混合偏导数的 Clairaut 定理

叶卢庆[*]

2014 年 12 月 22 日

混合偏导数的 Clairaut 定理叙述如下:

定理. 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集合, 并设 $f:\mathbf{E}\to\mathbf{R}^m$ 是 E 上的二次连续可微函数. 那么对于一切 $x_0\in E$ 和 $1\le i,j\le n$,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

证明. 不妨设 $j<i$. 设 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 我们主要来看表达式

$$\frac{\frac{f(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i+\Delta x_i,\cdots,a_n)-f(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n)}{\Delta x_i}-\frac{f(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i+\Delta x_i,\cdots,a_n)-f(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)}{\Delta x_i}}{\Delta x_j}. \tag{1}$$

如果先让 Δx_i 趋于 0, 再让 Δx_j 趋于 0, 得到的结果是 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 如果先让 Δx_j 趋于 0, 再让 Δx_i 趋于 0, 得到的结果会是 $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. 我们来证明后者等于前者. 这是因为, 当 Δx_i 固定, 而让 Δx_j 趋于 0 时, 根据 Lagrange 中值定理, 存在位于 $a_i+\Delta x_i$ 和 a_i 之间的数 a_i', 使得式(1)等于

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i',\cdots,a_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i',\cdots,a_n)}{\Delta x_j}. \tag{2}$$

再次使用 Lagrange 中值定理, 可得存在位于 a_j 和 $a_j+\Delta_j$ 之间的数, 使得式(2)等于

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j',\cdots,a_i',\cdots,a_n). \tag{3}$$

由于二阶偏导数连续, 因此当 $\Delta x_i,\Delta x_j$ 趋于 0, 即 a_j' 趋于 a_j,a_i' 趋于 a_i 时, 式(3)确实会趋于 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 这样就完成了证明. □

上面的证明是基于 Lagrange 中值定理的. 下面我们再给出一个基于定积分的证明. 为此, 我们先叙述一个引理. 这个引理根据微积分第二基本定理是显然的.

引理 1. 定义在闭区间 $I=[a,b]$ 上的实值连续函数 f 和 $g.f=g$ 当且仅当 $\forall t\in[a,b]$,

$$\int_a^t f(x)dx=\int_a^t g(x)dx.$$

有了这个引理之后我们再来证明 Clairaut 定理.

证明. 将函数 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ 沿着 x_j 方向积分, 积分的范围是 $x_j\in[a_j,b_j]$, 根据微积分第一基本定理, 我们会得到

$$\int_{a_j}^{b_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_j=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,b_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,a_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n). \tag{4}$$

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

再将

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,b_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,a_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

沿着 x_i 方向积分, 积分的范围是 $[a_i,b_i]$, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{a_i}^{b_i}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,b_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,a_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\right]dx_i\\
&=f(x_1,\cdots,b_j,\cdots,b_i,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,b_j,\cdots,a_i,\cdots,x_n)\\
&-f(x_1,\cdots,a_j,\cdots,b_i,\cdots,x_n)+f(x_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots,x_n).
\end{aligned}$$

由于定积分和求导可以互相交换, 因此我们对函数 $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ 进行和函数 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ 同样的操作会得到同样的结果. 由于这两个函数都连续, 因此根据引理, 可得这两个函数在定义域上相等. □