从一个错误的猜想到 Fermat 点

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 杭州, 浙江

2014 年 4 月 16 日

我们探讨如下猜想:

猜想. 设 O 是一个圆, 圆心为 P. 圆 O 外有 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$. 则圆 O 上存在点 P', 使得

$$|PP_1| + |PP_2| + \cdots + |PP_n| = |P'P_1| + |P'P_2| + \cdots + |P'P_n|.$$

探索. 当 $n = 1$ 时, 如图 (1), 以 P_1 为圆心,$|P_1P|$ 为半径作出另外一个圆. 两个圆的交点即为满足条件的 P'. 当然, 也可以这么看: 作出直线 P_1P, 与圆 O 分别交于 Q, Q'. 由于 $|P_1Q'| < |P_1P| < |P_1Q|$, 且由于圆 O 上的点 K 与 P_1 的距离是关于点 K 的位置的连续函数, 因此根据连续函数的介值定理, 必定在圆弧 $\widehat{QQ'}$ 和圆弧 $\widehat{Q'Q}$ 上存在点 P' 以及 P'', 使得 $|P'P_1| = |PP_1| = |P''P_1|$.(圆弧 $\widehat{QQ'}$ 位于 $\widehat{Q'Q}$ 的上面.)

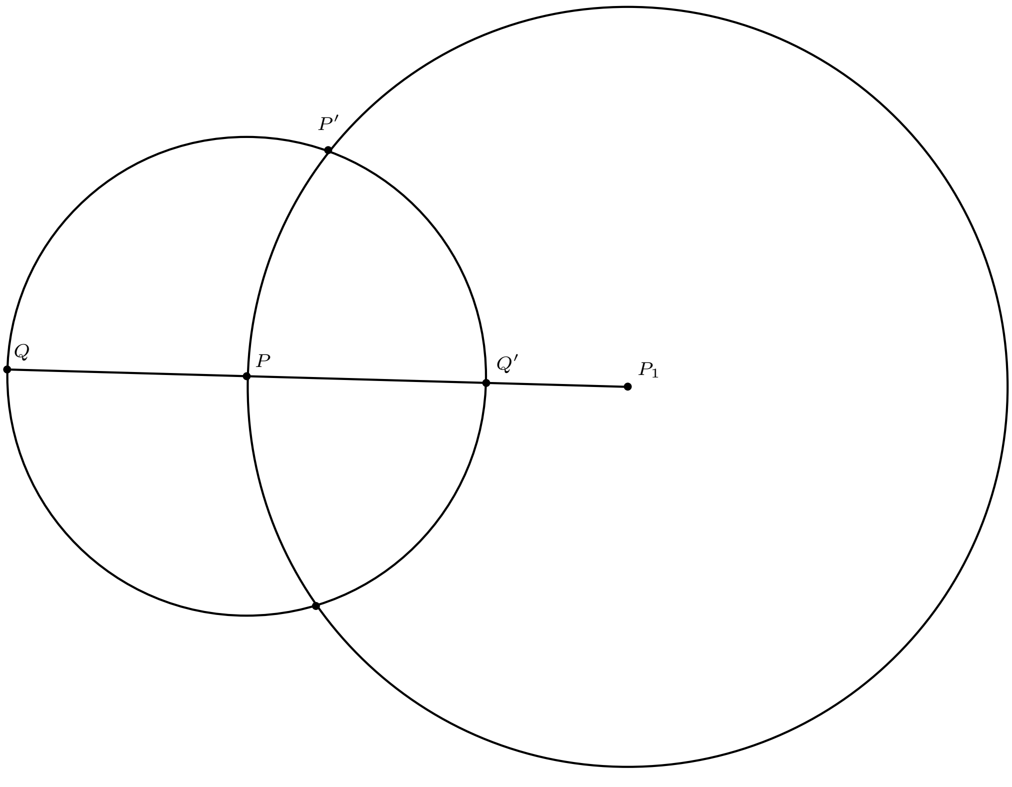

图 1

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,Email:yeluqingmathematics@gmail.com

当 $n=2$ 时, 如图 (2). 易得

$$|P_1Q'|+|P_2Q'|\leq |P_1P|+|P_2P|\leq |P_1Q|+|P_2Q|,$$

且两个等号成立当且仅当线段 P_1P_2 经过圆心. 由于 $|P_1K|+|P_2K|$ 是关于点 K 的位置而连续变化的, 因此根据连续函数的介值原理, 可得在弧 $\widehat{QQ'}$ 和 $\widehat{Q'Q}$ 上分别存在 P',P'', 使得

$$|P_1P'|+|P_2P'|=|P_1P|+|P_2P|=|P_1P''|+|P_2P''|.$$

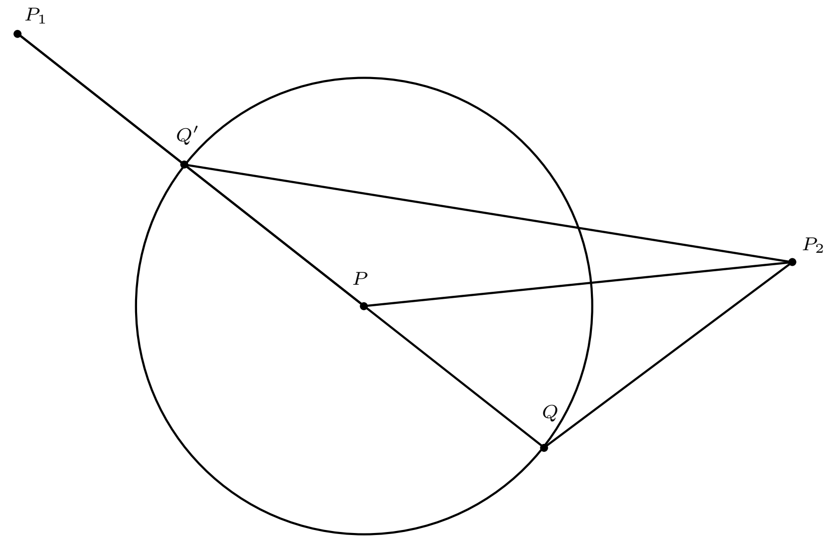

图 2

在论证 $n=3$ 的情形时, 我们遇到了困难. 为此, 我们决定从代数的角度来考察 $n=3$ 的情形. 我们在平面直角坐标系中看函数 $f(x,y)$, 其中

$$f(x,y)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}+\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2},$$

$P_1=(a_1,b_1),P_2=(a_2,b_2),P_3=(a_3,b_3)$. 我们来求 $f(x,y)$ 的最小值 (如果存在的话). 如果我们求出了 $f(x,y)$ 的最小值, 且使得 $f(x,y)$ 为最小值的点唯一, 且使得 $f(x,y)$ 为最小值的点不与 P_1,P_2,P_3 重合, 则可得猜想对于 $n=3$ 的情形不再成立. 这样的点是有可能存在的, 和 Fermat 点有关. 下面笔者用分析的方法证明, 当非退化三角形 $P_1P_2P_3$ 的内角都不大于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 平面上存在一个点, 该点到 P_1,P_2,P_3 的距离和最小, 且该点在三角形 $P_1P_2P_3$ 的内部. 这个点叫三角形 $P_1P_2P_3$ 的 Fermat 点.

当 (x,y) 与 P_1,P_2,P_3 不重合时, 易得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y-b_1}{\sqrt{(y-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(y-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{y-b_3}{\sqrt{(y-a_3)^2+(y-b_3)^2}}.$$

令向量

$$\overrightarrow{M_1}(x,y)=\begin{pmatrix}x-a_1\\y-b_1\end{pmatrix},\overrightarrow{M_2}(x,y)=\begin{pmatrix}x-a_2\\y-b_2\end{pmatrix},\overrightarrow{M_3}(x,y)=\begin{pmatrix}x-a_3\\y-b_3\end{pmatrix}.$$

在极值点 (x_0,y_0), 必有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0. \tag{1}$$

方程组 (1)等价于

$$\frac{\overrightarrow{M_1}(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_1}(x_0,y_0)|}+\frac{\overrightarrow{M_2}(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_2}(x_0,y_0)|}+\frac{\overrightarrow{M_3}(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_3}(x_0,y_0)|}=0. \tag{2}$$

易得 (2) 式有解当且仅当单位向量 $\frac{\overrightarrow{M_1}(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_1}(x_0,y_0)|},\frac{\overrightarrow{M_2(x_0,y_0)}}{|\overrightarrow{M_2}(x_0,y_0)|},\frac{\overrightarrow{M_3}(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_3}(x_0,y_0)|}$ 两两之间的夹角都为 $\frac{2\pi}{3}$. 因此 (2) 式若有解, 必有点 P_1,P_2,P_3 不共线, 能形成一个非退化的三角形的顶点.

当 P_1,P_2,P_3 不共线, 且形成的三角形的内角都小于 $\frac{2\pi}{3}$ 时, 形成三角形如图 (3). 在图 (3) 中, 点 P 在三角形 $P_1P_2P_3$ 的内部或边界. 对于角 α,β,γ 来说, 易得满足

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\pi,\\ \angle P_1P_2P_3<\alpha\le\pi,\\ \angle P_2P_3P_1<\beta\le\pi,\\ \angle P_3P_1P_2<\gamma\le\pi.\end{cases}$$

且易得角 α,β,γ 的弧度会随着点 P 位置的连续变动而连续变化, 因此根据连续函数的介值定理, 必定存在三角形 $P_1P_2P_3$ 内部或边界上的一点, 使得当 P 运动到该点时, 会有 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$. 而且, 使得 α,β,γ 都为 $\frac{2\pi}{3}$ 的点 P 是唯一的, 这是因为, 假如还有另外一个点 P' 使得 $\alpha=\beta=\beta=\frac{2\pi}{3}$, 且 P' 与 P 不重合, 若 P' 位于三角形 $P_1P_2P_3$ 之内或边界上, 根据对称性不妨设 P' 位于三角形 P_1PP_2 之内或边界上, 那么根据三角形的外角与内角的关系, 可得 $\angle P_1P'P_2>\angle P_1PP_2=\frac{2\pi}{3}$, 矛盾. 因此可得 P' 不可能在三角形 $P_1P_2P_3$ 的内部或边界. 类似的论证可以证明 P' 也不可能在三角形的外面. 因此可得 P' 不存在. 于是此时, 使得 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$ 的点 P 是唯一的.

下面我们来证明满足 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$ 的点 P 使得 $f(x,y)$ 达到了最小值. 首先由上面的分析可得 f 的驻点是至多只有一个的. 假如驻点 P 不是 f 的极小值点, 而是鞍点或者极大值点, 则在 P 的任意给定小的邻域 U 内肯定存在另外的点 P'' 使得 $f(x,y)$ 在 P'' 处的值小于 $f(x,y)$ 在 P 处的值. 当一个点 M 从 P 出发沿着射线 PP'' 趋于无穷远点时,$f(x,y)$ 在 M 处的值肯定是随着 M 的变动而可微地趋于无穷, 因此根据 Rolle 定理,f 在射线 PP'' 上肯定存在另外一个异于点 P 的驻点, 这与 f 的驻点至多只有一个矛盾. 因此假设错误, 即 P 是 f 的唯一的极小值点, 于是可得 f 在 P 处达到了最小值.

由于在 (x,y) 不与 P_1,P_2,P_3 重合时, f 在 P 处达到了最小值, 因此 f 在 P 处的值比 f 在 P_1 的任意小邻域内除了 P_1 外的任意点处的值都要小, 由于 f 是连续函数, 因此 f 在 P_1 处的值比 f 在 P 处的值要小. 同理可得 f 在 P_2,P_3 处的值比 f 在 P 处的值要小.

综上所述,f 在 P 处达到最小值. $\square$

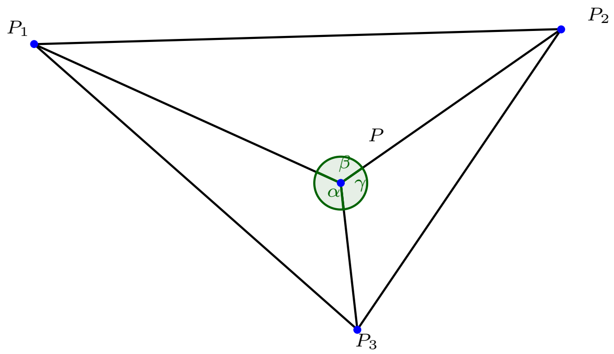

图 3