2010 中科大考研《线性代数与解析几何》之解析几何题目解答*

叶卢庆 †

2014 年 10 月 12 日

题目 (1)**.** 二次曲线 $x^2-4xy+y^2+10x-10y+21=0$ 的类型是？通过转轴去掉其交叉项的转角角度为？

解. 令
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$
代入方程, 可得
$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2-4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+10(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-10(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+21=0.$$
交叉项 $x'y'$ 前面的系数为 $-4\cos 2\alpha$, 令其等于零, 解得 α 可以为 $\frac{\pi}{4}$. 于是通过转轴去掉交叉项的角度为 $\frac{\pi}{4}$. 此时, 方程化简为
$$(y'-\frac{5\sqrt{2}}{3})^2-\frac{x^2}{3}=-\frac{13}{9}.$$
可见, 二次曲线类型为双曲线. □

题目 (2)**.** 以曲线 $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2 \end{cases}$ 为准线, 原点为顶点的锥面方程为？

解. 设 (x,y,z) 是锥面上的任意一点 (但不是原点). 则必定存在 $t\in\mathbf{R}, t\neq 0$, 使得
$$t(x,y,z)=(m,m^2,2)$$
于是,$2x^2=yz$. 这就是锥面方程. □

题目 (3)**.**
- 以 xOy 平面上的曲线 $f(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转所得的旋转面的方程为?
- 如果曲线方程是 $x^2-y^2-1=0$, 则由此得到的曲面类型为？

解.
- 设点 $(x_0,y_0,0)$ 满足 $f(x_0,y_0)=0$. 然后开始计时, 经过时间 t 后, 点 (x_0,y_0) 运动到 (x_0,y_1,z_1). 则我们有
$$y_0^2=y_1^2+z_1^2.$$
于是旋转面的方程为
$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0.$$
- 单叶双曲面.

□

题目 (解答题第三题)**.** 设空间上有直线 $l_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ 和 $l_2:(x,y,z)=(3+2t,t,3t-3)$. 设平面 π 与直线 l_1,l_2 平行, 且 π 与 l_1 的距离为 $\sqrt{91}$, 求 π 的方程.

解. 直线 l_1 的方向向量为 $(3,1,0)=3i+j$,l_2 的方向向量为 $(2,1,3)=2i+j+3k$. 可见, 平面 π 的一个法向量为
$$(3i+j)\times(2i+j+3k)=3i-9j+k=(3,-9,1).$$
于是, 平面 π 可以设为
$$3x-9y+z+d=0.$$
由于直线 l_1 上有点 $(1,0,0)$, 该点到平面 π 的距离为 $\sqrt{91}$, 也就是说, 已知 $3(x-1)-9y+z=-d-3$, 且
$$(x-1)^2+y^2+z^2$$
的最小值为 91. 根据 Cauchy 不等式,
$$-d-3=3(x-1)-9y+z\leq\sqrt{3^2+9^2+1^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}.$$
且等号能取到. 可见,$-d-3=91$, 于是,$d=-94$. 于是, 平面 π 的方程是
$$3x-9y+z-94=0.$$
□

*本解答作为交给解析几何赵老师的第三份作业.

†叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业大四. 学号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com