《常微分方程教程》习题 2.3.7[1]

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 9

习题 (2.3.7). 令集合 $H^0=\{f(x)|f\text{是以}2\pi\text{为周期的连续函数}\}$. 易知 H^0 关于实数域构成一个线性空间. 对于任意 $f\in H^0$, 定义它的模

$$||f||=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f(x)|.$$

证明 H^0 是一个完备的空间 (即 *Banach* 空间). 利用 (13) 式可以在空间 H^0 中定义一个变换 ϕ, 它把 f 变成 y. 试证 ϕ 是一个从 H^0 到 H^0 的有界线性算子.

证明. H^0 的完备性的证明是很容易的. 而且,ϕ 是一个线性算子这件事情也是简单的. 下面证明这是一个有界线性算子. 我们主要来看

$$\left|\left|\int_t^{2\pi+t}f(x)e^{ax-at}dx\right|\right|.$$

根据 $f(x)$ 的周期性, 易得可以把上式化为

$$\left|\left|\int_0^{2\pi}f(x)e^{ax}dx\right|\right|.$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)e^{ax}dx\right|\leq\sqrt{\int_0^{2\pi}f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^{2\pi}e^{2ax}dx}\leq\sqrt{2\pi}||f||\sqrt{\int_0^{2\pi}e^{2ax}dx}.$$

证明完毕. □

[1] 在《常微分方程教程》例 2.3.2 中我们解决了如下的问题:

例 (2.3.2). 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x), \tag{1}$$

其中 $a>0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程 (1) 的 2π 周期解.

解. 方程 (1) 化为

$$dy+(ay-f(x))dx=0. \tag{2}$$

两边同时乘以非零函数 $u(x)$, 得到

$$u(x)dy+u(x)(ay-f(x))dx=0. \tag{3}$$

假设 (3) 是恰当方程, 则

$$\frac{du(x)}{dx}=au(x)\Rightarrow u(x)=be^{ax}, \text{不妨设} b=1. \tag{4}$$

于是我们得到恰当方程

$$e^{ax}dy+e^{ax}(ay-f(x))dx=0. \tag{5}$$

设对于二元函数 $\phi(x,y)$ 来说,

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{ax}\Rightarrow\phi=ye^{ax}+g(x). \tag{6}$$

因此

$$yae^{ax}+g'(x)=yae^{ax}-f(x)e^{ax}\Rightarrow g'(x)=-f(x)e^{ax}. \tag{7}$$

因此

$$g(x)=-\int f(x)e^{ax}dx+C. \tag{8}$$

因此通积分为

$$ye^{ax}-\int f(x)e^{ax}dx+C=0. \tag{9}$$

设 $H(x)=\int f(x)e^{ax}$, 则 $x=t$ 时,

$$y_te^{at}-H(t)+C=0. \tag{10}$$

当 $x=2\pi+t$ 时,

$$y_{2\pi+t}e^{2\pi a+ta}-H(2\pi+t)+C=0. \tag{11}$$

式 (10) 减去式 (11) 可得

$$y_te^{at}-y_{2\pi+t}e^{2\pi a+ta}+\int_t^{2\pi+t}f(x)e^{ax}=0. \tag{12}$$

由于是 2π 周期解, 因此 $y_t=y_{2\pi+t}$, 因此

$$y_t=\frac{\int_t^{2\pi+t}f(x)e^{ax}}{e^{2\pi a+ta}-e^{at}}=\frac{\int_t^{2\pi+t}f(x)e^{ax-at}dx}{e^{2\pi a}-1}. \tag{13}$$

□