

计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$

叶卢庆*

2014 年 12 月 29 日

这是 2015 年中国科学技术大学数学分析的一道考研题目. 我在考场上没能做完, 现在继续做.

题目 (2015 年中国科学技术大学数学分析考研题). 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

解. 将 $x^n + 1$ 在复数域上因式分解, 可得

$$\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{(x - e^{\frac{\pi i}{n}})(x - e^{\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}}) \cdots (x - e^{\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}(n-1)})}.$$

设

$$\frac{1}{(x - e^{\frac{\pi i}{n}})(x - e^{\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}}) \cdots (x - e^{\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}(n-1)})} = \frac{A_0}{x - e^{\frac{\pi i}{n}}} + \frac{A_1}{x - e^{\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x - e^{\frac{2\pi i}{n} + \frac{2\pi i}{n}(n-1)}},$$

可得

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com