

推导 Newton 公式

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江杭州 310036

我们先来探究 $n = 2$ 的情形

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2.$$

$$r_1^3 + r_2^3 = (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) - (r_1r_2^2 + r_2r_1^2) = (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) - r_1r_2(r_1 + r_2).$$

$$r_1^4 + r_2^4 = (r_1 + r_2)(r_1^3 + r_2^3) - r_1r_2(r_1^2 + r_2^2).$$

\vdots

$$r_1^{k+2} + r_2^{k+2} = (r_1 + r_2)(r_1^{k+1} + r_2^{k+1}) - r_1r_2(r_1^k + r_2^k).$$

我们再来探究 $n = 3$ 的情形. 此时,

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3),$$

$$\begin{aligned} r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (r_1r_2^2 + r_1r_3^2 + r_2r_1^2 + r_2r_3^2 + r_3r_1^2 + r_3r_2^2) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)(r_1 + r_2 + r_3) + 3r_1r_2r_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) - (r_1r_2^3 + r_1r_3^3 + r_2r_1^3 + r_2r_3^3 + r_3r_1^3 + r_3r_2^3) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) + r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1^5 + r_2^5 + r_3^5 &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4) - (r_1r_2^4 + r_1r_3^4 + r_2r_1^4 + r_2r_3^4 + r_3r_1^4 + r_3r_2^4) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^4 + r_2^4 + r_3^4) - (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3)(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) + r_1r_2r_3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1^6 + r_2^6 + r_3^6 &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^5 + r_2^5 + r_3^5) - (r_1r_2^5 + r_1r_3^5 + r_2r_1^5 + r_2r_3^5 + r_3r_1^5 + r_3r_2^5) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^5 + r_2^5 + r_3^5) - (r_1^4 + r_2^4 + r_3^4)(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) + r_1r_2r_3(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3). \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} r_1^{k+3} + r_2^{k+3} + r_3^{k+3} &= (r_1 + r_2 + r_3)(r_1^{k+2} + r_2^{k+2} + r_3^{k+2}) - (r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)(r_1^{k+1} + r_2^{k+1} + r_3^{k+1}) \\ &\quad + r_1r_2r_3(r_1^k + r_2^k + r_3^k). \end{aligned}$$

我们再来探究 $n = 4$ 的情形.

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4).$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com

$$\begin{aligned}
r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3 &= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\
&\quad - (r_1r_2^2 + r_1r_3^2 + r_1r_4^2 + r_2r_1^2 + r_2r_3^2 + r_2r_4^2 + r_3r_1^2 + r_3r_2^2 + r_3r_4^2 + r_4r_1^2 + r_4r_2^2 + r_4r_3^2) \\
&= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \\
&\quad - (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\
&\quad + 3(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1^4 + r_2^4 + r_3^4 + r_4^4 &= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3) \\
&\quad - (r_1r_2^3 + r_1r_3^3 + r_1r_4^3 + r_2r_1^3 + r_2r_3^3 + r_2r_4^3 + r_3r_1^3 + r_3r_2^3 + r_3r_4^3 + r_4r_1^3 + r_4r_2^3 + r_4r_3^3) \\
&= (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3) \\
&\quad - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2)(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) + \sum r_1^2r_2r_3 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^3 - \sum r_1^2 \sum r_1r_2 + \sum r_1r_2r_3 \sum r_1 - 4r_1r_2r_3r_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum r_1^5 &= \sum r_1 \sum r_1^4 - \sum r_1r_2^4 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^4 - \sum r_1r_2 \sum r_1^3 + \sum r_1r_2r_3^3 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^4 - \sum r_1r_2 \sum r_1^3 + \sum r_1r_2r_3 \sum r_1^2 - \sum r_1r_2r_3r_4^2 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^4 - \sum r_1r_2 \sum r_1^3 + \sum r_1r_2r_3 \sum r_1^2 - r_1r_2r_3r_4 \sum r_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum r_1^6 &= \sum r_1 \sum r_1^5 - \sum r_1r_2^5 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^5 - \sum r_1r_2 \sum r_2^4 + \sum r_1r_2r_3^4 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^5 - \sum r_1r_2 \sum r_2^4 + \sum r_1r_2r_3 \sum r_1^3 - \sum r_1r_2r_3r_4^3 \\
&= \sum r_1 \sum r_1^5 - \sum r_1r_2 \sum r_2^4 + \sum r_1r_2r_3 \sum r_1^3 - r_1r_2r_3r_4 \sum r_1^2.
\end{aligned}$$

等等.