

题目. 求椭球面

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$$

被点 $(2, 1, -1)$ 平分的弦.

解. 设弦所在的直线方程为

$$\frac{x-2}{p_1} = \frac{y-1}{p_2} = \frac{z+1}{p_3} = t, \quad (1)$$

可得

$$\begin{cases} x = p_1 t + 2 \\ y = p_2 t + 1 \\ z = p_3 t - 1 \end{cases},$$

代入椭球方程可得

$$\left(\frac{p_1^2}{25} + \frac{p_2^2}{16} + \frac{p_3^2}{9}\right)t^2 + \left(\frac{4p_1}{25} + \frac{2p_2}{16} - \frac{2p_3}{9}\right)t - \frac{2399}{3600} = 0,$$

由于

$$t_1 + t_2 = 0,$$

因此

$$\frac{4p_1}{25} + \frac{2p_2}{16} - \frac{2p_3}{9} = 0.$$

可见, 经过点 $(2, 1, -1)$ 且被平分的弦不只一根, 而是形成了一个面.

□