

习题 1.5.28

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 2 日

28. 再考虑图 1-15b 中螺线 $Z(t) = e^{at}e^{ibt}$, 其中 a 和 b 是固定实数, 令 τ 为一变动的实数, 按 (1.9), $z \mapsto \mathcal{F}_\tau(z) = (e^{a\tau}e^{ib\tau})z$ 是: 将此平面以原点为中心按因子 $e^{a\tau}$ 放大, 再将它旋转一个角 $b\tau$.
- (i) 证明 $\mathcal{F}_\tau[Z(t)] = Z(t + \tau)$, 由此得知此螺线是变换 \mathcal{F}_τ 的不变曲线(见 1.4.3 节).
 - (ii) 由此, 不用微积分证明所有经过原点的射线均以等角与此螺线相交.
 - (iii) 证明若将此螺线绕原点旋转一个任意角, 则新螺线对每个 \mathcal{F}_τ 仍为不变曲线.
 - (iv) 论述前一部分的螺线是 \mathcal{F}_τ 仅有的不变曲线.

注. 值得指出的是, 此处的翻译有问题, 应该翻译成“将此平面旋转一个角 $b\tau$, 再以原点为中心按因子 $e^{a\tau}$ 放大”.

证明. (i) 为了证明螺旋线是某个变换的不变曲线, 只用证明螺旋线上的点经过该变换后还在螺旋线上即可. 我们考虑螺旋线的极坐标形式 $r = e^{(a/b)\theta}$, 对于螺旋线上的任意一点 $(e^{(a/b)\theta}, \theta)$, 将之逆时针旋转 $b\tau$ 后, 变成 $(e^{(a/b)\theta}, \theta + b\tau)$. 再以原点为中心按因子 $e^{a\tau}$ 放大后, 变成 $(e^{(a/b)\theta + a\tau}, \theta + b\tau)$, 易得该点仍然在螺旋线上.

接下来的全部省略. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com