例2.5.1

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 19

例 (2.5.1). 求解微分方程

$$(3x^2+y)dx+(2x^2y-x)dy=0. \tag{1}$$

解. 方程两边同时乘以非零的 $u(x,y)$,得到

$$u(x,y)(3x^2+y)dx+u(x,y)(2x^2y-x)dy=0.$$

我们希望这是一个恰当微分方程,也即,

$$\frac{\partial u(x,y)(3x^2+y)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,y)(2x^2y-x)}{\partial x}. \tag{2}$$

(2) 也就是

$$\frac{\partial u}{\partial y}(3x^2+y)+u=\frac{\partial u}{\partial x}(2x^2y-x)+u(4xy-1). \tag{3}$$

不妨将 u 限定为 x 的函数,与 y 无关,那么 (3) 可以化为

$$u=\frac{\partial u}{\partial x}(2x^2y-x)+u(4xy-1). \tag{4}$$

(4) 也即

$$u(2-4xy)=\frac{\partial u}{\partial x}(2x^2y-x). \tag{5}$$

当 $x(2xy-1)\neq 0$ 时,(5) 也即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2u(1-2xy)}{x(2xy-1)}=\frac{-2u}{x}. \tag{6}$$

可以让
$$u=e^{\int \frac{-2}{x}dx}$$
我们发现,让 $u=e^{\int \frac{-2}{x}dx}$ 代入 (5) 中,只需要让 $x\neq 0$ 即可,而 $2xy-1$ 可以为0.因此,我们得到恰当微分方程

$$e^{\int \frac{-2}{x}dx}(3x^2+y)dx+e^{\int \frac{-2}{x}dx}(2x^2y-x)dy=0. \tag{7}$$

其中两个 $e^{\int \frac{-2}{x}dx}$ 是同一个函数.设二元函数 $\phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{\int \frac{-2}{x}dx}(2x^2y-x), \tag{8}$$

则我们有
$$\phi=e^{\int \frac{-2}{x}dx}x^2y^2-xe^{\int \frac{-2}{x}dx}y+f(x). \tag{9}$$
我们还有
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=e^{\int \frac{-2}{x}dx}(3x^2+y), \tag{10}$$
将 (9) 代入 (10),可得

$$f'(x)=3x^2e^{\int \frac{-2}{x}dx}=3x^2e^{-2\ln|x|+C}=3e^C. \tag{11}$$

不妨让 $C=0$,因此 $f'(x)=3$,可得 $f(x)=3x+D$.因此我们得到通积分

$$y^2-\frac{y}{x}+3x+D=0. \tag{12}$$

而当 $x=0$ 时,可得 y 任意,此时,对应的积分曲线与纵坐标重合. □