

# 从卡西尼曲线的光滑性到最大模原理

叶卢庆\*

杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号:1002011005

2014 年 4 月 5 日

现在我们用几何的方法来研究有两个焦点的卡西尼曲线. 类似的研究手段在伟大的 Newton 的《自然哲学的数学原理》里大量采用, 在那本书里, 牛顿主要使用欧氏平面几何结合其所创立的微积分来解释一个运动的世界. Tritan Needham 所著的 *Visual Complex Analysis* 也大量地采用了这种几何的方法, 这本书有中译本, 叫《复分析——可视化方法》, 由齐民友先生翻译.

所谓有两个焦点的卡西尼曲线, 就是平面上满足到两个定点的距离乘积等于定值这个条件的所有点形成的集合, 且定值为正. 两个定点叫做焦点.

如图(1), 设点  $C$  是某一条卡西尼曲线上的任意一点,  $A, B$  是该卡西尼曲线的焦点. 则易得当点  $C$  沿着两个圆周的任意一个圆周运动时, 都不可能继续保持在同一条卡西尼曲线上. 当点  $C$  进入深蓝色和淡蓝色箭头所指的区域内部时, 也不可能继续保持在同一条卡西尼曲线上. 当点  $C$  进入红色箭头或者绿色箭头所指的区域内部时, 才有可能保持在同一条卡西尼曲线上.

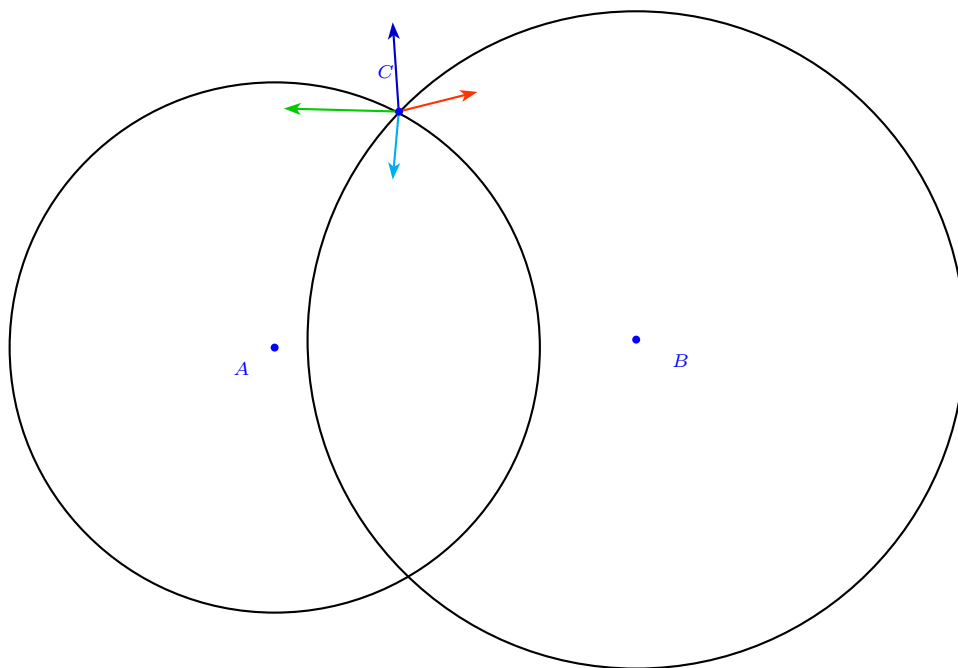


图 1

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail:h5411167@gmail.com

更具体地, 设  $|AC| = a, |BC| = b$ , 则当点  $C$  稍微运动, 变成  $C'$  后,  $C'$  和  $C$  不是同一点, 且在同一条卡西尼曲线上, 令

$$|AC'| = a + \varepsilon_1, |BC'| = b + \varepsilon_2.$$

易得  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  都不为 0. 且我们有

$$|AC'| |BC'| = |AC| |BC|,$$

则

$$(a + \varepsilon_1)(b + \varepsilon_2) - ab = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0.$$

则

$$a \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + b + \varepsilon_2 = 0.$$

于是,

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0; \varepsilon_1 \neq 0} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{-b}{a}. \quad (1)$$

可见,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  异号. 这样就解释了在图 (1) 中为什么  $C$  只有向红色或绿色箭头运动才可能保持在同一条卡西尼曲线上.

从  $C$  运动到  $C'$  的意义也可以展示成图(2). 其中以  $A$  为圆心的大圆比小圆半径大  $\varepsilon_1$ , 以  $B$  为圆心的小圆比大圆半径小  $\varepsilon_2$ . 点  $C$  运动到  $C'$ .

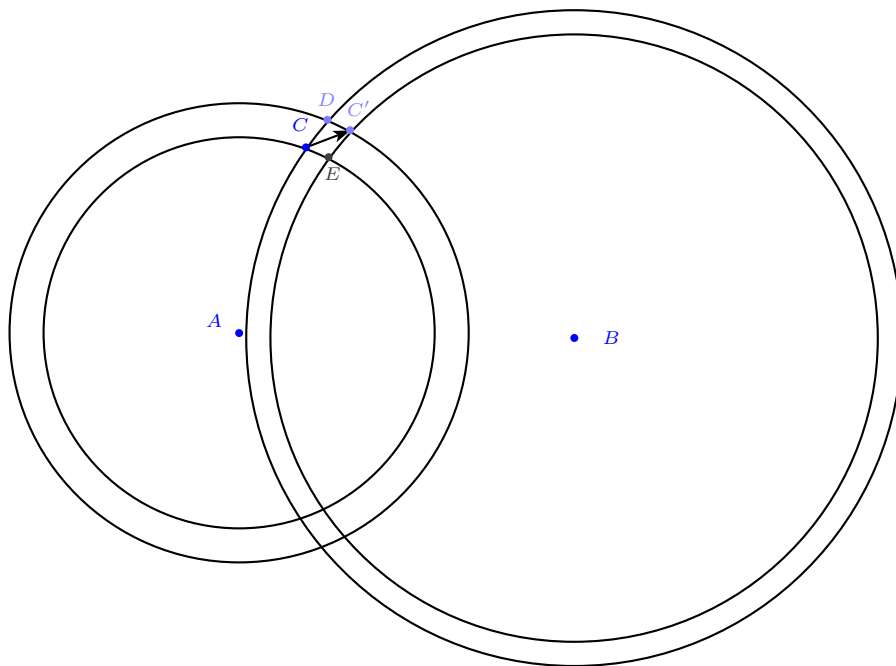


图 2

仔细观察式 (1), 我们还能发现, 如果将  $a$  当作点  $C$  的横坐标,  $b$  当作点  $C$  的纵坐标, 则我们有

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{(b + \varepsilon_2) - b}{(a + \varepsilon_1) - a} = \frac{-b}{a}. \quad (2)$$

也即,

$$\frac{db}{da} = \frac{-b}{a}. \quad (3)$$

解这个微分方程, 可得  $ab = k, k \in \mathbb{R}^+$ . 这与有两个焦点的卡西尼曲线定义相符.

易得有两个焦点的卡西尼曲线是一条连续可微的曲线.

下面我们来看有三个焦点的卡西尼曲线.