线性代数, 习题 16

叶卢庆*

2014 年 8 月 20 日

题目. 设 A 是矩阵

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 求一个复可逆矩阵 Q 和复对角矩阵 D, 使得 $A = QDQ^{-1}$.
- 将 A 分解成三个初等矩阵的积.

证明.

- 我们先求出矩阵 A 的特征向量. 我们来看 A 的特征多项式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i).$$

可见,A 有三个不同的复特征值, 分别为 $-1, i, -i$. 对应于这三个特征值分别有三个线性无关的向量 $(0,0,1),(1,i,0),(1,-i,0)$. 可见,A 确实能对角化. 设 $\alpha = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ 是 $\mathbf{C}^3$ 的一组有序基,$\beta = ((0,0,1),(1,i,0),(1,-i,0))$ 是 $\mathbf{C}^3$ 的另一组基.

$$A = [T]_\alpha^\alpha = [I]_\beta^\alpha [T]_\beta^\beta [I]_\alpha^\beta.$$

而

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [I]_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

可见,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com