

习题21.4.1

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 24

习题 (21.4.1). 计算

$$\iint_S (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy,$$

S 是以原点为中心的立方体(每边长度为2)的边界,指向外侧.

解. 我们发现,流体的速度场在空间中的分布表达式为

$$(x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}.$$

我们设立方体为 $ABCD - A'B'C'D'$,其中 $ABCD$ 是正方形的处于上方的面, $A'B'C'D'$ 是正方形的处于下方的面.这些点的坐标分别是

$$\begin{aligned} &A(1, -1, 1), A'(1, -1, -1), B(1, 1, 1), B'(1, 1, -1), \\ &C(-1, 1, 1), C'(-1, 1, -1), D(-1, -1, 1), D'(-1, -1, -1). \end{aligned}$$

我们先考虑面 $AA'B'B$.由于指向外侧,因此该面的单位法向量为 $\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.因此流体的速度场在该单位法向量方向上的投影为

$$(x+y, y+z, z+x) \cdot (1, 0, 0) = x+y = 1+y.$$

投影在面积上积分,可得流量为

$$\int_{-1}^1 2(1+y)dy = 4.$$

再考虑面 $DD'C'C$.由于指向外侧,因此该面的单位法向量为 $-\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.因此流体的速度场在该单位法向量方向上的投影为

$$-x-y = 1-y.$$

投影在面积上积分,可得流量为

$$\int_{-1}^1 2(1-y)dy = 4.$$

再考虑面 $ABCD$. 由于指向外侧, 因此该面的单位法向量为 $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$. 因此流体的速度场在单位法向量方向上的投影为

$$z + x = 1 + x.$$

因此流量为

$$\int_{-1}^1 2(1+x)dx = 4.$$

再考虑面 $A'B'C'D'$. 由于指向外侧, 因此该面的单位法向量为 $-\mathbf{k}$. 因此流体的速度场在单位法向量方向上的投影为 $-z - x = 1 - x$. 最终仍会得到4.

其它各面照样处理, 最终得到结果24. \square