2014 中科大考研《线性代数与解析几何》之解析几何解答*

叶卢庆 †

2014 年 10 月 15 日

http://blog.sciencenet.cn/u/Yaleking

题目 (1). 原点到直线 $x+1=y+2=z+3$ 的距离为?

解. 已知直线上的任意一点 $(t,t-1,t-2)$, 求

$$\sqrt{t^2+(t-1)^2+(t-2)^2}$$

的最小值.$t^2+(t-1)^2+(t-2)^2=3t^2-6t+5$. 易得当 $t=1$ 时,$3t^2-6t+5$ 取得最小值 2. 因此原点到直线的距离为 $\sqrt{2}$. □

题目 (2). 设点 $P(1,2,3)$ 与原点关于平面 π 对称, 则 π 的方程为?

解. 显然，平面 π 的一个法向量为 $(1,2,3)$, 且平面 π 通过点 $(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2})$, 因此平面 π 的方程为

$$x+2y+3z-7=0.$$

□

题目 (3). 椭圆 $x^2+xy+y^2=1$ 的离心率为?

解. 转轴. 令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

代入椭圆方程, 可得

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2}=1.$$

因此椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. □

*本解答作为交给解析几何赵老师的第三份作业.

†叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业大四. 学号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com