise 1.3.1
先用 A 的单个元素再利用 A 的整列计算乘积

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.1
利用 A 的单个元素计算乘积略. 利用 A 的整列计算乘积：

$$Ax = 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.3.2
试计算乘积

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

如果 A 是 $m \times n$ 矩阵，x 是 n 维向量，试问乘积 Ax 的行数列数各为几？

Solution 1.3.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \times (-4) + 1 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \end{pmatrix}.$$

如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，x 是 n 维向量，则 Ax 的行数为 m 行, 列数为 1 列.

Exercise 1.3.3
假定某年年初与年末相比较

- 原来住在美国加州的人中 80% 留在加州，20% 迁出加州.
- 原来住美国国内加州以外的人中 90% 仍留在加州以外，10% 迁入加州.

试根据以上两条将下列问题用“矩阵形式”表达出来，并求解.

- 年初美国加州内外人数分别为 30 和 200(单位百万，下同), 问年末州内外人数各若干？
- 问年初人口是怎样一种分布时，年末人口分布不变，换句话说，要求年末时加州内外人口数 u,v 与年初时相同，年初时 u 和 v 应是多少？

Solution 1.3.3
设年初加州人口为 a_1, 美国国内加州之外的人口为 b_1. 则在年末，加州人口 a_2 为

$$a_2 = 0.8a_1 + 0.1b_1,$$

加州之外的人口 b_2 为

$$b_2 = 0.2a_1 + 0.9b_1.$$

写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

- 当 $a_1 = 30, b_1 = 200$ 时，易得

  $$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 186 \end{pmatrix}.$$

  所以年末加州内外人口分别为 44 万和 186 万.

- 年末人口分布不变，意味着

  $$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix},$$

  即

  $$\begin{pmatrix} 0.8-1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  解得 $b_1 = 2a_1$. 即当年初美国国内加州外人口是加州内人口的两倍时，年末人口分布不变. 这在直观上也是好理解的.

Exercise 1.3.4
略.

Exercise 1.3.5
试求 E 与 A 的乘积

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.5

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercise 1.3.6
试求 E 和 A 的积

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.6
我们先来确定矩阵 EA 的第一列:

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

再确定矩阵 EA 的第二列：

$$1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

最后确定矩阵 EA 的第三列:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

所以矩阵 EA 为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.3.7

试将 1×2 矩阵 $E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix}$ 与 2×1 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 相乘, 当 E 是 $l \times m$ 矩阵，A 是 $m \times n$ 矩阵时，为得到乘积 EA 所需进行的单个乘法为 lmn 个. 试说明理由.

Solution 1.3.7

$$EA = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 1 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

每确定矩阵 EA 的特定的一列都需要乘 ml 次乘法，共需要确定 n 列，因此为了得到矩阵 EA 需要 lmn 次乘法.

Exercise 1.3.8

试将下面的 3×2 矩阵 E 与 2×1 矩阵 A 相乘

$$E = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.8

$$EA = 2 \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.3.9

试对下面的 A, B, C 验证结合律

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.9
与其验证矩阵乘法的结合律对于特定的矩阵成立，不如来理解矩阵乘法的本质. 矩阵乘法，其实就是从线性映射的复合而来的. 以 2×2 矩阵为例, 设 $\alpha=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一组有序基底 (ordered basis), 向量 $\mathbf{v}$ 在该有序基下的坐标为 (x,y), 即 $[\mathbf{v}]^\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. 矩阵

$$[T_1]^\alpha_\alpha=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},[T_2]^\alpha_\alpha=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}.$$

向量 $\mathbf{v}$ 在矩阵 $[T_1]^\alpha_\alpha$ 的作用下变成的向量在有序基 α 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\ a_{21}x+a_{22}y\end{pmatrix}. \tag{1}$$

从基底的观点来看, 矩阵 $[T_1]^\alpha_\alpha$ 把基向量 $\mathbf{e}_1$ 变为 $a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2$, 把基向量 $\mathbf{e}_2$ 变为 $a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2$, 用表格表示即

$[T_1]^\alpha_\alpha$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	a_{11}	a_{12}
$\mathbf{e}_2$	a_{21}	a_{22}

所以矩阵 $[T_1]^\alpha_\alpha$ 把向量 $\mathbf{v}$ 变为

$$\mathbf{v}'=x(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2)+y(a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2)=(a_{11}x+a_{12}y)\mathbf{e}_1+(a_{21}x+a_{22}y)\mathbf{e}_2,$$

这就是矩阵表达式(1)的线性变换解释.

这样，就可以从线性变换的观点来理解线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=c_1\\ a_{21}x+a_{22}y=c_2\end{cases},$$

意思就是，求满足条件的向量 $\mathbf{v}$，使得向量 $\mathbf{v}$ 经过线性映射 $[T_1]^\alpha_\alpha$ 的作用后，会变成向量 $c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2$.

如果向量 $\mathbf{v}$ 先经过矩阵 $[T_1]^\alpha_\alpha$ 的作用, 变成向量 $\mathbf{v}'$, 向量 $\mathbf{v}'$ 再经过矩阵 $[T_2]^\alpha_\alpha$ 的作用，变为向量 $\mathbf{v}''$. 那么向量 $\mathbf{v}''$ 在有序基 α 下的坐标是什么样的呢？经过简单的心算，可以得到如下表格

$[T_2]^\alpha_\alpha\circ[T_1]^\alpha_\alpha$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}$	$b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}$
$\mathbf{e}_2$	$b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}$	$b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}$

这符合矩阵 $[T_2]^\alpha_\alpha[T_1]^\alpha_\alpha$ 的乘法规则. 既然矩阵的乘法无非就是线性变换的复合，而映射的复合满足结合律，因此矩阵的乘法自然也满足结合律.

Exercise 1.3.10

试证，如果 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 与矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{和} C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

相乘时都可交换，则 A 必为单位矩阵的倍数，即 $a = d, b = c = 0$. 再证这样的 A 与任何 2×2 矩阵相乘时都是可交换的，也即只有这样的矩阵才具有这种性质.

Solution 1.3.10

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见，若 $AB = BA$, 则 $b = c = 0$.

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}, CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见，若 $AC = CA$, 则 $c = 0, d = 1$. 若同时满足 $AB = BA, AC = CA$, 则 $a = d, b = c = 0$. 可见，$A = kI$, 其中 I 是单位矩阵. 而且，容易验证，此时对于任意 2×2 矩阵 M 来说，$AM = MA = kM$.

Exercise 1.3.11

试举出具有下列性质的 2×2 矩阵

- $A^2 = -I$,A 的元素都是实数;
- $B^2 = 0, B \neq 0$;
- $CD = -DC$,$CD \neq 0$
- $EF = 0$,E, F 的元素全都不为零.

Solution 1.3.11

- $$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- 书上给出的答案是 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. 我能提供的是对 $CD = -DC$ 的解释. 不妨设 C, D 都是可逆矩阵，则 $D = C^{-1}(-D)C$. 即 D 和 $-D$ 是相似矩阵. 即要选取一个线性变换和两个不同的基底，这个线性变换在两个不同基底下的矩阵是相反矩阵.

-
$$E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.3.12
问下列命题成立否，不成立的请举例

- 若 B 的一三两列相同，则 AB 的一三两列也相同.
- 若 B 的一三两行相同，则 AB 的一三两行也相同.
- 如果 A 的一三两行相同，则 AB 的一三两行也相同.
- $(AB)^2=A^2B^2$.

Solution 1.3.12

- 对.
- 错. 反例 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 时,$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
- 对
- 错.

Exercise 1.3.13
AB 的第一行是 B 的所有行的线性组合，问这一线性组合的权是什么，试对下面的 A,B 写出 AB 的第一行

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.13
下面我们写出 AB 的第一行：

$$2\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\end{pmatrix}.$$

这就是矩阵 AB 的第一行. 可见,这一线性组合的权是矩阵 A 第一行的各个系数.

除此之外，我们再附加地谈谈. 可以从三个不同的角度来理解矩阵乘法. 设 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有序基为 $\alpha=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$,$m$ 维向量空间 $\mathbf{R}^m$ 中的有序基为 $\beta=(w_1,w_2,\cdots,w_m)$,$p$ 维向量空间 $\mathbf{R}^p$ 中的有序基为 $\gamma=$

$(r_1, r_2, \cdots, r_p)$.T_1 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射，T_2 是从 $\mathbf{R}^m$ 到 $\mathbf{R}^p$ 的线性映射. 设矩阵

$$[T_1]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$[T_2]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$$

那么该从哪三个角度来理解矩阵乘法 $[T_2]_\beta^\gamma [T_1]_\alpha^\beta$ 呢？

- 第一个角度是我熟知的. 即把关注点放在矩阵 $[T_2]_\beta^\gamma [T_1]_\alpha^\beta$ 的各个项上. 矩阵 $[T_2]_\beta^\gamma [T_1]_\alpha^\beta$ 一共有 np 项, 第 i 行第 j 项记为 c_{ij}, 它的意思是线性映射 $T_2 \circ T_1$ 把 $\mathbf{R}^n$ 中的基向量 v_j 映射成 c_{ij} 个 $\mathbf{R}^p$ 中的基向量 r_i.c_{ij} 的确定方法是熟知的，即

$$c_{ij} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{im}a_{mj}.$$

- 第二个角度是，把关注点放在矩阵的列上. 线性映射 T_1 把 v_j 转化成 a_{1j} 个 w_1, 线性映射 T_2 把 w_1 转化成 $\mathbf{R}^p$ 中的列向量 $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$.. 线性映射 T_1 把 v_j 转化成 a_{2j} 个 w_2, 线性映射 T_2 把 w_2 转化成 $\mathbf{R}^p$ 中的列向量 $\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{p2} \end{pmatrix}$,$\cdots$, 直到线性映射 T_1 把 v_j 转化成 a_{mj} 个 w_m, 线性映射 T_2 把 w_m 转化成 $\mathbf{R}^p$ 中的列向量 $\begin{pmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ \vdots \\ b_{pm} \end{pmatrix}$. 把所有这些列向量相加，得到的就是矩阵 $[T_2]_\beta^\gamma [T_1]_\alpha^\beta$ 的第 j 列.

- 第三个角度是，把关注点放在矩阵的行上. 每个基向量 r_i 都接受 b_{i1} 个 w_1, 而每个 w_1 都接受一个行向量 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n})$. 每个基向量 r_i 都接受 b_{i2} 个 w_2, 而每个 w_2 都接受一个行向量 $(a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n})$,$\cdots$, 每个基向量 r_i 都接受 b_{im} 个 w_m, 而每个 w_m 都接受一个行向量 $(a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$. 把所有这些行向量相加，就得到了矩阵 $[T_2]_\beta^\gamma [T_1]_\alpha^\beta$ 的第 i 行.

1.4 高斯消去法等价于分解为三角矩阵

Exercise 1.4.1
试用 L 乘 (12) 中的矩阵，以验证它是 L 的逆矩阵 L^{-1}. 注意，能够直接写出的是 L, 不是 L^{-1}.

Solution 1.4.1
具体的验证是简单的，因此略去.

Exercise 1.4.2
试用消去法求下列两个 A 的 L 和 U

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\8&7\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}.$$

Solution 1.4.2

$$\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\8&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}2&1\\8&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}.$$

同样，

$$\begin{pmatrix}1&0\\-8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

所以，

$$\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-8&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.4.3
试将下列方程组中的 A 分解为 LU, 并写出消去过程之后的上三角方程组 $Ux=c$.

$$Ax=\begin{pmatrix}2&3&3\\0&5&7\\6&9&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Solution 1.4.3

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&3\\0&5&7\\6&9&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}. \tag{1}$$

即

$$\begin{pmatrix}2&3&3\\0&5&7\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}. \tag{2}$$

可见，

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&3&3\\0&5&7\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&3\\0&5&7\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

而消去之后的上三角方程组就是方程(2).

Exercise 1.4.4

假定主元素都不为零，试求出一般 2×2 矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的分解式 LDU.

Solution 1.4.4

首先对矩阵 A 进行 LU 分解. 由于

$$\begin{pmatrix}1&0\\\frac{-c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&d-\frac{bc}{a}\end{pmatrix},$$

因此

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&d-\frac{bc}{a}\end{pmatrix}.$$

可见，

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{c}{a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\0&\frac{ad-bc}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{b}{a}\\0&1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.4.5

已知

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}.$$

试先求出因子 L,D,U, 再求出中间向量 c, 最后求出 $Ax=b$ 的解.

Solution 1.4.5

先将矩阵进行 LDU 分解.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&\frac{3}{2}&-1\\0&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

既然得到了 $A = LU$, 现在来解线性方程组 $Ax = b$. 即解 $(LU)x = b$, 即解 $L(Ux) = b$. 令 $Ux = c$, 于是先解 $Lc = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

解得 $c = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. 这样就完成了正向消去. 然后进行反向代入，即解方程组 $Ux = c$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

解得 $x = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -1 \\ \frac{-9}{2} \end{pmatrix}$.

Exercise 1.4.6

系数矩阵 A 相同的两个 $n = 150$ 阶方程组，解第二个所用的计算机时间是第一个的 $\frac{1}{50}$, 为什么？

Solution 1.4.6

当第一次解线性方程组时，需要将矩阵 A 进行 LU 分解. 当 A 是 n 阶矩阵时，对 A 进行 LU 分解需要进行 $n(n-1)+(n-1)(n-2)+\cdots+2\times 1 = \frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}$ 乘法.

然后进行正向消去，需要进行 $0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$ 次乘法. 最后进行反向代入，需要进行 $1+2+\cdots+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ 次乘法. 可见，正向消去和反向代入总共需要进行 n^2 次乘法.

而只有对矩阵 A 的 LU 分解是解线性方程组中可以重复利用的. 因此解第二个线性方程组所用的时间只是解第一个线性方程组所用时间的

$$\frac{n^2}{\frac{1}{3}n^3 - \frac{n}{3} + n^2} = \frac{3n}{n^2 + 3n - 1}.$$

当 $n = 150$ 时，这个值约等于 $0.0196 \approx 0.02 = \frac{1}{50}$.

Exercise 1.4.7
试求出 $Ax = b$ 的解. 已知

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

正向消去为 $Lc = b$, 反向代入为 $Ux = c$.

Solution 1.4.7
已知 A 的 LU 分解就好办了. 相当于求解 $(LU)x = b$, 即求解 $L(Ux) = b$. 令 $Ux = c$, 所以先求解 $Lc = b$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

解得

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

然后，解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix},$$

得到

$$x = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

1.5 行交换、逆矩阵和舍入误差

Exercise 1.5.1
解下面的方程组，需要的话进行行交换

$$\begin{aligned} u+4v+3w&=-2\\ -2u-8v+3w&=32\\ v+w&=1 \end{aligned}$$

Solution 1.5.1

$$\begin{aligned} u+4v+3w&=-2\\ -2u-8v+3w&=32\\ v+w&=1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} u+4v+3w&=-2\\ 0u+0v+9w&=28\\ v+w&=1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} u+4v+3w&=-2\\ v+w&=1\\ 0u+0v+9w&=28 \end{aligned}$$

解得 $w=\frac{28}{9}, v=-\frac{19}{9}, u=\frac{-26}{9}$.

Exercise 1.5.2
试对奇异方程组进行消去

$$\begin{aligned} u+v&=b_1\\ 3u+3v&=b_2 \end{aligned}$$

进行消去. 问 b_1, b_2 有怎样的关系时，该方程组有解.

Solution 1.5.2

$$\begin{aligned} u+v&=b_1\\ 3u+3v&=b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} u+v&=b_1\\ 0u+0v&=b_2-3b_1 \end{aligned}$$

可见，当 $b_2=3b_1$ 时，该方程组有解.

Exercise 1.5.3
试对下面的 A 求 PA 的分解式 $PA = LDU$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.5.3
$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$PA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LDU.$$

Exercise 1.5.4
设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

试求出使 PA 可以分解为 LDU 的 P.

Solution 1.5.4
$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
可见

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.5
试问下列方程组是奇异的还是非奇异的，是否有解：

$$\begin{cases} v - w = 2 \\ u - v = 2 \\ u - w = 2 \end{cases}, \begin{cases} v - w = 0 \\ u - v = 0 \\ u - w = 0 \end{cases}$$

Solution 1.5.5
先看第一个线性方程组. 将其改写为

$$\begin{cases} 0u + v - w = 2 \\ u - v + 0w = 2 \\ u + 0v - w = 2 \end{cases}$$

系数矩阵是个奇异矩阵，无解. 第二个方程组的系数矩阵是同一个奇异矩阵，但是有无数解.

Exercise 1.5.6
试写出 $AB^{-1}C$ 的逆矩阵.

Solution 1.5.6
$C^{-1}BA^{-1}$.

Exercise 1.5.7
试求 A, B 的逆矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Solution 1.5.7

$$(A, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$. 当 $\cos\theta\sin\theta \neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sin^2\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\theta & 0 & \sin\theta - \sin^3\theta & \cos\theta\sin^2\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sin^2\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 1 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

可得 $B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 而当 $\cos\theta = 0$ 或 $\sin\theta = 0$ 时, 经过简单的验算,B 的逆矩阵依然是同样的形式.

Exercise 1.5.8
试用求解

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

来证明 $\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}$ 没有逆矩阵.

Solution 1.5.8
这里其实有两个线性方程组：

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

以及

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

然而，$a+c=1$ 和 $3a+3c=0$ 不可能同时成立. 因此 $\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵不存在.

Exercise 1.5.9
试描述 E 乘 A 的作用，并写出 E^{-1}.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Solution 1.5.9
E 乘以 A 的作用是，将矩阵 A 的第三行乘以 8, 加到矩阵 A 的第一行上.

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -8\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.10
试用高斯-约当法，即用同时求解 $Ax_j=e_j$ 的方法求下面两个 A 的逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Solution 1.5.10

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

所以，对第一个矩阵而言，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

所以对于第二个矩阵而言，$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exercise 1.5.11

用 Gauss-Jordan 法按两种方式求 Hilbert 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

- 准确计算;
- 舍入成三位数字计算.

注意, 这里的 A 是一个医治不了的病态矩阵，选择主元法无济于事.

Solution 1.5.11
我们先准确计算.

$$
\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{-1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -3 & 16 & -15 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}
$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$.
如果舍入成三位数字计算, 我们使用 Matlab, 得到运算结果如图所示:

```
命令行窗口
>> A=[1.000,0.500,0.333;0.500,0.333,0.250;0.333,0.250,0.200]

A =

    1.0000    0.5000    0.3330
    0.5000    0.3330    0.2500
    0.3330    0.2500    0.2000

>> inv(A)

ans =

    9.6707  -39.5082   33.2836
  -39.5082  210.1858 -196.9511
   33.2836 -196.9511  195.7718

fx >>
```

Figure 1.1

Exercise 1.5.12
比较在直接消去和列选主元消去之下，矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{pmatrix}$$

的主元 (这是一个在进行消去之前就需加大主元的例子).

Solution 1.5.12
如果采用列选主元消去法，则过程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.001 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

如果采用直接消元法，则过程为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.13
试解释为什么在列选主元之下，L 中的 $l_{i,j}$ 都满足 $|l_{i,j}| \leq 1$. 试证明：如果 A 的元素满足 $|a_{ij}| \leq 1$, 那么第一步消去（变第一列主元下面的元素为零）之后，所有元素都以 2 为界；第 k 步消去后，所有元素都以 2^k 为界. 请构造一个 3×3 的 A，使得 $|a_{ij}| \leq 1$,$|l_{ij}| \leq 1$, 最后一个主元为 4.

Solution 1.5.13
理由显然，略叙. 我只构造出满足题意的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.6 带状矩阵，对称矩阵及其应用

Exercise 1.6.1
将我们刚举过的这个例子中的 $a_{11} = 2$ 改为 $a_{11} = 1$, 求新三对角矩阵的分解式 LDU.

Solution 1.6.1
即求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的 LDU 分解.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

确定了 U 之后，L 便不必求. 直接得到矩阵的 LDU 分解为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.6.2

试消去对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&g\end{pmatrix}$$

中主元 a 正下方的各元素. 验证经这一步消去之后，得到的矩阵 B 的右下 2×2 矩阵依旧是对称的. 由此认识每一步消去都不改变对称性.

Solution 1.6.2

首先，规定记号. 对于任意一个矩阵 A 来说，将矩阵 A 的第 i 行加上第 j 行的 l_{ij} 倍, 是一种初等行变换，变换矩阵记为 E_{ij}, 矩阵 A 经过这样的变换得到的矩阵记为 $E_{ij}A$. 将矩阵 A 的第 i 列加上第 j 列的 l_{ij} 倍，是一种初等列变换，矩阵 A 经过这样的初等列变换的作用，得到的矩阵不必用新的符号来表示，而易得为 $(E_{ij}A^T)^T = AE_{ij}^T$.

下面我们来证明，如果 A 是一个对称矩阵，则将矩阵 A 的第 i 行加上第 j 行的 q 倍，再将得到的矩阵的第 i 列加上第 j 列的 q 倍, 最终得到的矩阵依然是一个对称矩阵，这是因为最终得到的矩阵为 $(E_{ij}A)E_{ij}^T = E_{ij}AE_{ij}^T$，而将该矩阵进行转置后，得到

$$(E_{ij}AE_{ij}^T)^T = E_{ij}A^TE_{ij}^T = E_{ij}AE_{ij}^T.$$

即，最终得到的矩阵经过转置后是其本身，因此最终得到的矩阵是对称矩阵.

下面利用这个结论来做题目. 先将矩阵的第 2 行加上第 1 行的倍数，使得矩阵 A 的第二行首项为 0. 再将矩阵的第 2 列加上第 1 列的倍数，使得矩阵的第 2 列首项为 0. 由上面的结论，这样做得到的矩阵是对称矩阵. 然后再继续操作，将矩阵的第 3 行加上矩阵的第 1 行的倍数，使得第三行首项为 0, 再将第三列加上第 1 列的倍数，使得矩阵的第三列首项为 0. 最终得到的矩阵依然是对称矩阵. 而且最终得到的对称矩阵的右下 2×2 矩阵和矩阵 B 的右下 2×2 矩阵必定是同一个矩阵 (想一想为什么？注意红色的字)，因此矩阵 B 的右下 2×2 矩阵是对称矩阵.

Exercise 1.6.3
求逼近

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x),\frac{du}{dx}(0)=\frac{du}{dx}(1)=0$$

的 5×5 矩阵 A, 边界条件换为 $u_0=u_1,u_6=u_5$. 证明所得矩阵作用于常数向量 $(1,1,1,1,1)$, 结果为零.A 是奇异矩阵. 类似地，再证明如果 $u(x)$ 是连续问题的解，那么 $u(x)+1$ 也是. 题给的边界条件去不掉 $C+Dx$ 的不确定性，因而解不唯一.

Solution 1.6.3
将该连续问题离散化. 即,

$$\begin{aligned}
-u_0+2u_1-u_2&=h^2f(x_1)\\
-u_1+2u_2-u_3&=h^2f(x_2)\\
-u_2+2u_3-u_4&=h^2f(x_3)\\
-u_3+2u_4-u_5&=h^2f(x_4)\\
-u_4+2u_5-u_6&=h^2f(x_5)
\end{aligned}$$

由于 $u_0=u_1,u_5=u_6$, 因此上面的方程组可以化为

$$\begin{aligned}
u_1-u_2&=h^2f(x_1)\\
-u_1+2u_2-u_3&=h^2f(x_2)\\
-u_2+2u_3-u_4&=h^2f(x_3)\\
-u_3+2u_4-u_5&=h^2f(x_4)\\
-u_4+u_5&=h^2f(x_5)
\end{aligned}$$

写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{pmatrix}=h^2\begin{pmatrix}f(x_1)\\f(x_2)\\f(x_3)\\f(x_4)\\f(x_5)\end{pmatrix}$$

其余略.

Exercise 1.6.4
$h = \frac{1}{4}$,$f(x) = 4\pi^2 \sin 2\pi x$ 时差分方程 (29) 为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{\pi^2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

解出 u_i, 并将求得的解与真解 $u = \sin 2\pi x$ 在 $x = \frac{1}{4}$,$x = \frac{1}{2}$,$x = \frac{3}{4}$ 处的值相比较，算出误差.

Solution 1.6.4
将系数矩阵进行 LU 分解可得

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

所以差分方程的解

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

而真解为 $(1, 0, -1)^T$. 误差计算就算了，好像离得挺远.

1.7 复习题

Exercise 1.7.1
试对矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算 $A + B$ 和 AB.

Solution 1.7.1

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercise 1.7.2
对上题矩阵计算 A^{-1}, B^{-1} 和 $(AB)^{-1}$.

Solution 1.7.2

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.3

用正向消去和反向代入解

$$\begin{aligned} 2u - 3v \quad &= 8 \\ 4u - 5v + w &= 15 \\ 2u \quad + 4w &= 1 \end{aligned}$$

Solution 1.7.3

先将系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

化为上三角矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

正向消去的过程即为 $L^{-1}(8, 15, 1)^T$, 即为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

反向代入的过程即为解

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

的过程，解得

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.4
将上题的系数矩阵分解为 $A = LU$.

Solution 1.7.4
在上题的解答中已经完成.

Exercise 1.7.5
一个三个方程的方程组已给，试写出矩阵 E, 它能起到从第三个方程减去第二个方程的作用.

Solution 1.7.5

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.6
试写出 3×3 矩阵 P, 它能起到交换一、三两个方程的作用.

Solution 1.7.6

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.7
什么样的 3×3 矩阵能起到乘第二个方程以 -1, 保持另外两个方程不变的作用.

Solution 1.7.7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 1.7.8
试用消去法判断下面的方程组是否有解

$$\begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1 \end{aligned}$$

Solution 1.7.8
尝试将系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ 进行分解. 可得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU.$$

正向消去可得

$$L^{-1}(0,0,1)^T = (0,0,1)^T.$$

所以可得 $0u + 0v + 0w = 1$, 无解!

Exercise 1.7.9
试用消去法和行交换解

$$\begin{aligned} u + v - w &= 2 \\ 3u + 3v + w &= 2 \\ u \qquad + w &= 0. \end{aligned}$$

Solution 1.7.9
将系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

进行分解. 可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

当然，可以将行交换的矩阵最先作用于矩阵 A.

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 PA 化为上三角矩阵，即

$$E_{3,1}E_{2,1}PA = U, \text{即} L^{-1}PA = U,$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

所以 $A = P^{-1}LU = PLU$. 进行正向消去和反向代入解得 $(u, v, w) = (1, 0, -1)$.

Exercise 1.7.10
试分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

为 LU.

Solution 1.7.10

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.11
求

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

Solution 1.7.11

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\3 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & -8 & 6\\0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -4 & 3\\0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

所以题中矩阵的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}-4 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}$.

Exercise 1.7.12
一个 3×3 矩阵，它的任何一行都不是另外一行的倍数. 问该矩阵是否一定有逆矩阵？请举例.

Solution 1.7.12
不一定. 比如 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$. 该矩阵的第三列是第一列加上第二列得到的，该矩阵不可逆. 这是因为，这样的矩阵在进行初等行变换后，"第三列是第一列加上第二列得到的"这个性质始终保持不变，假如可逆，在进行一系列初等行变换后可以变成单位矩阵，但是单位矩阵不满足这个性质. 矛盾. 所以该矩阵不可逆.

Exercise 1.7.13
用 Gauss-Jordan 法求

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

的逆矩阵.

Solution 1.7.13

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 A 的逆矩阵为 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercise 1.7.14
试解释为什么三角阵的逆矩阵也是三角阵.

Solution 1.7.14
用 Gauss-Jordan 法易得下三角矩阵的逆矩阵是下三角矩阵，上三角矩阵的逆矩阵是上三角矩阵.

Exercise 1.7.15
设 E 是一个 2×2 矩阵，它起到加第一个方程到第二个方程上去的作用. 问 E^{50} 起到什么作用？试写出 E, E^{50} 和 $50E$.

Solution 1.7.15
E^{50} 的作用是加第一个方程的 50 倍到第二个方程上去.

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}, E^{50}=\begin{pmatrix}1&0\\50&1\end{pmatrix}, 50E=\begin{pmatrix}50&0\\50&50\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.16
试写出一个有无穷多解的 2×2 方程组.

Solution 1.7.16

$$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}.$$