

欧式空间中内积和长度的关系

叶卢庆*

2014 年 9 月 10 日

我们知道, 对于欧式空间 V 中的任意一个向量 v 来说, 其长度被定义为

$$\|v\|^2 := \langle v, v \rangle.$$

这样就用内积表示出了长度. 下面我们用长度来表示欧氏空间中任意两个向量的内积. 也就是说, 对于 $v, w \in V$, 我们要用 $\|v\|, \|w\|$ 以及 $\|v - w\|$ 表示出 $\langle v, w \rangle$.

$$\begin{aligned}\langle v - w, v - w \rangle &= \langle v - w, v \rangle - \langle v - w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle w, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle.\end{aligned}$$

因此,

$$2\langle v, w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle - \langle v - w, v - w \rangle.$$

可见, 在欧氏空间中, 一个线性变换保内积当且仅当保长度.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com