线性代数，习题 9

叶卢庆*

2014 年 8 月 23 日

习题. 设 A 是一个 4×4 的矩阵, 且 $v_1,\cdots,v_3$ 是 A 的 3 个特征向量, 对应的特征值分别是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 且这 3 个特征值互不相同. 则向量 v_1,v_2,v_3 线性无关.

证明. 设 A 对应的线性变换为 L_A. 当 $k=1,2$ 时,v_1,v_2 肯定线性无关. 当 $k=3$ 时, 如果 v_1,v_2,v_3 线性相关, 由于 v_1,v_2 线性无关, 因此必有

$$v_3=a_1v_1+a_2v_2\Rightarrow L_A(v_3)=a_1L_A(v_1)+a_2L_A(v_2)=a_1\lambda_1v_1+a_2\lambda_2v_2=\lambda_3v_3,$$

可见,$a_1\lambda_3=a_1\lambda_1,a_2\lambda_3=a_2\lambda_2$. 由于 a_1,a_2 不全为 0, 因此必有 $\lambda_1=\lambda_3$ 或 $\lambda_2=\lambda_3$, 与假设矛盾. 因此 v_1,v_2,v_3 线性无关. □

*叶卢庆 (1992—),E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com