第六届中国大学生数学竞赛预赛第一题

叶卢庆[*]

2014 年 10 月 27 日

题目 (第六届中国大学生数学竞赛预赛第一题)**.** 已知空间的两条直线

$$l_1 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{1},$$

$$l_2 : \frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}.$$

- 证明 l_1, l_2 异面.
- 求 l_1, l_2 公垂线的标准方程.
- 求连接 l_1 上的任一点和 l_2 上的任一点线段中点的轨迹的一般方程.

证明.

- 直线 l_1 经过点 $p(4,3,8)$, 直线 l_2 经过点 $q(-1,-1,-1)$. 直线 l_1 的方向向量为 $\overrightarrow{n}_1 = (1,-2,1)$, 直线 l_2 的方向向量为 $\overrightarrow{n}_2 = (7,-6,1)$. 由于

$$(\overrightarrow{pq} \times \overrightarrow{n}_1) \cdot \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & -4 & -9 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -116 \neq 0,$$

  因此直线 l_1, l_2 异面.

- 我们先求出公垂线的方向向量. 易得公垂线的方向向量为

$$\overrightarrow{n}_3 = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = (4,6,8).$$

  于是公垂线和直线 l_1 展成的平面的法向量为

$$\overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_3 = (-22,-4,14).$$

  于是公垂线和直线 l_1 展成的平面的方程可以设为

$$-22x - 4y + 14z + d = 0. \tag{1}$$

  由于平面(1)经过点 $(4,3,8)$, 因此平面(1)为

$$-11x - 2y + 7z - 6 = 0.$$

  公垂线和直线 l_2 展成的平面的法向量为

$$\overrightarrow{n}_2 \times \overrightarrow{n}_3 = (-54,-52,66).$$

  因此公垂线和直线 l_2 展成的平面可以设为

$$-54x - 52y + 66z + f = 0. \tag{2}$$

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

由于平面(2)经过点 $(-1,-1,-1)$, 因此平面(2)为

$$-27x-26y+33z-20=0.$$

于是 l_1,l_2 的公垂线的方程为

$$\begin{cases}27x+26y-33z+20=0,\\ 11x+2y-7z+6=0.\end{cases}$$

可见, 公垂线的标准方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{2y-1}{3}=\frac{z-1}{2}.$$

- l_1 上的任意一点可以设为 $(t+4,-2t+3,t+8)$,l_2 上的任意一点可以设为 $(7t'-1,-6t'-1,t'-1)$. 于是这两个点的中点可以表示为

$$(\frac{t+7t'+3}{2},\frac{-2t-6t'+2}{2},\frac{t+t'+7}{2}).$$

于是, 中点轨迹的一般方程为

$$2x+3y+4z-20=0.$$

□