2012 中科大考研《线性代数与解析几何》之解析几何解答*

叶卢庆 †

2014 年 10 月 15 日

题目 (1). 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 直线 $x = y = z$ 与平面 $z = x - y$ 的夹角的余弦值等于?

解. 平面 $x - y - z = 0$ 的一个法向量为 $n_1 = (1, -1, -1)$, 直线的方向向量为 $n_2 = (1, 1, 1)$, 由于

$$\cos\langle n_1, n_2\rangle = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{-1}{3},$$

因此, 夹角的余项值为 $\frac{1}{3}$. □

题目 (2). 在 $\mathbf{R}^3$ 中, 方程 $xy - yz + zx = 1$ 所表示的二次曲面类型为?

解. 我们先考虑化去交叉项 xy. 令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

代入二次型

$$xy - yz + zx \tag{0.1}$$

整理后可得

$$x'^2 \cos\alpha \sin\alpha - y'^2 \sin\alpha \cos\alpha + x'y' \cos 2\alpha + y'z'(\cos\alpha - \sin\alpha) + x'z'(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{0.2}$$

令 $x'y'$ 前面的系数等于 0, 即让 $\cos 2\alpha = 0$, 此时 α 可以为 $\frac{\pi}{4}$. 在这个时候,$y'z'$ 和 $x'z'$ 前面的系数也恰好为 0. 此时, 二次型(0.2)可以化为

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2.$$

也即, 通过正交替换, 方程 $xy - yz + zx = 1$ 变成了 $x'^2 - y'^2 = 2$. 这是一个双曲柱面. □

题目 (3). 在 $\mathbf{R}^4$ 中, 设三点 A, B, C 的坐标分别为 $A(1, 0, 1, 0), B(0, 1, 0, 1), C(1, 1, 1, 1)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为?

解.

$$\cos\langle AB, AC\rangle = \frac{AB \cdot AC}{|AB||AC|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此 $\sin\langle AB, AC\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因此三角形 ABC 的面积是

$$\frac{1}{2}|AB||AC| \sin\langle AB, AC\rangle = 1.$$

□

*本解答作为交给解析几何赵老师的第三份作业.

†叶 卢 庆 (1992-), 男, 杭 州 师 范 大 学 理 学 院 数 学 与 应 用 数 学 专 业 大 四. 学 号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

题目 (9). 求 $\mathbf{R}^3$ 中直线 $x-1=y-2=z-3$ 与 $x=2y=3z$ 的公垂线方程.

解. 直线 $x-1=y-2=z-3$ 的方向向量为 $(1,1,1)$, 直线 $x=2y=3z$ 的方向向量为 $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$. 而

$$(1,1,1)\times(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})=(\frac{-1}{6},\frac{2}{3},\frac{-1}{2}),$$

因此公垂线的方向向量是 $6(\frac{-1}{6},\frac{2}{3},\frac{-1}{2})=(-1,4,-3)$. 易得公垂线与直线 $x-1=y-2=z-3$ 张成的平面 s_1 的法向量为

$$(1,1,1)\times(-1,4,-3)=(-7,2,5),$$

且 s_1 通过点 $(1,2,3)$, 因此平面 s_1 的方程为

$$-7x+2y+5z-12=0.$$

易得公垂线与直线 $x=2y=3z$ 张成的平面 s_2 的法向量为

$$6(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3})\times(-1,4,-3)=6(\frac{-17}{6},\frac{8}{3},\frac{9}{2})=(-17,16,27).$$

且 s_2 通过原点, 因此平面 s_2 的方程为

$$-17x+16y+27z=0.$$

因此公垂线方程为

$$\begin{cases}-17x+16y+27z=0,\\ -7x+2y+5z-12=0.\end{cases}$$

□