线性代数应该这么学, 习题 2.15

叶卢庆*

2014 年 8 月 22 日

题目 (线性代数应该这么学, 习题 2.15)**.** 如果 U_1, U_2, U_3 是有限维向量空间的子空间, 是否有

$$\begin{aligned}\dim(U_1+U_2+U_3) = &\dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3\\ &-\dim(U_1\cap U_2) - \dim(U_1\cap U_3)\\ &-\dim(U_2\cap U_3)\\ &+\dim(U_1\cap U_2\cap U_3).\end{aligned}$$

解. 我们尝试对 U_3 的维数作归纳. 当 $\dim U_3 = 0$, 也就是 $U_3 = \{0\}$ 时, 题目中欲证明的式子会化成

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1\cap U_2),$$

这正是 维数定理. 假设当 $\dim U_3 = k(k \geq 0)$ 时, 题目中的式子成立. 则当 $\dim U_3 = k+1$ 时, 设 U_3 的一组基为 $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$.

- 如果 $v_{k+1} \notin U_1 + U_2$, 则我们有

$$\begin{cases}\dim(U_1+U_2+U_3) = \dim(U_1+U_2+Span\{v_1,\cdots,v_k\})+1,\\ \dim U_1 = \dim U_1,\\ \dim U_2 = \dim U_2,\\ \dim U_3 = \dim(Span\{v_1,\cdots,v_k\})+1,\\ \dim(U_1\cap U_2) = \dim(U_1\cap U_2),\\ \dim(U_1\cap U_3) = \dim(U_1\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\}),\\ \dim(U_2\cap U_3) = \dim(U_2\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\}),\\ \dim(U_1\cap U_2\cap U_3) = \dim(U_1\cap U_2\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\}).\end{cases}$$

  且根据归纳假设,

$$\begin{aligned}\dim(U_1+U_2+Span\{v_1,\cdots,v_k\}) = &\dim U_1 + \dim U_2 + \dim Span\{v_1,\cdots,v_k\}\\ &-\dim(U_1\cap U_2) - \dim(U_1\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\})\\ &-\dim(U_2\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\})\\ &+\dim(U_1\cap U_2\cap Span\{v_1,\cdots,v_k\}).\end{aligned}$$

  综合以上式子, 可得当 $\dim U_3 = k+1$ 时, 题目中的式子仍然成立.

- 当 $v_{k+1} \in U_1 + U_2$, 且 $v_{k+1} \in U_1$ 或 $v_{k+1} \in U_2$ 时, 易得题目中的式子也成立.
- 当 $v_{k+1} \in U_1 + U_2$, 且 $v_{k+1} \notin U_1 \bigcup U_2$ 时, 题目中的式子就不成立了.

可见递推失败. 也就是说, 题目中的式子是个错误的式子. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com