

# 线性代数应该这么学, 习题 4.4

叶卢庆\*

2014 年 8 月 22 日

**题目** (线性代数应该这么学, 习题 4.4). 设  $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$  的次数为  $m$ . 证明  $p$  有  $m$  个互不相同的根当且仅当  $p$  和它的导数  $p'$  没有公共根.

我们只证明  $m = 3$  的特殊情形. 一般情形完全可以仿照而得到.

**证明.** 当  $p$  有 3 个互不相同的根时, 可得  $p$  可以写成

$$p = a(p - x_1)(x - x_2)(p - x_3),$$

其中  $a \in \mathbf{C}, a \neq 0, x_1, x_2, x_3$  是 3 个不同的根. 则

$$p' = a(p - x_2)(p - x_3) + a(p - x_1)(p - x_3) + a(p - x_1)(p - x_2).$$

易得  $p'(x_1) \neq 0, p'(x_2) \neq 0, p'(x_3) \neq 0$ . 于是  $p$  和  $p'$  没有公共根.

$p$  和  $p'$  没有公共根时, 如果  $p$  有重根, 不妨设  $x_1$  是重根, 则易得  $x_1$  是  $p$  和  $p'$  的公共根. 矛盾. 因此  $p$  无重根.  $\square$

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com