三维哈达玛不等式

叶卢庆*

2015 年 1 月 8 日

题目. 证明:$|(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})|\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|$. 并指出等号成立条件.

证明.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}|&=\left|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}\right|\\&=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}||\cos\alpha|\\&=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\sin\beta||\overrightarrow{c}||\cos\alpha|\\&\leq|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|.\end{aligned}$$

其中 α 是向量 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 与向量 $\overrightarrow{c}$ 之间的夹角,β 是 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overrightarrow{b}$ 之间的夹角. 等号成立当且仅当 $|\cos\alpha|=1,|\sin\beta|=1$, 即 $\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}$, 也就是说, 向量 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$ 两两正交. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com