

习题17.7

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 18

习题 (17.7). 证明

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

证明. 我们进行极坐标代换. 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 其中 $r > 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{r} d\theta dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\cos 2\theta}{r} dr d\theta \\ &= \dots \end{aligned}$$

不存在!为什么会这样呢?我们知道,积分都可以看作一个级数.积分换序本质上就是级数重排,只有绝对收敛的级数才能重排,而条件收敛的级数是不能重排的. \square