线性代数，习题 13

叶卢庆*

2014 年 8 月 20 日

习题. 记 $P_3(\mathbf{R})$ 是所有次数不超过 3 的实系数多项式的集合. 设 $T: P_3(\mathbf{R}) \to P_3(\mathbf{R})$ 是线性变换

$$Tf := \frac{df}{dx}.$$

设 $\beta := (1, x, x^2, x^3)$ 是 $P_3(\mathbf{R})$ 的一组基.

- 计算 $[T]_\beta^\beta$.
- 计算矩阵 $[T]_\beta^\beta$ 的特征多项式.
- 求 T 的特征值和特征向量.
- T 是否是可对角化的?

证明.

- 设 $\beta = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, 则 $T(1) = 0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$,$T(x) = 1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$,$T(x^2) = 2x = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 + 0v_4$,$T(x^3) = 3x^2 = 0v_1 + 0v_2 + 3v_3 + 0v_4$, 因此

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

- T 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 T 的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4.$$

*叶卢庆 (1992—),E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

特征值为 $\lambda = 0$. 下面来求 T 的特征向量.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

我们发现, 任意非零实数都是特征向量.

- 不是. 因为 T 的特征向量张成的空间只有一维, 若 T 是可对角化的,T 的特征向量张成的空间应该要有三维.

□