习题 1.5.2

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 24 日

习题 (1.5.2)**.** 求解三次方程 $x^3 = 3px + 2q$, 其中 $p, q \in \mathbf{R}$, 可如下进行*:* 一个希望有用的变换 $x = s + t$ 并导出, 如果 $st = p$, 且 $s^3 + t^3 = 2q$, 则此 x 为三次方程之根.

$$s^3 + t^3 + 3st(s+t) = 3p(s+t) + 2q$$

因此令 $st = p$,$s^3 + t^3 = 2q$, 根据对称性, 不妨令

$$s^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3}, t^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3}.$$

因此可得

$$s_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}, s_2 = \omega \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}, s_3 = \omega^2 \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}},$$
$$t_1 = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}, t_2 = \omega \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}, t_3 = \omega^2 \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

由于 st 是实数, 因此 $x = s_1 + t_1$ 或 $s_2 + t_3$,$s_3 + t_2$.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com