论平面图形的平衡

I

"我给出如下公设：

1. 相等距离上的相等重物是平衡的，而不相等距离上的相等重物是不平衡的，且向距离较远的一方倾斜．

2. 如果相隔一定距离的重物是平衡的，当在某一方增加重量时，其平衡将被打破，而且向增加重量的一方倾斜．

3. 类似地，如果从某一方取掉一些重量，其平衡也将被打破，而且向未取掉重量的一方倾斜．

4. 如果将全等的平面图形互相重叠，则它们的重心重合．

5. 大小不等而相似的图形，其重心在相似的位置上，相似图形中的相应点亦处于相似位置，即如果从这些点分别到相等的角作直线，则它们与对应边所成的角也相等．

6. 若在一定距离上的重物是平衡的，则另外两个与它们分别相等的重物在相同的距离上也是平衡的．

7. 周边凹向同侧的任何图形，其重心必在图形之内．

命题 1

在相等距离上平衡的物体其重量相等．

设物体的重量不相等，在不等重的两者之间，从较重者中取

掉差额，剩余的物体将失去平衡［公设 3］．这是矛盾的．

因此，物体的重量一定相等．

命 题 2

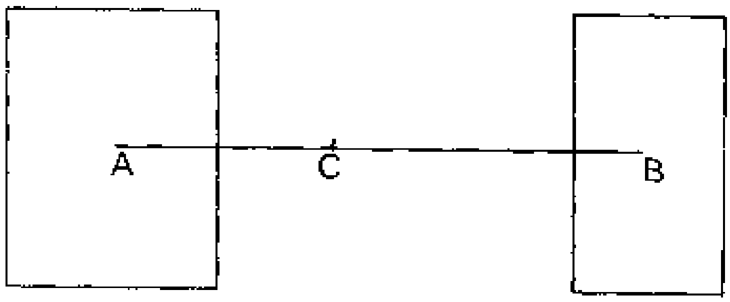
距离相等但重量不等的物体是不平衡的，而且向较重的一方倾斜．

在不等重的两者之间，从较重的一方取掉差额．则相等的剩余物体将处于平衡状态［公设 1］．因此，当我们再添加物体使两边重量不等时，这些物体将失去平衡，而且向较重的一方倾斜［公设 2］．

命 题 3

若重量不相等的物体在不相等的距离上处于平衡状态，则较重者距支点较近．

设 A、B 是重量不相等的两个物体（让 A 是较重者），且分别在距离 AC、BC 相对 C 平衡．



则 $AC<BC$．否则，从 A 处取掉重量（$A-B$）．则其剩余部分将向 B 端倾斜［公设 3］．但这是不可能的．因为（1）若 $AC=$

CB，其相等的剩余物体将是平衡的，或（2）若 $AC>CB$，它们将向距离较远的一方 A 倾斜［公设 1］.

所以 $AC<CB$.

逆命题，若物体是平衡的，且 $AC<CB$，则 $A>B$.

命 题 4

若两个物体的重量相等但重心不同，则其总体的重心在它们的重心连线的中点上.

［这一命题可依据归谬法从命题 3 获证．阿基米德假定两者总体的重心在两者各自重心的连线上，并说明这一结论在（προδέδεικται）之前已被证明．这是提示在杠杆上（περὶ ζυγῶν）对上面论述是无疑问的．］

命 题 5

若三个等重的物体的重心在一条直线上，且其间距相等，那么这一系统的重心将与中间物体的重心重合.

［此命题可由命题 4 立即得证.］

推论 1 对任意奇数个物体，如果它们是与最中间的物体等距的等重物体，且其重心间的距离相等，则系统的重心与最中间物体的重心重合.

推论 2 对任意偶数个物体，如果它们的重心之间距离相等且在同一直线上，最中间两个物体重量相等，并且与它们（两侧）距离相等的物体重量分别相等，则系统的重心是中间两个物体的重心连线的中点.

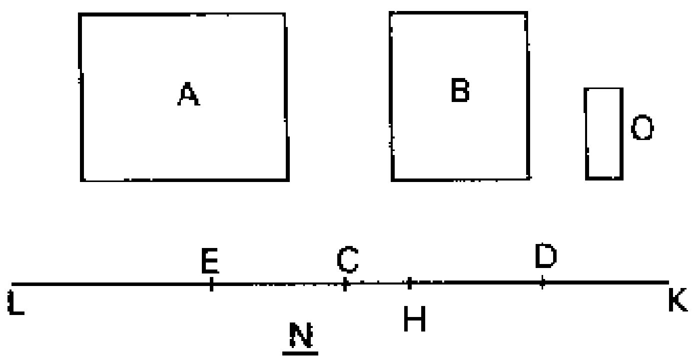
命 题 6，7

可公度［命题 6］或不可公度［命题 7］的两个量，当其［距支点的］距离与两量成反比例时，处于平衡状态．

Ⅰ．设量 A、B 是可公度的，且点 A、B 分别是它们的重心．C 分割线段 DE，使得

$$A : B = DC : CE.$$

下面我们来证明，若将 A 放在 E 处，B 放在 D 处，则 C 是 A、B 总体的重心．



因为 A、B 是可公度的，所以 DC、CE 也是可公度的．设长度 N 是 DC、CE 的公测度．作 DH、DK 均等于 CE，作 EL（在 CE 的延长线上）等于 CD. 因为 $DH=CE$，所以 $EH=CD$. 因此 E 二等分 LH，同理 D 二等分 HK.

因此 LH、HK 必是 N 的偶数倍．

取数量值 O，使 A 包含 O 的倍数与 LH 包含 N 的倍数相等，即

$$A : O = LH : N.$$

但是
$$B : A = CE : DC$$
$$= HK : LH.$$

因此，根据等量原则，$B : O = HK : N$，或者说 B 包含 O 的

倍数与 HK 包含 N 的倍数相等.

所以 O 是 A、B 的公测度.

将 LH、HK 分成与 N 相等的若干段，A、B 分成与 O 相等的若干部分. A 被分割成的部分数将等于 LH 被分割成的段数，B 被分割成的部分数将等于 HK 被分割成的段数. 将 A 的每一部分分别放在 LH 的每一线段 N 的中点，B 的每一部分分别放在 HK 的每一线段 N 的中点.

则间距相等的 A 的部分的总体重心将在 LH 的中点 E 上[命题5，推论2]，间距相等的 B 的部分的总体重心将在 HK 的中点 D 上.

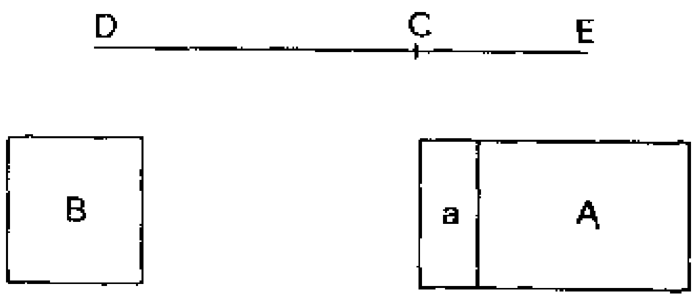
因此，我们可设 A 作用于 E，B 作用于 D.

但是由 A 和 B 的部分 O 形成的系统是偶数个重量相等且在 LK 上间距相等的物体组成的系统. 又因为 $LE=CD$，$EC=DK$，所以 $LC=CK$，即 C 是 LK 的中点. 所以 C 是排列在 LK 上的系统的重心.

所以，作用于 E 的 A 和作用于 D 的 B 相对于 C 平衡.

Ⅱ. 设量值不可公度，取它们分别是 $(A+a)$ 与 B. 让线段 DE 被 C 分割，使得

$$(A+a):B=DC:CE.$$



如果 $(A+a)$ 放在 E 处，B 放在 D 处相对于 C 不平衡，则 $(A+a)$ 或过大或过小，从而不能与 B 平衡.

如果可能，设 $(A+a)$ 太大而不能与 B 平衡. 从 $(A+a)$ 处

取掉重量值 a．a 小于使剩余部分与 B 平衡所需减去的重量，但保证得到的剩余物体 A 与 B 的量值是可公度的．

因为 A、B 可公度，且

$$A:B<DC:CE,$$

所以 A 和 B 将不平衡 [命题 6]，且 D 端下沉．

这是不可能的，因为取掉 a 以后并不足以使 A 与 B 达到平衡，所以 E 端也将向下沉．

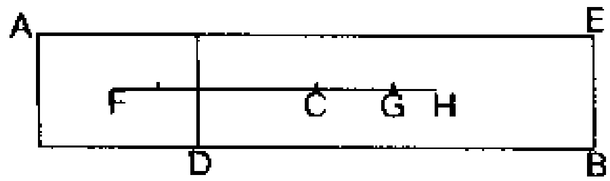
所以，$(A+a)$ 不是过大而不能与 B 平衡，同理可证 B 也不是过大而不能与 $(A+a)$ 平衡．

因此，$(A+a)$ 与 B 总体的重心在 C 处．

命题 8

若 AB 是一重心为 C 的重物，且它的一部分 AD 的重心是 F，则剩余部分的重心将是 FC 的延长线上的一点 G，并使得

$$GC:CF=(AD):(DE).$$



如果剩余部分 (DE) 的重心不是 G，设它为 H．由命题 6，7 可立即推出一个谬误．

命题 9

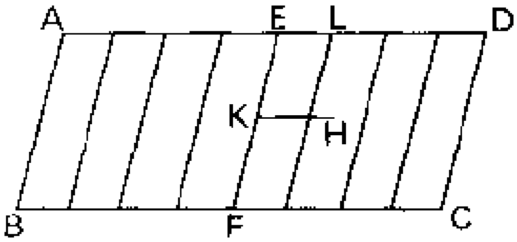
任何平行四边形的重心在其对边中点的连线上．

设 $ABCD$ 是一平行四边形，且 EF 是对边 AD、BC 的中点连

线．

若平行四边形的重心不在 EF 上，设它是在 H 上，作 HK 平行于 AD 或 BC，且交 EF 于 K．

则以下是可能的，等分 ED，再等分 ED 的一半，如此继续下



去，直至得到的长度 EL 小于 KH．

分割 AE 和 ED 使其各部分都等于 EL，且过各分点作 AB 或 CD 的平行线．

于是就得到若干全等的平行四边形，且如果其中的任意一个与另一个重叠，则它们的重心将重合 [公设 4]．因此我们有偶数个重量相等的物体，它们的重心排列在同一直线上且间距相等．所以，整个大平行四边形的重心将在中间两个平行四边形的重心连线上 [命题 5，推论 2]．

但这是不可能的，因为 H 在中间小平行四边形之外．

所以，$ABCD$ 的重心必须在 EF 上．

命 题 10

平行四边形的重心在其对角线的交点上．

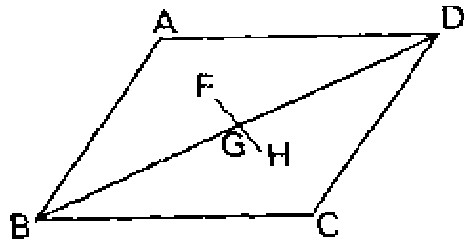
由上述命题知，平行四边形的重心在其对边的平分线上．所以其重心是对边平分线的交点，这个点也是对角线的交点．

另一种证法．

设 $ABCD$ 是已知平行四边形，BD 是一条对角线．则三角形 ABD 与三角形 CDB 全等，所以 [公设 4]，如果一个三角形和另一个重合，则它们的重心也重合．

设 F 是三角形 ABD 的重心，G 是 BD 的中点．连结 FG 并延长至 H，使 $FG=GH$.

若我们将三角形 ABD 放在三角形 CDB 上，使 AD 与 CB、AB 与 CD 分别重合，则点 F 与点 H 重合．



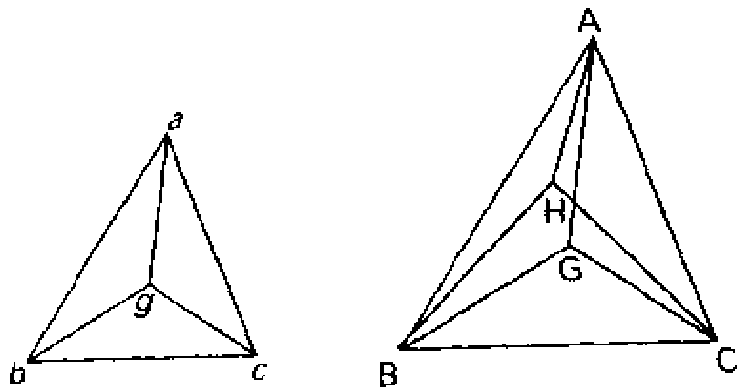
而［据公设 4］F 将与 CDB 的重心重合．所以 H 是 CDB 的重心．

因为 F、H 是两个全等三角形的重心，所以整个平行四边形的重心在 FH 的中点上，即在 BD 的中点上，也就在平行四边形两条对角线的交点上．

命 题 11

如果 abc、ABC 是两个相似三角形，且 g、G 两点分别位于三角形 abc、ABC 的相似位置，若 g 是三角形 abc 的重心，则 G 必是三角形 ABC 的重心．

设 $$ab : bc : ca = AB : BC : CA.$$



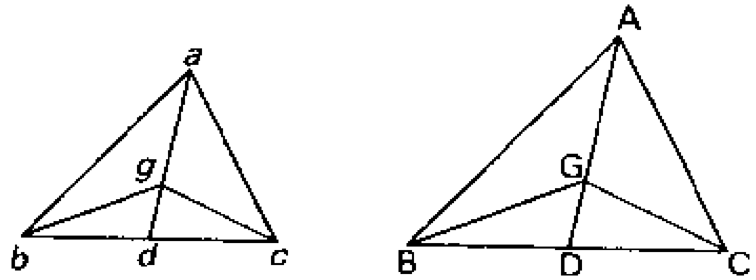
这一命题用反证法可立即证明．若 G 不是三角形 ABC 的重心，设 H 是其重心．

由公设 5 知，g、H 分别位于三角形 abc 和 ABC 的相似位置；从而得角 HAB 和 GAB 相等，这显然是错误的．

命 题 12

有两个相似三角形 abc、ABC，且 d、D 分别是 bc、BC 的中点，若 abc 的重心在 ad 上，则 ABC 的重心在 AD 上.

设 ad 上的点 g 是 abc 的重心.



在 AD 上取点 G，使得

$$ad : ag = AD : AG.$$

分别连结 gb、gc，GB、GC.

因为两个三角形是相似的，且 bd、BD 分别是 bc、BC 的一半，所以

$$ab : bd = AB : BD,$$

且
$$\angle abd = \angle ABD.$$

所以三角形 abd、ABD 是相似的，且

$$\angle bad = \angle BAD.$$

又
$$ba : ad = BA : AD,$$

且由上知，$ad : ag = AD : AG.$

所以 $ba : ag = BA : AG$，且 $\angle bag = \angle BAG$.

所以三角形 bag 和 BAG 是相似的，且

$$\angle abg = \angle ABG.$$

又因为 $\angle abd = \angle ABD$，

所以 $\angle gbd = \angle GBD$.

同理可证得

$$\angle gac = \angle GAC,$$
$$\angle acg = \angle ACG,$$
$$\angle gcd = \angle GCD.$$

所以 g、G 分别位于三角形 abc 和 ABC 的相似位置；根据［命题 11］G 是 ABC 的重心．

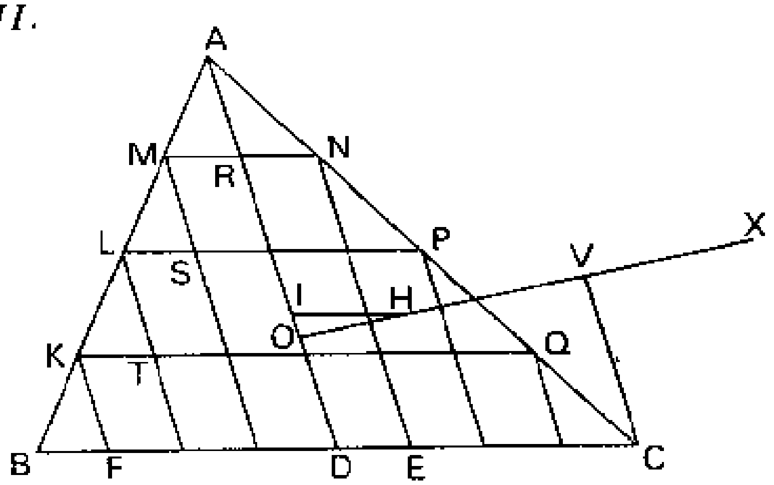
命题 13

任何三角形的重心均在其任一顶点与其对边的中点的连线上．

设 ABC 是一个三角形，D 是 BC 的中点．连结 AD，则三角形 ABC 的重心在 AD 上．

设 ABC 的重心不在 AD 上，设 H 是重心，作 HI 平行于 CB 且交 AD 于 I.

平分 DC，再平分其一半，如此下去直至所得线段的长等于 DE 而小于 HI.



分割 BD 和 DC，使各分线段的长等于 DE、过各分点作 DA 的平行线，并分别交 BA 于点 K、L、M，交 AC 于点 N、P、Q.

连结 MN、LP、KQ，这些线段均平行于 BC.

现在我们得到一系列平行四边形 FQ、TP、SN，且 AD 平分它们的对边. 因此每个平行四边形的重心都在 AD 上 [命题 9]，故它们组成的图形的重心也在 AD 上.

设所有平行四边形组合在一起的重心是 O. 连结 OH 并延长之：作 CV 平行于 DA 交 OH 的延长线于 V.

如果 AC 被分成 n 部分，

$\triangle ADC$ ∶（在 AN，NP，…上的三角形之和）

$=AC^2$ ∶ $(AN^2+NP^2+\cdots)$

$=n^2$ ∶ n

$=n$ ∶ 1

$=AC$ ∶ AN.

类似地

$\triangle ABD$ ∶（AM，ML，…上的三角形之和）

$=AB$ ∶ AM.

又 AC ∶ $AN=AB$ ∶ AM.

由此得

$\triangle ABC$ ∶（所有小三角形的面积之和）$=CA$ ∶ AN

$>VO$ ∶ OH，由平行.

假设 OV 的延长线至 X，使得

$\triangle ABC$ ∶（所有小三角形的面积之和）$=XO$ ∶ OH，

由分比，得

（平行四边形之和）∶（小三角形之和）

$=XH$ ∶ HO.

因为三角形 ABC 的重心是 H，且所有平行四边形组成的图形的重心是 O，由命题 8 可知所有由小三角形组成的剩余部分的重心是 X.

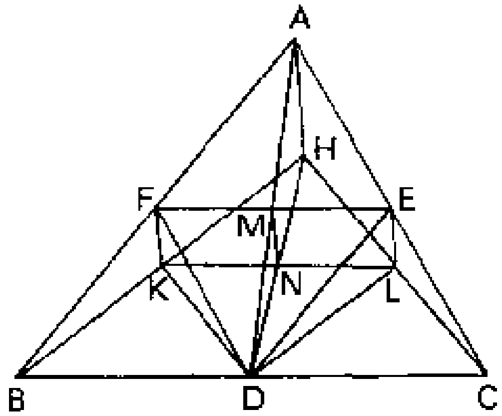
但这是不可能的，因为所有三角形都在过 X 与 AD 平行的直线的同一侧.

所以，三角形的重心必须在 AD 上.

另一种证法.

若可能.设三角形 ABC 的重心 H 不在 AD 上.连结 AH、BH、CH.设 E、F 分别是 CA、AB 的中点，连结 DE、EF、FD.使 EF 交 AD 于 M.

作 FK、EL 平行于 AH，且分别交 BH、CH 于 K、L，连结 KD、HD、LD、KL，使 KL 交 DH 于 N，再连结 MN.



因为 DE 平行于 AB，所以三角形 ABC 和 EDC 是相似的.

又因为 $CE=EA$，且 EL 平行于 AH，则 $CL=LH$.又 $CD=DB$.所以 BH 平行于 DL.

因此在相似且位置相似的三角形 ABC、EDC 中，线段 AH、BH 分别平行于 EL、DL；由此推出 H、L 分别位于各自的三角形的相似位置.

由假设，H 是三角形 ABC 的重心.因此 L 是三角形 EDC 的重心.　　[命题 11]

同理，点 K 是三角形 FBD 的重心.

又三角形 FBD、EDC 是相等的，所以两者合在一起的重心在 KL 的中点上，即在 N 上.

去掉三角形 FBD、EDC，三角形 ABC 的剩余部分是平行四边形 $AFDE$，且其重心是它的对角线的交点 M.

由此可得整个三角形 ABC 的重心必在 MN 上；即 MN 必通过 H，这是不可能的（因为 MN 平行于 AH）.

所以三角形 ABC 的重心必在 AD 上．

命题 14

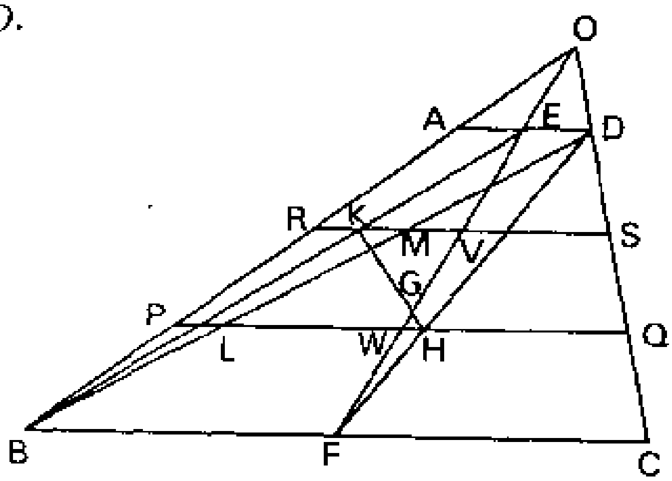
由上述命题立即可得，任何三角形的重心均在其任意两个顶点与其对边中点连线的交点上．

命题 15

如果 AD、BC 是梯形 $ABCD$ 的两条平行边，AD 是较短的一边，且若 AD、BC 分别被 E、F 等分，则梯形的重心是 EF 上的 G 点，使得

$$GE : GF = (2BC + AD) : (2AD + BC).$$

延长 BA、CD 交于 O. 因为 $AE=ED$，$BF=FC$，所以 EF 的延长线过点 O.



现在三角形 OAD 的重心将在 OE 上，三角形 OBC 的重心将在 OF 上． [命题 13]

由此得，剩余部分梯形 $ABCD$ 的重心也在 OF 上．[命题 8]

连结 BD，L、M 将其三等分．过 L、M 作 BC 的平行线 PQ、

RS，且分别交 BA 于 P、R，交 FE 于 W、V，交 CD 于 Q、S.

连结 DF、BE，DF 交 PQ 于 H，BE 交 RS 于 K.

因为 $$BL=\frac{1}{3}BD,$$

$$FH=\frac{1}{3}FD.$$

所以 H 是三角形 DBC 的重心[1].

同理，因为 $EK=\frac{1}{3}BE$，由此得 K 是三角形 ADB 的重心.

所以三角形 DBC、ADB 合起来的重心，即梯形 $ABCD$ 的重心在直线 HK 上.

但其重心又在 OF 上.

所以，OF、HK 相交于 G，则 G 是梯形 $ABCD$ 的重心.

所以［命题 6，7］

$$\triangle DBC:\triangle ABD=KG:GH$$
$$=VG:GW.$$

又 $$\triangle DBC:\triangle ABD=BC:AD.$$

所以 $BC:AD=VG:GW.$

由此得

$$(2BC+AD):(2AD+BC)=(2VG+GW):(2GW+VG)$$
$$=EG:GF.$$

[1] 命题 14 的这一推论阿基米德曾未作证明，而作为假定提出.