线性代数，习题 12

叶卢庆*

2014 年 8 月 19 日

习题. 令 $P_2(\mathbf{R})$ 为所有次数不超过 2 的实系数多项式形成的线性空间. 在 $P_2(\mathbf{R})$ 上定义内积

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- 求出 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组标准正交基.
- 求出 $(1, x)^{\perp}$ 的一个基.

证明.

- $P_2(\mathbf{R})$ 是一个三维线性空间,$(1, x, x^2) = (v_1, v_2, v_3)$ 是一组有序基. 显然这组基并非正交基, 但是我们可以利用 Gram-Schimidt 正交化过程将这组基正交化. 令 $w_1 = v_1$,

$$w_2 = v_2 - \lambda_1 v_{1,1} = x - \lambda_{1,1},$$

且 w_2 与 v_1 正交, 因此

$$\int_0^1 x - \lambda dx = 0 \Rightarrow \lambda_{1,1} = \frac{1}{2}.$$

因此 $w_2 = x - \frac{1}{2}$. 令 w_3 与 w_1, w_2 都正交, 且

$$w_3 = v_3 - \lambda_{1,2} v_1 - \lambda_{2,2} v_2 = x^2 - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,2} x,$$

且

$$\begin{cases} \int_0^1 x^2 - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,2} x dx = 0, \\ \int_0^1 (x - \frac{1}{2})(x^2 - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,2} x) dx = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 x^2 - \lambda_{1,2} - \lambda_{2,2} x dx = 0, \\ \int_0^1 x^3 - \lambda_{1,2} x - \lambda_{2,2} x^2 dx = 0. \end{cases} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1}{6}, \lambda_{2,2} = 1.$$

因此 $(1, x - \frac{1}{2}, x^2 - x + \frac{1}{6})$ 是 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组正交基. 进一步,$(1, 12x - 6, 180x^2 - 180x + 30)$ 是 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组标准正交基.

- $\{x^2\}$.

□

*叶卢庆 (1992—),E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com