

线性代数应该这样学, 习题 5.5

叶卢庆*

2014 年 9 月 5 日

习题. 设 $P \in \mathcal{L}(V)$, 并且 $P^2 = P$. 证明 $V = \text{null } P \oplus \text{range } P$.

证明. 首先我们证明

$$\text{null } P \cap \text{range } P = \{\mathbf{0}\}.$$

这是因为, $\forall v \in \text{null } P \cap \text{range } P$, 必定存在 $w \in V$, 使得 $P(w) = v$, 且 $P(v) = \mathbf{0}$. 于是 $P^2(w) = P(w) = v = \mathbf{0}$.

其次, 根据秩零定理,

$$\dim V = \dim \text{null } P + \dim \text{range } P.$$

这样, 就证明了命题. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com