杭州师范大学一道解析几何期末试题

叶卢庆[*]

2014 年 12 月 2 日

题目. 证明: 四面体每条棱与对棱上的中点所决定的 6 个平面交于一点.

证明. 如图, 以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$ 为仿射标架, 可得经过棱 AD 和 BC 中点的平面方程为

$$x=y. \tag{1}$$

经过棱 BC 和 AD 中点的平面方程为

$$x+y+2z=1. \tag{2}$$

经过棱 AC 和 BD 中点的平面方程为

$$x=z. \tag{3}$$

经过棱 BD 和 AC 中点的平面方程为

$$x+z+2y=1. \tag{4}$$

经过棱 AB 和 DC 中点的平面方程为

$$y=z. \tag{5}$$

经过棱 DC 和 AB 中点的平面方程为

$$y+z+2x=1. \tag{6}$$

下面我们证明上面 6 个方程联立只有一个解即可. 由于 $x=y=z$, 因此 $x=y=z=\frac{1}{4}$. 可见 6 个平面交于点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$. 换用向量的语言,6 个平面交于唯一一点, 该点可以用向量表达成

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

□

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

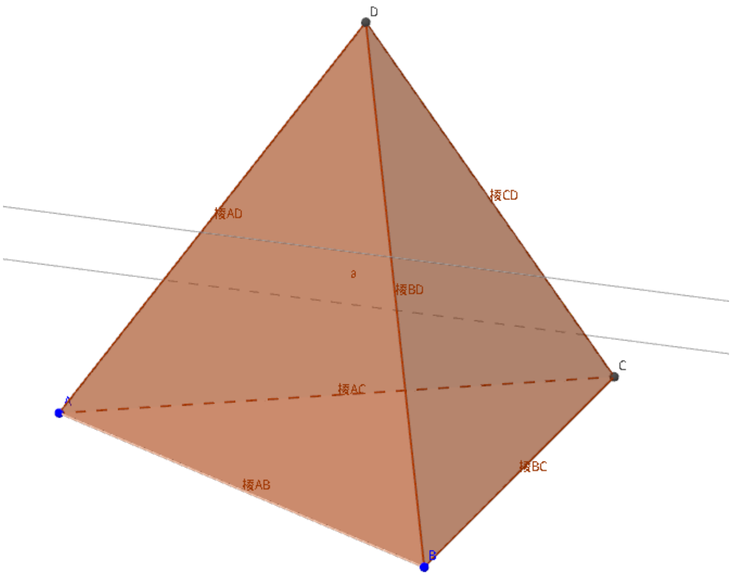

图 1