北大 1984 年考研高等代数与解析几何第 2 题

叶卢庆*

2014 年 11 月 25 日

题目. 设向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 不共面. 试证: 向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$,$\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 不共面.

证明. 反证法. 假若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 共面, 则存在不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 使得

$$\lambda_1\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\lambda_2\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\lambda_3\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{1}$$

根据对称性, 不妨设 $\lambda_3\neq 0$. 于是

$$\mathbf{b}\times(-\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{c})+\lambda_3\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}. \tag{2}$$

由方程(2)可得

$$(\mathbf{b}\times(-\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{c}))\cdot\mathbf{b}+\lambda_3(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0. \tag{3}$$

即

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0. \tag{4}$$

于是 $\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}$ 共面, 矛盾. 因此假设不成立, 可见, 向量 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$,$\mathbf{b}\times\mathbf{c}$,$\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 不共面. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com