

杭州师范大学一道解析几何期末试题

叶卢庆*

2015 年 1 月 12 日

题目. 已知 $\triangle ABC$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 表示向量 \overrightarrow{AO} .

解. 设

$$\overrightarrow{AO} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC},$$

则

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = (\lambda_1 - 1)\overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + (\lambda_2 - 1)\overrightarrow{AC}.$$

由于是外心, 因此

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BO},$$

即

$$(\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}) \cdot (\lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}) = ((\lambda_1 - 1)\overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}) \cdot ((\lambda_1 - 1)\overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}). \quad (1)$$

也即

$$\lambda_1 \overrightarrow{AB}^2 + \lambda_2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2. \quad (2)$$

同理, 可得

$$\lambda_1 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}^2. \quad (3)$$

解得

$$\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AC}^2 \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB}^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2]} = \frac{\overrightarrow{AB}^2 (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2]},$$
$$\lambda_1 = \frac{\overrightarrow{AC}^2 \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2]} = \frac{-\overrightarrow{AC}^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2]}.$$

可见,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \frac{-\overrightarrow{CA}^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{CA}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA})^2]} \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}^2 (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})}{2[\overrightarrow{AB}^2 \overrightarrow{CA}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA})^2]} \overrightarrow{CA} \\ &= -\frac{\overrightarrow{CA}^2 (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC})}{2(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB})^2} \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB}^2 (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})}{2(\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB})^2} \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeludingmathematics@gmail.com