2011 中科大考研《线性代数与解析几何》之解析几何解答*

叶卢庆 †

2014 年 10 月 14 日

题目 (1). 两平面 $z = x + 2y$ 和 $z = -2x - y$ 的夹角等于?

解. 平面 $x+2y-z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_1} = (1,2,-1)$. 平面 $-2x-y-z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n_2} = (-2,-1,-1)$.

$$\cos\langle n_1, n_2\rangle = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|} = -\frac{1}{2}.$$

所以两平面的夹角为 $\frac{\pi}{3}$. □

题目 (2). 点 $(0,2,1)$ 到平面 $2x-3y+6z=1$ 的距离等于?

解. 即在限制条件 $2x-3y+6z=1$ 下求

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

的最小值. 根据 Cauchy 不等式,

$$[x^2+(y-2)^2+(z-1)^2][2^2+(-3)^2+6^2] \geq (2x-3y+6+6z-6)^2 = 1.$$

且等号能取到. 可见,

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2+(z-1)^2} \geq \frac{1}{7}.$$

于是距离就是 $\frac{1}{7}$. □

题目 (3). 二次曲面 $xy+z^2=1$ 的曲面类型是?

解. 为了消去 xy 项, 我们进行转轴. 令

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ z = z' \end{cases},$$

令 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 则二次曲面可以化为

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} + z'^2 = 1,$$

于是二次曲面的类型是单叶双曲面. □

*本解答作为交给解析几何赵老师的第三份作业.

†叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业大四. 学号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

题目 (11). 设点 $A(1,1,-1)$,$B(-1,1,1)$, $C(1,1,1)$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的方程.

解. 我们先求出经过这三个点的平面方程. 易得 $\overrightarrow{AB}=(-2,0,2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,0,2)$. 由于

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,4,0),$$

因此平面的方程为 $y=1$. 于是易得外接圆的方程为

$$\begin{cases} x^2+z^2=2, \\ y=1 \end{cases}.$$

□