

# 有两个焦点的卡西尼曲线是连续的

叶卢庆\*

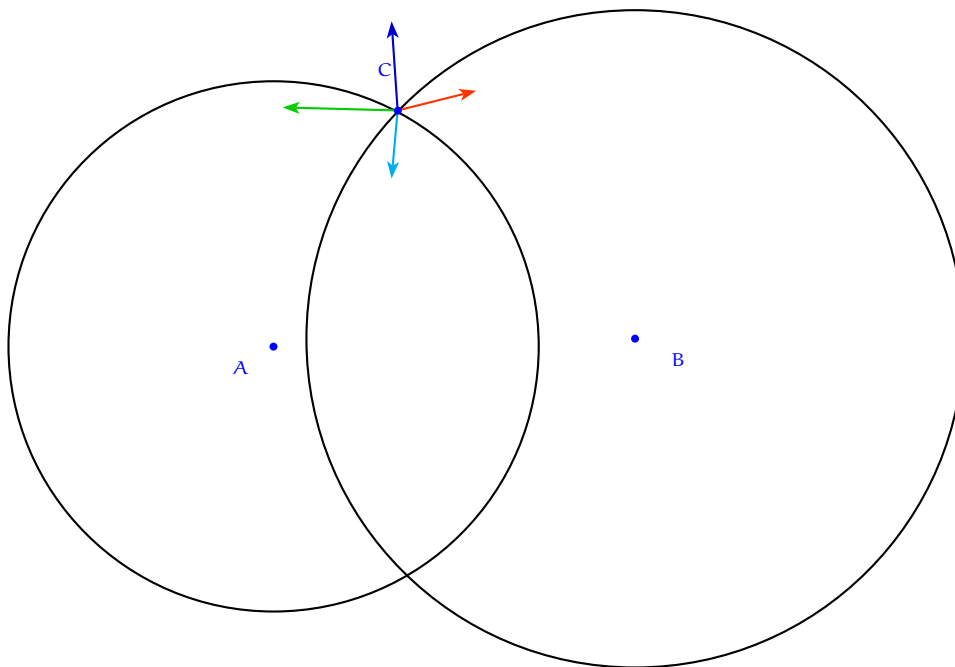
杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号: 1002011005

2014 年 3 月 31 日

现在我们用几何的方法来证明有两个焦点的卡西尼曲线是连续的. 所谓卡西尼曲线, 就是平面上到两个定点的距离乘积等于定值的曲线, 且这个定值为正. 两个定点叫做焦点.

首先易得焦点相同的两条卡西尼曲线是不相交的, 否则这两条卡西尼曲线将会是一条卡西尼曲线.

如下图, 设点  $C$  是某一条卡西尼曲线上的任意一点,  $A, B$  是该卡西尼曲线的焦点. 则易得当点  $C$  沿着两个圆周的任意一个圆周运动时, 都不可能继续保持在同一条卡西尼曲线上. 当点  $C$  进入深蓝色和蓝色箭头所指的区域时, 不可能继续保持在同一条卡西尼曲线上. 当点  $C$  进入红色箭头或者绿色箭头所指的区域时, 才有可能保持在同一条卡西尼曲线上. 下面我们来论证, 必定存在这样的路径, 使得当  $C$  沿着这条路径进入红色或绿色箭头所指的区域时, 仍然保持在卡西尼曲线上. 这是因为, 当  $C$  沿着以  $B$  为中心的圆顺时针运动时, 必然会进入另外的卡西尼曲线, 该卡西尼曲线上的点到  $A, B$  的距离乘积的值大于  $|AC||BC|$ . 当  $C$  沿着以  $A$  为中心的圆顺时针运动时, 必然也会进入另外的卡西尼曲线, 该卡西尼曲线上的点到  $A, B$  的距离乘积的值小于  $|AC||BC|$ . 于是根据介值原理,



\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com