

线性代数应该这样学, 习题 5.5

叶卢庆*

2014 年 9 月 5 日

习题. 定义 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{F}^2)$ 如下

$$T(w, z) = (z, w).$$

求 T 的所有本征值和本征向量.

解. 设 $\alpha = (v_1, v_2) = ((1, 0), (0, 1))$ 是 \mathbf{F}^2 的一组有序基. 则

$$T(v_1) = T(1, 0) = (0, 1) = v_2, T(v_2) = T(0, 1) = (1, 0) = v_1.$$

因此

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 λ 是 $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ 的本征值, 则

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

当 $\lambda = 1$ 时, 对应的一个本征向量为 $(1, 1)$, 当 $\lambda = -1$ 时, 对应的一个本征向量为 $(1, -1)$. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com