欧式空间中的线性变换是正交的当且仅当它把一组正交基变成一组正交基

叶卢庆*

2014 年 9 月 10 日

下面的定理来自张禾瑞等人编的《高等代数》第 5 版, 定理 8.3.2.

定理. 设 V 是一个 n 维欧式空间.σ 是 V 的一个线性变换. 如果 σ 把 V 的一组标准正交基仍旧变成 V 的一组标准正交基, 那么 σ 是 V 的一个正交变换.

证明. 设 $\alpha=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 是 V 的一组有序标准正交基. 则 V 中的任意两个向量 w_1,w_2 在 α 下可以分别用坐标 $(k_1,k_2,\cdots,k_n),(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 表示. 现在我们来看

$$\begin{aligned}\langle w_1,w_2\rangle &= \langle k_1v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n, l_1v_1+l_2v_2+\cdots+l_nv_n\rangle\\ &= k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_nl_n.\end{aligned}$$

设 σ 把标准正交基 α 变成另一组标准正交基 $\beta=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, 则向量 w_1 在 σ 的作用下变成

$$w_1'=k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n,$$

向量 w_2 在 σ 的作用下变成

$$w_2'=l_1e_1+l_2e_2+\cdots+l_ne_n.$$

显然 $\langle w_1',w_2'\rangle$ 仍然等于 $k_1l_1+\cdots+\cdots+k_nl_n$. 可见变换 σ 保内积, 于是 σ 是正交变换. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com