

例21.2.3

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 23

例 (21.2.3). 计算

$$\iint_S (x + y + z) dS,$$

S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

证明. 当 $z \geq 0$ 时,

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

此时,

$$\begin{aligned} \iint_S (x + y + z) &= \iint_{\sigma} (x + y + z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_{\sigma} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2} dx dy \end{aligned}$$

令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 其中 $0 \leq r \leq a, \theta \in [0, 2\pi)$. 则上面的积分等于

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a (r \cos \theta + r \sin \theta + a) r dr d\theta = \pi a^3.$$

□