

题目 1.2

叶卢庆*

2015 年 1 月 8 日

题目. 当 a, b 满足什么条件时, $f(x) = x^3 + 3ax + b$ 有重因式.

解. $f(x)$ 有重因式, 当且仅当 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 有公因式. $f'(x) = 3x^2 + 3a$. 由于

$$x^3 + 3ax + b = \frac{1}{3}x f'(x) + (2ax + b),$$

因此当且仅当 $f'(x)$ 和 $2ax + b$ 有公因式.

- 当 $a = 0$ 时, b 也必须为 0.
- 当 $a \neq 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 3a = \frac{3}{2a}(2ax + b)x + (-\frac{3b}{2a}x + 3a)$. 此时, $f'(x)$ 和 $2ax + b$ 有公因式当且仅当 $2ax + b$ 和 $-\frac{3b}{2a}x + 3a$ 有公因式, 因此

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ -\frac{3b}{2a} & 3a \end{vmatrix} = 0,$$

也即 $4a^3 + b^2 = 0$.

综上所述, 当且仅当 $4a^3 + b^2 = 0$ 时, $f(x)$ 有重因式. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com