线性代数应该这样学,习题5.11

叶卢庆*

2014 年 9 月 5 日

> 矩阵的行列式和特征值对于矩阵的微扰不敏感,但是矩阵的可逆性和可对角化性对于矩阵的微扰是敏感的.因此我们可以利用矩阵的微扰,改变矩阵的可逆性或者可对角化性,却基本不改变矩阵的行列式和特征值.利用这一点可以解决一类问题.
>
> 叶卢庆.

题目. 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$.证明ST和TS有相同的本征值.

解. 设λ是ST的一个本征值,于是,

$$\det(ST - \lambda I) = 0.$$

当T可逆时,上式化为

$$\det(ST - \lambda T^{-1}T) = 0.$$

根据行列式的乘法定理,

$$\det(S - \lambda T^{-1}) = 0.$$

再用一次行列式的乘法定理,可得

$$\det(TS - \lambda TT^{-1}) = \det(TS - \lambda I) = 0.$$

于是λ也是TS的特征值.当T不可逆然而S可逆时,仿照上述方法,依旧能推出λ是TS的特征值.

当T和S都不可逆时,必定存在$\varepsilon > 0$,使得$T + \varepsilon I$ 可逆.且由于行列式对于矩阵的微扰不敏感,因此

$$\lim_{\varepsilon \to 0; \det(T+\varepsilon I) \neq 0} \det(S(T + \varepsilon I) - \lambda I) = 0.$$

于是

$$\lim_{\varepsilon \to 0; \det(T+\varepsilon I) \neq 0} \det((T + \varepsilon I)S - \lambda I) = \det(TS - \lambda I) \neq 0.$$

于是λ依旧是TS的特征值. □

*叶卢庆(1992—),男,杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com