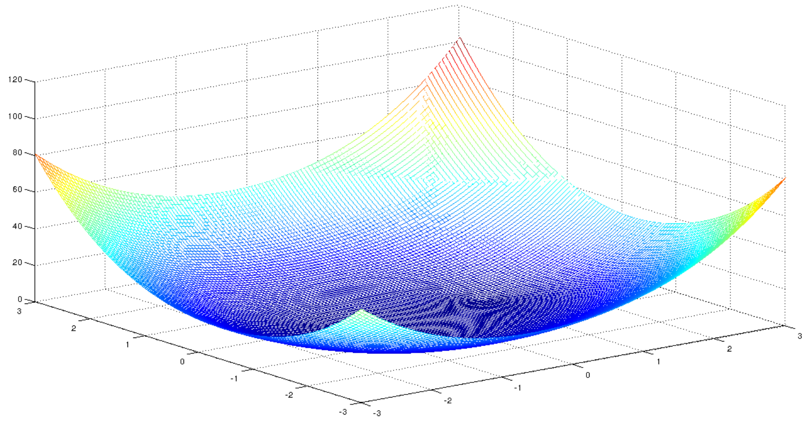
从《复分析——可视化方法》习题 **2.9.7** 到最大模原理

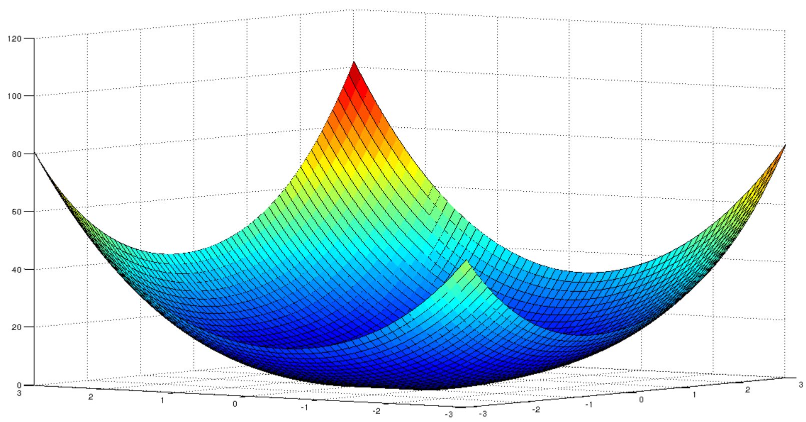
叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号:1002011005

2014 年 4 月 8 日

1. 画出 $C(z)=(z+1)(z-1)(z+1+i)$ 的模曲面的草图. 由此画出卡西尼曲线 $|C(z)|=const.$ 的草图.

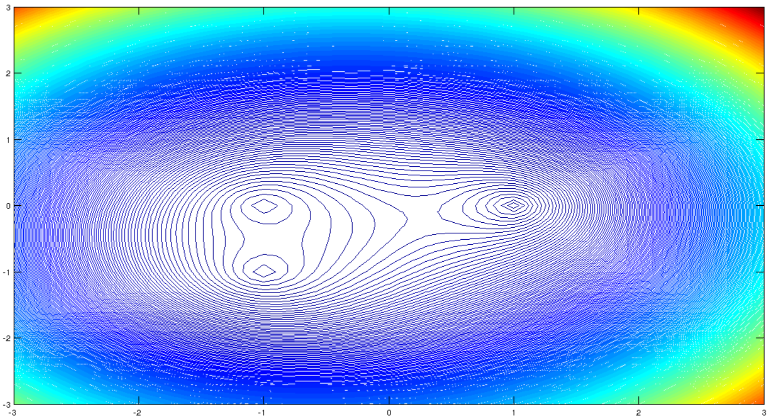
解. 模曲面草图如下:





等高线如下. 这也是以 $-1,1,-1-i$ 为焦点的卡西尼曲线族的样子.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com



□

2. 刚才画出的卡西尼曲线的正交轨道的意义是什么?

解. 模曲面的高度沿着平面上某一条曲线变化速率最快, 那条曲线就是卡西尼曲线的正交轨道. □

3. $|C(z)|$ 有无局部极大或非零的局部极小?

解. 无. 因为观察发现每条卡西尼曲线都是连续的. 而卡西尼曲线是模曲面的等高线. 在这种情况下,$|C(z)|$ 的局部极大和非零的局部极小是不可能存在的. □

4. 若 D 是一圆盘 (甚至是比较任意的形状),$|C(z)|$ 在 D 上的最大值可否发生在 D 的内点或者只能发生在 D 的边界点上? 最小值又如何?

解. 无论是最大值还是最小值, 都只可能发生在 D 的边界点, 而不可能出现在 D 的内点. 这也是由卡西尼曲线的连续性决定的, 而卡西尼曲线是模等高线. □

5. 若用任意多项式代替 $C(z)$, 对这些问题是否有同样的答案. 对于仅仅知道可以表示为一幂级数的函数又如何.

解. 都有一样的答案. 下面我们来具体阐述. 设 $P(z)$ 是最高次项系数为 1 的 n 次多项式, 则根据分解定理, 易得 P 可以分解为

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_m),$$

则

$$|P(z)| = |z - a_1||z - a_2| \cdots |z - a_m|.$$

设 $|P(z)| = k$, 其中 $k > 0$, 则

$$|z - a_1||z - a_2| \cdots |z - a_m| = k \tag{1}$$

是有 m 个焦点的卡西尼曲线,m 个焦点分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$. 下面证明有 m 个焦点的卡西尼曲线是连续的曲线. 把复平面转化为直角坐标平面, 复数 z 为 (x, y),a_i 为 (a_{ix}, a_{iy}), 其中 $x, y, a_{ix}, a_{iy} \in \mathbf{R}$. 则方程 (1) 变为

$$[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2] \times \cdots \times [(x - a_{mx})^2 + (y - a_{my})^2] = k^2. \tag{2}$$

令 $f(x, y) = [(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2] \times \cdots \times [(x - a_{mx})^2 + (y - a_{my})^2] - k^2$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} 2(x - a_{ix}) \frac{f(x, y) + k^2}{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} 2(y - a_{iy}) \frac{f(x, y) + k^2}{(x - a_{ix})^2 + (y - a_{iy})^2}.$$

下面我们来证明, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 一般来说, 不会都为 0, 即使都为 0 了, 也只是发生在孤立点上.

我们先来看 $n = 2$ 的简单情形. 此时,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a_{1x})[(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2] + 2(x - a_{2x})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - a_{1y})[(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2] + 2(y - a_{2y})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2].$$

如果 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都为 0, 则

$$(x - a_{1x})(y - a_{2y}) - (y - a_{1y})(x - a_{2x}) = 0.$$

于是,

$$\begin{vmatrix} x - a_{1x} & y - a_{1y} \\ x - a_{2x} & y - a_{2y} \end{vmatrix} = 0.$$

由此可得向量 $(x - a_{1x}, y - a_{1y})$ 和向量 $(x - a_{2x}, y - a_{2y})$ 线性相关且长度相等, 且这两个向量不同. 因此

$$(x - a_{1x}, y - a_{1y}) = -(x - a_{2x}, y - a_{2y}).$$

解得

$$x = \frac{a_{1x} + a_{2x}}{2}, y = \frac{a_{1y} + a_{2y}}{2}.$$

这种情况只可能在卡西尼曲线变成 Bernoulli 双纽线的情形发生, 此时 (x, y) 变为双纽线的自交点.

我们现在再来看 $n = 3$ 的情形. 此时,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a_{1x})[(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2][(x - a_{3x})^2 + (y - a_{3y})^2] + 2(x - a_{2x})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{3x})^2$$
$$+ (y - a_{3y})^2] + 2(x - a_{3x})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - a_{1y})[(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2][(x - a_{3x})^2 + (y - a_{3y})^2] + 2(y - a_{2y})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{3x})^2$$
$$+ (y - a_{3y})^2] + 2(y - a_{3y})[(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2].$$

如果 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 都为 0, 则在空间直角坐标系里, 向量 $(x - a_{1x}, x - a_{2x}, x - a_{3x})$ 和向量 $(y - a_{1y}, y - a_{2y}, y - a_{3y})$ 都与向量 $([(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2][(x - a_{3x})^2 + (y - a_{3y})^2], [(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{3x})^2 + (y - a_{3y})^2], [(x - a_{1x})^2 + (y - a_{1y})^2][(x - a_{2x})^2 + (y - a_{2y})^2])$ 垂直. □