杭州师范大学一道解析几何期末试题

叶卢庆*

2014 年 12 月 3 日

题目. 求点 $A(a,b,c)$ 关于直线 $\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}$ (α,β,γ 为直线的方向角) 的对称点的坐标.

解. 首先, 我们要在直线上选取一点 $P=(x',y',z')$, 使得 $\overrightarrow{AP}\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=0$. 也就是说,

$$\begin{cases}\frac{x'-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y'-y_0}{\cos\beta}=\frac{z'-z_0}{\cos\gamma}=t,\\ (x'-a)\cos\alpha+(y'-b)\cos\beta+(z'-c)\cos\gamma=0.\end{cases}$$

解得

$$t(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=(a-x_0)\cos\alpha+(b-y_0)\cos\beta+(c-z_0)\cos\gamma,$$

由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 因此

$$t=(a-x_0)\cos\alpha+(b-y_0)\cos\beta+(c-z_0)\cos\gamma.$$

因此得到

$$\begin{cases}x'=t\cos\alpha+x_0=(a-x_0)\cos^2\alpha+(b-y_0)\cos\beta\cos\alpha+(c-z_0)\cos\gamma\cos\alpha+x_0,\\ y'=t\cos\beta+y_0=(a-x_0)\cos\alpha\cos\beta+(b-y_0)\cos^2\beta+(c-z_0)\cos\gamma\cos\beta+y_0,\\ z'=t\cos\gamma+z_0=(a-x_0)\cos\alpha\cos\gamma+(b-y_0)\cos\beta\cos\gamma+(c-z_0)\cos^2\gamma+z_0.\end{cases}$$

对称点坐标设为 (a',b',c'). 易得,

$$(a',b',c')-(a,b,c)=2\overrightarrow{AP}.$$

这样就能解出 a',b',c', 最终得到对称点坐标. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com