Chapter 1

线性方程组

1.1 向量空间和向量子空间

Exercise 1.1.1
为证明对向量空间，要求 (i),(ii) 是彼此独立的，请构造二维空间的两个子集：

- 对向量加法和减法都封闭，但对数乘不封闭.
- 对数乘封闭，但对向量加法不封闭.

Solution 1.1.1

- $\{(x, y) : x, y \in \mathbf{Z}\}$.
- $\{(a, 0) : a \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, b) : b \in \mathbf{R}\}$.

Exercise 1.1.2
试判断 $\mathbf{R}^3$ 的下列子集是否为子空间.

- 第一个分量 $b_1 = 0$ 的向量平面.
- $b_1 = 1$ 的向量 b 所成平面.
- $b_1 b_2 = 0$ 的向量 b(这是平面 $b_1 = 0$ 和平面 $b_2 = 0$ 这两个子空间的并).
- 单个向量 $b = (0, 0, 0)$.
- 向量 $u = (1, 1, 0)$ 和 $v = (2, 0, 1)$ 的所有组合.
- 满足 $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ 的向量 (b_1, b_2, b_3)

Solution 1.1.2

- 是 $\mathbf{R}^3$ 的子空间.
- 不是. 因为对向量减法不封闭.
- 不是. 对向量加法不封闭:$(0,1,2)+(1,0,2)=(1,1,4)$.
- 是.
- 是.
- 是.

Exercise 1.1.3
验证 A 的化零空间是子空间, 也即验证任何齐次方程组 $Ax=0$ 的解 x, 对加法和数乘都封闭. 举出一个 $b\neq 0$ 时，$Ax=b$ 的解不是子空间的例子.

Solution 1.1.3
对于任意 $\lambda\in\mathbf{R}$,$A(\lambda x)=\lambda(Ax)=0$. 且对于任意 $Ax=0$ 的两个解 x_1,x_2,

$$A(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1(Ax_1)+\lambda_2(Ax_2)=0,\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}.$$

因此矩阵 A 的化零空间是子空间.

当 $b\neq 0$ 时,$Ax=b$ 的解必定不是子空间. 这是因为 $Ax=b$ 的任意两个解加起来，必定不再是 $Ax=b$ 的解, 而是 $Ax=2b$ 的解.(而且 $Ax=2b$ 的解必定不是 $Ax=b$ 的解).

1.2 $m\times n$ 方程组的解

Exercise 1.2.1
图 2.2 的阶梯矩阵是在一些可以作主元的元素为零 (图中第 3 列和第 5-8 列就是) 的情况下形成的. 试画出主元都不为零情况下 5×9 矩阵的阶梯阵 U. 试举例证明，即使在 2×2 情况下，两个阶梯阵的和也可以不是阶梯阵, 也即两个阶梯矩阵相加可以消去主元.

Solution 1.2.1

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

两个阶梯矩阵相加未必是阶梯矩阵. 举例如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

两个相加的矩阵都是阶梯矩阵，加起来的结果却不是阶梯矩阵, 因为加起来的矩阵全是零的第二行在不全是零的第三行之上. 二阶矩阵的例子如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

加起来得到的矩阵第一行全是零，第二行不全是零，所以也不是阶梯矩阵.

Exercise 1.2.2
造一个未知数的个数多于方程的个数，但无解的最小方程组.

Solution 1.2.2

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Exercise 1.2.3
求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的分解式 LU. 决定基本变量和自由变量，求出 $Ax = 0$ 的通解，并将它写成类似于 (3) 的形式. 问 A 的秩是几?

Solution 1.2.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = LU.$$

为了求出 $Ax = 0$ 的通解，设 $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix}$, 则 $Ux = 0$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

基本变量为 u, v, 自由变量为 w, y. 由

$$\begin{cases} u + 2v + y = 0 \\ v + w = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} v = -w \\ u = 2w - y \end{cases}.$$

$$x = \begin{pmatrix} 2w - y \\ -w \\ w \\ y \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的秩是 2, 因为有两个基本变量.

Exercise 1.2.4

求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

的阶梯阵 U, 基本变量，自由变量和 $Ax = 0$ 的通解. 然后对 $Ax = b$(b 的分量为 b_1, b_2) 应用消去法, 求出 $Ax = b$ 相容 (有解) 的条件和 (5) 形式的通解. 又 A 的秩是几？

Solution 1.2.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的 U 矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $Ax = 0$，设 $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix}$, 基本变量是 v, 其它三个 u, w, y 都是自由变量. 因此

$$x = \begin{pmatrix} u \\ -4w \\ w \\ y \end{pmatrix},$$

可见,$Ax = 0$ 的通解为

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$Ax = b$ 化为 $Ux = L^{-1}b$. 而

$$L^{-1}b = \begin{pmatrix} b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

所以 $Ax=b$ 相容的条件为 $-2b_1+b_2=0$. 写成 (5) 形式的通解为

$$u\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b_1\\0\\0\end{pmatrix}$$

矩阵 A 的秩是 1.

Exercise 1.2.5
将矩阵换为前一题的转置矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\4&8\\0&0\end{pmatrix}.$$

将右端换为 b_1,b_2,b_3,b_4, 再做前一题.

Solution 1.2.5
先将矩阵 A 化为 U 矩阵:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-4&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\4&8\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

解方程 $Ax=b$, 即解方程 $Ux=L^{-1}b$. 设 $x=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, 则

$$Ux=\begin{pmatrix}u+2v\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_2\\b_1\\-4b_2+b_3\\b_4\end{pmatrix}.$$

$Ax=b$ 有解当且仅当 $b_4=0,-4b_2+b_3=0,b_1=0$. 且 $Ax=b$ 的解可以写成

$$\begin{pmatrix}b_2-2v\\v\end{pmatrix}$$

的形式，或者

$$v\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_2\\0\end{pmatrix}$$

的形式. 矩阵 A 的秩为 1.

Exercise 1.2.6
求

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

的通解, 并照 (5) 那样把它写成 $Ax = b$ 的特解与 $Ax = 0$ 的通解之和.

Solution 1.2.6
将矩阵 A 化为阶梯阵, 可得

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解方程 $Ax = b$, 即解方程 $Ux = L^{-1}b$. 设 $x = (u, v, w)$,$b = (b_1, b_2)$. 则 u 和 w 是基本变量，v 是自由变量.$Ux = L^{-1}b$ 即

$$Ux = \begin{pmatrix}u + 2v + 2w\\ w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ -2b_1 + b_2\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} w &= -2b_1 + b_2\\ u &= b_1 - 2v - 2w = b_1 - 2v - 2(-2b_1 + b_2) = -2v + 5b_1 - 2b_2. \end{aligned}$$

所以题目中的方程的通解可以写成

$$\begin{pmatrix}-2v + 5b_1 - 2b_2\\ v\\ -2b_1 + b_2\end{pmatrix} = v\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5b_1 - 2b_2\\ 0\\ -2b_1 + b_2\end{pmatrix}$$

的形式, 其中 $\begin{pmatrix}5b_1 - 2b_2\\ 0\\ -2b_1 + b_2\end{pmatrix}$ 是 $Ax = b$ 的一个特解.

Exercise 1.2.7
根据将第三个方程变为 $0 = 0$(消去法完成之后) 所加在 b 上的约束，写出

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

的有解右端 b 的集合. 问秩是几?

Solution 1.2.7
先将系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 进行 LU 分解.

$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

方程 $Ax = b$ 等价于 $Ux = L^{-1}b$. 设 $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, 则 u, v 都是主变量.$Ux = L^{-1}b$ 可以写成

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -3b_2 - 2b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$

所以, 有解右端 b 的集合是

$$\left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : -3b_2 - 2b_1 + b_3 = 0. \right\}$$

矩阵的秩为 2。

Exercise 1.2.8
求出 c 的值，使得下面的方程组有解

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5 \\ 3u + 4v + w &= c \end{aligned}$$

Solution 1.2.8
该方程组可以改写成

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ c \end{pmatrix} = b.$$

先将系数矩阵进行 LU 分解.

$$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

方程 $Ax = b$ 可以化为 $Ux = L^{-1}b$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ c-7 \end{pmatrix}.$$

解得 $c = 7$.

1.3 线性无关、基底和维数

Exercise 1.3.1
用求 c_1, c_2, c_3, c_4 的办法判定下列向量是否线性无关

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.3.1
即判断线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是否只有零解. 为此通过行变换化系数矩阵为上阶梯矩阵.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以上述向量线性相关.

Exercise 1.3.2
例 5 中 A 的列向量线性相关，问它的行向量是否也线性相关？

Solution 1.3.2
线性无关.

Exercise 1.3.3
试证

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

的对角元素有一个为零，它的行就线性相关.

Solution 1.3.3
考虑逆否命题, 也即证明，矩形 T 的三个行向量线性无关时，对角线元素全不为零. 这在例 4 中已经证过.

Exercise 1.3.4
如果 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 线性无关, 问 $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$,$\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$,$\mathbf{w}_3=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ 是否也线性无关？

Solution 1.3.4
即判断使得方程

$$a_1\mathbf{w}_1+a_2\mathbf{w}_2+a_3\mathbf{w}_3=\mathbf{0},$$

成立的 (a_1,a_2,a_3) 是否只能是 $(0,0,0)$. 等价于判断线性方程组

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

是否只有零解. 为此，化系数矩阵为上阶梯矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

上阶梯矩阵线性满秩，因此 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 线性无关.

Exercise 1.3.5

用语言或在 $x-y$ 平面上作图表示出 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ 的列空间和行空间，并写出它们的基底.

Solution 1.3.5
列空间: 经过原点的直线 $y=3x$. 列空间的基底:$(1,3)$.
行空间: 经过原点的直线 $y=2x$. 行空间的基底:$(1,2)$.

Exercise 1.3.6
根据主元求出

$$U=\begin{pmatrix}0&1&4&3\\0&0&2&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

的列空间的基底. 并将非基底列表示成基底列的线性组合. 再求出 U 的行空间 (它是 $\mathbf{R}^4$ 的另外一个子空间) 的基底.

Solution 1.3.6

列空间的基底是 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\\0\\0\end{pmatrix}$. 行空间的基底是 $\begin{pmatrix}0&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&2&-2\end{pmatrix}$.

Exercise 1.3.7

假定我们把每一个 2×2 矩阵都看成一个"向量". 虽然它们并不是通常意义下的向量，但我们也有着矩阵加法和数乘矩阵的规则，而且二阶矩阵对这两种运算封闭. 试求出该向量空间的一个基底. 又问由所有阶梯阵 U 张成的子空间是什么样的？

Solution 1.3.7

该向量空间的一个基底是

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

所有阶梯矩阵 U 张成的子空间是形如

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$$

的矩阵的集合.

Exercise 1.3.8

$\mathbf{R}^3$ 中前两个分量相等的向量构成一个子空间. 试求出该子空间的两个不同的基底.

Solution 1.3.8

一个基底:$\{(0,1,0),(1,0,0)\}$.
另一个基底:$\{(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$.

Exercise 1.3.9

试举出下面这段话的一个反例：如果 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_4$ 是向量空间 $\mathbf{R}^4$ 的一个基底，又如果 W 是一个子空间，那么 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_4$ 的某个子集构成 W 的基底.

Solution 1.3.9

有人可能觉得 $W=\{\mathbf{0}\}$，即零空间会是一个反例. 但是这是不对的，因为零空间的基底是一个空集，而空集显然是 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$ 的子集.

为了解决这个问题，我们先考虑一个相比之下更直观的问题: 如果 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基底, 尝试构造 $\mathbf{R}^3$ 的一个子空间 W，使得 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的任何子集都不是 W 的基底. 之所以考虑这个问题是因为我们能在头脑中直接想象三维向量空间 $\mathbf{R}^3$. 事实上，令 $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$,$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$. 则向量 $\mathbf{u}_1$ 和向量 $\mathbf{u}_2$ 张成的二维子空间 $W=\{\alpha\mathbf{u}_1+\beta\mathbf{u}_2:\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}=\{\alpha\mathbf{v}_1+(\alpha+\beta)\mathbf{v}_2+\beta\mathbf{v}_3:\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}$，它不能由 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的任何子集作为基底.

有了这个例子，回到题目中的 $\mathbf{R}^4$ 情形就好办了. 我们要想办法构造 $\mathbf{R}^4$ 的一个三维子空间，这个三维子空间中的一些向量要用到 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ 这四个向量中的所有向量来进行线性表示. 我们构造的例子是

$$W = \{\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 + (\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{v}_4 : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

Exercise 1.3.10

假定 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 x, y, z 满足 $x+y+z=0$. 问 x, y, z 所张成的子空间的可能的维数是什么？对每一种可能举出一组 x, y, z.

Solution 1.3.10

- 0 维.$x = y = z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 1 维.$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- 2 维.$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 不可能是三维.

Exercise 1.3.11

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. 试将 A 的行集合扩大为 $\mathbf{R}^3$ 的基底, 将 A 的列集合缩小为 $\mathbf{R}^2$ 的基底.

Solution 1.3.11

- 扩大行集合为 $\mathbf{R}^3$ 的基底:$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- 缩小列集合为 $\mathbf{R}^2$ 的基底:$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercise 1.3.12

已知 V 的维数为 k, 试证 (可用对偶定理 2L)

- V 中任何 k 个无关向量都构成一个基底.
- 张成 V 的任何 k 个向量都构成一个基底.

Solution 1.3.12

- 假如某 k 个线性无关的向量组不构成一个基底，意味着还存在向量无法用这 k 个向量进行线性表示. 连同这个无法被线性表示的向量，可以得到 $k+1$ 个线性无关的向量形成的向量组. 这与 V 的维数是 k 矛盾 (V 的维数是 K 意味着 V 的基，即 V 的极大线性无关组，中的向量个数为 k).
- 由本题第一小步，只用证明张成 V 的 k 个向量线性无关. 假如线性相关，则可以从中去掉一些向量，依旧张成 V. 这表明 V 的维数小于 k, 矛盾.

Exercise 1.3.13
求 3×3 对称矩阵空间的维数和一个基底.

Solution 1.3.13
6 维. 一个基底是

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.3.14
试证：如果 V 和 W 是 $\mathbf{R}^5$ 的两个三维子空间，则 V 和 W 必定有共同的非零向量.

Solution 1.3.14
设 V 的一组基底为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$.$W$ 的一组基底为 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$. 则由于 $\mathbf{R}^5$ 是 5 维向量空间，因此 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 必定线性相关, 意即，必存在不全为零的数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3, 使得

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+a_3\mathbf{v}_3+b_1\mathbf{w}_1+b_2\mathbf{w}_2+b_3\mathbf{w}_3=\mathbf{0},$$

即

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+a_3\mathbf{v}_3=-b_1\mathbf{w}_1-b_2\mathbf{w}_2-b_3\mathbf{w}_3.$$

可见，V 和 W 有共同的非零向量.

1.4 四个基本子空间

Exercise 1.4.1
如果 $m=n$, 则 A 的化零空间等于左化零空间. 问这一结论成立否？

Solution 1.4.1

当 $m=n$ 时，A 是方阵.A 的化零空间为 $\{x: Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, 左化零空间为 $\{x: x^TA=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$. 这两个空间显然是不一定相同的，除非 A 是对称矩阵. 举例如下: 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$. 则 A 的化零空间为 $\{(x,y): x+y=0, x,y\in\mathbf{R}\}$.$A$ 的左化零空间为 $\{0\}$.

Exercise 1.4.2
试求出习题 2.2.4 中矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\0 & 2 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

的四种子空间的维数, 并构造出它们的基底.

Solution 1.4.2
先将矩阵 A 进行初等行变换化为上阶梯矩阵.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\0 & 2 & 8 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

首先求 $\mathcal{R}(A)$ 的基底和维数.$\mathcal{R}(A)$ 的基底是 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, 维数是 1.

矩阵 A 的行空间的基底是 $\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$, 行空间的维数也是 1.

矩阵 A 的零空间维数是 3, 零空间的一组基底是

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

矩阵 A^T 的零空间的维数是 1. 零空间的基底是 $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercise 1.4.3
试求出下面矩阵的四种子空间的维数和基底

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Solution 1.4.3
先将矩阵 A 化为上阶梯型矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

可见，矩阵 A 的行空间的维数是 2, 行空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}1&2&0&1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&1&1&0\end{pmatrix}$.

矩阵 A 的列空间的维数也是 2, 列空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

矩阵 A 的化零空间的维数是 2, 化零空间的一组基底是 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

矩阵 A^T 的化零空间的维数是 1, 矩阵 A^T 的化零空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Exercise 1.4.4
试描述下面矩阵的四种子空间

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Solution 1.4.4
矩阵 A 的列空间是 3 维的，列空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.
矩阵 A 的行空间的维数也是 3 维. 行空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$.
矩阵 A 的零空间的维数是 1. 零空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

矩阵 A^T 的零空间的维数是 1,A^T 的零空间的一组基底为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Exercise 1.4.5
试证：如果两个矩阵的积为零矩阵，$AB = 0$, 则 B 的列空间包含在 A 的化零空间之中.

Solution 1.4.5
只用证明 B 的每一个列向量都属于 A 的化零空间即可. 根据矩阵乘法定义这是显然的.

Exercise 1.4.6
试解释，为什么当且仅当 A 的秩等于 A' 的秩的时候 $Ax = b$ 才可解,A' 是把 b 加到 A 上所成的矩阵.

Solution 1.4.6
首先注意到一点，矩阵 A 的行数和向量 b 的行数必定是相同的，因此才可以把向量 b 加到矩阵 A 上.

当矩阵 A 的秩等于矩阵 A' 的秩的时候，表明添加的列向量 b 并不给矩阵 A 的列空间带来新的维数，意即向量 b 能被矩阵 A 的列向量线性表示，从而 $Ax = b$ 有解.

当 $Ax = b$ 有解的时候，表明给矩阵 A 添加列向量 b, 并不给矩阵 A 的列空间带来新的维数. 从而 A 与 A' 的秩相同.

Exercise 1.4.7
a, b, c 已给，且 $a \neq 0$. 试求 d, 使

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的秩为 1. 在求得的 d 之下，将 A 分解为 uv^T.

Solution 1.4.7
$d = \frac{bc}{a}$.

$$A = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.4.8
试求出秩为 1 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 和 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

的积 AB. 将 A 和 B 分别写成 uv^T 和 wz^T，并验证积 AB 是 uz^T 的若干倍，这倍数是内积 $v^T w$.

Solution 1.4.8

$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.4.9

在 $x-y$ 平面上画出前题矩阵 A 的行空间和化零空间.

Solution 1.4.9

画出来就免了. 直接叙述吧. 矩阵 A 的行空间形成直线 $y=-x$. 化零空间形成直线 $y=x$.

Exercise 1.4.10

构造一个非线性函数 $y(x)$, 是一对一的，但不是映上的; 再构造一个非线性函数，是映上的，但不是一对一的.

Solution 1.4.10

$y=\frac{1}{x}$;$y=\tan x$.

Exercise 1.4.11

当且仅当对 A^T 唯一性成立时，对 A 存在性才成立. 反之亦然. 试解释，这是为什么？

Solution 1.4.11

当方程组 $A^Tx=b$ 有唯一解或无解时，表明矩阵 A^T 列满秩, 即矩阵 A 行满秩. 所以方程组 $Ax=c$ 存在解.

反之，当方程组 $Ax=c$ 存在解时，意味着矩阵 A 行满秩, 即矩阵 A^T 列满秩, 所以 $A^Tx=b$ 有唯一解或无解.

Exercise 1.4.12

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 试构造 A 和 A^T 的所有可能的左逆或右逆矩阵.

Solution 1.4.12

矩阵 A 的秩为 1, 是行满秩矩阵. 所以矩阵有右逆. 设矩阵 A 的右逆矩阵为 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

基本变量是 x, 自由变量是 y 和 z. 所以所有可能的右逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 1-y \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1.5 正交向量和正交子空间

Exercise 1.5.1
求 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的长度和内积.

Solution 1.5.1
$||x|| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{21}.||y|| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

$$x^T y = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 0.$$

Exercise 1.5.2
试在 $\mathbf{R}^2$ 中先举出一组线性无关但彼此不正交的向量，从而就证明了上述定理的逆定理不成立. 再举出一组彼此正交但不是线性无关的向量，从而说明定理中非零这一条件不可去.

Solution 1.5.2
- $(2, 2), (1, 2)$.
- $(0, 0), (1, 1)$.

Exercise 1.5.3
解析几何告诉我们，平面上两条直线，如果互相垂直，则斜率的乘积为 -1. 试将这一点应用于向量 $x = (x_1, x_2)$ 和 $y = (y_1, y_2)$, 它们的斜率为 $\frac{x_2}{x_1}$ 和 $\frac{y_2}{y_1}$, 从而再一次导出正交的条件 $x^T y = 0$.

Solution 1.5.3
$$\frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{y_2}{y_1} = -1 \Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \Rightarrow x^T y = 0.$$

Exercise 1.5.4
试证，$i \neq j$ 时 B 的第 i 行正交于 B^{-1} 的第 j 列.

Solution 1.5.4
因为 $BB^{-1} = I$, 当 $i \neq j$ 时，矩阵 I 的第 i 行第 j 列元素为 0, 而这个元素恰好就是矩阵 B 的第 i 行向量与矩阵 B^{-1} 的第 j 列向量内积的结果.

Exercise 1.5.5
指出下列向量中正交的对

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.5.5
v_1 和 v_3 正交，v_2 和 v_3 也正交.

Exercise 1.5.6
试求出 $\mathbf{R}^3$ 中与 $(1,1,1)$ 和 $(1,-1,0)$ 都正交的所有向量. 并用已知的两个向量与求得的一个向量构成 $\mathbf{R}^3$ 的一个彼此正交的单位向量组.

Solution 1.5.6
设与 $(1,1,1)$ 和 $(1,-1,0)$ 都正交的向量为 (x,y,z). 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

x, y 和基本变量，z 是自由变量. 所以与题目中的两个向量都正交的向量形如

$$\begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{R}^3$ 的一个彼此正交的单位向量组是

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.7
对刚举的例子，试求出一个 w_2, 使得由 w_1 和 w_2 所生成的平面也与 V 正交. 再求一个 v_3, 使得由 v_1, v_2, v_3 生成的三维子空间与例中原来的直线 W 正交.

Solution 1.5.7

- 由于 w_1 已经与 V 正交, 因此只用使得 w_2 也与 V 正交即可. 为此只用让 w_2 与 v_1 和 v_2 都正交. 设 $w_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, 则得方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  上述方程组可以化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  基本变量是 x_1, x_2, 自由变量是 x_3, x_4. 所以与 V 正交的所有向量都形如 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. 我们令 $w_2 = (0, 0, 0, 1)$.

- 只用让 v_3 与 W 正交即可. 可以让 $v_3 = (1, 2, -5, 4)$.

Exercise 1.5.8

试证: 如果子空间 V, W 正交，则它们共同的唯一向量是零向量，即使 $V \cap W = \{0\}$.

Solution 1.5.8

如果 $x \neq 0$, 且 $x \in V \cap W$, 则 $x^T x = 0$, 即 $||x|| = 0$, 矛盾！所以 $V \cap W = \{0\}$.

Exercise 1.5.9

求由向量 $(1, 1, 2)$ 和 $(1, 2, 3)$ 所张成的平面的正交补，求法是用这两个向量作 A 的列 (书上此处印错，“列”得改为“行”)，解 $Ax = 0$. 我们记得所求正交补是一条直线.

Solution 1.5.9

设与题目中的两个向量张成的平面正交的向量形如 (x, y, z), 则得线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

可得 x, y 是基本变量，z 是自由变量. 所以

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.10
构造一个齐次方程，未知数的个数为 3, 解为向量 $(1, 1, 2)$ 和 $(1, 2, 3)$ 的线性组合. 这是上一题的反问题，但这两个题目实际上是一样的.

Solution 1.5.10
已知向量 $(1, 1, 2)$ 和向量 $(1, 2, 3)$ 张成的平面的正交补是直线 $(-1, -1, 1)$. 设未知数为 (x, y, z), 由

$$(-1, -1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

可构造出方程组

$$-x - y + z = 0.$$

Exercise 1.5.11
线性代数的基本定理，常常按 Fredholm 方式陈述为：对任何的 A 和 b, 方程组

$$(1) Ax = b \text{和 } (2) A^T y = 0, y^T b \neq 0$$

中必定有一个，并且只有一个有解. 换句话说，或者 b 属于列空间 $\mathcal{R}(A)$, 或者 $\mathcal{N}(A^T)$ 中有 y, 使得 $y^T b \neq 0$. 将 b 分为列空间分量和左化零空间分量，就得到一个所要的 y.

Solution 1.5.11
当 b 属于列空间 $\mathcal{R}(A)$ 时, 方程 (1) 有解. 但是由于 y 属于列空间的正交补 $\mathcal{N}(A^T)$, 因此必有 $y^T b = 0$, 此时 (2) 无解.

当 b 不属于列空间 $\mathcal{R}(A)$ 时, 方程 (1) 无解, 此时必有 $y^T b \neq 0$(否则 b 属于列空间 $\mathcal{R}(A)$), 从而方程 (2) 有解.

Exercise 1.5.12
求

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

的化零空间的基底, 并验证它正交于行空间. 给定 $x = (3, 3, 3)$, 试将它分解为行空间分量 x_r 和零空间分量 x_z.

Solution 1.5.12
设矩阵 A 的化零空间中的向量为 (x, y, z), 则有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该线性方程组化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

可见，基本变量是 x, y, 自由变量是 z. 所以矩阵 A 的化零空间的一组基底为 $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 它确实正交于行空间.

设 $x_z = z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} -2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

解得 $z = 0$(舍去) 或 $z = 1$. 所以

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.5.13
试证 $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.

Solution 1.5.13
当 $x \in (V + W)^\perp$ 时, 则对于任意的 $y \in V$, 都有 $x^T y = 0$. 这是因为当 $y \in V$ 时，也有 $y = y + 0 \in V + W$. 可见，$x \in V^\perp$. 同理有 $x \in W^\perp$，因此 $x \in V^\perp \cap W^\perp$.

反之，若 $x \in V^\perp \cap W^\perp$, 则 x 既属于 V 的正交补，又属于 W 的正交补. 对于任意的 $y \in V + W$, 设 $y = y_v + y_w$, 其中 $y_v \in V, y_w \in W$, 都有 $x^T y = x^T(y_v + y_w) = x^T y_v + x^T y_w = 0 + 0 = 0$. 因此 $x \in (V + W)^\perp$.

综上所述，题目中的等式成立.

Exercise 1.5.14
A^T 变 $\mathcal{R}(A)$ 为行空间，变左化零空间为零，试用图 2.7 对 A^T 的这种作用进行解释.

Solution 1.5.14
我们先回顾矩阵 A 的效果. 设 $\mathbf{R}^n$ 的一组有序基为 $\alpha = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$,$\mathbf{R}^n$ 的另一组有序基底为 $\beta = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$.$T$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的线性变换. 且矩阵 $A = [T]_\alpha^\beta$. 设矩阵 A 的零空间维数为 r, 则意味着向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中，有 r 个向量在线性变换 T 的作用下会变成 $\mathbf{R}^n$ 中的零向量 (把这 r 个向量形成的集合记为 M), 剩下的 $n-r$ 个向量在 T 的作用下会变成 $\mathbf{R}^n$ 中的另外 $n-r$ 个线性无关的向量, 这另外的 $n-r$ 个线性无关的向量其实构成了矩阵 A 列空间的基底. 而集合 M 中的 r 个向量张成的向量空间和矩阵 A 的零空间只有公共元素零向量，且 M 中的 r 个向量张成的向量空间并上矩阵 A 的零空间就得到 $\mathbf{R}^n$, 因此集合 M 中的 r 个向量张成的向量空间其实就是矩阵 A 的零空间在 $\mathbf{R}^n$ 中的正交补，即 M 中的 r 个向量张成的向量空间就是矩阵 A 的行空间. 所以可以认为矩阵 A 的真正效果就是把行空间映射为列空间，把零空间映射为零向量.

转置了来看，A^T 的真正效果就是把列空间映射为行空间, 把左化零空间映射为零向量.

Exercise 1.5.15
求出各支路上的压强，给定 $P_1 = 0$, 求电位 P_2, P_3, P_4. 验证 $E^T I = 0$.

Solution 1.5.15
$P_1 = 0, P_2 = 10, P_3 = 5, P_4 = 5$.

$$M^T P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

可见，

$$E^T I = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Exercise 1.5.16
试画出关联矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(我认为书上的这个关联矩阵写法是错的，应该改成

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{node 1} \\ \text{node 2} \\ \text{node 3} \\ \text{node 4} \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \text{edge 1} & \text{edge 2} & \text{edge 3} & \text{edge 4} & \text{edge 5} & \text{edge 6} \end{array} & \end{array}.$$

) 所表示的网络. 设在支路 1-3 中接入一个 6 伏特的电池，又设各支路的电阻都为 1, 求各支路上的电流 I 和压降 E.

Solution 1.5.16

网络如下:

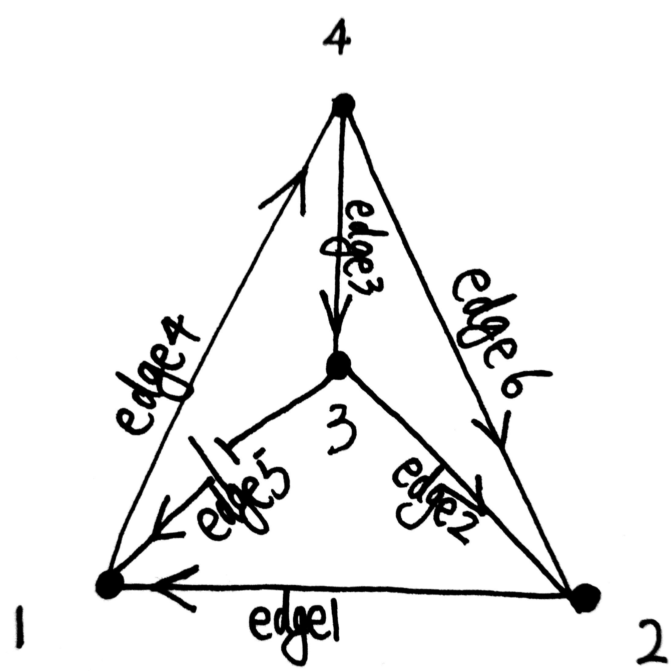

Figure 1.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设在节点 1 处的电位为 0, 则

$$
-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \times 1 \\ I_2 \times 1 \\ I_3 \times 1 \\ I_4 \times 1 \\ I_5 \times 1 \\ I_6 \times 1 \end{pmatrix}
$$

联立解得

$$
\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \\ -3 \\ -1.5 \end{pmatrix}.
$$

事实上，可以把上述两个线性方程组合并成一个线性方程组

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

解这个 10×10 线性方程组. 过程如下:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0
\end{pmatrix} \to$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0
\end{pmatrix} \to
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 & 0
\end{pmatrix} \to
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -2
\end{pmatrix} \to
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3
\end{pmatrix} \to
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

令 P_4 为自由变量，不妨设 $P_4=-1.5$, 则由 $-2P_3+2P_4=3$, 可得 $P_3=-3$. 再由 $-\frac{8}{3}P_2+\frac{4}{3}P_3+\frac{4}{3}P_4=-2$, 可得 $P_2=-1.5$. 就这样子逐步做下去，可以解得 $I_1,I_2,\cdots,I_6$ 和 P_1,P_2,P_3,P_4.

1.6 子空间对与矩阵的乘积

Exercise 1.6.1

在全体 4×4 矩阵所成空间中，取三对角矩阵子空间为 V, 取上三角矩阵子空间为 W. 试描述子空间 $V+W$ 和 $V\cap W$.$V+W$ 的成员是上 Hessenberg 矩阵，请验证公式 (21).

Solution 1.6.1

$V+W$ 的维数是 13.$V\cap W$ 的维数是 7.V 的维数是 10,W 的维数是 10. 可见，确实有

$$\dim(V+W)+\dim(V\cap W)=\dim V+\dim W.$$

Exercise 1.6.2

略. 因为这道题目几乎完全是在陈述，不太需要解答.

Exercise 1.6.3

V 由 $v_1=(1,1,0,0)$,$v_2=(1,0,1,0)$ 张成，W 由 $w_1=(0,1,0,1)$,$w_2=(0,0,1,1)$ 张成. 试求和 $V+W$ 的基底，并求出 $V\cap W$ 的维数和基底.

Solution 1.6.3

考察矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

为了求 $V+W$ 的基底，对矩阵 A 进行基本行变换.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $V+W$ 的一组基底为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

下面求 $V\cap W$ 的基底. 设

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V\cap W,$$

则存在 α,β,m,n, 使得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-m\\-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-m\\-n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

可得 n 是自由变量. 令 $n=1$, 可得

$$m=-1,\beta=1,\alpha=-1.$$

因此 $V\cap W$ 的维数为 1, 一组基底为 $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercise 1.6.4

假定 V 是由分量为 $(1,1,0,1)$ 和 $(1,2,0,0)$ 的列向量张成的. 试求子空间 W, 使得 $V\oplus W=\mathbf{R}^4$. 记号的意义见练习 2.6.2.

Solution 1.6.4

我们尝试求出 V 在 $\mathbf{R}^4$ 中的正交补 $V^\perp$. 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in V^\perp$. 则

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

化成

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

可见，x_3,x_4 是自由变量，x_1,x_2 是主变量. 当 $x_3=1,x_4=0$ 时，解得 $x_1=0,x_2=0$. 当 $x_3=0,x_4=1$ 时,$x_1=-2,x_2=1$. 因此可得 W 的一组基是

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

W 就由这两个向量张成.

Exercise 1.6.5
验证“$V \cap W$ 中的每一个 y 都来自 $\mathcal{N}(Q)$ 中唯一的一个 x”. 试对给定的 y 给出求唯一可能的 x 的方法.

Solution 1.6.5
对于 $V \cap W$ 中的每一个 y, 它既是 V 中的向量，又是 W 中的向量. 因此它既能被 V 的基底进行唯一的线性表示，又能被 W 中的基底进行唯一的线性表示. 设

$$y = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \cdots + b_m w_m,$$

其中 $v_1, \cdots, v_n$ 是 n 维线性空间 V 的基底，$w_1, \cdots, w_m$ 是 m 维线性空间 W 的基底. 因此 y 来自 $\mathcal{N}(Q)$ 中的唯一一个向量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n, -b_1, -b_2, \cdots, -b_m)$.

Exercise 1.6.6
试举例证明：(i)AB 的化零空间不一定包含 A 的化零空间,(ii)AB 的列空间不一定含于 B 的列空间.

Solution 1.6.6

- 令矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 则矩阵 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 AB 的化零空间是 $(1, 0)$ 张成的，矩阵 A 的化零空间是 $(0, 1)$ 张成的, 可见 AB 的化零空间不一定包含 A 的化零空间.
- 令矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 可见，矩阵 AB 的列空间不一定含于矩阵 B 的列空间.

Exercise 1.6.7
试证对于有很多元素为零的矩阵，$v(AB)$ 可以小于 $v(A)$.

Solution 1.6.7

令矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 可得矩阵 $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 于是 $v(AB) = 1$,$v(A) = 5$.

Exercise 1.6.8
试将矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

分解为 $A = \overline{L}\overline{U}$, 并验证 $\overline{L}$ 的列是 A 的列空间的基底.

Solution 1.6.8
首先，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 确实是 A 的列空间的基底.

Exercise 1.6.9
将矩阵换成

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

再做上一题，这里用到置换矩阵 P.

Solution 1.6.9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

可见，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.6.10
$\overline{L}$ 的每一列乘以 $\overline{U}$ 的对应的行，这样即可将 $A = \overline{LU}$ 化为秩为 1 的 r 个矩阵的和. 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为 2. 试构造出它的 $\overline{L}$ 和 $\overline{U}$, 将它分解为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

Solution 1.6.10

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}A=\begin{pmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&3&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&3&3&2\\2&6&6&4\\-1&-3&-3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&3&1\\0&0&6&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercise 1.6.11

求 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix}$ 的最大可逆子矩阵和秩.

Solution 1.6.11

最大可逆子矩阵是

$$\begin{pmatrix}1\end{pmatrix},$$

秩为 1.

Exercise 1.6.12

设 A, B 分别为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，$n<m$. 试证它们的积 AB 是奇异的.

Solution 1.6.12

AB 是 $m\times m$ 矩阵. 但是 $r(AB)\le r(A)\le n<m$, 因此 AB 是奇异矩阵.

Exercise 1.6.13

试证 $(A+B)$ 的秩 $\le A$ 的秩 $+B$ 的秩.

Solution 1.6.13

设矩阵 A 的列空间为 W, 矩阵 B 的列空间为 V. 则矩阵 $A+B$ 的列空间含于 $W\cup V$. 因此矩阵 $A+B$ 的列空间的维数 (即秩) 不大于 $\dim(W\cup V)$. 而 $\dim(W\cup V)\le\dim W+\dim V$, 因此 $(A+B)$ 的秩 $\le A$ 的秩 $+B$ 的秩.

Exercise 1.6.14
设 $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(B)$, 又设向量 y 既属于 $\mathcal{R}(B)$ 又属于 $\mathcal{N}(A)$. 试证 $y=0$.

Solution 1.6.14
如果存在非零向量 $y\in\mathcal{R}(B)\cap\mathcal{N}(A)$, 则必定存在向量 x, 使得 $y=B(x)$. 且 $\mathcal{N}(B)+\{x\}\subset\mathcal{N}(AB)$. 并且 $\dim(\mathcal{N}(B)+\{x\})=\dim(\mathcal{N}(B)+1$, 这表明 $\dim(\mathcal{N}(AB))\geq\dim(\mathcal{N}(B)+1$, 这与 $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(B)$ 矛盾. 可见，假设不成立，即原命题成立.

Exercise 1.6.15
设 A 为可逆方阵，试证 AB 的化零空间、行空间和秩都同于 B.

Solution 1.6.15

- 首先 AB 的化零空间同于 B 的化零空间. 这是因为，首先，$\mathcal{N}(B)\subset\mathcal{N}(AB)$. 因此我们只用再证明 $\mathcal{N}(AB)\subset\mathcal{N}(B)$ 即可. 如果向量 x 位于 AB 的化零空间，即满足 $AB(x)=0$, 则 $A(B(x))=0$, 由于 A 是可逆矩阵，因此 $B(x)=0$, 可见 x 也位于 B 的化零空间. 因此 $\mathcal{N}(AB)\subset\mathcal{N}(B)$. 综上所述，$\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(B)$.
- 首先，易得 AB 的行空间含于 B 的行空间. 只用证明 B 的行空间也含于 AB 的行空间即可. 对于 B 的行空间的任意一个向量 y, 必定存在向量 x, 使得 $xB=y$. 由于矩阵 A 可逆，因此必定存在向量 m, 使得 $mA=x$. 可见，$m(AB)=y$, 所以 y 在矩阵 AB 的行空间里. 于是 B 的行空间也含于矩阵 AB 的行空间. 综上所述，矩阵 AB 的行空间等于矩阵 B 的行空间.
- 既然行空间相等，因此行秩相等，即矩阵的秩相等.

Exercise 1.6.16
考虑由全体 2×2 矩阵 B 所组成的四维向量空间 V. 设 A 是一个特殊的矩阵，按每一个 2×2 矩阵 B 都被变成 AB 这样的方式进行变换，则 V 变成它自己. 如果 A 可逆，则该变换没有化零空间，唯一被变成零的矩阵 $(AB=0)$ 是矩阵 $B=0$.

- 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$, 试求该变换的化零空间 (满足 $AB=0$ 的所有的 B 所成的空间), 并求出它的维数 (即变换的零度，而不是 A 的零度).
- 求出该变换的值域，并计算出该值域的维数，再验证秩 + 零度 $=V$ 的维数.

Solution 1.6.16

- 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$,$AB=0$ 即

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

即

$$a = b = 0.$$

可见该变换的化零空间为 $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R}\right\}$, 变换的零度为 2.

- 变换的值域是

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R}\right\}.$$

值域的维数是 2. 我们发现，变换的零度加上变换的值域等于 4, 恰好是 V 的维数.

1.7 复习题

Exercise 1.7.1
求 $\mathbf{R}^4$ 的子空间的基底，子空间中 $x_1 = x_2 = x_3$.

Solution 1.7.1
该子空间的一组基底为 $(1,1,1,0), (0,0,0,1)$.

Exercise 1.7.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

试求出 A 的阶梯阵 U 和四个基本子空间的维数.

Solution 1.7.2
将矩阵 A 进行初等行变换.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & -7 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -9 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

这样就得到了 A 的阶梯型矩阵 U. 从中可得 $\dim \mathcal{N}(A) = 2$. 矩阵 A 的行空间和列空间维数都是 3. 且 A 的左化零空间的维数是 1.

Exercise 1.7.3
用给出基底的方法写出 $\mathbf{R}^3$ 的二维子空间,要求其中不包含向量 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ 中的任何一个.

Solution 1.7.3
$\mathbf{R}^3$ 的一个二维子空间为 $\{(1,1,0)\} + \{(0,1,1)\}$.

Exercise 1.7.4
试求出 A 的秩和化零空间

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.7.4
A 秩显然为 2. 下面求出 A 的化零空间.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以矩阵 A 的化零空间的一组基底为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.5
构造一个矩阵，其化零空间由 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ 张成.

Solution 1.7.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.6
判断下列各条成立否，不成立的请举出反例.

- 如果向量 $x_1, \cdots, x_m$ 生成子空间 S, 则 S 的维数为 m.
- 向量空间的两个子空间的交不能是空的.
- 若 $Ax = Ay$, 则 $x = y$.
- A 的行空间有唯一的基底，可以用化 A 为阶梯阵的方式求出来.
- 若方阵 A 的列线性无关，则 A^2 的列也线性无关.

Solution 1.7.6

- 错. 如果向量 $x_1, \cdots, x_m$ 是线性相关的，则 S 的维数小于 m.
- 对. 至少有一个公共元素零向量.
- 错. 令 A 为零矩阵，且 $x \neq y$, 即为反例.

- 错.
- 对. 只用证明 $A^2x=0$ 只有唯一解即可，也即证明 $Ax=A^{-1}0=0$ 只有唯一解. 由于 A 是可逆的，因此成立.

Exercise 1.7.7
试求出 A,B,C 它们各自的四个基本子空间的基底.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Solution 1.7.7

- A 的行空间的一个基底为 $(1,2)$, 列空间的一个基底为 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.$A$ 的化零空间的一个基底是 $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. 而且，$A$ 的左化零空间的一个基底是 $\begin{pmatrix}-3&1\end{pmatrix}$.
- B 的列空间的一组基底是 $\emptyset$. 化零空间的一组基底是 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 行空间的一组基底是 $\emptyset$, 左化零空间的一组基底是 $\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}$.
- 矩阵 C 的列空间的一组基底是
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
化零空间的一组基底是
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$
矩阵 C 行空间的一组基底是 $\begin{pmatrix}1&1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&1\end{pmatrix}$. 左化零空间的一组基底是 $\emptyset$.

Exercise 1.7.8
求出 $u+v+w=1,u-w=2$ 的通解.

Solution 1.7.8
易求得通解为
$$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Exercise 1.7.9
其行空间包含 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$, 其化零空间包含 $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$. 问这样的矩阵存在否?

Solution 1.7.9
不存在. 因为行空间中的所有向量与化零空间中的所有向量都要正交.

Exercise 1.7.10
求出正交于 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 4 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}2 & 9 & 8 & 2\end{pmatrix}$ 的所有向量.

Solution 1.7.10
正交于如上向量的向量设为 $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$. 则有

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4 & 1\\ 2 & 9 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

化为

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

把 x, y 作为主变量，把 z, w 当自由变量. 可得正交于题干中的两个向量的所有向量形成的子空间的一组基底是

$$\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Exercise 1.7.11
向量 $(1, 2, 1), (0, 1, 3), (3, 7, 6)$ 是否位于 $\mathbf{R}^3$ 中的同一张平面上？如果是，请求出正交于这张平面的一个向量.

Solution 1.7.11
我们先判断这三个向量是否是线性相关的. 为此调查矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 7 & 6\end{pmatrix}$$

将矩阵 A 进行初等行变换，可得

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 7 & 6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

可见，这三个向量线性相关，即位于同一张平面上. 下面求出正交于这张平面的一个向量, 设这个向量是 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

可得 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 可以等于 $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercise 1.7.12
$Ax = b$. 问当且仅当 b 正交于四个基本子空间中哪一个时，该方程组才有解.

Solution 1.7.12
当 b 正交于矩阵 A 的左化零空间时，b 必定位于左化零空间的正交补，即 b 位于矩阵 A 的列空间, 此时方程组有解; 反之，当方程组有解时，b 位于矩阵 A 的列空间，即位于左化零空间的正交补，所以 b 正交于左化零空间.

Exercise 1.7.13
试求出下列方程组的所有解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Solution 1.7.13

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  解方程组

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  可得通解为

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

解方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

可得无解.

Exercise 1.7.14
向量 $(1,1,3),(2,3,6)$,

Solution 1.7.14

Exercise 1.7.15
试求出矩阵 A, 使 $Ax=b$ 的解的个数为

- 0 或 1, 决定于 b
- 1 或 ∞, 决定于 b
- 0 或 ∞, 决定于 b
- 1, 与 b 无关.

Solution 1.7.15
如果矩阵 A 的秩小于行数，且小于列数，则 $Ax=b$ 是否有解取决于向量 b. 若 b 属于 A 的列空间,则有解,且有无穷多个解;若 b 不属于 A 的列空间,则无解.

如果 A 的秩小于行数，且等于列数，则 $Ax=b$ 是否有解取决于向量 b. 当 b 属于 A 的列空间时，有唯一解；b 不属于 A 的列空间时，无解.

如果 A 的秩等于行数，且小于列数，则 $Ax=b$ 必有无穷多个解.

如果 A 的秩等于行数且等于列数，则 $Ax=b$ 必有唯一解.

- 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
- 作者在此犯了错. 只可能是 ∞, 不可能是只有 1 个解.$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
- $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
- $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.