Green 公式的证明及其物理意义

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

摘要: 给出了平面 Green 公式的物理解释.

关键词: Green 公式, 功

平面 Green 公式叙述如下:

定理 1 (平面 Green 公式 [1])**.** 设 D 是以光滑曲线 l 为边界的平面单连通区域, 函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 以及 l 上连续并具有对 x 和 y 的连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_l Pdx + Qdy.$$

这里右断为沿有向闭路的积分, 积分路径的方向是和趋于正向联系的, 即当一个人沿着曲线 l 行走时区域 D 恒在其左边（亦即服从右手法则的联系）.

注 1. 文献 *[1]* 对于单连通区域的定义很粗糙, 我们现在来叙述维基百科上的定义*:* 一个拓扑空间 X 称为是单连通的, 如果它是道路连通的, 而且任意连续映射 $f: S^1 \to X$ 都能在如下意义上被压缩为一点*:* 存在连续映射 $F: D^2 \to X$*,* 当 F 限制在 S^1 上时就是 f*.* 其中 S^1 是二维欧氏空间中的单位圆*,*D^2 是二维欧氏空间中的单位圆盘*.*

注 2. 初看之下*,* 文献 *[1]* 对于此定理的叙述似乎是漏了一个条件*.* 我们还得指出 l 是闭曲线*.* 其实不然*,*D 为单连通区域已经蕴含了 l 是闭曲线*.* 否则*,* 如果 D 是单连通的*,*l 不是闭曲线*,* 则可以构造一条 D 内的闭曲线包围曲线 l*,* 显然这条闭曲线不能连续收缩为一点*,* 这与 D 是单连通区域矛盾*.*

在证明之前, 我们先引进一些概念, 证明一些引理. 光滑曲线的定义可以见文献 [2]. 对于光滑曲线 S, 根据光滑曲线的定义, 设 S 的参数方程为

$$(s_1(t), s_2(t)),$$

其中 $t \in [m,n]$,$m < n$ 为实数. $s_1(t), s_2(t)$ 都为连续可微函数, 且在 $[m,n]$ 上恒有 $s_1'(t)^2 + s_2'(t)^2 > 0$. 因此, 根据隐函数定理, 对于曲线 S 上的任意一点 $(s_1(t'), s_2(t'))$ 来说, 都存在 $\varepsilon(t') > 0$, 使得在 $(t' - \varepsilon(t'), t' + \varepsilon(t'))$ 之内,$s_1(t')$ 和 $s_2(t')$ 有连续可微的函数关系.

下面我们来看图 1. 如图, 是一条光滑曲线 S. 除了在点 P 附近外, 该光滑曲线在其余的点附近,$s_2(t)$ 都能表示为 $s_1(t)$ 的连续可微的函数. 而在点 P 附近,$s_2(t)$ 不能表示为 $s_1(t)$ 的连续可微的函数, 但是 $s_1(t)$ 能表示为 $s_2(t)$ 的连续可微的函数 $g(s_2(t)) = s_1(t)$. 易得 $g'(s_2(t_P)) = 0$, 其中 $(s_1(t_p), s_2(t_p))$ 是点 P 的坐标. 像 P 这种点, 我们将其叫做垂直点, 把曲线在垂直点处的切线叫做垂直线, 图中 A 就是一条垂直线. 将垂直线上的垂直点对应的横坐

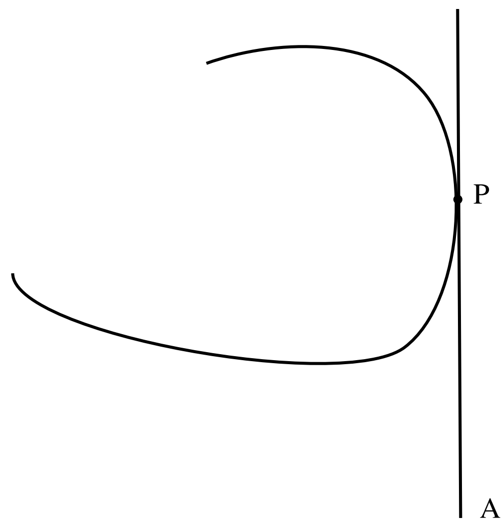

图 1

标叫做垂直线对应的点.

我们再来看图 2. 也是一条光滑曲线 S. 在其它点附近,$s_1(t)$ 总能表达成 $s_2(t)$ 的连续可微的函数 $s_1(t)=f(s_2(t))$. 但是在点 n 和 m 附近,$s_1(t)$ 不能表达为 $s_2(t)$ 的函数, 但是 $s_2(t)$ 能表达成 $s_1(t)$ 的函数 $s_2(t)=g(s_1(t))$, 且 $g'(s_1(t_n))=0, g'(s_1(t_m))=0$. 其中 n 的坐标为 $(s_1(t_n),s_2(t_n))$,m 的坐标是 $(s_1(t_m),s_2(t_m))$. 曲线在 n 和 m 点的切线称为水平线. 水平线上的点的纵坐标成为水平线所对应的点.

下面我们来证明一个结论:

引理 1. 一条光滑的曲线 W, 其参数化的表达为 $(w_1(t),w_2(t))$, 其中 $t\in[m,n]$, 则在区间 $[m,n]$ 上只有有限个点是垂直线对应的点, 也只有有限个点是水平线对应的点.

证明. 假若在区间 $[m,n]$ 上, 有无限个垂直线对应的点, 则根据聚点原理, 存在 $k\in[m,n]$, 对于 k 的任意邻域来说, 该邻域内都有无限个垂直线对应的点, 由于 W 是光滑的, 导致这是不可能的 (为什么?). 对于水平线的证明也类似. ■

Green 定理的证明. 我们结合物理意义进行论述. 见图 3, 设曲线 l 的参数方程为 $(l_1(t),l_2(t))$, 其中 $a\le t\le b$,l_1,l_2 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数且 $\forall t\in[a,b]$,$l_1^2(t)'+l_2^2(t)'>0$. 且区域 D 的最左边的点和最右边的点的坐标为 $(l_1(t_l),l_2(t_l))$,$(l_1(t_r),l_2(t_r))$.

质点开始时位于点 A 处, 然后在力场的作用下开始沿着曲线 l 做逆时针运动. 力 $\mathbf{F}(x,y)$ 关于位置的函数为

$$\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y)).$$

质点在力场的作用下沿着光滑闭曲线 l 运动一周后又回到 A 点. 显然在这个过程里, 力对质点所做的功为

$$\oint_l P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_l P(x,y)dx+\int_l Q(x,y)dy. \tag{1}$$

等式 (2) 的物理意义实际上是把质点在各点的运动都分解为两个方向的运动, 一个是沿着横坐标方向, 一个是沿着纵坐标方向. 同时把作用在质点上的力也分解为两个方向的力, 一个是沿着横坐标方向, 一个是沿着纵坐标方向. 于是等式 (2) 说明, 质点绕一圈回到原地, 力对质点所做的功, 等于沿着横坐标方向的力对质点的横向运动所做的功, 加上沿着纵坐标方向的力对

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

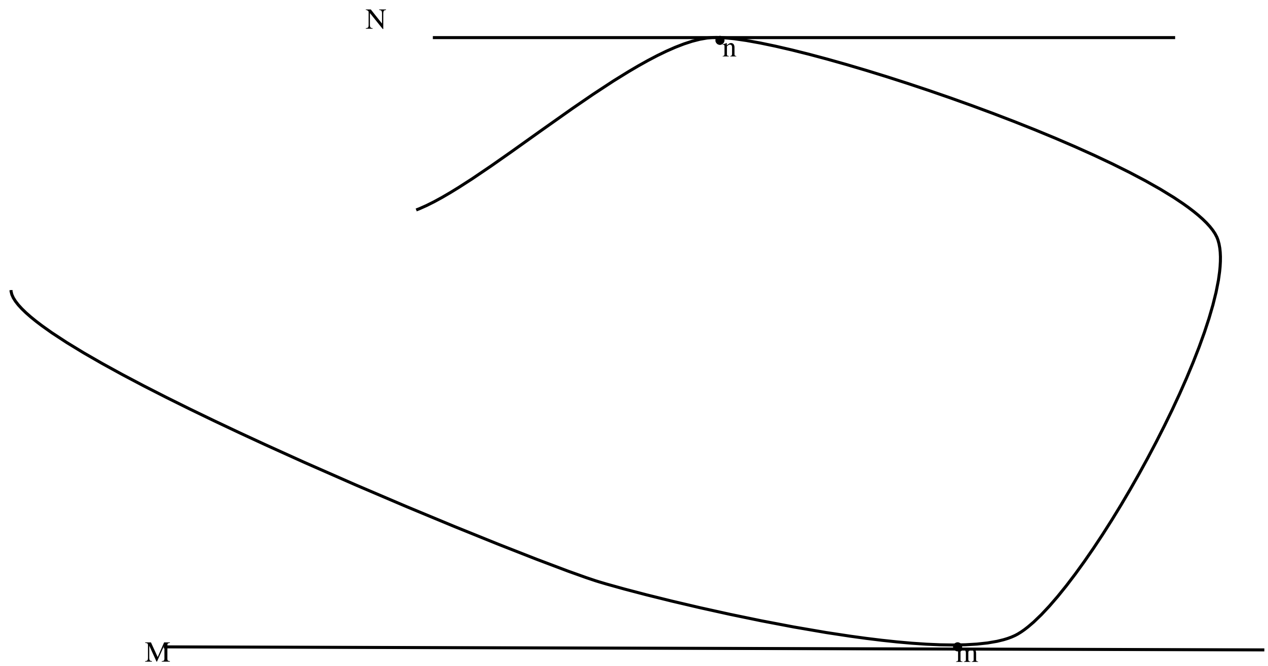

图 2

质点的纵向运动所做的功.

然而曲线 l 的情形比较复杂. 用图像来表达, 曲线 l 最简单的情形是图 4 和图 5.

这种情形也就是,l 是不自交的曲线, 且对于区间 $[a,b]$ 来说, 点 $l_1(t_l)$ 和 $l_1(t_r)$ 把该区间分成三段, 不妨设分为

$$[a,t_l],[t_l,t_r],[t_r,b]$$

或者是

$$[a,t_r],[t_r,t_l],[t_l,b].$$

在每一段上,$l_1(t)$ 都是单调函数 (未必严格单调).

在这种情形下, 我们来看沿着横坐标方向的力对质点的横向运动所做的功

$$\oint_l P(x,y)dx.$$

不妨让点 A 是区域 D 的最右一点 $(l_1(t_l),l_2(t_l)$. 质点从 A 出发, 然后达到区域 D 的最右端, 此时, 质点的横坐标是从 $l_1(t_l)$ 变到 $l_1(t_r)$. 在质点从 A 达到区域 D 最右端的过程里, 经过了曲线 l 的一部分. 我们将区间 $[l_1(t_l),l_1(t_r)]$ 分割成 n 等分, 形成 n 个小区间

$$[l_1(t_l),l_1(t_l)+\Delta x],[l_1(t_l)+\Delta x,l_1(t_l)+2\Delta x],\cdots,[l_1(t_l)+(n-1)\Delta x,l_1(t_l)+n\Delta x]. \quad (2)$$

其中 $\Delta x=\frac{l_1(t_r)-l_1(t_l)}{n}$. 当 n 越来越大时, 每个区间都越来越小, 对应于有限条垂直线的点将被有限个越来越小的区间所覆盖, 因此可将有限条垂直线对应的点忽略. 因此, 我们不妨认为在 $[l_1(t_l),l_1(t_r)]$ 上, 质点在曲线 l 上从 A 到最右端按逆时针方向走过的部分是曲线 l_{lower}, 不妨看作一个逐段连续函数 f 的图像, 其中间断点只有有限个. 然后我们在区间 $[l_1(t_l)+(i-1)\Delta x,l_1(t_l)+i\Delta x]$ 上任取一点 $P(x_i,f(x_i))$, 其中 $x_i\in[l_1(t_l)+(i-1)\Delta x,l_1(t_l)+i\Delta x]$, 且 $(x_i,f(x_i))$ 位于曲线 l_{lower} 上. 然后得到和式

$$\sum_{i=1}^{n}P(x_i,f(x_i))\Delta x.$$

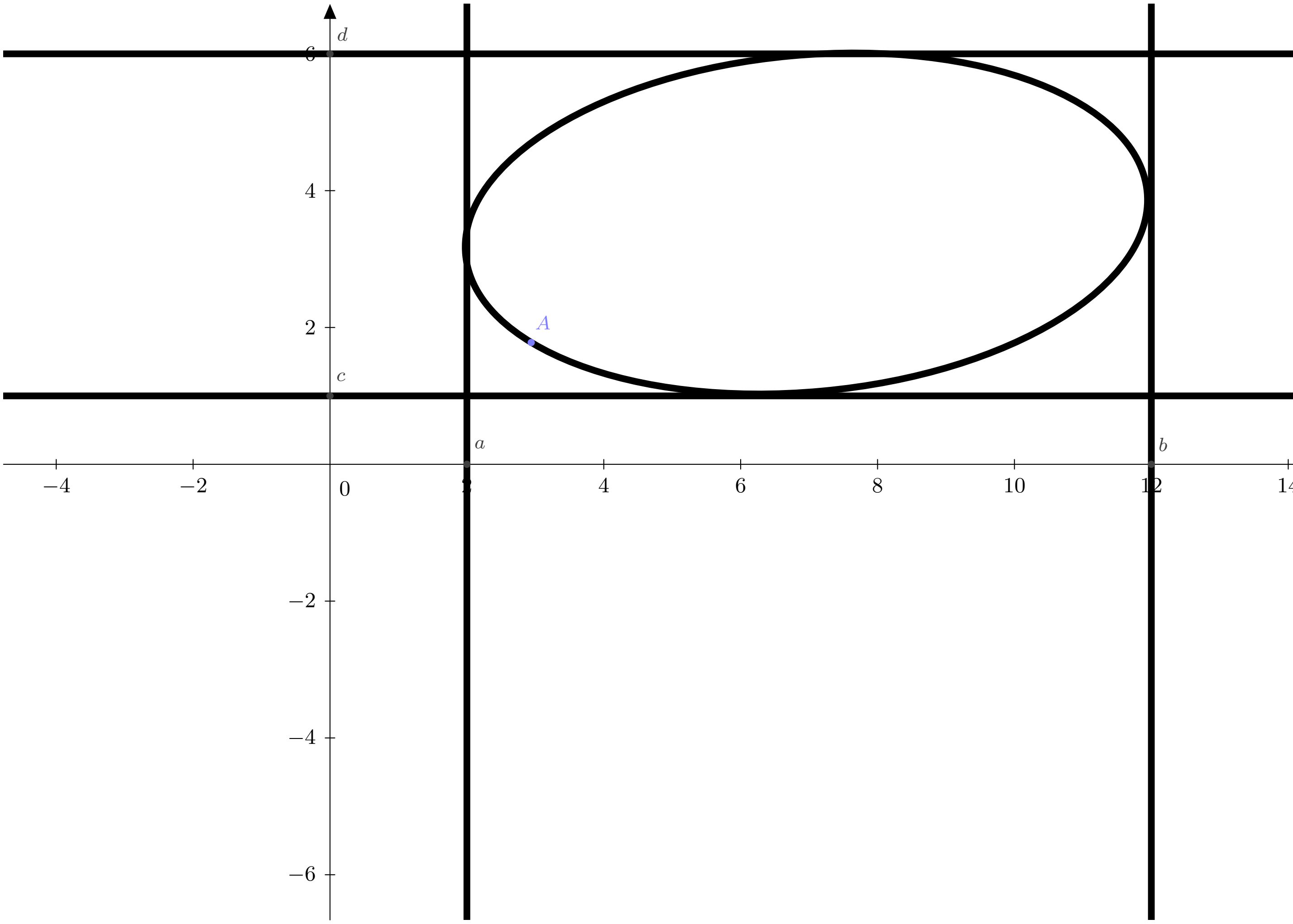

图 3

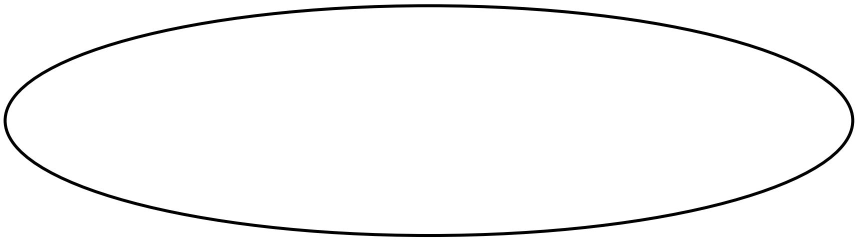

图 4

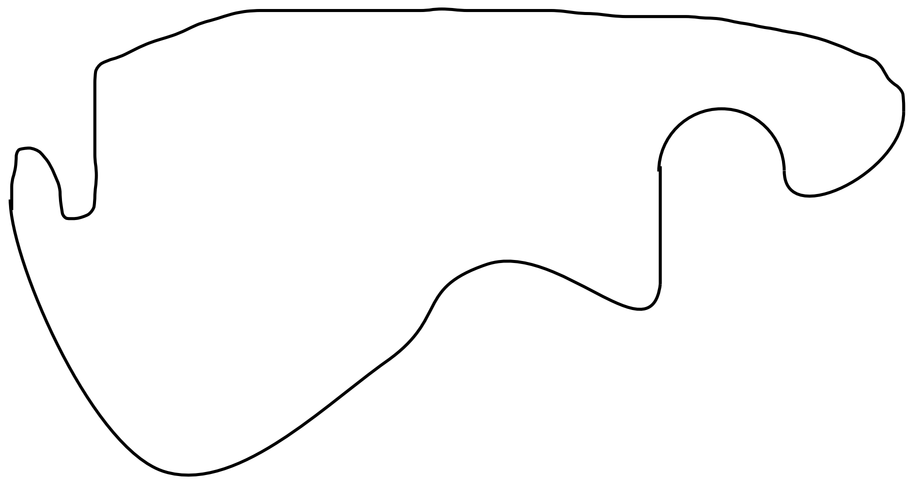

图 5

当 $n \to \infty$ 时, 上述和式变成积分

$$\int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} P(x, f(x))dx$$

由于 $P(x,y)$ 的连续性, 结合 l 在区间 $[l_1(t_l), l_1(t_r)]$ 只有有限个间断点, 因此易得上述积分是存在的. 质点在到达最右端后, 开始返回, 当然, 这里返回的意思是在横坐标意义上的返回. 为什么质点在达到横向最右端后会返回呢? 这是当然的, 因为达到最右了, 不能再往右了, 只能返回了. 质点达到最右后, 开始沿着不同的路径返回, 直到回到 A 为止. 质点沿着不同的路径返回, 经过的曲线是 l_{upper}. 易得 l_{upper} 和 l_{lower} 只相交于区域 D 最左边的一点和最右边的一点, 且 l_{upper} 和 l_{lower} 的并形成曲线 l. 对于曲线 l_{upper} 来说, 我们也可以将其看作逐段连续函数 g 的图像, 其中 g 只有有限个间断点.

质点返回的过程就是质点在曲线 l_{upper} 上运动, 且质点运动的横坐标从 $l_1(t_r)$ 变回到 $l_1(t_l)$ 的过程. 在质点回来的过程里, 我们考虑区间 $[l_1(t_A), l_1(t_r)]$ 的同一个分割(2). 我们会得到和式

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i, g(x_i))\Delta x, (x_i, g(x_i)) \in l_{upper}.$$

令 $n \to \infty$, 上述和式变成积分

$$\int_{l_1(t_r)}^{l_1(t_l)} P(x, g(x))dx, (x, g(x)) \in l_{upper},$$

因此, 可得

$$\begin{aligned}
\oint_l P(x,y)dx &= \int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} P(x, f(x))dx + \int_{l_1(t_r)}^{l_1(t_l)} P(x, g(x))dx \\
&= \int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} P(x, f(x))dx - \int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} P(x, g(x))dx \\
&= \int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} (P(x, f(x)) - P(x, g(x)))dx
\end{aligned}$$

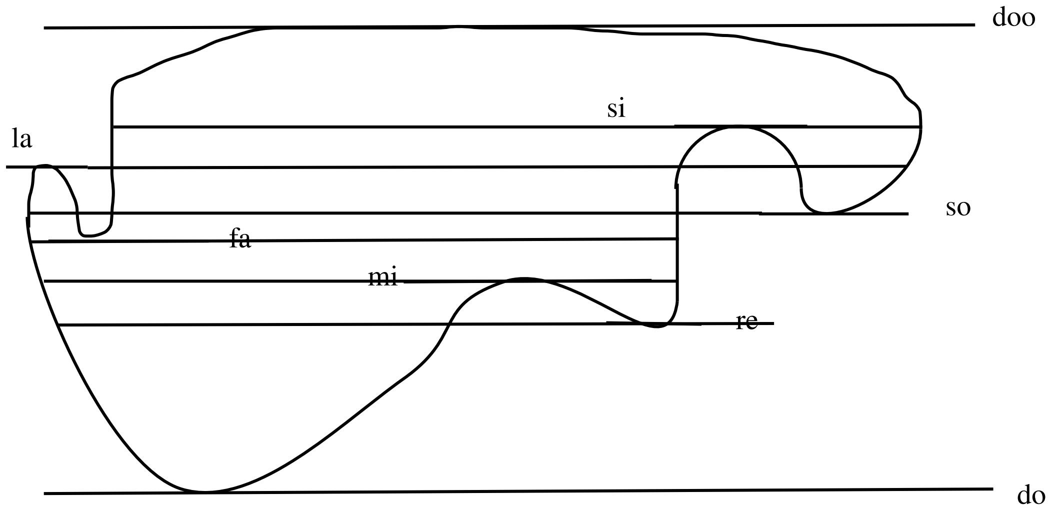

图 6

根据微积分基本定理, 易得

$$P(x,f(x)) - P(x,g(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = -\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy,$$

因此,

$$\oint_l P(x,y)dx = -\int_{l_1(t_l)}^{l_1(t_r)} \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dydx = -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dydx.$$

在曲线 l 最简单的情形下, 我们再来看沿着纵坐标方向的力对质点的纵向运动所做的功

$$\oint_l Q(x,y)dy.$$

这个时候, 我们要考虑分割. 如图 6, 我们把图 5在纵方向上分割, 有 do,re,mi,fa,so,la,si,doo 这有限条分割线, 这有限条分割线全是曲线 l 的水平线, 但不是所有水平线都要形成一条分割线. 水平线肯定与曲线在某些点相切, 所有这些切点中, 若存在着某个切点, 设这个点的坐标为 $(l_1(t'), l_2(t'))$, 当在 t' 附近 $l_2(t)$ 不再单调, 则我们把水平线作为一条分割线, 而若在 t' 附近 $l_2(t)$ 单调, 则我们不把水平线作为一条分割线. 易得在相邻[1]的分割线之间,$l_2(t)$ 都是随着 t 单调变化的 (为什么?).

容易证明, 这些分割线把区域 D 分割成了有限个区域, 这些区域都是如图 7 的形状. 这个区域 $GXFK$ 的边界共有四条曲线组成, 其中 F, G 是水平的线段, 而 K, X 是作为曲线 l 的被截取一部分, 在这些部分上,$l_1(t), l_2(t)$ 都是单调变化的 (未必严格单调). 当然, 水平线段 F, G 是有可能退化成点的. 而且, 曲线 X 和 K 分别是闭区间上的函数 $x = h(y)$ 和 $x = p(y)$ 的图像.

下面, 针对图 7 中的区域, 我们来讨论沿着纵坐标方向的力对质点的纵向运动所做的功. 我们不妨设质点从 G 与 K 的交点开始出发, 沿着逆时针方向运动, 当质点还在 G 上时, 纵坐标方向的力对质点不作功, 然后质点运行到 G 和 X 的交点, 不妨设交点坐标为 $(l_1(t_{GX}), l_2(t_{GX}))$, 从此质点开始在 X 上运动, 直到质点运动到 X 与 F 的交点 $(l_1(t_{XF}), l_2(t_{XF}))$. 在这个过程里, 沿着纵方向的力对质点做的功为

$$\int_{l_2(t_{GX})}^{l_2(t_{XF})} Q(h(y),y)dy.$$

[1]这里的相邻不是水平线距离的相邻, 而是随着 t 的变化, 而依次经过的相邻水平线.

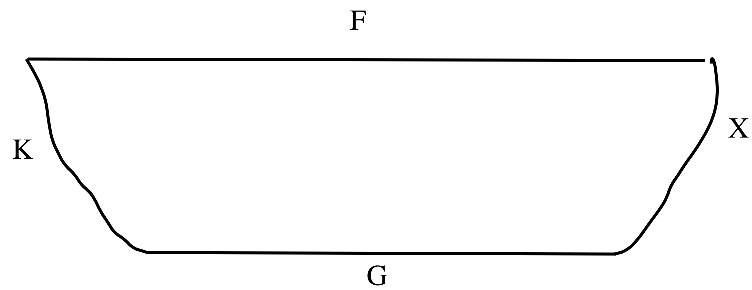

图 7

质点在经过曲线 X 后, 进入曲线 F, 在 F 上运动的时候, 沿着纵方向的力对质点不作功. 然后质点达到曲线 F 和曲线 K 的交点, 不妨设交点坐标为 $(l_1(t_{FK}), l_2(t_{FK}))$. 再走完曲线 K, 到达 K 和 G 的交点 $(l_1(t_{KG}), l_2(t_{KG}))$. 质点走完曲线 K 的过程里, 沿着纵方向的力对质点做的功为

$$\int_{l_2(t_{FK})}^{l_2(t_{KG})} Q(p(y), y)dy.$$

因此, 质点沿着逆时针方向, 绕着图 7 中的曲线走一圈, 纵方向的力对质点所作的功为

$$\begin{aligned}\int_{l_2(t_{GX})}^{l_2(t_{XF})} Q(h(y), y)dy + \int_{l_2(t_{FK})}^{l_2(t_{KG})} Q(p(y), y)dy &= \int_{l_2(t_{GX})}^{l_2(t_{XF})} (Q(h(y), y) - Q(p(y), y))dy \\ &= \int_{l_2(t_{GX})}^{l_2(t_{XF})} \int_{p(y)}^{h(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy \\ &= \iint_{GXFK} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy.\end{aligned}$$

由于质点在水平线段 F, G 上运动时, 纵方向的力不作功, 因此我们可以忽略水平线. 事实上, 只有质点在曲线 X 和 K 上运动时, 纵方向的力才可能作功. 因此, 当我们整体地来看, 质点绕曲线 l 一周时, 纵坐标方向的力做的功是在各个被分割的小区域上做的功的累加, 结果为

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy.$$

因此, 对于曲线 l 的简单情形, 我们得知, 横坐标和纵坐标作的功的总和为

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

而对于曲线 l 的更复杂的情形, 也就是,l 仅仅是不自交的曲线 (两头的端点除外, 也就是除去 $(l_1(a), l_2(a)) = (l_1(b), l_2(b))$ 这个特例) 这种情形, 我们该怎么办呢? 这个时候, 我们要考虑分割. 如图 8, 我们把图在纵方向上分割, 形成有限条分割线, 这有限条分割线全是曲线 l 的水平线, 但不是所有水平线都要形成一条分割线. 水平线肯定与曲线在某些点相切, 所有这些切点中, 若存在着某个切点, 设这个点的坐标为 $(l_1(t'), l_2(t'))$, 当在 t' 附近 $l_2(t)$ 不再单调, 则我们把水平线作为一条分割线, 而若在 t' 附近 $l_2(t)$ 单调, 则我们不把水平线作为一条分割线. 我们把图在水平方向上也进行分割, 形成有限条分割线, 这有限条分割线全是曲线 l 的垂直线, 但不是所有垂直线都要形成一条分割线. 垂直线肯定与曲线在某些点相切, 所有这些切点中, 若存在着某个切点, 设这个点的坐标为 $(l_1(t''), l_2(t''))$, 当在 t'' 附近 $l_1(t)$ 不再单调, 则我们把水平线作为一条分割线, 而若在 t'' 附近 $l_1(t)$ 单调, 则我们不把水平线作为一条分割线. 易得在相邻[2]的分割线之间,$l_2(t)$ 和 $l_1(t)$ 都是随着 t 单调变化的 (为什么?). 这样子, 就成为了

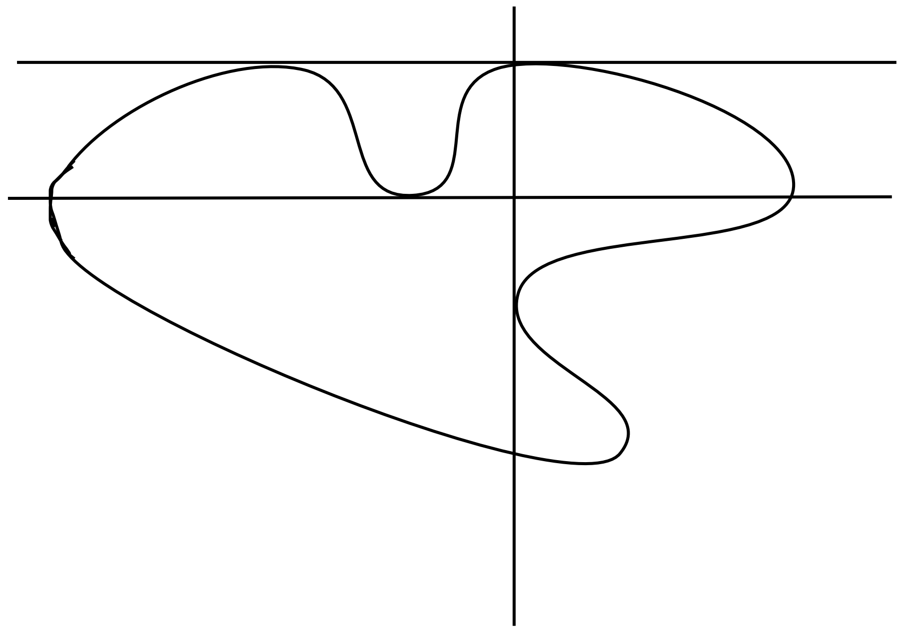

图 8

已解决情形.

还有一种更复杂的情况, 如果曲线 l 自交了, 那该怎么办? 此时, 情形如图 9: 首先, 由引理易得, 当光滑曲线存在自交的时候, 只存在有限个自交点. 因此, 我们不妨只看一个自交点. 如图10, 图中画斜线的阴影部分是区域 D, 且区域 D 是开区域, 则易得区域 D 的边界是自交的曲线. 此时, 质点沿着曲线逆时针运动, 只可能是沿着路径 $A-O-B-A$ 运动, 而不可能是沿着路径 $A-B-O-A$ 运动. 这个时候, 易得 Green 定理仍然成立.

■

参考文献

[1] 欧阳光中, 朱学炎, 金福临, 陈传璋. 数学分析 [M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社,2008

[2] 小平邦彦. 微积分入门 [M]. 北京: 人民邮电出版社,2008:410

[2]这里的相邻不是水平线和垂直线距离的相邻, 而是随着 t 的变化, 而依次经过的相邻水平线和垂直线.

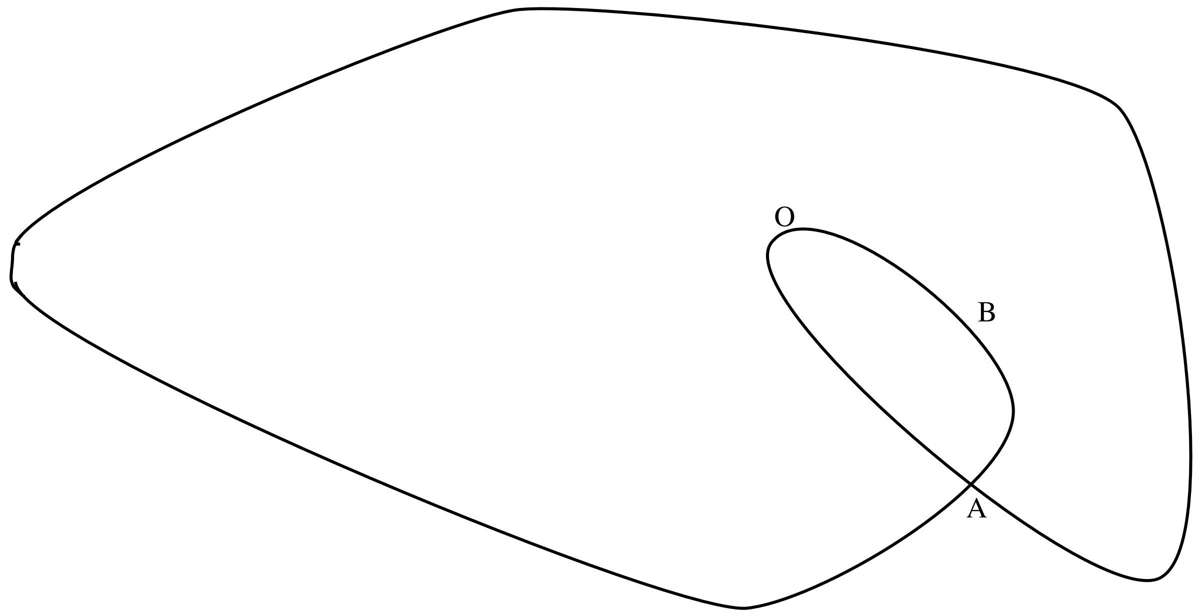

图 9

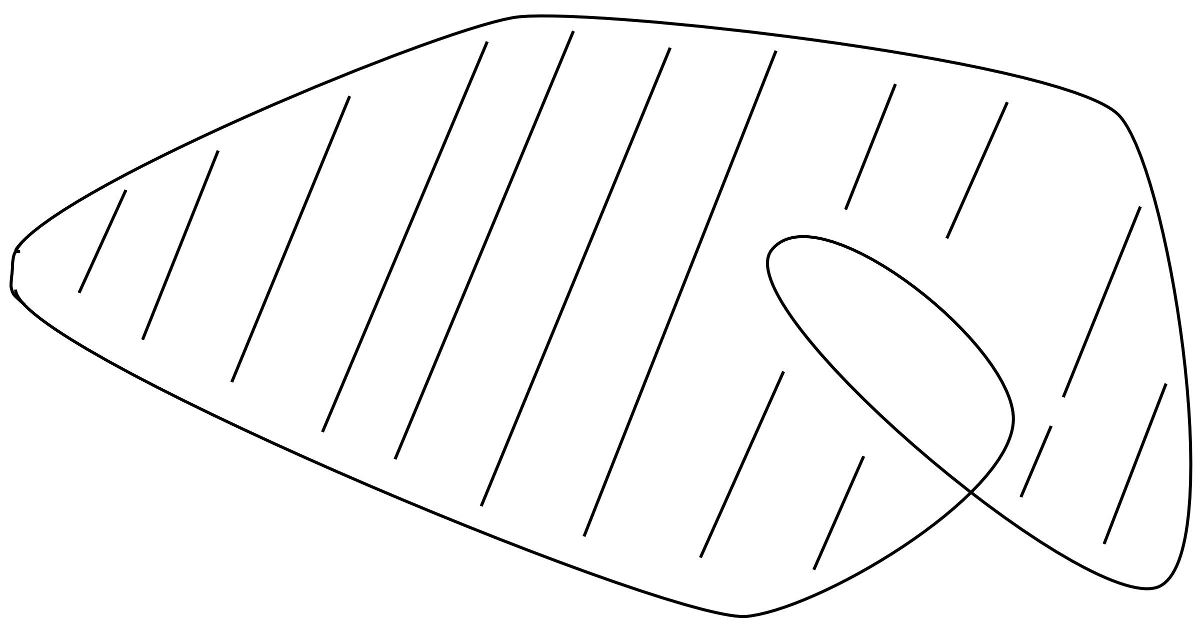

图 10