利用保角变换确定卡西尼曲线的正交轨道*

叶卢庆†
杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号:1002011005

2014 年 3 月 29 日

我们设平面直角坐标系上有点 $(a,0)$,$(-a,0)$. 下面我们来求到这两个点的距离乘积为 $k(k>0)$ 的所有点形成的曲线的方程. 这个曲线叫做卡西尼曲线. 可得

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\sqrt{(x+a)^2+y^2}=k.$$

于是

$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=k^2.$$

于是

$$(x^2-a^2)^2+y^2((x-a)^2+(x+a)^2)+y^4=k^2.$$

于是

$$(x^2-a^2)^2+2y^2(x^2+a^2)+y^4=k^2.$$

这就是卡西尼曲线的直角坐标方程. 把 $(x^2-a^2)^2+2y^2(x^2+a^2)+y^4-k^2=0$ 记为 $f(x,y)=0$. 易得 f 在 xy 平面上连续可微, 且当 $y\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+a^2+y^2)\neq 0,$$

因此根据隐函数定理, 当 $y\neq 0$ 时,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{x(x^2+y^2-a^2)}{y(x^2+y^2+a^2)}. \tag{1}$$

因此在同一点, 当 $x,y\neq 0,x^2+y^2\neq a^2$ 时, 卡西尼曲线的正交轨道 (orthogonal trajectory) 的切线斜率为

$$\frac{y(x^2+y^2+a^2)}{x(x^2+y^2-a^2)}. \tag{2}$$

下面我们来解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x^2+y^2+a^2)}{x(x^2+y^2-a^2)}.$$

使用机器可以求得解为

$$y=\frac{1}{2}(c_1x\pm\sqrt{-4a^2+c_1^2x^2+4x^2}),$$

其中 c_1 为常数. 进一步化简可得

$$y^2-x^2+a^2-c_1xy=0.$$

我们不太喜欢用机器求解. 下面我们利用保角映射导出相应结论. 我们将卡西尼曲线的方程用复数形式来表达, 可得

$$|z-a||z+a|=k, \tag{3}$$

即

$$|(z-a)(z+a)|=k. \tag{4}$$

*本文作为交给尤英老师的复变作业.

†叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

我们对复平面进行变换 f, 其中 $f(z)=(z-a)(z+a)$, 则卡西尼曲线(4) 变为

$$|w|=k.$$

这是一个半径长度为 k 的圆. 当 k 变化时, 形成一个圆族. 该圆族的正交轨线易得为任意经过原点的直线. 经过原点的非竖直的直线的复数表达式为

$$|z-\overline{z}|=p|z+\overline{z}|, p\geq 0. \tag{5}$$

下面我们考虑变换 f 的逆变换, 易得为 $f^{-1}(z)=\pm\sqrt{z+a^2}$. 直线 (5) 在逆变换下变为

$$|z^2-a^2-\overline{z^2}+\overline{a^2}|=p|z^2-a^2+\overline{z^2}-\overline{a^2}|. \tag{6}$$

比方说, 在 (6) 中, 令 $p=0$,(6) 会变为

$$z^2-\overline{z}^2=a^2-\overline{a}^2. \tag{7}$$

(7) 是卡西尼曲线的一个特殊的正交轨道.(6) 式中每个确定的 p 都会确定卡西尼曲线的一个正交轨道, 这是因为, 映射 f 和 f^{-1} 都是复平面上的保角变换.