

线性代数应该这么学, 习题 1.15

叶卢庆*

2014 年 8 月 22 日

题目 (线性代数应该这么学, 习题 1.15). 证明或举反例: 如果 U_1, U_2, W 是 V 的子空间, 使得

$$V = U_1 \oplus W, V = U_2 \oplus W,$$

那么 $U_1 = U_2$.

证明. 假设 $U_1 \neq U_2$, 不妨设存在 $v \neq 0, v \in U_1$, 且 $v \notin U_2$. 由于 $v \in U_1$, 且 U_1 与 W 之间是直和, 因此 $v \notin W$ (否则将导致 $v \in U_1 \cap W$, 这与 $U_1 \cap W = \{0\}$ 矛盾). 由于 v 既不属于 U_2 , 又不属于 W , 因此 v 不属于 $U_2 \oplus W = V$ (否则 v 可以被唯一分解为 $0 + v$, 其中 $0 \in W, v \in U_2$ 或者 $0 \in V, v \in W$, 矛盾). 然而由于 $V = U_1 \oplus W$, 导致 $v \in V$. 矛盾. 可见假设错误. 即 $U_1 = U_2$. \square

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com