

# 山师大 2007 年高等代数与解析几何第 7 题

叶卢庆\*

2014 年 11 月 22 日

题目. 求单叶双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  过点  $(1, 3, 3)$  的两条直母线所决定的平面方程.

解.

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \iff (x+z)(x-z) = (1+y)(1-y).$$

因此

$$\begin{cases} x+z = u(1+y), \\ u(x-z) = 1-y. \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} x+z = v(1-y), \\ v(x-z) = 1+y. \end{cases}$$

其中  $u, v$  都是参数. 这是单叶双曲面的两族直母线. 如果是  $u$  族直母线通过点  $(1, 3, 3)$ , 则有

$$\begin{cases} 4 = 4u, \\ -2u = -2. \end{cases}$$

可得  $u = 1$ . 于是通过  $(1, 3, 3)$  的  $u$  族直母线为

$$\begin{cases} x+z = 1+y, \\ x-z = 1-y. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, \\ z = y. \end{cases}$$

可见该直线的方向向量为  $(0, 1, 1)$ . 如果是  $v$  族直母线通过点  $(1, 3, 3)$ , 则

$$\begin{cases} 4 = v(-2), \\ v(-2) = 4. \end{cases}$$

可得  $v = -2$ , 于是通过  $(1, 3, 3)$  的  $v$  族直母线为

$$\begin{cases} x+z = -2(1-y), \\ -2(x-z) = 1+y \end{cases} \iff \frac{x}{1} = \frac{y - \frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{z - \frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}.$$

可见该直线的方向向量为  $(3, 4, 5)$ . 于是两条直线展成的平面的法向量为

$$(0, 1, 1) \times (3, 4, 5) = (1, 3, -3).$$

于是平面方程为

$$x + 3y - 3z - 1 = 0.$$

□

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com