利用对称多项式基本定理来证明一个不等式

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 2 月 8 日

题目. 若 $x>0, y>0, z>0$, 求证

$$\frac{x^3}{x+y}+\frac{y^3}{y+z}+\frac{z^3}{z+x} \geq \frac{xy+yz+zx}{2}$$

证明. 我们只用证明

$$\frac{x^3(y+z)(z+x)+y^3(x+y)(z+x)+z^3(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{xy+yz+zx}{2}.$$

令

$$\begin{cases} \sigma_1 = x+y+z, \\ \sigma_2 = xy+yz+zx, \\ \sigma_3 = xyz. \end{cases},$$

易得

$$(x+y)(y+z)(z+x) = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3,$$

且

$$x^3(y+z)(z+x)+y^3(x+y)(z+x)+z^3(x+y)(y+z) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

则我们只用证明

$$2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) \geq \sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_2\sigma_3.$$

我做不了了, 还是先放着吧. ■

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com