有两个焦点的卡西尼曲线的一个性质

叶卢庆*
杭州师范大学理学院

2014 年 4 月 9 日

我们把平面上满足到两个不同定点的距离乘积为定值这个条件的所有点形成的集合叫做有两个焦点的卡西尼曲线. 两个定点叫做卡西尼曲线的焦点. 下面我们来证明, 有两个焦点的卡西尼曲线具有如下性质:

定理. 对于有两个焦点的卡西尼曲线，当确定卡西尼曲线上的任意一点后，该点的任意小去心邻域都含有该卡西尼曲线上的点.

当 $n=2$ 时, 有三种情况. 令 A,B 为平面上的两个定点,C 到 A,B 的距离乘积为 $|AC||BC|$. 分别体现在图(1) , 图 (2) 和图 (3) 中.

在图 (1) 中, 以 C 为圆心做一个任意的半径比较小的圆 (圆的半径比 C 到直线 AB 的距离小), 且经过 C 作 AB 的垂线, 垂线与圆交于 G,F. 则易得

$$|GA||GB|>|CA||CB|>|FA||FB|. \tag{1}$$

对于圆周上的任意一点 K, 当 K 变动时, 易得 $|KA||KB|$ 是连续变动的, 也即,$|KA||KB|$ 是关于 K 的位置连续的. 因此根据介值原理, 必定在圆弧 $\widehat{GF}$(在左边) 或者圆弧 $\widehat{FG}$(在右边) 上分别存在点 K' ,K'', 使得 $|K'A||K'B|=|CA||CB|$,$|K''A||K''B|=|CA||CB|$.

在图 (2) 中, 点 C 位于直线 AB 上且位于线段 AB 之外时, 易得

$$|AE||BE|<|AC||BC|<|AF||BF|. \tag{2}$$

因此在圆弧 $\widehat{EF}$ 和 $\widehat{FE}$ 上分别存在 K',K'', 使得 $|AK'||BK'|=|AC||BC|=|AK''||BK''|$.

当点 C 位于直线 AB 上且位于线段 AB 之间时, 如图 (3), 则可得

$$|AD||BD|=(|AC|-|DC|)(|BC|+|DC|)=|AC||BC|+|DC|(|AC|-|BC|)-|DC|^2.$$

令 $|DC|$ 足够小, 则当 $|AC|\geq|BC|$ 时可得 $|AD||BD|<|AC||BC|$. 当 $|AC|<|BC|$ 时可得 $|AD||BD|>|AC||BC|$, 根据对称性, 此时必有 $|AE||BE|<|AC||BC|$. 而且我们必有 $|AI||BI|>|AC||BC|$. 可见, 在弧 $\widehat{DI}$ 或者 $\widehat{IE}$ 上必定存在 K, 使得 $|AK||BK|=|AC||BC|$.

这样我们就分别分析了三种仅有的情况. 由于以 C 为圆心所做的圆的半径是任意小的, 因此我们就证明了定理.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

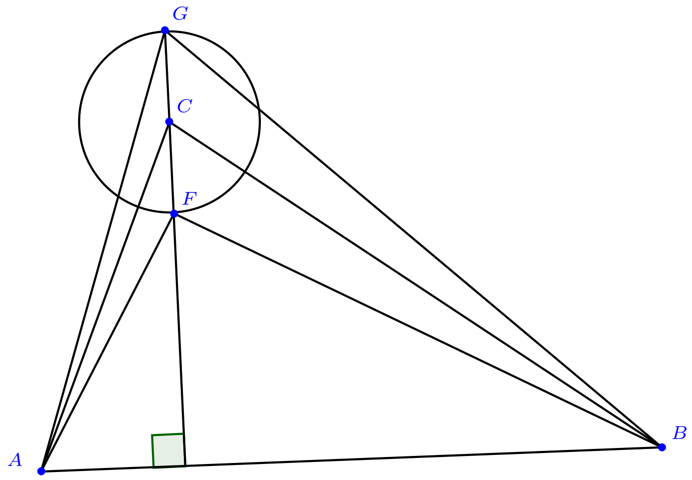

图 1

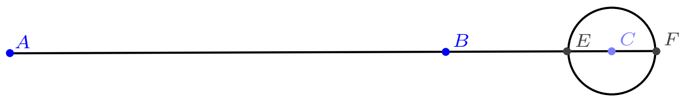

图 2

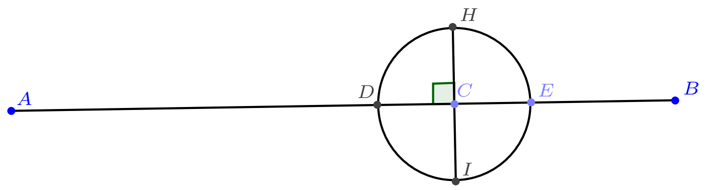

图 3