

线性代数, 习题 14

叶卢庆*

2014 年 8 月 20 日

题目. ^a 线性映射 $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ 定义为

$$T(x, y, z, w) := (x + y + z, y + 2z + 3w, x - z - 2w).$$

- 求 $\dim(\ker T)$.
- 求 $\ker T$ 的一组基.
- 求 T 的值域的一组基.

^a来自 <http://www.math.ucla.edu/~tao/resource/general/115a.3.02f/final.pdf>

证明. • T 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

我们将该矩阵进行初等行变换,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $\dim(\ker T) = 1$.

- $\{(1, -2, 1, 0)\}$.
- $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 3, 1)\}$.

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com