二阶行列式的线性性的几何意义

叶卢庆 [*]

2015 年 1 月 19 日

所谓二阶行列式的线性性, 指的是如下公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

其几何意义如图(1). 为叙述简便起见, 我们只考虑一种情形. 当向量 $\overrightarrow{AD}=(a_{12},a_{22}),\overrightarrow{AE}=(b_{12},b_{22})$ 都在向量 $\overrightarrow{AB}=(a_{11},a_{21})$ 的顺时针方向时,

$$S_{ABFE}+S_{ABCD}=S_{DCHG}+S_{ABCD}=S_{ABHG}-S_{ADG}+S_{BCH}=S_{ABHG}.$$

这就是式(1)的几何意义. 当然, 更好的方式不是使用面积来做, 而是使用外积来做. 因为用外积来做不需要分类讨论, 而用面积来做需要分类讨论, 会显得比较麻烦 (正如在此我们用面积做的时候为了避免叙述麻烦只考虑了一种可能的情形, 即 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AE}$ 都在 $\overrightarrow{AB}$ 的顺时针方向).

当线段 CD 和 AB, HG 不在同一个平面时, 平行四边形 ABCD,DCHG,ABHG 围成一个没有底面 BCH 和 ADG 的三棱柱. 由于 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ 和 ABCD,$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}$ 和 ABFE 以及 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AG}$ 和 ABHG 之间的对偶关系, 因此和三个平行四边形能围成三棱柱相对应的, 三个向量 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AG}$ 也能形成一个三角形, 如图(2)所示. 其中图 (2)中三角形的三个内角和图(1)中三个平行四边形之间围成的二面角对应相等. 特别地, 当线段 CD 和线段 AB, HG 共面时, 三个向量形成的三角形会退化成为一个线段, 结合

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE},$$

便可得到式(1).

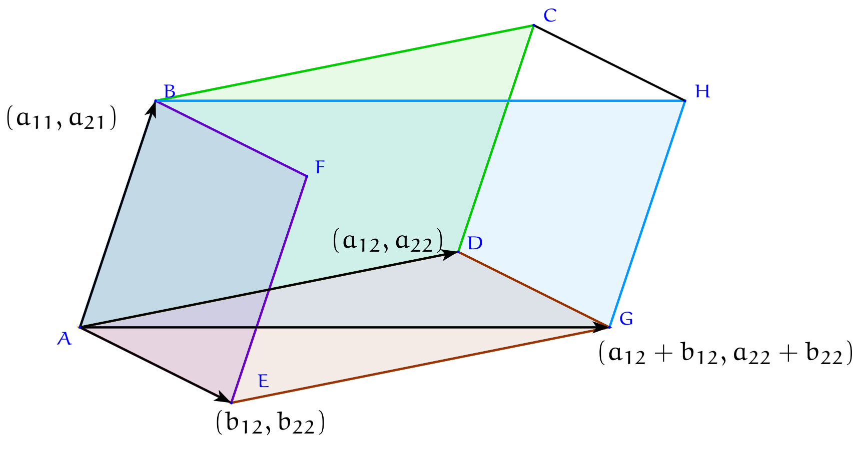

图 1

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

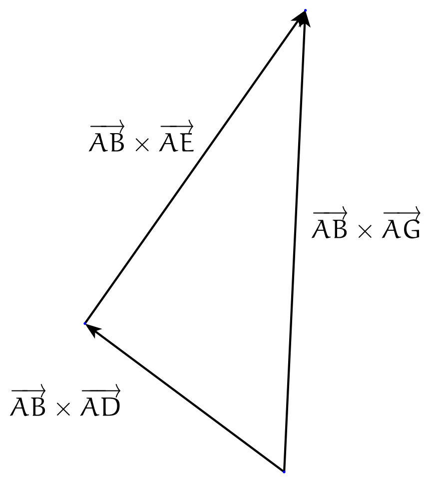
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AG}$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

图 2