习题 22.1.1.4

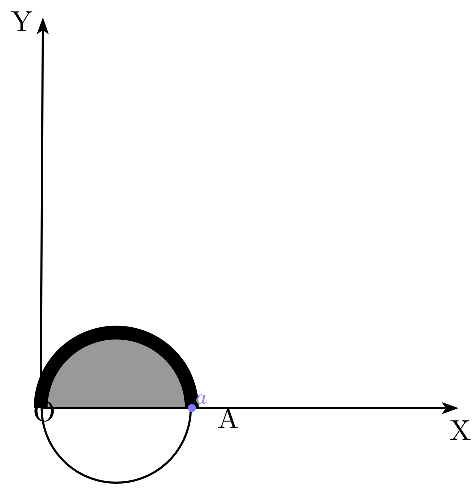
叶卢庆[*]
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题. 利用 *Green* 公式计算曲线积分:

$$\int_{\widehat{AMO}}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$$

其中 $\widehat{AMO}$ 为由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 经过上半圆周 $x^2+y^2=ax$ 的道路.

解. 我们先画出上半圆周 $x^2+y^2-ax=0$. 图像如下:



令 $P(x,y)=e^x\sin y-my$,$Q(x,y)=e^x\cos y-m$. 则易得 $P(x,0)=0$. 因此当质点在 OA 上运动时, 力对质点不作功. 因此我们可以连接 OA, 使得 AMO 成为一个封闭的区域. 这样之后, 就满足 Green 定理的条件了. 易得

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\widehat{AMOA}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

其中 D 是上半圆区域. 因此,

$$\oint_{\widehat{AMOA}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D (m)\,dxdy=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

■

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com