杭州师范大学解析几何一道期末试题

叶卢庆*

2014 年 12 月 2 日

题目. 证明*:* 如果三个矢量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$,$\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 共面, 则它们也共线.

证明. 根据轮换对称性, 不妨设

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mu\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\lambda\mathbf{c}\times\mathbf{a}.$$

则

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mu\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{c}=(\mu\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{c}.$$

于是,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=((\mu\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}=0,$$

这说明向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面. 设

$$\mathbf{c}=u\mathbf{a}+v\mathbf{b},$$

则 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=u\mathbf{b}\times\mathbf{a},\mathbf{c}\times\mathbf{a}=v\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. 可见, 它们的确共线. $\square$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com