

题目. 求一个过 x 轴的平面 π , 使得其与单叶双曲面 $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$ 的交线为一个圆.

解. 设平面方程为

$$z = py, \quad (1)$$

其中 $p \neq 0$. 将平面方程代入双曲面方程, 可得曲线

$$\begin{cases} z = py \\ \frac{x^2}{4} + (1 - p^2)y^2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

为了使得曲线(2)代表空间中的一个圆, 要使得 $1 - p^2 > 0$. 且

$$2^2 = (p\sqrt{\frac{1}{1-p^2}})^2 + (\sqrt{\frac{1}{1-p^2}})^2,$$

解得 $p = \frac{\pm\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

□