北大 1983 年考研高等代数与解析几何第 1 题

叶卢庆*

2014 年 12 月 2 日

题目. 证明: 在直角坐标系中, 顶点在原点的二次锥面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0$$

有三条互相垂直的直母线的充要条件是 $A+B+C=0$.

证明. 首先, 二次锥面的直母线必过锥面的顶点, 在这个题目中, 也就是原点. 可见, 题目中的锥面存在三条互相垂直的直母线, 当且仅当在锥面上存在三个点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$, 满足 $x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=x_3^2+y_3^2+z_3^2=1$, 且

$$\begin{cases}x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0,\\x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=0,\\x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=0.\end{cases}$$

$\Rightarrow$: 当在曲面上存在满足上述条件的 x_1,x_2,x_3 时,

$$\begin{aligned}&(Ax_1^2+By_1^2+Cz_1^2+2Dy_1z_1+2Ez_1x_1+2Fx_1y_1)\\&+(Ax_2^2+By_2^2+Cz_2^2+2Dy_2z_2+2Ez_2x_2+2Fx_2y_2)\\&+(Ax_3^2+By_3^2+Cz_3^2+2Dy_3z_3+2Ez_3x_3+2Fx_3y_3)\\&=A(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+B(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+C(z_1^2+z_2^2+z_3^2)\\&+2D(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)+2E(z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3)+2F(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3).\end{aligned}$$

根据文档 利用正交矩阵证明关于互相垂直的三个空间单位向量的一个性质, 可知

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2=1,\\x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3=z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3=0.\end{cases}$$

因此可得 $A+B+C=0$.

$\Leftarrow$: 当 $A+B+C=0$ 时,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0. \tag{1}$$

式(1)可以写为

$$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & F & E\\F & B & D\\E & D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0. \tag{2}$$

其中对称矩阵

$$P=\begin{pmatrix}A & F & E\\F & B & D\\E & D & C\end{pmatrix}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

是一个迹零矩阵. 将对称矩阵分解为 UGU^{-1}, 其中 G 为对角矩阵,U 为正交矩阵. 由于 P 和 G 相似, 因此它们的迹相等. 因此经过转轴后, 锥面方程可以变为

$$x^2\cos^2\theta = (z + y\sin\theta)(z - y\sin\theta). \tag{3}$$

其中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 是个常数, 且 $\sin\theta, \cos\theta \neq 0$(因为当 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 为零时, 锥面上显然存在三条互相垂直的直母线). 于是, 锥面(3)的一族直母线为

$$\begin{cases} v(z + y\sin\theta) = x\cos\theta, \\ z - y\sin\theta = xv\cos\theta \end{cases} \tag{4}$$

直母线(4)的方向向量为

$$(\cos\theta, -v\sin\theta, -v) \times (v\cos\theta, \sin\theta, -1) = (2v\sin\theta, \cos\theta - v^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v^2\cos\theta\sin\theta).$$

我们要证明的是, 无论 θ 取什么值, 总存在 (v_1, v_2, v_3), 其中 v_1, v_2, v_3 互不相等, 使得下面的方程成立:

$$(2v_1\sin\theta, \cos\theta - v_1^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_1^2\cos\theta\sin\theta)\cdot(2v_2\sin\theta, \cos\theta - v_2^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_2^2\cos\theta\sin\theta) = 0,$$

$$(2v_1\sin\theta, \cos\theta - v_1^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_1^2\cos\theta\sin\theta)\cdot(2v_3\sin\theta, \cos\theta - v_3^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_3^2\cos\theta\sin\theta) = 0,$$

$$(2v_2\sin\theta, \cos\theta - v_2^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_2^2\cos\theta\sin\theta)\cdot(2v_3\sin\theta, \cos\theta - v_3^2\cos\theta, \cos\theta\sin\theta + v_3^2\cos\theta\sin\theta) = 0.$$

也即

$$4v_1v_2\sin^2\theta + \cos^2\theta(1 - v_1^2)(1 - v_2^2) + \cos^2\theta\sin^2\theta(1 + v_1^2)(1 + v_2^2) = 0. \tag{5}$$

$$4v_1v_3\sin^2\theta + \cos^2\theta(1 - v_1^2)(1 - v_3^2) + \cos^2\theta\sin^2\theta(1 + v_1^2)(1 + v_3^2) = 0. \tag{6}$$

$$4v_3v_2\sin^2\theta + \cos^2\theta(1 - v_3^2)(1 - v_2^2) + \cos^2\theta\sin^2\theta(1 + v_3^2)(1 + v_2^2) = 0. \tag{7}$$

当 v_1 固定时, 式(5)是关于 v_2 的二次方程. 整理一下, 可得

$$[-\cos^2\theta + v_1^2(\sin^2\theta + 1)]v_2^2 + 4v_1\tan^2\theta v_2 + 1 - \cos^2\theta v_1^2 + \sin^2\theta = 0.$$

可见, 根据韦达定理,$v_2 + v_3 = \frac{4v_1\tan^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1+\sin^2\theta)}$,$v_2v_3 = \frac{-1-\sin^2\theta+v_1^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1+\sin^2\theta)}$. 代入式(7)可得

$$\begin{aligned}&(1 + \sin^2\theta)\left(1 + \left(\frac{-1 - \sin^2\theta + v_1^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1 + \sin^2\theta)}\right)^2\right) + 4\tan^2\theta\left(\frac{-1 - \sin^2\theta + v_1^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1 + \sin^2\theta)}\right)\\ &- \cos^2\theta\left[\left(\frac{4v_1\tan^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1 + \sin^2\theta)}\right)^2 - 2\frac{-1 - \sin^2\theta + v_1^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta - v_1^2(1 + \sin^2\theta)}\right] = 0.\end{aligned}$$

解得 v_1 可以等于 0. 此时,$v_2 + v_3 = 0, v_2v_3 = \frac{-1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$. 于是, 可以让 $v_2 = \frac{\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\cos\theta}$,$v_3 = -\frac{\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\cos\theta}$. 这样我们就确定了锥面(3)上确实存在三条互相垂直的直母线. □