Cayley-Hamilton 定理

叶卢庆*

2014 年 9 月 7 日

设 V 是 $\mathbf{C}$ 上的一个 $m(m \geq 1)$ 维线性空间.T 是 V 上的线性算子. 设 α 是 V 里的一组有序基, 线性算子 T 在 α 下的矩阵为 $[T]_\alpha^\alpha$. 下面我们来看关于 $[T]_\alpha^\alpha$ 的多项式

$$P([T]_\alpha^\alpha) = a_n([T]_\alpha^\alpha)^n + \cdots + a_1[T]_\alpha^\alpha + a_0 I,$$

其中 $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbf{C}$. 如果 $[T]_\alpha^\alpha$ 是可对角化矩阵, 则存在 V 的一组基 β, 使得 $[T]_\beta^\beta$ 是对角阵, 且

$$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\beta^\alpha [T]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta,$$

于是,

$$P([T]_\alpha^\alpha) = P([I]_\beta^\alpha [T]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta) = [I]_\beta^\alpha P([T]_\beta^\beta)[I]_\alpha^\beta.$$

由于 $[T]_\beta^\beta$ 是对角阵, 因此 $P([T]_\beta^\beta)$ 的计算会变得特别容易, 详细地说, 此时, 关于矩阵 $[T]_\beta^\beta$ 的多项式 $P([T]_\beta^\beta)$ 已经变成了关于 $[T]_\beta^\beta$ 的所有的特征值的一组同样的多项式. 由于对角阵 $[T]_\beta^\beta$ 的对角线上的每个数都是 T 的特征值, 因此特别地, 如果 P 是关于线性映射 T 的特征多项式, 那么 $P([T]_\beta^\beta) = \mathbf{0}$, 于是,

$$P([T]_\alpha^\alpha) = P([I]_\beta^\alpha [T]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta) = [I]_\beta^\alpha P([T]_\beta^\beta)[I]_\alpha^\beta = \mathbf{0}.$$

这就是关于对角阵的 Cayley-Hamilton 定理.

当 $[T]_\alpha^\alpha$ 不是可对角化矩阵, 那么 $[T]_\alpha^\alpha$ 不再可对角化, 但是可上三角化. 也就是说, 存在 V 的一组基 γ, 使得 $[T]_\gamma^\gamma$ 是一个上三角矩阵, 该上三角矩阵对角线上的元素都是 T 的特征值. 然后, 设上三角矩阵 $[T]_\gamma^\gamma$ 的对角线的第 $1, 2, \cdots, m$ 行的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. 对上三角矩阵 $[T]_\gamma^\gamma$ 的对角线进行微扰, 使得其对角线上的元素的第 $1, 2, \cdots, m$ 行分别变为 $\lambda_1 + \varepsilon_1, \lambda_2 + \varepsilon_2, \cdots, \lambda_m + \varepsilon_m$. 这样上三角矩阵 $[T]_\gamma^\gamma$ 就变成了另一个上三角矩阵 $[T']_\gamma^\gamma$. 通过恰当地选取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, 能使的 $[T']_\gamma^\gamma$ 的对角线上的元素互不相同. 这样线性算子 T' 就成了一个可对角化线性变换. 因此, 对于 T' 的特征多项式 P' 来说,$P([T']_\tau^\tau) = \mathbf{0}$, 其中 $[T']_\tau^\tau$ 是 T' 关于 V 的任意一组基 τ 的矩阵. 令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 趋于 0 的同时, 保持 T' 的可对角化性不变, 此时,T' 的特征多项式 P' 会趋于 T 的特征多项式 P,T' 会趋于 T. 于是, 即便当 T 不是可对角化的矩阵,Cayley-Hamilton 定理对于 T 依然是成立的.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com