

曲面的面积

叶卢庆

杭州师范大学理学院, 学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 22

令 $f(x, y)$ 是定义在矩形 $K = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上的连续可微函数, 然后我们来讨论 \mathbf{R}^3 内的光滑初等曲面

$$S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in K\}$$

的面积. 我们把矩形区域 K 分割成小矩形, 具体的分割办法如下: 将区间 $[a, b]$ 分割成 n 个长度相等的小区间 $[p_0, p_1], [p_1, p_2], \dots, [p_{n-1}, p_n]$, 将区间 $[c, d]$ 分割成 m 个长度相等的小区间 $[q_0, q_1], [q_1, q_2], \dots, [q_{m-1}, q_m]$. 这样, 当 i 遍历 $0, 1, \dots, n-1, j$ 遍历 $0, 1, \dots, m-1$ 时, $[p_i, p_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}]$ 将会遍历 mn 个小矩形.

对于任意一个小矩形 $H_{ij} = [p_i, p_{i+1}] \times [q_j, q_{j+1}]$ 来说, 该小矩形的四个顶点的坐标分别为

$$A_{ij} = (p_i, q_j), B_{ij}(p_i, q_{j+1}), C_{ij}(p_{i+1}, q_{j+1}), D_{ij}(p_{i+1}, q_j).$$

这四个顶点分别被映射为曲面上的四个点

$$A'_{ij}(p_i, q_j, f(p_i, q_j)), B'_{ij}(p_i, q_{j+1}, f(p_i, q_{j+1})), \\ C'_{ij}(p_{i+1}, q_{j+1}, f(p_{i+1}, q_{j+1})), D'_{ij}(p_{i+1}, q_j, f(p_{i+1}, q_j)).$$

注. 突然意识到, 分割成小矩形的方案是不好的. 因为空间中的四点不一定形成一个平面.