从微分观点看对称多项式基本定理

对称多项式基本定理早已被 Newton 所知, 后来又在 Galois 理论的建立中发挥了重要作用. 但是其完整的叙述和证明直到 19 世纪中叶才出现 [1]. 现今对于对称多项式基本定理的证明有若干种, 文献 [2] 采用的是字典序法, 该方法同时给出了将对称多项式表达成基本对称多项式的多项式的具体的算法. 文献 [3] 采用的是数学归纳法. 然而这些方法都是采用了组合和代数的观点. 下面, 笔者采用多元微分学的观点来证明对称多项式基本定理, 并给出了具体的算法.

1 概念与记号

- n 元对称多项式: 关于 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的多项式 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 是对称的, 如果 $\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 交换 r_i, r_j 的地位导致多项式不变. 也就是说,$\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 当把 r_i 用 r_j' 代替, 将 r_j 用 r_i 代替, 再把 r_j' 用 r_j 代替, 经过这样的操作后, 多项式 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 不变, 则 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 是对称多项式.
- n 元多项式的次数: 设 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 是一个多元多项式. 不妨设

  $$f(r_1, \cdots, r_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i r_1^{k_{i,1}} r_2^{k_{i,2}} \cdots r_n^{k_{i,n}},$$

  其中 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $k_{i,1}, \cdots, k_{i,n}$ 都为非负整数,a_i 为系数. 易得 m 个数

  $$\sum_{j=1}^{n} k_{1,j}, \sum_{j=1}^{n} k_{2,j}, \cdots, \sum_{i=1}^{n} k_{m,j}$$

  中必有最大值. 定义该最大值为 n 元多项式 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 的次数.
- 基本对称多项式

  $$\begin{cases} \sigma_1 = r_1 + r_2 + \cdots + r_n, \\ \sigma_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n, \\ \sigma_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n, \\ \vdots \\ \sigma_n = r_1 r_2 \cdots r_n. \end{cases}$$

  即, 对于两两不等的 $p_1, \cdots, p_i$,

  $$\sigma_i = \sum_{1 \le p_1 < p_2 < \cdots < p_i \le n} r_{p_1} r_{p_2} \cdots r_{p_i}.$$

2 引理与推论

引理 2.1 (多元反函数定理 [4]). 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集合, 并设 $f: E \to \mathbf{R}^n$ 是在 E 上连续可微的函数. 假设 $\mathbf{x_0} \in E$ 使得线性变换 $f'(\mathbf{x_0}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是可逆的, 那么存在含有 $\mathbf{x_0}$ 的开集 $U \subset E$ 以及含有 $f(\mathbf{x_0})$ 的开集 $V \subset \mathbf{R}^n$, 使得 f 是从 U 到 V 的双射, 而且逆映射 $f^{-1} : V \to U$ 在点 $f(\mathbf{x_0})$ 处可微, 而且

$$(f^{-1})'(f(\mathbf{x_0})) = (f'(\mathbf{x_0}))^{-1}.$$

证明. 见 [4]. □

引理 2.2. 设 $r_1,\cdots,r_n$ 为两两不等的实数, 映射 $f:M\to\mathbf{R}^n$, 其中 $f((r_1,\cdots,r_n))=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, 且 $M\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集, 且 $\forall\mathbf{x}\in M$, 当把 $\mathbf{x}$ 写成坐标分量的形式, 也就是 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 时, 有 $x_1,\cdots,x_n$ 两两不等. 则我们有对于任意的 $\mathbf{r}\in M,f'(\mathbf{r})$ 可逆. 因此在 $r_1,\cdots,r_n$ 两两不等时, $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 函数无关, 于是在 $r_1,\cdots,r_n$ 两两不等时, 关于 $r_1,\cdots,r_n$ 的任意连续可微函数也能表达成关于 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的连续可微函数.

证明. 设 $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)$, 于是也就是证明 Jacobi 行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_n}\end{vmatrix}\neq 0.$$

下面我们来证明

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_n}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(r_i-r_j)\neq 0. \tag{1}$$

我们不打算通过按步就班的计算和归纳法来证明式 (1), 取而代之的, 是采用一种观察的方法. 为此, 我们先来考察特殊情形. $n=2$ 时的情形很简单, 即

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ r_2 & r_1\end{vmatrix}=r_1-r_2.$$

当 $n=3$ 时, 可得

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ r_2+r_3 & r_1+r_3 & r_1+r_2\\ r_2r_3 & r_1r_3 & r_1r_2\end{vmatrix}=(r_1-r_2)(r_2-r_3)(r_1-r_3) \tag{2}$$

怎么得到式 (2) 呢? 根据行列式的性质, 易得当 $r_1=r_2$ 或者 $r_1=r_3$ 或者 $r_2=r_3$ 时, 有

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ r_2+r_3 & r_1+r_3 & r_1+r_2\\ r_2r_3 & r_1r_3 & r_1r_2\end{vmatrix}=0, \tag{3}$$

而且易得行列式 (2) 是关于 r_1,r_2,r_3 的多项式 $v(r_1,r_2,r_3)$, 因此可得 $v(r_1,r_2,r_3)$ 有因式 $(r_1-r_2),(r_1-r_3),(r_2-r_3)$, 于是 $v(r_1,r_2,r_3)$ 有因式 $(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$. 再通过行列式 (2) 里项 $r_1^2r_2$ 的符号和次数, 可以确定 $v(r_1,r_2,r_3)=(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$. 这样就得到了 (2) 式的结果.

对于一般的情形 n, 完全可以仿照 $n=3$ 时的情形来论证, 从而容易得到式 (1). □

推论 2.1. 设 $r_1,\cdots,r_n$ 为两两不等的实数, 映射 $f:M\to\mathbf{R}^n$, 其中 $f((r_1,\cdots,r_n))=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$, 且 $M\subset\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集. 且 $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, 当把 $\mathbf{x}$ 写成坐标分量的形式, 也就是 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 时, 有 $x_1,\cdots,x_n$ 两两不等. 则对于任意的 $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)\in M$, 存在含有 $\mathbf{r}$ 的开集 $U\subset M$, 以及含有 $f(\mathbf{r})$ 的开集 $V\subset\mathbf{R}^n$, 使得 f 是从 U 到 V 的双射, 而且逆映射 $f^{-1}:V\to U$ 在点 $f(\mathbf{r})$ 处可微, 且

$$(f^{-1})'(f(\mathbf{r}))=(f'(\mathbf{r}))^{-1},$$

也即, 存在双射 $f^{-1}:V\to U$, 使得 $f^{-1}((\sigma_1,\cdots,\sigma_n))=(r_1,\cdots,r_n)$, 且

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_n}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_n}\end{pmatrix}^{-1}.$$

证明. 由引理 2.1 和引理 2.2 结合起来很容易得到证明. □

推论 2.2. 设 $r_1,\cdots,r_n$ 为互不相等的实数, 且关于 $r_1,\cdots,r_n$ 的多项式 $f(r_1,\cdots,r_n)$ 是从 M 到 $\mathbf{R}$ 的映射, 其中 M 为 $\mathbf{R}^n$ 的开子集, 且 $\forall\mathbf{x}\in M$, 当 $\mathbf{x}$ 写成坐标形式 $(x_1,\cdots,x_n)$ 时, 有 $x_1,\cdots,x_n$ 两两不等. 则 n 个偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial\sigma_n}$$

都存在.

证明. 也即证明向量

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}$$

存在. 这由多元链法则结合推论 2.1 可以得到证明. 具体地来说, 设 $g:M\to\mathbf{R}^n$ 为从 M 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射, 且 $g((r_1,\cdots,r_n))=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$. 根据推论 2.1,$\forall\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_n)\in M$, 都存在含有 $\mathbf{r}$ 的开集 $U\subset M$, 使得 $g:U\to V$ 是从 U 到 V 的双射, 其中 V 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, 且

$$(g^{-1})'(g(\mathbf{r}))=(g'(\mathbf{r}))^{-1},$$

也即,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_n}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_n}\end{pmatrix}^{-1}. \tag{4}$$

且易得向量

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial r_n}\end{pmatrix}$$

存在, 因此结合式 (4) 和根据多元复合函数的链法则,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}$$

不仅存在, 而且有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial r_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_n}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial r_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_n}\end{pmatrix}^{-1}.\end{aligned}$$

□

引理 2.3. 当 $r_1,\cdots,r_n$ 为互不相等的实数时,

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_n}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial\sigma_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_n}\end{pmatrix}^{-1} \tag{5}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$a_{ij}=\frac{(-1)^{j+1}r_i^{n-j}}{\prod_{k\neq i;1\leq k\leq n}(r_i-r_k)}.$$

举两个例子,$n=2$ 时,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1-r_2} & \frac{-1}{r_1-r_2} \\ \frac{r_2}{r_2-r_1} & \frac{-1}{r_2-r_1} \end{pmatrix}.$$

$n=3$ 时,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_1^2}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{-r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \\ \frac{r_2^2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{-r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} \\ \frac{r_3^2}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{-r_3}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} \end{pmatrix}.$$

等等.

证明. 式 (5) 中的等号是推论 2.1 的直接结论. 关键是证明式 (6) 中的等号. 为此我们来看行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_n} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial \sigma_n}{\partial r_n} \end{vmatrix}$$

中 $\frac{\partial \sigma_j}{\partial r_i}$ 的代数余子式. 仿照对引理 2.1 的证明方法, 易得 $\frac{\partial \sigma_j}{\partial r_i}$ 的代数余子式为

$$(-1)^{i+j} r^{n-j} \prod_{1\le p<q\le n; p,q\neq i} (r_p - r_q), \tag{7}$$

因此根据伴随矩阵与可逆矩阵的关系, 结合式 (1) 和式 (7), 可得式 (6). □

引理 2.4. 设 $r_1, \cdots, r_n$ 为互不相等的实数, 且 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 为关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的对称多项式, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial f}{\partial r_i}}{\prod_{1\le p\le n; p\neq i}(r_i - r_p)} \tag{8}$$

为关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的对称多项式.

证明. 式 (8)关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的对称性是显然的, 关键是证明该式是关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的多项式. 为此, 将式 (8) 化为

$$\frac{1}{\prod_{1\le c<d\le n}(r_c - r_d)} \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial r_i} \prod_{1\le p<q\le n; p,q\neq i} (r_p - r_q) \right). \tag{9}$$

我们只用证明

$$\sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial r_i} \prod_{1\le p<q\le n; p,q\neq i} (r_p - r_q) \right) \tag{10}$$

有因式 $\prod_{1\le c<d\le n}(r_c - r_d)$ 即可. 在式 10中令 $r_i = r_j$, 其中 i, j 为 $\{1, \cdots, n\}$ 中的任意两个不同的数, 此时易得式 (10) 会成为 0. 因此 (10) 有因式 $\prod_{1\le c<d\le n}(r_c - r_d)$. □

引理 2.5. 设 $r_1, \cdots, r_n$ 为两两不等的实数. 若关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的次数不大于 m 的所有对称多项式能表示成基本对称多项式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 则关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的次数为 $m+1$ 的对称多项式也能表达成基本对称多项式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式.

证明. 设 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 为关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的次数为 $m+1$ 的对称多项式. 根据推论 2.2,$\forall 1 \le j \le n, \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}$ 存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial \sigma_j}. \tag{11}$$

结合引理 2.3, 式(11) 可以变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} &= \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{j+1} \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{r_i^{n-j}}{\prod_{1\le p\le n; p\neq i}(r_i - r_p)} \right) \\ &= (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial r_i} r_i^{n-j} \frac{1}{\prod_{1\le p\le n; p\neq i}(r_i - r_p)} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

易得 $\frac{\partial f}{\partial r_i} r_i^{n-j}$ 必定是某个对称多项式关于 r_i 的偏导数, 因此根据引理 2.4, 式 (12) 是一个关于 $r_1, \cdots, r_n$ 的对称多项式. 而且易得只要 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 的次数不小于 1, 那么对称多项式(12)的次数就会低于 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 的次数. 因此, 对称多项式 (12) 是一个次数不大于 m 的对称多项式. 而由题设陈述,(12) 可以表达成 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 不妨让式 (12) 按照 σ_j 的降幂排列, 即写成

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_j} = A_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)\sigma_j^{l_1} + \cdots + A_s(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)\sigma_j^{l_s}, \tag{13}$$

其中 $l_1 \geq \cdots \geq l_s$ 都是非负整数, 且 $\forall 1 \leq i \leq n$, $A_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ 都是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ 的多项式. 由于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 函数无关 (引理 2.2), 因此对式(13) 两边积分可得

$$f(r_1, \cdots, r_n) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{1+l_i} A_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)\sigma_j^{l_i+1} + C(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n), \tag{14}$$

其中 $C(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ 是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ 的连续可微函数.

下面我们证明 $C(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ 其实是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 这是容易的, 因为根据式 (14),$f(r_1, \cdots, r_n)$ 可以表达成任意一个变量 $\sigma_h(1 \leq h \leq n)$ 的多项式, 假如 $C(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ 不是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 那么必定存在 $h \in \{1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n\}$, 使得 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 不能表达为 σ_h 的多项式, 矛盾. 这样我们就证明了 $C(\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n)$ 其实是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{j-1}, \sigma_{j+1}, \cdots, \sigma_n$ 的多项式, 于是 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 是关于 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式. □

3 对称多项式基本定理

定理 3.1 (对称多项式基本定理)**.** 任意一个关于 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的对称多项式 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 都可以表达为基本对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 的多项式.

证明. 在对称多项式基本定理里, 我们完全可以令 $r_1, \cdots, r_n$ 为互不相等的实数. 然后我们用数学归纳法证明该命题. 当 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 是次数为 1 的对称多项式时, 显然

$$f(r_1, \cdots, r_n) = a(r_1 + \cdots + r_n) = a\sigma_1,$$

其中 a 为常数. 结合引理 2.5 和数学归纳法, 可得当 $f(r_1, \cdots, r_n)$ 的次数为任意的自然数时, 都可以表示为基本对称多项式 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 的多项式. 这样就完成了证明. □

4 例子

下面我们来举出一些具体的例子, 以此更好地阐述以及应用上面的理论. 并通过这些例子, 呈现出具体的算法.

例 4.1. 当 $n = 2$ 时, 我们尝试将对称多项式 $f(r_1, r_2) = r_1^2 + r_2^2$ 表示成 σ_1, σ_2 的多项式. 很容易看出来 $f(r_1, r_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. 下面我们用本文中阐述的方法导出这个结论, 而不是直接观察出这个结论. 不妨令 r_1, r_2 为互不相等的实数, 则

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2r_1 & 2r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1 - r_2} & \frac{-1}{r_1 - r_2} \\ \frac{r_2}{r_2 - r_1} & \frac{-1}{r_2 - r_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(r_1 + r_2) & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此, $f(r_1, r_2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + C$, 易得常数 $C = 0$.

例 4.2. 当 $n=3$ 时, 我们尝试将对称多项式 $f(r_1,r_2,r_3)=r_1^2+r_2^2+r_3^2$ 表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式. 不妨令 r_1,r_2,r_3 为互不相等的实数, 则

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_3}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_3}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_3}\\ \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_3}\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2r_1 & 2r_2 & 2r_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{r_1^2}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{-r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\\ \frac{r_2^2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{-r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\\ \frac{r_3^2}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{-r_3}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2(x_1+x_2+x_3) & -2 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2\sigma_1 & -2 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此可得 $f(r_1,r_2,r_3)=\sigma_1^2-2\sigma_2+C$, 易得常数 $C=0$.

例 4.3. 当 $n=3$ 时, 我们尝试将对称多项式 $f(r_1,r_2,r_3)=r_1^3+r_2^3+r_3^3$ 表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式. 不妨令 r_1,r_2,r_3 为互不相等的实数, 则

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_3}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial r_1}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_1}{\partial\sigma_3}\\ \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_2}{\partial\sigma_3}\\ \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial r_3}{\partial\sigma_3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_3}\\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_2} & \frac{\partial\sigma_3}{\partial r_3}\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}3r_1^2 & 3r_2^2 & 3r_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{r_1^2}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{-r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\\ \frac{r_2^2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{-r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}\\ \frac{r_3^2}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{-r_3}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) & -3(x_1+x_2+x_3) & 3\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

根据例 *4.2*,

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

因此我们最终得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_2} & \frac{\partial f}{\partial\sigma_3}\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}\sigma_1^2-\sigma_2 & -\sigma_1 & 1\end{pmatrix}.$$

因此解得

$$f(r_1,r_2,r_3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3+C.$$

易得常数 C 为 0.

例 4.4. 当 $n=3$ 时, 我们尝试将对称多项式 $f(r_1,r_2,r_3)=r_1^2r_2+r_2^2r_1+r_2^2r_3+r_3^2r_2+r_3^2r_1+r_1^2r_3$ 表示

为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式. 不妨令 r_1,r_2,r_3 为互不相等的实数, 则

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_1}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_2}{\partial \sigma_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_2} & \frac{\partial r_3}{\partial \sigma_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_1} & \frac{\partial f}{\partial r_2} & \frac{\partial f}{\partial r_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial r_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial r_2} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial r_3} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2r_1r_2+2r_1r_3+r_2^2+r_3^2 & 2r_2r_3+2r_2r_1+r_1^2+r_3^2 & 2r_3r_1+2r_3r_2+r_2^2+r_1^2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} \frac{r_1^2}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{-r_1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} & \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)} \\ \frac{r_2^2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{-r_2}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} & \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)} \\ \frac{r_3^2}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{-r_3}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} & \frac{1}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 & r_1+r_2+r_3 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_2 & \sigma_1 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

因此解得 $f(r_1,r_2,r_3)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3+C$, 易得常数 $C=0$.

参考文献

[1] Ben Blum-Smith,Samuel Coskey, The Fundamental Theorem on Symmetric Polynomials:History's First Whiff of Galois Theory, 预印本. arXiv: 1301.7116.

[2] 张禾瑞, 郝鈵新. 高等代数 [M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社,2007:91-98

[3] Harold M.Edwards. Galois theory. Springer-Verlag, New York,1984

[4] Terence Tao. 陶哲轩实分析 [M]. 王昆扬, 译. 北京: 人民邮电出版社,2008:376