# 线性代数，习题 17

叶卢庆*

2014 年 8 月 20 日

**题目.** 设 $f,g$ 为 $[-1,1]$ 上的连续复值函数，满足 $\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx=9,\int_{-1}^{1}|g(x)|^2dx=16$.

- $\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx$ 可能取什么值？
- $\int_{-1}^{1}|f(x)+g(x)|^2dx$ 可能取到什么值？

**证明.**

- 根据 Cauchy-Schwartz 定理，
$$-12\leq|\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx|\leq 12.$$
因此,$\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx$ 可以取到 $\{a+bi|a,b\in\mathbf{R},0\leq a^2+b^2\leq 144\}$ 中的值.
- $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|f(x)+g(x)|^2dx&=\int_{-1}^{1}(f(x)+g(x))(\overline{f(x)}+\overline{g(x)})dx\\&=\int_{-1}^{1}(|f(x)|^2+f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)}+|g(x)|^2)dx\\&=\int_{-1}^{1}(f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)})dx+25,\end{aligned}$$
而 $1\leq\int_{-1}^{1}(f(x)\overline{g(x)}+g(x)\overline{f(x)})dx+25\leq 49$.

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com