逐步转轴法化实二次型为标准型

叶卢庆[*]

2014 年 10 月 13 日

我们先来看两个例子. 通过这两个例子, 我们来演示如何使用逐步转轴法消去二次型中的各交叉项, 最后成为标准型.

例 1 (中国科学技术大学 2012 年硕士学位研究生入学考试试题)**.** 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 方程 $xy-yz+zx=1$ 所表示的二次曲面类型为?

解. 我们先考虑化去交叉项 xy. 令

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z' \end{pmatrix}$$

代入二次型

$$xy-yz+zx \tag{1}$$

整理后可得

$$x'^2\cos\alpha\sin\alpha-y'^2\sin\alpha\cos\alpha+x'y'\cos 2\alpha+y'z'(\cos\alpha-\sin\alpha)+x'z'(\cos\alpha-\sin\alpha). \tag{2}$$

令 $x'y'$ 前面的系数等于 0, 即让 $\cos 2\alpha=0$, 此时 α 可以为 $\frac{\pi}{4}$. 在这个时候,$y'z'$ 和 $x'z'$ 前面的系数也恰好为 0. 此时, 二次型(2)可以化为

$$\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2.$$

也即, 通过正交替换, 方程 $xy-yz+zx=1$ 变成了 $x'^2-y'^2=2$. 这是一个双曲柱面. □

例 2. 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

化为标准型.

解. 我们先考虑化去交叉项 x_1x_2. 令

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3' \end{pmatrix},$$

代入二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$, 整理可得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)=&(2+3\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha)x_1'^2+(4\cos 2\alpha+3\sin 2\alpha)x_1'x_2'+(2+3\cos^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha)x_2'^2\\ &-(4\cos\alpha+8\sin\alpha)x_1'x_3'+(4\sin\alpha-8\cos\alpha)x_2'x_3'+5x_3'^2. \end{aligned}$$

令 $x_1'x_2'$ 前面的系数 $4\cos 2\alpha+3\sin 2\alpha$ 为 0, 解得 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 是一组解. 这个时候, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 成为

$$6x_1'^2+x_2'^2-4\sqrt{5}x_1'x_3'+5x_3'^2.$$

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

我们很幸运地发现,$x_2'x_3'$ 同时也消失了. 然后我们试图消去最后的交叉项 $x_1'x_3'$. 令

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix},$$

则二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 成为

$$(5+\cos^2\beta-4\sqrt{5}\cos\beta\sin\beta)x_1''^2+x_2''^2+(-\sin 2\beta-4\sqrt{5}\cos 2\beta)x_1''x_3''+(5+\sin^2\beta+4\sqrt{5}\sin\beta\cos\beta)x_3''^2.$$

令 $x_1''x_3''$ 前面的系数为零, 即让 $-\sin 2\beta-4\sqrt{5}\cos 2\beta=0$, 解得 $\cos\beta=\frac{2}{3}$,$\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 是一组解. 此时, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 成了

$$x_1''^2+x_2''^2+10x_3''^2.$$

这样就成功地把二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为了标准型. 其中

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos-\beta & 0 & -\sin-\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin-\beta & 0 & \cos-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos-\beta & 0 & -\sin-\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin-\beta & 0 & \cos-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos-\alpha & -\sin-\alpha & 0 \\ \sin-\alpha & \cos-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

对于一般的实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

来说, 我们可以先考虑通过转轴去掉交叉项 x_1x_2, 为此, 令

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(1,2)}\cos\alpha_{1,2} - x_2^{(1,2)}\sin\alpha_{1,2}, \\ x_2 = x_1^{(1,2)}\sin\alpha_{1,2} + x_2^{(1,2)}\cos\alpha_{1,2}, \\ x_3 = x_3^{(1,2)}, \\ \vdots \\ x_n = x_n^{(1,2)}. \end{cases}$$

这样, 经过替换后, 可得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{1,2}(x_1^{(1,2)}, x_2^{(1,2)}, \cdots, x_n^{(1,2)}),$$

通过选取特定的 $\alpha_{1,2}$, 必定能使 $f_{1,2}(x_1^{(1,2)}, x_2^{(1,2)}, \cdots, x_n^{(1,2)})$ 中不含 $x_1^{(1,2)}x_2^{(1,2)}$ 这一项. 此时,$f_{1,2}(x_1^{(1,2)}, x_2^{(1,2)}, \cdots, x_n^{(1,2)})$ 中交叉项只剩下 $x_1^{(1,2)}x_3^{(1,2)}, \cdots, x_1^{(1,2)}x_n^{(1,2)}, x_2^{(1,2)}x_3^{(1,2)}, \cdots, x_2^{(1,2)}x_n^{(1,2)}, \cdots, x_{n-1}^{(1,2)}x_n^{(1,2)}$. 然后我们再考虑通过转轴去掉交叉项 $x_1^{(1,2)}x_3^{(1,2)}$, 为此, 只需要令

$$\begin{cases} x_1^{(1,2)} = x_1^{(1,3)}\cos\alpha_{1,3} - x_3^{(1,3)}\sin\alpha_{1,3}, \\ x_2^{(1,2)} = x_2^{(1,3)}, \\ x_3^{(1,2)} = x_1^{(1,3)}\sin\alpha_{1,3} + x_3^{(1,3)}\cos\alpha_{1,3}, \\ \vdots \\ x_n^{(1,2)} = x_n^{(1,3)} \end{cases},$$

经过替换后,

$$f_{1,2}(x_1^{(1,2)}, x_2^{(1,2)}, \cdots, x_n^{(1,2)}) = f_{1,3}(x_1^{(1,3)}, x_2^{(1,3)}, \cdots, x_n^{(1,3)}),$$

通过选取特定的 $\alpha_{1,3}$, 必定能使得 $f_{1,3}(x_1^{(1,3)}, x_2^{(1,3}, \cdots, x_n^{(1,3})$ 中的交叉项 $x_1^{(1,3}x_3^{(1,3)}$ 消去, 此时, $f_{1,3}(x_1^{(1,3)}, x_2^{(1,3)}, \cdots, x_n^{(1,3)})$ 中交叉项只剩下 $x_1^{(1,3)}x_4^{(1,3)}, \cdots, x_1^{(1,3)}x_n^{(1,3)}, x_2^{(1,3)}x_3^{(1,3)}, \cdots, x_2^{(1,3)}x_n^{(1,3)}, \cdots, x_{n-1}^{(1,3)}x_n^{(1,3)}$. 之后经过若干次类似的操作, 会消去所有的交叉项, 剩下的二次型

$$f_{n-1,n}(x_1^{(n-1,n)}, x_2^{(n-1,n)}, \cdots, x_n^{(n-1,n)}),$$

只含有平方项, 而不含有交叉项. 而且,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n-1,n)} \\ x_2^{(n-1,n)} \\ \vdots \\ x_n^{(n-1,n)} \end{pmatrix} = A_{n-1,n} \cdots A_{13}A_{12} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中矩阵 A_{ij} 表示将直角坐标平面 $x_i^{(i,j-1)}Ox_j^{(i,j-1)}$ 逆时针旋转 $\alpha_{i,j-1}$ 角度 (当 $i < j-1$ 时) 或者将直角坐标平面 $x_i^{(i-1,n)}Oy_j^{(i-1,n)}$ 旋转 $\alpha_{i-1,n}$ 角度 (当 $i = j-1$) 的同时, 保持其余的坐标轴不动的线性变换. 这是高维空间中的旋转, 又叫做Givens 旋转.

我们发现,$A_{n-1,n} \cdots A_{13}A_{12}$ 表示一个正交矩阵, 该正交矩阵代表若干个 Givens 旋转的复合. 可见, 使用逐步转轴法化二次型为标准型的总体效果, 就是用正交变换化二次型为标准型.