利用 Cauchy 的方法化简二次型

叶卢庆*

2014 年 9 月 20 日

这道题目是 Victor J.Katz 著的《数学史通论》习题 15.40.

习题. 用 *Cauchy* 的方法, 找一个正交变换把二次型 $2x^2+6xy+5y^2$ 转换成平方的和或者差.

解. 设 $f(x,y)=2x^2+6xy+5y^2=k$, 其中 k 是一个待定的实数,f 是二元实变量函数.$f(x,y)=k$ 在平面直角坐标系上的图像是一个椭圆. 为了将 $f(x,y)$ 化为平方和或者差, 我们需要将椭圆摆正成为中学里常见的标准的椭圆. 为此我们需要确定椭圆 $f(x,y)=k$ 的长轴和短轴. 存在以原点为中心的圆 $g(x,y)=x^2+y^2=r$, 该圆与椭圆相切. 在切点处, 圆的切线和椭圆的切线重合. 设切点为 (x_0,y_0), 根据隐函数定理, 可得

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}=\lambda,$$

也就是说,

$$x_0^2+x_0y_0=y_0^2.$$

解得 $\frac{y_0}{x_0}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 可见, 该椭圆的两条轴所指示的向量分别为 $(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}),(1,\frac{1-\sqrt{5}}{2})$. 设 $\alpha=((1,0),(0,1))=(v_1,v_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一组标准有序基,$\beta=((\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}},\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}),(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}},\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}))=(w_1,w_2)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的另一组标准有序基. 易得

$$[I]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\\\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}&\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\end{pmatrix},$$

$$[I]_\alpha^\beta=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\\\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}&\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

代入二次型, 可得

$$\frac{25+11\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}x'^2+\frac{25-11\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}y'^2=k,$$

即

$$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}x'^2+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}y'^2=k.$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com