2013 中科大考研《线性代数与解析几何》之解析几何题目解答*

叶卢庆 †

2014 年 10 月 10 日

题目 (1). 求两直线 $1-x=2y=3z$ 与 $x=y+2=2z+4$ 的夹角和距离.

解. 第一条直线的方程可以化为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-0}{-\frac{1}{3}}.$$

可见, 第一条直线通过点 $p=(1,0,0)$, 且直线的方向向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{3})=e_1-\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{3}e_3$. 第二条直线的方程可以化为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{\frac{1}{2}}.$$

可见, 第二条直线通过点 $q=(0,-2,-2)$, 且直线的方向向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,\frac{1}{2})=e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3$. 设两直线的夹角为 α, 则

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{4}{21}.$$

因此 $\alpha=\arccos\frac{4}{21}$. 下面我们来求两条直线之间的距离. 首先, 我们来求和向量 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 都垂直的向量, 这很简单,$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ 就满足条件, 易得

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(e_1-\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{3}e_3)\times(e_1+e_2+\frac{1}{2}e_3)=\frac{1}{12}e_1-\frac{5}{6}e_2+\frac{3}{2}e_3=(\frac{1}{12},\frac{-5}{6},\frac{3}{2}).$$

两直线之间的距离就等于

$$\frac{|(\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2})\cdot\overrightarrow{pq}|}{|\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}|}=\frac{17\sqrt{26}}{104}.$$

□

题目 (2). 当实数 a,b,c 满足什么条件时, 曲面 $z=ax^2+bxy+cy^2$ 是椭圆抛物面.

解. 只需要二次型 $ax^2+bxy+cy^2$ 正定即可. 所以 a,b,c 满足 $b^2-4ac<0$ 且 $a>0$. □

题目 (7). 求 x 轴绕直线 $x=y=z-1$ 旋转所得旋转曲面的一般方程.

解. 设 $(x_1,0,0)$ 是 x 轴上的任意一个点. 然后在零时刻,x 轴开始绕直线 $x=y=z-1$ 运动. 经过时间 t 后,$(x_1,0,0)$ 运动到了点 $(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$. 显然,

$$(x_1-x_1(t),0-y_1(t),0-z_1(t))\cdot(1,1,1)=0,$$

其中 $(1,1,1)$ 是直线 $x=y=z-1$ 的方向向量. 也即,

$$x_1=x_1(t)+y_1(t)+z_1(t). \tag{0.1}$$

而且,$(x_1,0,0)$ 和 $(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$ 到直线 $x=y=z-1$ 的距离相等. 下面我们来求点 $q=(a,b,c)$ 到直线 $x=y=z-1$ 的距离. 点 $p=(t,t,t+1)$ 位于直线 $x=y=z-1$ 上, 设直线 pq 垂直于 $x=y=z-1$, 则有

$$(a-t,b-t,c-t-1)\cdot(1,1,1)=0,$$

也即,

$$t=\frac{a+b+c-1}{3}.$$

可见,

$$|\overrightarrow{pq}|^2=(\frac{b+c-2a-1}{3})^2+(\frac{a+c-2b-1}{3})^2+(\frac{a+b-2c+2}{3})^2.$$

于是, 我们有

$$\frac{2x_1^2+2x_1+2}{3}=(\frac{y_1(t)+z_1(t)-2x_1(t)-1}{3})^2+(\frac{x_1(t)+z_1(t)-2y_1(t)-1}{3})^2+(\frac{x_1(t)+y_1(t)-2z_1(t)+2}{3})^2.$$

将方程(0.1)代入, 化简可得

$$x_1(t)y_1(t)+y_1(t)z_1(t)+z_1(t)x_1(t)+z_1(t)=0.$$

于是, 可得旋转曲面的方程为

$$xy+yz+zx+z=0.$$

□

*本解答作为交给解析几何赵老师的第三份作业.

†叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业大四. 学号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com