

# 功能原理

叶卢庆\*

2014 年 12 月 18 日

变动的外力  $\mathbf{F}$  对质点  $P$  作功, 期间质点  $P$  从点  $A$  移动到点  $B$ . 我们质点,  $\mathbf{F}$  对质点所做的功为

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

其中  $C$  表示从  $A$  到  $B$  的质点所经过的路径, 该路径是带有方向的, 以  $A$  为起点, 以  $B$  为终点. 则我们有

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt.$$

其中  $m$  是质点的质量. 根据分部积分公式,

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b Fg,$$

可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v}(t_2)^2 - \mathbf{v}(t_1)^2 - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt.$$

于是可得

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{1}{2}(\mathbf{v}(t_2)^2 - \mathbf{v}(t_1)^2),$$

于是,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}(t_2)^2 - \mathbf{v}(t_1)^2).$$

这就是功能原理.

评论. 也可以这样推导:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \\ &= m \left( \frac{\mathbf{v}(t_2)^2}{2} - \frac{\mathbf{v}(t_1)^2}{2} \right). \end{aligned}$$

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com