习题2.5.1.7

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 21

习题 (2.5.1.7). 求解微分方程

$$y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0. \tag{1}$$

证明. 我们进行分组.可得

$$y^3dx-2xy^2dy+2x^2dy=0.$$

对于微分方程

$$y^3dx-2xy^2dy=0 \tag{2}$$

来说,当 $y\neq 0$ 时,我们首先在两边乘以 $\frac{1}{y^2}$,得到微分方程

$$ydx-2xdy=0. \tag{3}$$

再在微分方程 (3) 的两边乘以 $\frac{1}{y^3}$,得到微分方程

$$\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x}{y^3}dy=0. \tag{4}$$

(4) 是一个恰当微分方程.可见,微分方程 (2) 的一个积分 因子为 $\frac{1}{y^5}$.我们得到通积分

$$xy^{-2}+C=0.$$

易得 $\frac{1}{y^5}g(\frac{x}{y^2})$ 也是 (2) 的一个积分因子, 其中 g 是可微函数.下面我们来看微分方程

$$2x^2dy=0. \tag{5}$$

当 $x \neq 0$ 时,易得该微分方程的积分因子为 $\frac{1}{x^2}$,(5) 两边乘以该积分因子后,得到微分方程

$$2dy = 0,$$

可见通积分为

$$2y + D = 0.$$

易得 $\frac{1}{x^2}h(y)$ 也是 (5) 的一个积分因子,其中 h 是 可微函数.我们希望,

$$\frac{1}{y^5}g(\frac{x}{y^2}) = \frac{1}{x^2}h(y).$$

令 $g(\frac{x}{y^2}) = \frac{y^4}{x^2}, h(y) = \frac{1}{y}$.可见,微分方程 (1) 的积分因子为 $\frac{1}{x^2y}$.在 (1) 两边乘以积 分因子后,我们得到微分方程

$$\frac{y^2}{x^2}dx + 2(\frac{1}{y} - \frac{y}{x})dy = 0. \tag{6}$$

易得通积分为

$$-\frac{y^2}{x} + 2\ln|y| + E = 0.$$

而当 $x = 0, y \neq 0$ 或 $y = 0, x \neq 0$ 或 $x = y = 0$ 时,情况易于讨论. $\square$