题目. 已知两异面直线

$$l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0} \tag{1}$$

与

$$l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1} \tag{2}$$

试求 l_1, l_2 的距离与它们的公垂线方程.

解. 直线(1)上有点 $P=(3,0,1)$, 直线(2)上有点 $Q=(-1,2,0)$. 且与两直线的方向向量都垂直的一个向量为

$$\mathbf{a} = (2,1,0)\times(1,0,1) = (1,-2,-1).$$

因此两直线的距离为

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{a}\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{-7\sqrt{6}}{6}.$$

下面我们来求公垂线方程. 我们先求公垂线与直线(1)形成的平面 p_1 的方程. 易得 p_1 的法向量为

$$\mathbf{a}\times(2,1,0) = (1,-2,5),$$

因此可设 p_1 为

$$x-2y+5z+d_1=0. \tag{3}$$

且平面(3)经过点 $(3,0,1)$, 因此 $d_1=-8$. 可见, 平面(3)的方程为

$$x-2y+5z-8=0. \tag{4}$$

再求公垂线与直线(2)形成的平面 p_2 的方程. 易得 p_2 的法向量为

$$\mathbf{a}\times(1,0,1) = (-2,4,2).$$

因此平面 p_2 可以设为

$$-x+2y+z+d_2=0. \tag{5}$$

由于平面 p_2 经过点 $(-1,2,0)$, 因此 $d_2=-5$. 因此平面 p_2 为

$$-x+2y+z-5=0. \tag{6}$$

可见, 公垂线的方程为

$$\begin{cases} 6z-13=0 \\ x-2y+5z-8=0 \end{cases} \tag{7}$$

□