

线性代数应该这样学, 习题 5.13

叶卢庆*

2014 年 9 月 6 日

习题. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, 并且 V 的每个 $\dim V - 1$ 维子空间在 T 下都不变. 证明 T 是恒等算子的标量倍.

证明. 设 $\alpha = (v_1, \dots, v_n)$ 是 V 的一组有序基. 设向量 v_i 张成 V 的一维线性子空间 U_i . 则

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n.$$

假若存在 $1 \leq j \leq n$, 使得

$$T(v_j) \neq \lambda v_j,$$

则 $T(v_j)$ 必定可以分解为 $w + \lambda' v_j$, 其中 $\lambda' \in \mathbf{F}$, w 可以被 $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ 中的向量进行唯一的线性表示. 由于 $w \neq 0$, 因此必定存在 $k \neq j$, 使得 w 被 $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ 中的向量线性表示时, v_k 前面的系数 $a_k \neq 0$. 现在我们看基 $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_k\}$ 张成的 $\dim V - 1$ 维线性子空间, 显然这个线性子空间并非 T 的不变子空间. 于是假设错误, 于是 $\forall 1 \leq j \leq n, T(v_j) = \lambda_j v_j$, 其中 $\lambda_j \in \mathbf{F}$. \square

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com