定理18.1

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 18

定理 (Weierstrass 判别法)**.** 设有函数 $F(x)$,使得
$$|f(x,y)| \leq F(x), a \leq x < +\infty, c \leq y \leq d,$$
如果积分
$$\int_a^{+\infty} F(x)dx$$
收敛,那么 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证明. 积分
$$\int_a^{+\infty} F(x)dx$$
收敛,说明对于任意给定的正实数 ε,都存在相应的实数 $M > a$,使得对于任意的 $p,q > M$,都有
$$|\int_p^q F(x)dx| < \varepsilon.$$
因此,$\forall y \in [c,d]$,我们有
$$|\int_p^q f(x,y)dx| < \varepsilon.$$
M 只与 ε 有关,而与 y 的取值无关.因此结论成立. □

注. 我们将积分版本的 *Weierstrass* 判别法与级数版的 *Weierstrass* 判别法进 行对比.级数版的*Weierstrass* 判别法如下:

若对充分大的 n,恒有实数 a_n,使得 $|u_n(x)| \le a_n$ 对 X 上任意 的 x 都成立,并且数项级数 $\sum a_n$ 收敛,则 $\sum u_n(x)$ 在 X 上 一致收敛.

下面我们来说明这两者讲的是一件事.当我们把数列看作逐段常值函数的时 候,该数列所有项按照先后顺序相加形成的级数就成了一个积分,此时,级数版的 *Weierstrass* 判别法就成了积分版的 *Weierstrass* 判别法.

而当我们把函数 $F(x)$ 的定义域进行越来越细致的分割的时候,我们也能从级数版 本的 *Weierstrass* 判别法推出积分版本的 *Weierstrass* 判别法.