北京大学 2014 年硕士研究生入学考试高等代数与解析几何第 7 题

叶卢庆*

2014 年 10 月 28 日

题目 (北京大学 2014 年硕士研究生入学考试高等代数与解析几何第 7 题). 求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

垂直的直母线交点的轨迹.

解. 单叶双曲面可以分别化为

$$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=(\frac{z}{c})^2+1^2 \tag{1}$$

$$(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2=(\frac{z}{c})^2+(-1)^2. \tag{2}$$

针对方程(1), 可以设

$$\begin{pmatrix}\frac{z}{c}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x}{a}\\ \frac{y}{b}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

针对方程(2), 可以设

$$\begin{pmatrix}\frac{z}{c}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x}{a}\\ \frac{y}{b}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

无论是方程(3), 还是方程(4), 都是代表双曲面的直母线. 其中 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 是参数. 而且易得形如(3)和形如(4)的直母线族都可以遍历双曲面上所有点, 而且易得直母线族(3)里的任意两条直线异面, 直母线族 (4)里的任意两条直线也异面[1]. 因此只可能是直母线族(3) 里的直线和直母线族(4)里的直线相交. 直线(3)的方向向量为

$$(\frac{\sin\alpha}{a},\frac{\cos\alpha}{b},0)\times(\frac{\cos\alpha}{a},\frac{-\sin\alpha}{b},\frac{-1}{c})=(-\frac{\cos\alpha}{bc},\frac{\sin\alpha}{ac},\frac{-1}{ab}),$$

直线(4)的方向向量为

$$(-\frac{\cos\beta}{bc},\frac{\sin\beta}{ac},\frac{-1}{ab}).$$

当直线(3)和(4)垂直时, 我们有

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2c^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{a^2c^2}+\frac{1}{a^2b^2}=0. \tag{5}$$

现设直线(3)和(4)的交点为 (x_0,y_0,z_0), 则

$$\begin{cases}\frac{x_0}{a}\cos\alpha-\frac{y_0}{b}\sin\alpha=\frac{z_0}{c},\\ \frac{y_0}{b}\cos\alpha+\frac{x_0}{a}\sin\alpha=1,\\ \frac{x_0}{a}\cos\beta-\frac{y_0}{b}\sin\beta=\frac{z_0}{c},\\ \frac{y_0}{b}\cos\beta+\frac{x_0}{a}\sin\beta=-1,\end{cases}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

[1] 见我的文档《单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面的另类证明》

解得

$$\cos\alpha = \frac{\frac{x_0 z_0}{ac} + \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}, \sin\alpha = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{y_0 z_0}{bc}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}.$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{x_0 z_0}{ac} - \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}, \sin\beta = \frac{-\frac{x_0}{a} - \frac{y_0 z_0}{bc}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}.$$

代入方程(5), 可得单叶双曲面互相垂直的直母线的交点轨迹为

$$(\frac{x^2 z^2}{c^2} - \frac{a^2 y^2}{b^2}) + (\frac{y^2 z^2}{c^2} - \frac{b^2 x^2}{a^2}) + c^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})^2 = 0.$$

□