《常微分方程教程》[*]习题 1-2

叶卢庆

杭州师范大学理学院, 学号:1002011005

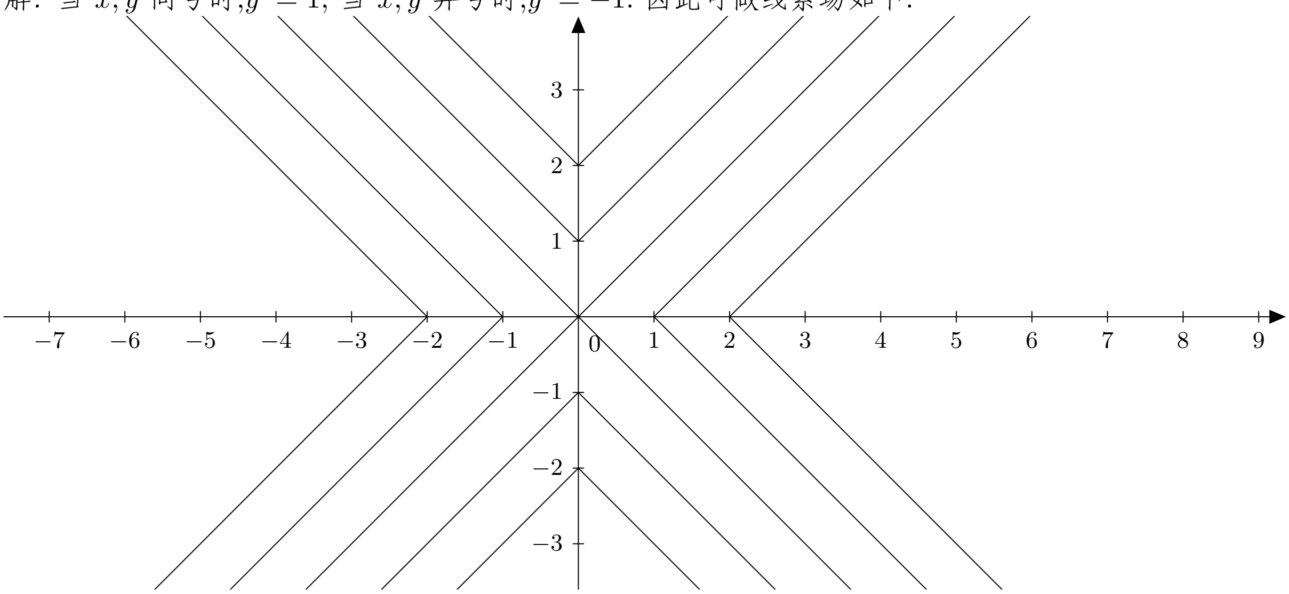
Email:h5411167@gmail.com

October 24, 2013

下面几个题目都是叫我画线素场的, 也就是向量场. 随着计算机技术的发展, 很少有人用纯手工画线素场了. 因此除去几个少数情形, 大部分的线素场我都用 matlab 画.

习题 (习题 1-2,1,(1)). 做出如下微分方程的线素场:$y' = \frac{xy}{|xy|}$.

解. 当 x, y 同号时,$y' = 1$, 当 x, y 异号时,$y' = -1$. 因此可做线素场如下:



显然该微分方程的奇异点都在横纵坐标轴上. ∎

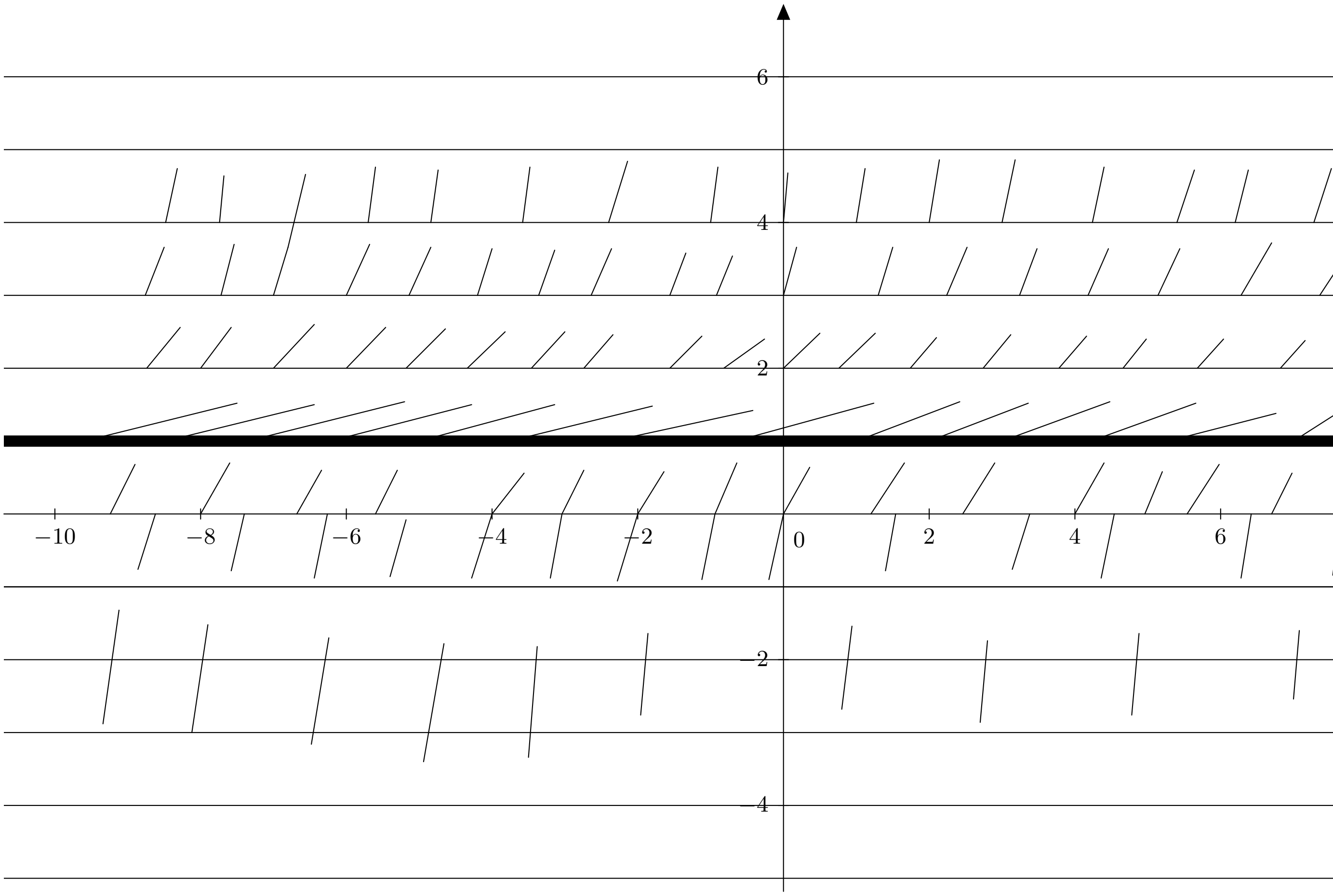
习题 (习题 1-2,1,(2)). 作出如下微分方程的线素场:$y' = (y-1)^2$.

解. 我们先求线素场的等斜线. 令 $y' = (y-1)^2 = k$, 则

$$y = \pm\sqrt{k} + 1. \tag{1}$$

这说明线素斜率为 k 的所有点, 都是由直线 $y = \pm\sqrt{k} + 1$ 组成的. 当 $y > 1$ 时, 随着 y 的增大,y' 随之增大的速度更快, 且 y' 保持正. 当 $0 < y < 1$ 时, 随着 y 的增大,y' 随之减小, 但是 y' 仍然为正. 且 $y' \in (0, 1)$. 当 $y < 0$ 时, 随着 y 的减小,y' 却随之增大, 且增大速度比 y 的减小速度快. 如下图, 短斜线就粗略地代表了线素场.

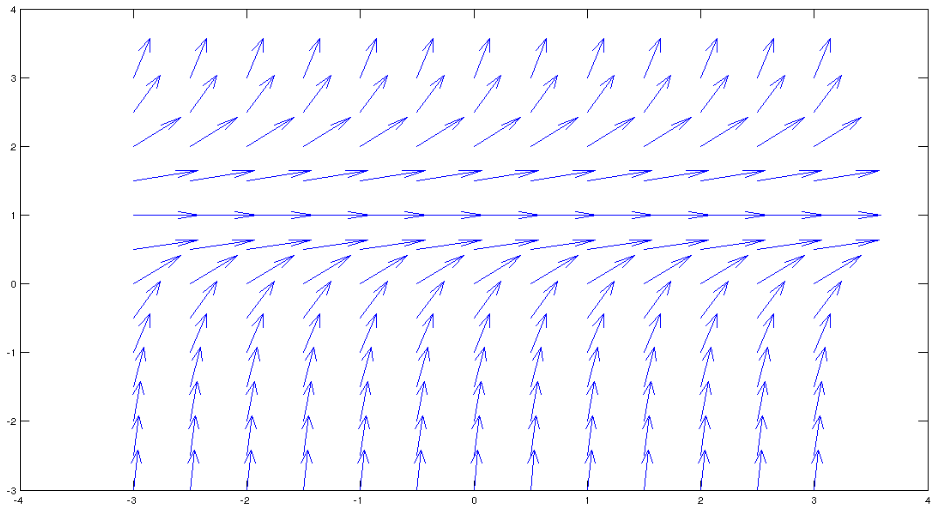
[*]丁同仁, 李承治著, 高等教育出版社第二版.



为了验证, 我们用 matlab 作一下图. 代码如下:

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:.5:3,-3:.5:3);
>> dy=(y-1).^2;
>> dx=ones(size(dy));
>> dyu=dy./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> dxu=dx./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> quiver(x,y,dxu,dyu)
```

最后出来的效果是



可见, 虽然我自己的图画的烂了一点, 但是还是基本正确的. 显然, 该方程没有奇点. ■

习题 (习题 1-2,(3)). 作出如下微分方程的线素场:$y' = x^2 + y^2$.

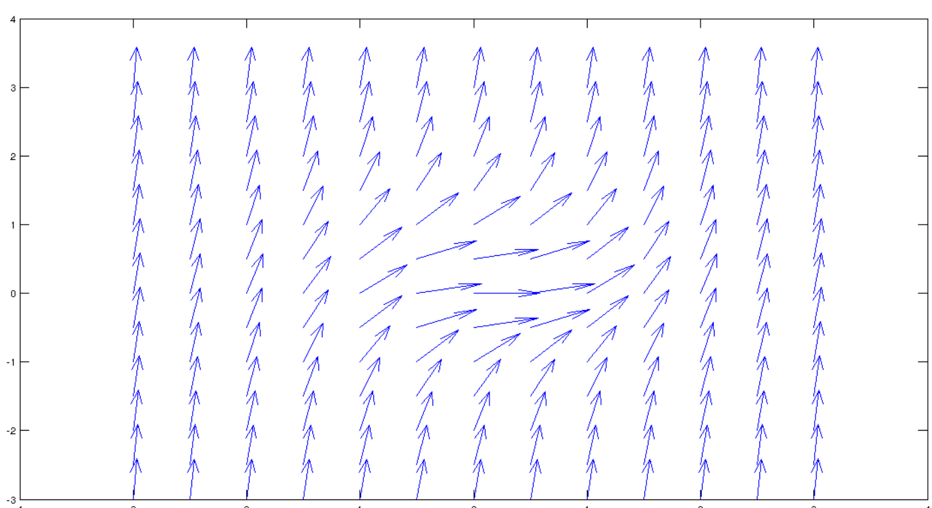
解. 我们先做出线素场的等斜线. 令

$$y' = x^2 + y^2 = k,$$

则可得斜率为 k 的所有点组成以原点为圆心的, 半径为 $\sqrt{k}$ 的圆. 当圆的半径越来越大时, 那些点的斜率以快的多的速度增长. 我们用 matlab 画图, 代码是

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:.5:3,-3:.5:3);
>> dy=x.^2+y.^2;
>> dx=ones(size(dy));
>> dyu=dy./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> dxu=dx./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> quiver(x,y,dxu,dyu)
```

得到线素场



■

习题 (习题 1-2,2,(1)). 利用线素场研究微分方程 $y' = 1 + xy$ 的积分曲线族.

解. 该微分方程的线素场的等斜线是

$$y' = 1 + xy = k.$$

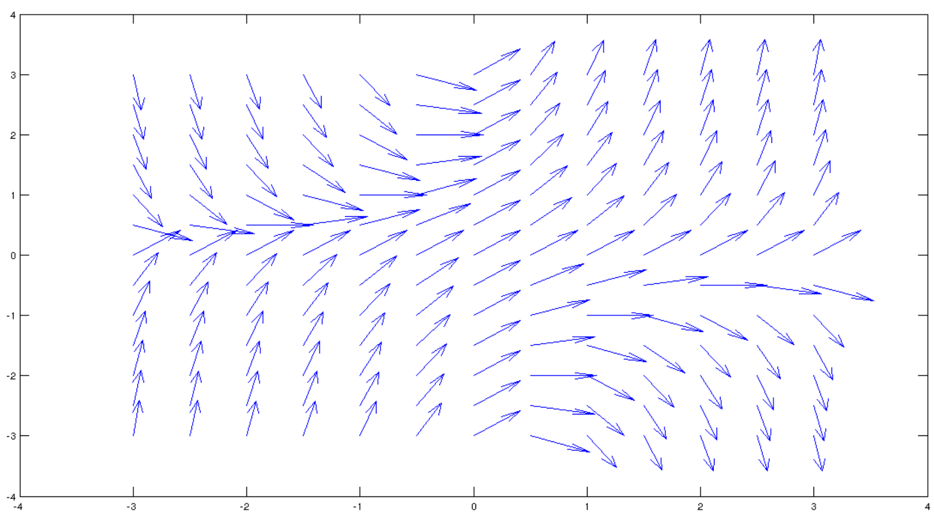
得到

$$xy = k - 1.$$

当 $k = 1$ 时,$x = 0$ 或 $y = 0$ 是等斜线, 积分曲线位于 $x = 0, y = 0$ 上的点的斜率都为 1. 用 matlab 画线素场的代码如下

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:.5:3,-3:.5:3);
>> dy=1+x.*y;
>> dx=ones(size(dy));
>> dyu=dy./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> dxu=dx./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> quiver(x,y,dxu,dyu)
```

线素场图像如下:



该微分方程没有奇点. ■

习题 (习题 1-2,2,(2)). 利用线素场研究微分方程 $y' = x^2 - y^2$ 的积分曲线族.

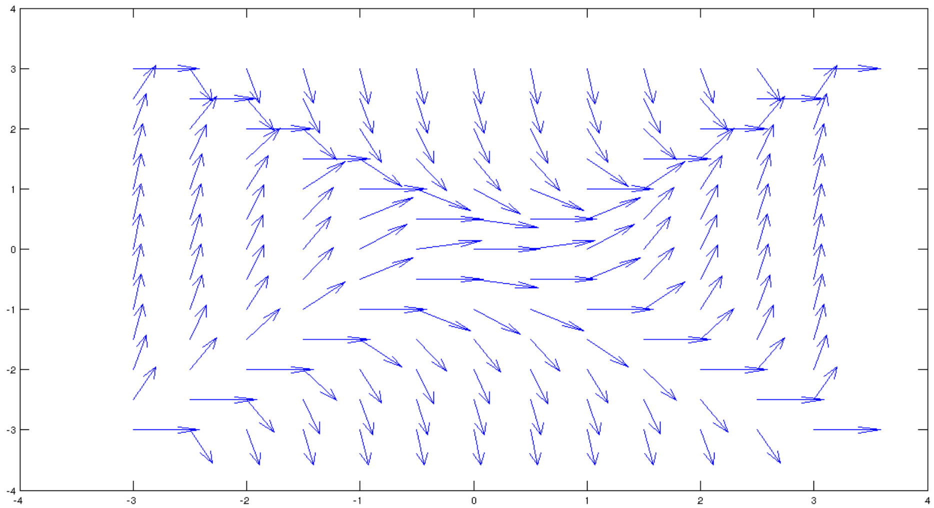
解. 先求该微分方程的等斜线. 令

$$y' = x^2 - y^2 = k,$$

其中 k 是常数. 当 $k = 0$ 时, 得到等斜线 $x = \pm y$, 可见, 等斜线 $x = y$ 和 $x = -y$ 上的点斜率都为 0. 当 $k > 0$ 时, 等斜线 (双曲线)$x^2 - y^2 = k$ 的极径是沿着横坐标方向的, 当 $k < 0$ 时, 等斜线 (双曲线) $x^2 - y^2 = k$ 的极径是沿着纵坐标方向的. 用 matlab 画出线素场, 代码如下:

```
>> [x,y]=meshgrid(-3:.5:3,-3:.5:3);
>> dy=x.^2-y.^2;
>> dx=ones(size(dy));
>> dyu=dy./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> dxu=dx./sqrt(dy.^2+dx.^2);
>> quiver(x,y,dxu,dyu)
```

图像如下



该微分方程没有奇点. ■