

利用向量法证明三角形面积的海伦公式

叶卢庆*

2015 年 1 月 8 日

题目. 利用向量法证明关于三角形面积的海伦公式:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

其中 a, b, c 表示三角形的边长, S 代表三角形的面积, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

证明. 如图(1)所示,

$$S^2 = \frac{1}{4} |\vec{AB} \times \vec{AC}|^2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4} (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC}) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4} (|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2) \quad (3)$$

$$= \frac{1}{4} (|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - [\frac{1}{2} [\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - (\vec{AB} - \vec{AC})^2]]^2) \quad (4)$$

$$= \frac{c^2 b^2 - (\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2})^2}{4} \quad (5)$$

$$= p(p-a)(p-b)(p-c). \quad (6)$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com

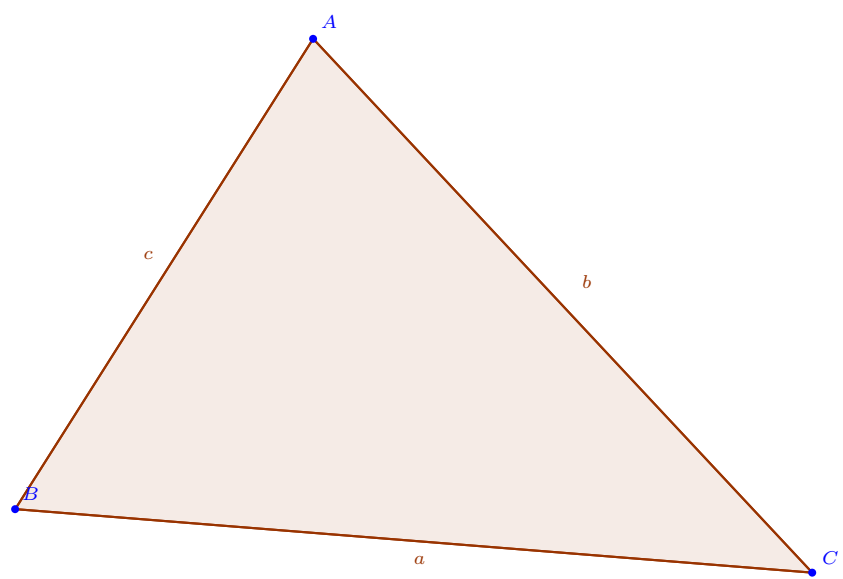


图 1