# 习题20.2.3.4

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 19

**习题 (20.2.3.4).** 计算下列三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz,$$

其中 $z$ 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$.

计算. 利用推广的球坐标变量替换.令 $x=ar\sin\phi\cos\theta$,$y=br\sin\phi\cos\theta$,$z=cr\cos\phi$.其中 $0\leq r\leq 1$,$\phi\in[0,\pi]$,$\theta\in[0,2\pi)$.则题目中的三重 积分变为

$$\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}|abc|r^2\sin\phi d\theta d\phi dr.$$

我们再对 $r$ 进行变量替换,令 $r=\sin t$,其中 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.则上面的三重积分进一步变成

$$\begin{aligned}|abc|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\sin\phi d\theta d\phi dt &= |abc|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2t\sin\phi d\theta d\phi dt\\ &=\frac{1}{8}|abc|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\sin\phi d\theta d\phi dt\\ &=\frac{1}{8}|abc|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\pi 2\pi(1-\cos 4t)\sin\phi d\phi dt\\ &=\frac{\pi^2}{4}|abc|.\end{aligned}$$

□