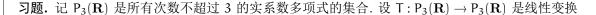
线性代数, 习题 13

叶卢庆*

2014年8月20日



$$\mathsf{Tf} := \frac{\mathsf{df}}{\mathsf{dx}}.$$

设 β := $(1, x, x^2, x^3)$ 是 $P_3(\mathbf{R})$ 的一组基.

- 计算 [T]^β_β.
- 计算矩阵 $[T]^{\beta}_{\beta}$ 的特征多项式.
- 求 T 的特征值和特征向量.
- T 是否是可对角化的?

证明. • 设 $\beta = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$,则 $T(1) = 0 = 0\nu_1 + 0\nu_2 + 0\nu_3 + 0\nu_4, T(x) = 1 = 1\nu_1 + 0\nu_2 + 0\nu_3 + 0\nu_4, T(x^2) = 2x = 0\nu_1 + 2\nu_2 + 0\nu_3 + 0\nu_4, T(x^3) = 3x^2 = 0\nu_1 + 0\nu_2 + 3\nu_3 + 0\nu_4$,因此

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

• T 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0
\end{pmatrix}$$

因此 T 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

^{*}叶卢庆 (1992—),E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

特征值为 $\lambda = 0$. 下面来求 T 的特征向量.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

我们发现, 任意非零实数都是特征向量.

• 不是. 因为 T 的特征向量张成的空间只有一维, 若 T 是可对角化的, T 的特征向量张成的空间应该要有三维

cill control of the c