

## 习题 1.5.32

叶卢庆\*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 6 日

**习题.** 证明当  $n = 2m$  为偶数时,

$$\binom{2m}{1} - \binom{2m}{3} + \binom{2m}{5} - \cdots + (-1)^{m+1} \binom{2m}{2m-1} = 2^m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right).$$

**证明.** 我们发现,  $2^m \sin(\frac{m\pi}{2})$  是复数  $2^m e^{\frac{m\pi i}{2}}$  的虚部. 而

$$\begin{aligned} 2^m e^{\frac{m\pi i}{2}} &= (1+i)^{2m} \\ &= \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} i^k. \end{aligned}$$

然后把实部虚部分离就可以得出题目中的结论. □

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com