为了浙大而奋斗: 利用特征向量解三次方程

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 19 日

易得矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -p & -q & -r \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征方程为

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0,$$

其中 $p, q, r \in \mathbf{R}$. 设特征方程有三个不同的实根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 对应的特征向量分别为 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$, 也即,

$$A(\mathbf{v_1}) = \lambda_1 \mathbf{v_1}, A(\mathbf{v_2}) = \lambda_2 \mathbf{v_2}, A(\mathbf{v_3}) = \lambda_3 \mathbf{v_3}.$$

不妨设

$$\mathbf{v_1} = (\lambda_1^2, \lambda_1, 1), \mathbf{v_2} = (\lambda_2^2, \lambda_2, 1), \mathbf{v_3} = (\lambda_3^2, \lambda_3, 1).$$

设

$$\begin{cases} \alpha_1 \mathbf{v_1} + \alpha_2 \mathbf{v_2} + \alpha_3 \mathbf{v_3} = (0, 0, 1), \\ \beta_1 \mathbf{v_1} + \beta_2 \mathbf{v_2} + \beta_3 \mathbf{v_3} = (0, 1, 0), \\ \gamma_1 \mathbf{v_1} + \gamma_2 \mathbf{v_2} + \gamma_3 \mathbf{v_3} = (1, 0, 0). \end{cases}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, 为了浙大而不懈奋斗!E-mail:h5411167@gmail.com