

# Fourier 变换及其相关理论

## 开题报告

叶卢庆

杭州师范大学理学院数学 112 班

指导老师: 谢剑

2015 年 1 月 13 日

# 选题背景与意义

- Fourier 分析博大精深. 横跨代数, 微分方程, 分析, 数论等多个数学领域. 在力学, 光学等物理领域有深刻应用. 在图像处理, 信号处理等工程领域也有广泛应用.

# 选题背景与意义

- Fourier 分析博大精深. 横跨代数, 微分方程, 分析, 数论等多个数学领域. 在力学, 光学等物理领域有深刻应用. 在图像处理, 信号处理等工程领域也有广泛应用.
- 我的学年论文也是写有关 Fourier 变换的理论, 希望毕业论文能在学年论文的基础上进行深化和扩展.

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 研究 Fourier 分析的早期历史. 古希腊的 Ptolemy 为了解释行星运动中出现的逆行等不规则现象而创造的“本轮”和“均轮”学说, 颇有 Fourier 分析的味道. 后来正式的发展里出现了 Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Abel, ……等一长串光辉的名字. 可以说, Fourier 分析深刻地主导和影响了 19 世纪和 20 世纪分析学的发展. 特别要参考 Fourier 的著作, 是他把这门学科发扬光大.

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 研究 Fourier 分析的早期历史. 古希腊的 Ptolemy 为了解释行星运动中出现的逆行等不规则现象而创造的“本轮”和“均轮”学说, 颇有 Fourier 分析的味道. 后来正式的发展里出现了 Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Abel, ……等一长串光辉的名字. 可以说, Fourier 分析深刻地主导和影响了 19 世纪和 20 世纪分析学的发展. 特别要参考 Fourier 的著作, 是他把这门学科发扬光大.
- 探究线性代数的相关理论, 比如酉变换, 最小二乘法, 特征值和 Fourier 分析理论的紧密联系.

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 研究 Fourier 分析的早期历史. 古希腊的 Ptolemy 为了解释行星运动中出现的逆行等不规则现象而创造的“本轮”和“均轮”学说, 颇有 Fourier 分析的味道. 后来正式的发展里出现了 Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Abel, ……等一长串光辉的名字. 可以说, Fourier 分析深刻地主导和影响了 19 世纪和 20 世纪分析学的发展. 特别要参考 Fourier 的著作, 是他把这门学科发扬光大.
- 探究线性代数的相关理论, 比如酉变换, 最小二乘法, 特征值和 Fourier 分析理论的紧密联系.
- Fourier 分析和微分方程的联系. 以及相应的离散 Fourier 分析与差分方程的联系.

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 研究 Fourier 分析的早期历史. 古希腊的 Ptolemy 为了解释行星运动中出现的逆行等不规则现象而创造的“本轮”和“均轮”学说, 颇有 Fourier 分析的味道. 后来正式的发展里出现了 Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli, Lagrange, Fourier, Dirichlet, Abel, ……等一长串光辉的名字. 可以说, Fourier 分析深刻地主导和影响了 19 世纪和 20 世纪分析学的发展. 特别要参考 Fourier 的著作, 是他把这门学科发扬光大.
- 探究线性代数的相关理论, 比如酉变换, 最小二乘法, 特征值和 Fourier 分析理论的紧密联系.
- Fourier 分析和微分方程的联系. 以及相应的离散 Fourier 分析与差分方程的联系.
- 离散 Fourier 分析与多边形之间的关系. 以及 Fourier 分析解等周问题 (Hurwitz).

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 学习与探究为什么通过离散 Fourier 变换能导出四次以及四次以下方程的根式解 (Lagrange). 同样的变换对于五次方程为什么会失效.



## 研究的基本内容和拟解决的问题

例

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  的三个根  $x_1, x_2, x_3$  满足关系式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b \\ x_1x_2x_3 = -c \end{cases}, \quad (1)$$

$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . 三个根经过离散 *Fourier* 变换

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

后, 结合方程(1), 能很容易求出  $r_1, r_2, r_3$ , 再通过离散 *Fourier* 逆变换, 便能求出  $x_1, x_2, x_3$ . 这很神奇, 到底是什么?

# 研究的基本内容和拟解决的问题

- 学习与研究 Fourier 分析在弦振动, 热传导,  $n$  个自由度的系统的微振动等物理问题中的应用.

# 研究方法及措施

- 看书, 上网查阅相关资料和文献. 思考. 记录笔记和感悟. 最后整理成文.

# 研究方法及措施

- 看书, 上网查阅相关资料和文献. 思考. 记录笔记和感悟. 最后整理成文.
- 我想论述的问题并不是孤立的. 它们之间存在有机的联系. 比如, Fourier 分析, 微分方程, 积分方程会和相关的物理问题, 以及线性代数理论有紧密关联. 在介绍 Fourier 分析的历史的时候, 也不会只是蜻蜓点水走马观花一般地介绍其历史, 更不会提及有关历史人物的人生际遇和生活琐事, 而是尽量和数学理论结合在一起阐述, 使得数学的历史和数学理论相得益彰. 因此我的研究方法就是注重各个主题之间的联系. 估计会遇到的困难是, 心有余而时间和精力不足. 因此, 会量力而行. 时间若足够, 就多写一点. 时间若不够, 就少写一点.

# 研究工作的步骤与进度

- 在上交论文的倒数第二个星期撰写好论文, 并交由导师审阅. 在此之前, 一直看书, 写笔记.

## 主要参考文献

- Elias M. Stein, Rami Shakarchi. Fourier Analysis[M]. Princeton University Press, 2003.
- Geogi P. Tolstov. Fourier Series[M]. New York: Dover Publication.
- Joseph Fourier. 桂质亮译. 热的解析理论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2008
- Richard Courant. 朱言钧译. 柯氏微积分学 [M]. 上海: 中华书局, 1952.
- 陶哲轩. 王昆扬译. 陶哲轩实分析 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2008.
- 福田武雄. 穆鸿基译. 差分方程 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981.
- M. Klein. 张理京, 张锦炎等译. 古今数学思想 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2009.
- Harold M. Edwards. Galois theory[M]. Springer, 1984.
- 吴大猷. 古典动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- A.P. French. 徐绪笃译. 振动与波. 北京: 人民教育出版社, 1981.

# END

谢谢大家.