

# Cassini 曲线方程推导

叶卢庆\*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 29 日

我们设平面直角坐标系上有点  $(a, 0), (-a, 0)$ . 下面我们来求到这两个点的距离乘积为  $k(k > 0)$  的所有点形成的曲线的方程. 可得

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k.$$

于是

$$[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2] = k^2.$$

于是

$$(x^2 - a^2)^2 + y^2((x-a)^2 + (x+a)^2) + y^4 = k^2.$$

于是

$$(x^2 - a^2)^2 + 2y^2(x^2 + a^2) + y^4 = k^2.$$

特别的, 当  $k = a^2$  时, Cassini 曲线可以化为 Bernoulli 双纽线

$$x^4 - 2x^2a^2 + 2y^2(x^2 + a^2) + y^4 = 0. \iff (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0.$$

对于 Bernoulli 双纽线来说, 特别的, 当  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 可得

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

即

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

化为极坐标方程, 令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 即为

$$\rho^2 = \rho \sqrt{|\cos 2\theta|}.$$

$\rho \neq 0$  时, 化为

$$\rho^2 = \cos 2\theta.$$

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com