混合偏导数的 Clairaut 定理

叶卢庆*

2014 年 12 月 20 日

混合偏导数的 Clairaut 定理叙述如下:

> **定理.** 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的开子集合, 并设 $f:\mathbf{E}\to\mathbf{R}^m$ 是 E 上的二次连续可微函数. 那么对于一切 $x_0\in E$ 和 $1\le i,j\le n$,
> $$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0).$$

证明. 不妨设 $j<i$. 设 x_0 在 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 我们主要来看表达式

$$\frac{\frac{f(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i+\Delta x_i,\cdots,a_n)-f(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i,\cdots,a_n)}{\Delta x_i}-\frac{f(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i+\Delta x_i,\cdots,a_n)-f(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_n)}{\Delta x_i}}{\Delta x_j}. \tag{1}$$

如果先让 Δx_i 趋于 0, 再让 Δx_j 趋于 0, 得到的结果是 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 如果先让 Δx_j 趋于 0, 再让 Δx_i 趋于 0, 得到的结果会是 $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. 我们来证明后者等于前者. 这是因为, 当 Δx_i 固定, 而让 Δx_j 趋于 0 时, 根据 Lagrange 中值定理, 存在位于 $a_i+\Delta x_i$ 和 a_i 之间的数 a_i', 使得式(1)等于

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j+\Delta x_j,\cdots,a_i',\cdots,a_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j,\cdots,a_i',\cdots,a_n)}{\Delta x_j}. \tag{2}$$

再次使用 Lagrange 中值定理, 可得存在位于 a_j 和 $a_j+\Delta_j$ 之间的数, 使得式(2)等于

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\cdots,a_j',\cdots,a_i',\cdots,a_n). \tag{3}$$

由于二阶偏导数连续, 因此当 $\Delta x_i,\Delta x_j$ 趋于 0, 即 a_j' 趋于 a_j,a_i' 趋于 a_i 时, 式(3)确实会趋于 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$. 这样就完成了证明. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com