利用定积分证明 Lagrange 中值定理

叶卢庆*

2014 年 12 月 22 日

众所周知 Lagrange 中值定理叙述如下:

定理 (Lagrange 中值定理)**.** 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1}$$

很多书上都是利用构造辅助函数, 再借助于 Rolle 定理将其证明. 现在我们偏偏不这么做. 我们使用定积分. 首先, 我们证明微积分基本定理, 即 Newton-Leibniz 公式. 之所以证明这个公式, 是为了保证我们没有使用 Lagrange 中值定理来证明它, 从而确保没有逻辑循环.

定理 (Newton-Leibniz)**.** 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 则

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

评论. 当然,$f'(x)$ 在 a,b 两点很可能不可微,f 在点 a,b 处很可能只有单侧导数, 从而导致 $f'(x)$ 在 a,b 处无定义, 但是这并不影响该定理, 因为黎曼积分并不会被函数在某一点处的值所影响, 因此即使 $f'(x)$ 在 a,b 处不可微, 我们也可以假设其在 a,b 处可微, 而不会对 *Newton-Leibniz* 定理造成任何影响.

证明. f 在 (a,b) 可微, 说明 $\forall x \in (a,b)$,

$$f(x + \frac{1}{n}) - f(x) = f'(x)\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}). \tag{2}$$

其中 $n \in \mathbf{N}^+$, 且 $\frac{1}{n}$ 小到能使得 $x + \frac{1}{n} \in (a,b)$. 且 $\lim_{\Delta \frac{1}{n} \to 0} o(\frac{1}{n})n = 0$. 将式(2)累加, 可得

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(a + i\frac{b-a}{n}) + \sum_{i=0}^{n-1} o(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(a + i\frac{b-a}{n}) + o(\frac{1}{n})n. \tag{3}$$

令 $n \to \infty$, 方程(3)即可变为

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx. \tag{4}$$

这样就证明了 Newton-Leibniz 定理. □

现在我们去证明 Lagrange 中值定理. 根据 Newton-Leibniz 定理, 方程(1) 等价于

$$f'(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)dx. \tag{5}$$

做到这里我们就继续不下去了. 虽然如此, 如果假设 Lagrange 中值定理是成立的, 那么通过式(5), 我们发现了更加广泛的积分中值定理.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com