定理17.2

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 18

定理 (17.2). 设 $f(x,y)$ 以及 $f_y(x,y)$ 都在闭矩形 $[a,b;c,d]$ 上连续,则

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f_y(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx.$$

证明. 后面那个等式是废话.我们只用证明前面那个等式.前面那个等式的意思就是,积 分和求导可以互相交换.给定 $y_0 \in [c,d]$,则

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx &= \lim_{y\to y_0;\neq y_0} \frac{\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx}{y-y_0} \\ &= \lim_{y\to y_0;y\neq y_0} \frac{\int_a^b (f(x,y)-f(x,y_0))dx}{y-y_0} \\ &= \lim_{y\to y_0;y\neq y_0} \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx.\end{aligned}$$

由于积分和极限可以互相交换(根据定理17.1),因此上式等于

$$\int_a^b \lim_{y\to y_0;y\neq y_0} \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx = \int_a^b f_y(x,y')dx.$$

其中 $y' \in (y,y_0)$ 或者 $y' \in (y_0,y)$.由于 $f_y(x,y)$ 的连续性,因 此得到欲证等式.

注. 为了更好地理解该定理的几何意义,建议先考虑 $f(x,y)$ 为线性函数时的情形.

□