

## 定理17.4

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 17

**定理 (17.4).** 若函数  $f(x, y), f_y(x, y)$  都在  $[a, b; c, d]$  上连续, 同时在  $[c, d]$  上  $a'(y), b'(y)$  存在, 且  $a(y), b(y) \in [a, b] (y \in [c, d])$ , 则

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx + f[b(y), y]b'(y) - f[a(y), y]a'(y).$$

证明. 在证明这个式子之前,我们要看这个式子的意义.结合定理17.2,我们易知其意义.项目  $\int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx$  是当  $a(y), b(y)$  为恒值时所出现的.然而  $a(y), b(y)$  并非确切的恒值,而是可微的,后面的两项就体现出这一点.之所以  $f[b(y), y]b'(y)$  前面是+号,是因为  $b(y)$  位于积分上限,而之所以  $f[a(y), y]a'(y)$  前面是-号,是因为  $a(y)$  是积分下限.我们把  $\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$  看作截面面积的变化率,那么  $\int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x, y) dx$  是  $a(y), b(y)$  保持不变的时候需要的项,而  $f[b(y), y]b'(y), f[a(y), y]a'(y)$  是  $a(y), b(y)$  变化的时候需要的项.且由于截面的变化率等于边长乘以另一条边长的变化率,因此会有  $f[b(y), y]b'(y)$  和  $f[a(y), y]a'(y)$  这种形式.  $\square$