

利用Egoff 定理证明定理17.1

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 17

定理 (17.1). 设 $f(x, y)$ 在矩形 $[a, b; c, d]$ 上连续, 则

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

是 $[c, d]$ 上的连续函数.

证明. 我们证明, 函数 $I(y)$ 在任意给定的 $y_0 \in [c, d]$ 上连续. 构造函数列

$$f(x, y_0 + \Delta y), \dots, f(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2^n}), \dots$$

其中 $\Delta y > 0$. 易得如上函数列在区间 $[a, b]$ 上逐点逼近函数 $f(x, y_0)$. 根据 Egoff 定理, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在任意小的 $\delta > 0$, 使得除去 $[a, b]$ 上的一个测度为 δ 的 Lebesgue 可测集 M , 如上函数列在 $[a, b] \setminus M$ 上的任意一点 x' 处, 都与 $f(x', y_0)$ 的差距小于 ε . 因此数列

$$\int_a^b f(x, y_0 + \Delta y), \dots, \int_a^b f(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2^n}), \dots$$

收敛于 $\int_a^b f(x, y_0)$. 因此 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续. □