习题 2.9.3

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 24 日

习题 (2.9.3)**.** 考虑一族映射

$$z \to M_a(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1},$$

其中 a 是常数.

1. 证明 $M_a[M_a(z)] = z$. 换言之,M_a 是自逆的.

   证明.

$$\begin{aligned} M_a[M_a(z)] &= \frac{\frac{z-a}{\overline{a}z-1}-a}{\overline{a}\frac{z-a}{\overline{a}z-1}-1} \\ &= \frac{z-a-a(\overline{a}z-1)}{\overline{a}(z-a)-(\overline{a}z-1)} \\ &= \frac{z-|a|^2z}{1-|a|^2} \\ &= z. \end{aligned}$$

□

2. 证明 $M_a(z)$ 映单位圆周为其自身.

   证明. 我们来计算

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right|^2 &= \frac{|z-a|^2}{|\overline{a}z-1|^2} \\ &= \frac{(z-a)(\overline{z}-\overline{a})}{(\overline{a}z-1)(a\overline{z}-1)} \\ &= \frac{|z|^2-z\overline{a}-a\overline{z}+|a|^2}{|a|^2|z|^2-\overline{a}z-a\overline{z}+1}. \end{aligned}$$

   当 $|z|=1$ 时, 上式变为

$$\frac{1-z\overline{a}-a\overline{z}+|a|^2}{|a|^2-\overline{a}z-a\overline{z}+1} = 1.$$

   命题得证. □

3. 证明若 a 位于单位圆盘内, 则 $M_a(z)$ 映单位圆盘为其自身.

   证明. 我们来看

$$\left|\frac{z-a}{\overline{a}z-1}\right|^2 = \frac{|z|^2-z\overline{a}-a\overline{z}+|a|^2}{|a|^2|z|^2-\overline{a}z-a\overline{z}+1},$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

当 $|a|, |z| \leq 1$ 时, 我们来证明

$$|z|^2 - z\overline{a} - a\overline{z} + |a|^2 \leq |a|^2|z|^2 - \overline{a}z - a\overline{z} + 1.$$

也就是证明

$$|z|^2(1 - |a|^2) \leq 1 - |a|^2.$$

这是显然的. $\square$