如何解三次方程

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 2 月 22 日

在试图解三次方程之前, 我们来看二次方程是如何解的. 设二次方程

$$x^2+bx+c=0$$

的根为 x_1,x_2, 根据韦达定理, 我们有

$$x_1+x_2=-b, x_1x_2=c.$$

为了求解 x_1,x_2, 我们只需要求解出 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$, 其中 α_1,α_2 为两个非零常数, 且 $\alpha_1:\alpha_2\neq 1:1$, 然后联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-b,\\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2=k,\end{cases}$$

便可解得 x_1,x_2. 显然,$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ 不是关于 x_1,x_2 的对称多项式, 但是

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2)$$

是关于 x_1,x_2 的对称多项式, 根据对称多项式基本定理,

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2)$$

可以被 α_1,α_2,b,c 所表示, 具体的,

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2)=\alpha_1\alpha_2(b^2-2c)+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)c.$$

我们希望 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ 和 $\alpha_2x_1+\alpha_1x_2$ 之间存在如下关系:

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2=p(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2),$$

其中 p 是常数, 则 $p^2=1$, 解得 $p=1$ 或者 -1. 当 $p=1$ 时,$\alpha_1=\alpha_2$, 与 $\alpha_1:\alpha_2=1:1$ 矛盾. 当 $p=-1$ 时, 可得 $\alpha_1=-\alpha_2$, 则我们得到

$$-\alpha_1^2(x_1-x_2)^2=-\alpha_1^2b^2+4\alpha_1^2c.$$

解得

$$x_1-x_2=\pm\sqrt{b^2-4c}.$$

然后联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=-b,\\ x_1-x_2=\pm\sqrt{b^2-4c}\end{cases}$$

可以解得 x_1,x_2.

下面我们仿照上面的方法, 看怎么解三次方程

$$x^3+bx^2+cx+d=0.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

设该三次方程的根为 x_1, x_2, x_3, 根据韦达定理,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = c \\ x_1x_2x_3 = -d. \end{cases}$$

我们希望存在

$$\begin{cases} \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = k_1, \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 = k_2. \end{cases}$$

其中 $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 都是常数. 我们希望这两条方程联立 $x_1 + x_2 + x_3 = -b$ 形成的三元齐次线性方程组有唯一解. 显然,

$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)(\alpha_1x_1+\alpha_3x_2+\alpha_2x_3)(\alpha_3x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1x_3)(\alpha_2x_1+\alpha_1x_2+\alpha_3x_3)(\alpha_3x_1+\alpha_1x_2+\alpha_2x_3)(\alpha_2x_1+\alpha_3x_2+\alpha_1x_3) \tag{1}$$

是关于 x_1, x_2, x_3 的对称多项式, 根据对称多项式基本定理, 式(1) 可以表达为关于 b, c, d 的多项式, 具体怎么表达这里就从略了, 因为太麻烦, 反正能表达出来就是了, 我们只把 (1) 表达为 $f(b, c, d)$. 然后, 对 (1) 式中的 6 个因式进行分组, 分为两组, 分别为

- $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3$
- $\alpha_3x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_2x_3$
- $\alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_1x_3$

以及

- $\alpha_3x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_1x_3$
- $\alpha_1x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_2x_3$
- $\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_3x_3$

分组依据是每一组的系数都进行轮换. 然后令

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = p(\alpha_3x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_2x_3) = p^2(\alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_1x_3).$$

以及

$$\alpha_3x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_1x_3 = q(\alpha_1x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_2x_3) = q^2(\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_3x_3).$$

解得 $p^3 = 1$ 以及 $q^3 = 1$. 当 $p, q = 1$ 时, 显然是没有什么意思的, 因为此时 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, 这样就无法与 $x_1 + x_2 + x_3 = -b$ 联立起来解得方程组. 当 $p = \omega_3$, 其中 ω_3 是三次单位根 $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 时, 得到

$$\alpha_1 = \omega_3\alpha_3 = \omega_3^2\alpha_2,$$

此时,$q = \omega_3^{-1}$. 而当 $p = \omega_3^{-1}$ 时, 解得

$$\alpha_1 = \omega_3^{-1}\alpha_3 = \omega_3^{-2}\alpha_2,$$

此时 $q = \omega_3$. 因此由对称性, 不妨令 $p = \omega_3$,$q = \omega_3^{-1}$. 令 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3 = U$, 令 $\alpha_3x_1+\alpha_2x_2+\alpha_1x_3 = V$, 于是我们有

$$U^3V^3 = f(b, c, d).$$

易得

$$\begin{aligned} &(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3)(\alpha_3x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_2x_3)(\alpha_2x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_1x_3) \\ &+ (\alpha_3x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_1x_3)(\alpha_1x_1 + \alpha_3x_2 + \alpha_2x_3)(\alpha_2x_1 + \alpha_1x_2 + \alpha_3x_3) = U^3 + V^3 \end{aligned}$$

也是关于 x_1, x_2, x_3 的对称多项式, 因此根据对称多项式基本定理 $U^3 + V^3$ 也能表达关于 b, c, d 的多项式 $g(b, c, d)$. 因此我们得到

$$\begin{cases} U^3V^3 = f(b, c, d), \\ U^3 + V^3 = g(b, c, d). \end{cases}$$

因此可以解得 U^3, V^3, 进一步解得 U, V. 然后联立方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b, \\ \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 = U, \\ \alpha_3x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_1 = V. \end{cases}$$

解出 x_1, x_2, x_3 即可 (方程组中的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 会与 U, V 表达式中的 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 约去.).