

题目五

叶卢庆*

2015 年 1 月 8 日

题目. 已知曲面 $x^2 - y^2 = 2z$,

- 写出 $x^2 - y^2 = 2z$ 的两族直母线.
- 求出两族直母线在 xOz 平面上的射影直线.
- 证明这两族射影直线与抛物线 $\begin{cases} x^2 = 2z \\ y = 0 \end{cases}$ 相切.

•

$$x^2 - y^2 = 2z \iff (x+y)(x-y) = 2z.$$

因此两族直母线为

$$\begin{cases} x+y=uz, \\ u(x-y)=2 \end{cases}, \begin{cases} x-y=vz, \\ v(x+y)=2 \end{cases}.$$

- 两族直母线在 xOz 平面上的射影直线为

$$\frac{x - \frac{1}{t}}{\frac{t}{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}, \quad (1)$$

其中 $t \neq 0$.

•

$$z = \frac{1}{2}x^2,$$

因此在 zOx 平面上, 抛物线在 (x_0, z_0) 处的切线方程为

$$z - \frac{1}{2}x_0^2 = x_0(x - x_0).$$

令 $x_0 = \frac{2}{t}$, 这样就易得射影直线(1)确实是抛物线的切线.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com