

线性代数应该这样学, 习题 5.14

叶卢庆*

2014 年 9 月 6 日

习题. 设 $S, T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 S 是可逆的. 证明: 若 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是多项式, 则

$$p(S^{-1}TS) = Sp(T)S^{-1}.$$

评论. 这个题目的证明是很容易的. 我只想谈谈其背后的意义. 显然, 矩阵和线性变换是有区别的. 矩阵, 其实是给定了有序基之后, 线性变换的具体表示, 表示的是有序基里各个向量之间的线性关系. 如果没有给定有序基, 那么矩阵就是没有意义的. 而线性变换是独立于基的, 无论有没有选定一组有序基, 线性变换始终在那里——当然, 如果没有选定有序基的话, 你想要描述一个线性变换将会变得相当困难. 选定了有序基之后, 描述线性变换就简单了. 一般来说, 在不同有序基下, 同一个线性变换 T 会有不同的矩阵表示, 但是这些不同的矩阵都是相似的 (similar). 考虑了在不同有序基下的同一个线性变换后, 我们再来考虑在同一个有序基下的不同线性变换. 如果在同一个有序基 α 下的不同线性变换 T_1, T_2 所对应的矩阵是相似的, 这意味着什么呢? 这意味着, 存在一组基 β , 换 β 来看 T_1 , 将会看到在 α 下看 T_2 同样的效果. \square

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com