定理9.1

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学 号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 20

定理 (9.1). $\mathcal{L}^1$ 类的 *Jordan* 曲线 $C = \{P(t)|a \le t \le b\}$,$P(t)$ 具有长度,其长度为
$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\phi_1'(t)^2 + \phi_2'(t)^2 + \cdots + \phi_n'(t)^2}dt.$$

证明. 曲线 $C = \{(\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t))|a \le t \le b\}$.我们对区 间 $[a,b]$进行分割,得到 k 个小区间
$$[a, a+\Delta x], [a+\Delta x, a+2\Delta x], \cdots, [a+(k-1)\Delta x, a+k\Delta x].$$
其中 $\Delta x = \frac{b-a}{k}$.这 k 个小区间对应于一个折线段,该折线段 的长度为
$$\sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\phi_j(a+i\Delta x) - \phi_j(a+(i-1)\Delta x))^2}.$$
根据微分中值定理,
$$\frac{\phi_j(a+i\Delta x) - \phi_j(a+(i-1)\Delta x))}{\Delta x} = \phi_j'(\xi_{ij}).$$
其中 $\xi_{ij} \in (a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x)$.因此该折线段的长度变为
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{b-a}{k} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \phi_j'(\xi_{ij})^2}.$$
由于 C 是 $\mathcal{L}^1$ 类的 Jordan 曲线,因此当 $k \to \infty$ 时,上 式等于
$$\int_a^b \sqrt{\phi_1'(t)^2 + \phi_2'(t)^2 + \cdots + \phi_n'(t)^2}dt.$$
□