具有递推关系 $S_{n+2} = pS_{n+1} + qS_n$ 的数列通项公式

叶卢庆[*]
杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号:1002011005

2014 年 3 月 5 日

已知 S_1, S_2, 让我们来求解具有递推关系 $S_{n+2} = pS_{n+1} + qS_n (n \geq 1)$ 的数列的通项公式. 其中 S_1, S_2, p, q 都是复数. 上述关系可以写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{n+1} \\ S_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

通过数学归纳法, 可得

$$\begin{pmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

令

$$\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 (x, y) 是非零向量. 于是

$$\begin{pmatrix} p-\lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

因此

$$\begin{vmatrix} p-\lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

因此

$$-\lambda(p-\lambda) - q = 0 \iff \lambda^2 - p\lambda - q = 0. \tag{6}$$

当上面的二次方程有两个不重合的复根时, 解得

$$\lambda_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}, \lambda_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

此时, 根据方程 (4),$x = \lambda_1 y$ 或者 $x = \lambda_2 y$. 也即, 矩阵 $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 有 (这里的有是存在的意思) 两个特征向量 $(\lambda_1, 1)$ 和 $(\lambda_2, 1)$. 这两个特征向量形成复数域上的二维线性空间 $\mathbf{C}^2$ 的一组基. 因此存在唯一的 $k_1, k_2 \in \mathbf{C}$, 使得

$$\begin{pmatrix} S_2 \\ S_1 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, 方程 (2) 变为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_{n+2} \\ S_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left(k_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= k_1 \lambda_1^n \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \lambda_2^n \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这样我们就求得 $\forall n \geq 0$, $S_{n+1} = k_1 \lambda_1^n + k_2 \lambda_2^n$.

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

当二次方程 (6) 有两个重根时, 矩阵 $\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 只有一个特征值和特征向量, 此时, 该特征向量不足以展成 (span) 复数域上的线性空间 $\mathbf{C}^2$. 此时, 上面的方法很遗憾地行不通.

参考文献

[1] 假寐之海的博客大巴:http://yjq24.blogbus.com/logs/114491860.html