利用特征向量求二次方程

叶卢庆

2014 年 3 月 18 日

易得矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-p & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\lambda^2+p\lambda+q=0. \tag{1}$$

其中 $p,q\in\mathbf{C}$. 设该矩阵特征值分别为 λ_1,λ_2, 且 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$, 且

$$A(\mathbf{v_1})=\lambda_1\mathbf{v_1},A(\mathbf{v_2})=\lambda_2\mathbf{v_2}.$$

易得 $\mathbf{v_1}$ 和 $\mathbf{v_2}$ 是 A 的特征向量. 令

$$\mathbf{v_1}=(\frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}},\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}),\mathbf{v_2}=(\frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}},\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}), \tag{2}$$

可得 $|\mathbf{v_1}|=|\mathbf{v_2}|=1$. 由韦达定理易得

$$\frac{\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}}{2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2-2q+2q^2}{(q-1)^2+p^2}+\frac{2q}{\sqrt{(q-1)^2+p^2}}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{(q-1)^2+p^2}}+\frac{2+p^2-2q}{(q-1)^2+p^2}}\right).$$

由于 $\frac{\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}}{2}$ 与 $\frac{\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}}{2}$ 垂直, 因此可得

$$\frac{\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}}{2}=k\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{(q-1)^2+p^2}}+\frac{2+p^2-2q}{(q-1)^2+p^2}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2-2q+2q^2}{(q-1)^2+p^2}+\frac{2q}{\sqrt{(q-1)^2+p^2}}}\right),$$

其中 $k\in\mathbf{R}$. 由于

$$\left|\frac{\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}}{2}\right|^2+\left|\frac{\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}}{2}\right|^2=|\mathbf{v_1}|^2=1,$$

因此便可以解得 k, 因此我们解得了 $\frac{\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}}{2}$ 和 $\frac{\mathbf{v_1}-\mathbf{v_2}}{2}$, 因此可以解得 $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}.\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}$ 既解, 那么由表达式(2),λ_1,λ_2 也能解出. 这样就得到了一元二次方程(1) 的两个实根 λ_1,λ_2.