题目. 证明四面体的每一个顶点到对面重心的线段共点, 且这点到顶点的距离是它到对面重心距离的 3 倍.

证明. 首先, 对于底面 BCD 上的任意一个点 P 来说, 都有

$$\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}+\lambda_3\overrightarrow{AD}, \tag{1}$$

其中

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\{(x,y,z):x+y+z=1,0\leq x,y,z\leq 1\}. \tag{2}$$

特别地, 当 P 为 $\triangle BCD$ 的重心 D_{BCD} 时,

$$\overrightarrow{AD_{BCD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}. \tag{3}$$

对于线段 AD_{BCD} 上的任意一点 Q 来说, 都有

$$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AD}, \tag{4}$$

其中 $\lambda\in[0,1]$. 同理, 对于 $\triangle ADB$ 的重心 D_{ADB} 来说, 对于线段 CD_{ADB} 上的任意一点 R, 都有

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CR}&=\lambda\overrightarrow{CD_{ABD}} &(5)\\
&=\frac{k}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{CD} &(6)\\
&=-\frac{k}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{k}{3}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}) &(7)\\
&=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AD}. &(8)
\end{aligned}$$

由于

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}=\frac{k}{3}\overrightarrow{AB}-(k-1)\overrightarrow{AC}+\frac{k}{3}\overrightarrow{AD}, \tag{9}$$

联立(4),(9), 我们发现, 当 $\lambda=k=-(k-1)/3$, 即 $\lambda=k=\frac{1}{4}$ 时,$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AQ}$, 此时 Q 和 R 重合. 因此点 C 与对面重心的连线和点 A 与对面重心的连线确实相交, 交于 Q,R. 下面我们来证明, 直线 BQ 通过面 $\triangle ACD$ 的重心即可证明四面体的每一个顶点到对面重心的线段共点. 这个证明是容易的, 我们略去. 且从式(3)可以看出交点到对面重心的距离是到顶点距离的三倍. □