题目 4.3

叶卢庆*

2015 年 1 月 8 日

题目. 求直线
$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1} \tag{1}$$
绕直线
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2} \tag{2}$$
旋转所得的圆锥面方程.

此题易得有简易解法, 但是下面我呈现比较比较繁难的解法.

解. 设旋转所得的曲面上任意一点为 $P=(x,y,z)$, 则在直线(1)上存在点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 位于曲面上, 且 P 和 P_0 到直线(2)的距离相等. 点 P 到直线(2)的距离为
$$\frac{|[(0,0,1)-(x,y,z)]\times(t,-t,2t)|}{\sqrt{t^2+(-t)^2+(2t)^2}},$$
因此
$$\frac{|[(0,0,1)-(x,y,z)]\times(t,-t,2t)|}{\sqrt{t^2+(-t)^2+(2t)^2}}=\frac{|[(0,0,1)-(x_0,y_0,z_0)]\times(t,-t,2t)|}{\sqrt{t^2+(-t)^2+(2t)^2}}. \tag{3}$$
化简方程(3)可得
$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4yz-4zx+4x-4y-4z=5x_0^2+5y_0^2+2z_0^2+2x_0y_0+4y_0z_0-4z_0x_0+4x_0-4y_0-4z_0. \tag{4}$$
另外, 我们还有
$$\frac{x_0}{2}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0-1}{1}, \tag{5}$$
以及
$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(1,-1,2)=0. \tag{6}$$
联立方程(4),(5), 可得
$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4yz-4zx+4x-4y-4z=27y_0^2-2, \tag{7}$$
联立方程(5),(6), 可得
$$x-y+2z=3y_0+2. \tag{8}$$
联立方程(7),(8), 可得
$$5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4yz-4zx+4x-4y-4z=3(x-y+2z-2)^2-2, \tag{9}$$
即
$$x^2+y^2-5z^2+4xy+8yz-8zx+8x-8y+10z-5=0.$$
这就是欲得锥面方程. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com