习题 22.1.3

叶卢庆[*]
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题. 证明若 C 为平面上的封闭曲线,l 为任意方向, 则

$$\oint_C \cos(\mathbf{l},\mathbf{n})dS = 0,$$

其中 n 为 C 的外法线方向.

注 1. 我认为, 此题条件不足, 光是 C 为封闭曲线还不足以保证 C 有外法线. 不妨加上条件:C 为平面上的逐段光滑封闭曲线.

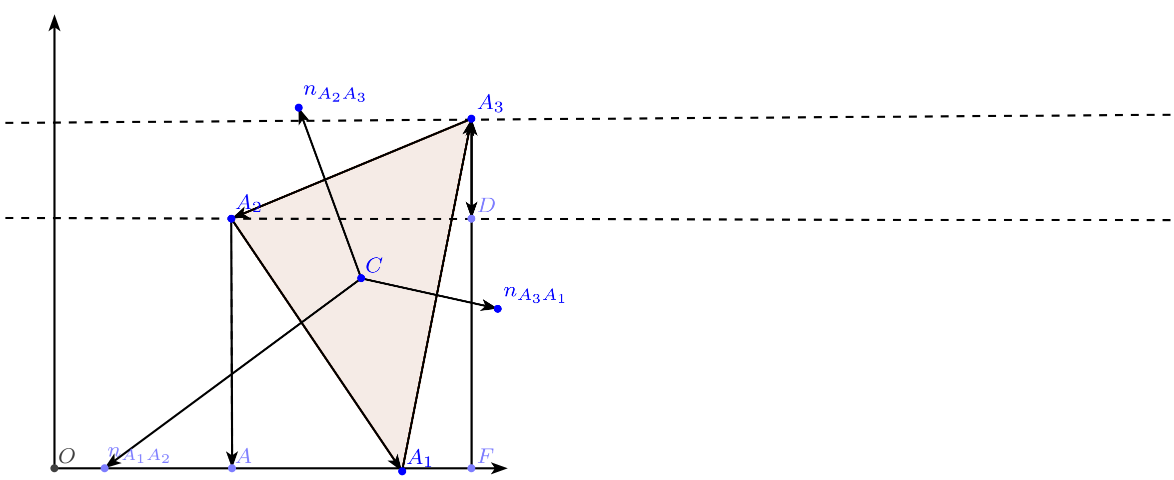
解. 貌似是挺有意思的一个结果. 我们先考察简单情形的, 如果 C 是平面上的一个三角形. 而且不妨设 l 的方向为 X 轴正方向 (为什么可以这样设?). 不妨设曲线 C 的方向为 $A_1A_3A_2A_1$. 显然, 对于第一幅图来说,

$$|A_3F| + (-|A_3D|) + (-|A_2A|) = 0,$$

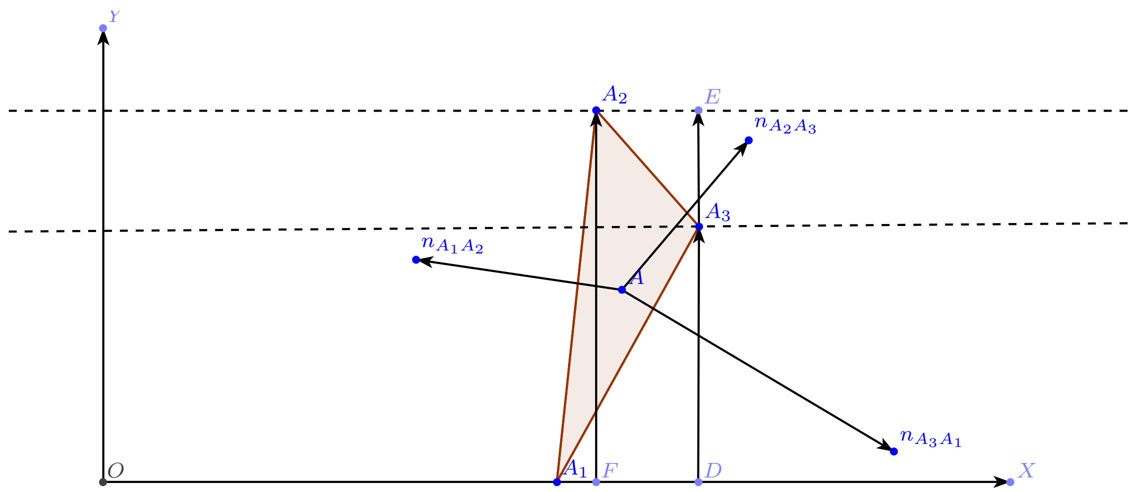
而对于第二幅图来说, 我们总有

$$|DA_3| + |A_3E| - |A_2F| = 0$$

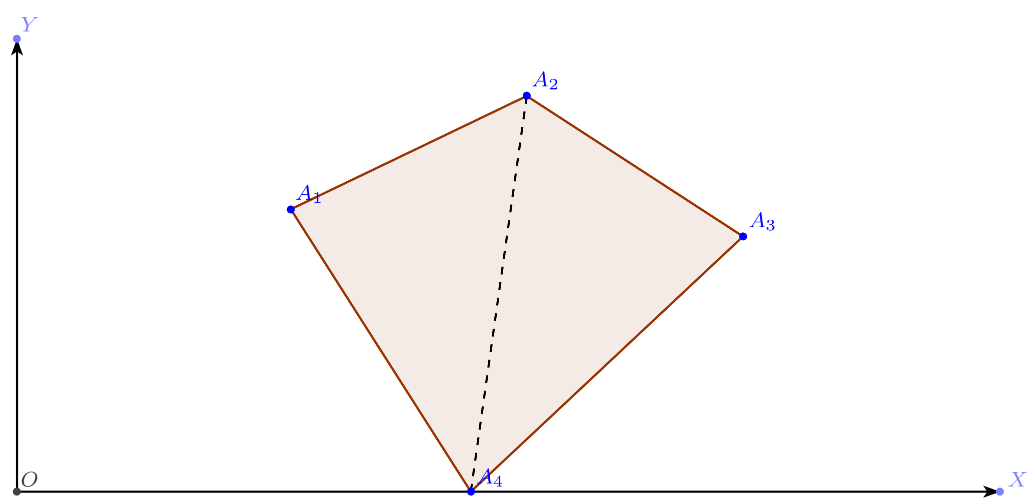
因此, 题目中的公式对于三角形总是成立的.

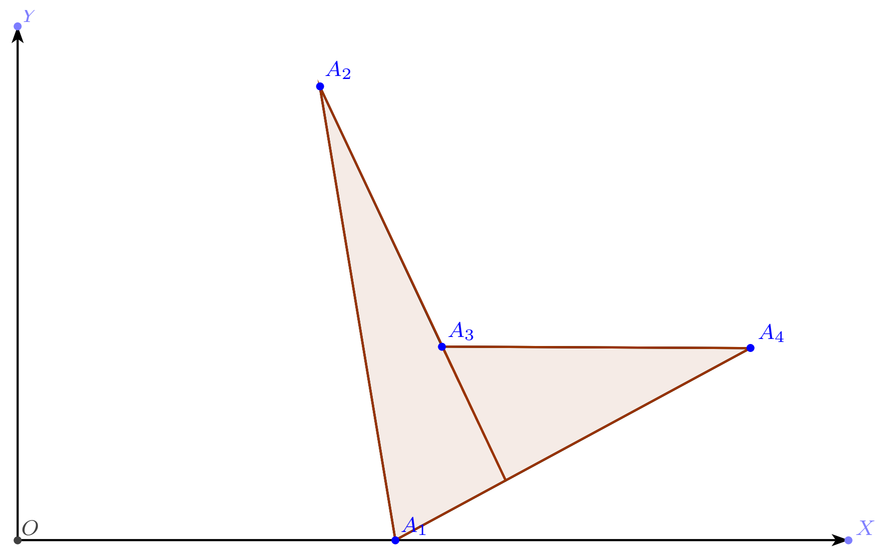


[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

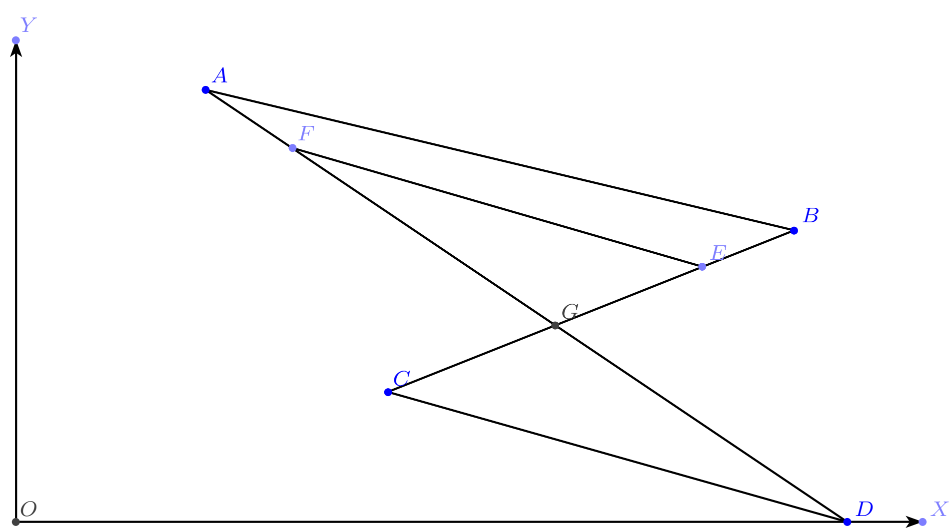


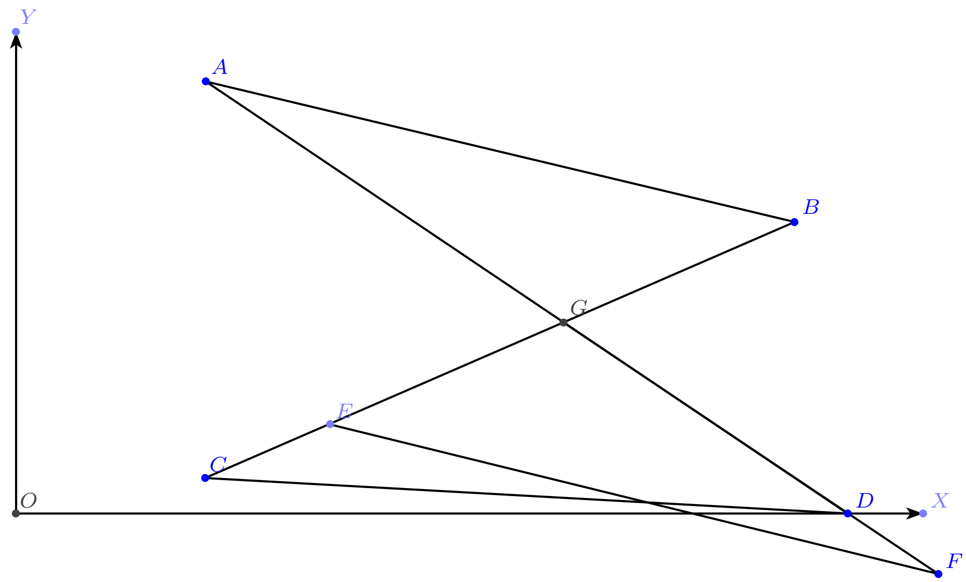
而当曲线 C 是一般的四边形, 且曲线 C 不自交的时候, 如下两图所示, 可以将四边形分割为两个三角形, 从而转化为三角形的情形.





而当曲线是自交的四边形时, 如下两图所示. 在下面第一幅图中,$GF = GD, GC = GE$, 在下面第二幅图中,$GA = GF, GB = GE$. 经过观察, 我们发现, 当曲线 C 是自交的四边形时, 通过作辅助线, 构造中心对称的三角形, 题目中的结论仍然成立. 或者, 更直接地, 由于当 C 是自交四边形时, 其实都可以看成两个三角形, 这两个三角形只交于一点, 而对于每个三角形来说, 题目中的结论都成立, 因此当曲线是自交的四边形时, 题目中的结论亦成立.





对于平面内的任意封闭折线来说, 都可以分解成有限个三角形, 因此对于平面内的任意封闭折线来说, 题目中的结论都成立. 而光滑曲线 C 可以被封闭折线不断逼近, 因此对于光滑曲线 C 来说, 题目中的结论也成立. ■