一切有为法，如梦幻泡影，如露亦如电，应作如是观.

《金刚经》

《常微分方程教程》习题 2.3.5,(2)

叶卢庆
杭州师范大学理学院，学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 8

习题 (2.3.5,(2)). 考虑方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

其中 $p(x),q(x)$ 都是以 $w>0$ 为周期的连续函数. 试证若 $q(x)$ 不恒为 0，则如上方程有唯一的 w 周期解当且仅当

$$\frac{1}{w}\int_0^w p(x)dx \neq 0.$$

试求出此解.

解. 将方程 (1) 化为

$$dy+(p(x)y-q(x))dx=0. \tag{2}$$

方程 (2) 不一定是恰当微分方程，我们在方程两边同时乘以非零函数 $u(x)$，得到

$$u(x)dy+u(x)(p(x)y-q(x))dx=0. \tag{3}$$

假设方程 (3) 是一个恰当方程，则

$$\frac{du(x)}{dx}=u(x)p(x)\Rightarrow u(x)=be^{\int p(x)dx}.$$

不妨设 $b=1$. 于是我们得到恰当微分方程

$$e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}(p(x)y-q(x))dx=0. \tag{4}$$

在方程 (4) 中, 两个 $\int p(x)dx$ 是同一个函数. 设存在二元函数 $\phi(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{\int p(x)dx}\Rightarrow\phi=ye^{\int p(x)dx}+f(x).$$

因此

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=yp(x)e^{\int p(x)dx}+f'(x)=yp(x)e^{\int p(x)dx}-q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

因此

$$f(x)=-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

可得通积分为

$$ye^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C=0. \tag{5}$$

设 $H(x)=\int p(x)dx$, 则方程 (5) 变为

$$ye^{H(x)}-\int q(x)e^{H(x)}dx+C=0. \tag{6}$$

设 $K(x)=\int q(x)e^{H(x)}dx$. 我们知道,

$$y_te^{H(t)}-K(t)+C=0. \tag{7}$$

$$y_{t+w}e^{H(t+w)}-K(t+w)+C=0. \tag{8}$$

如果 (5) 是周期解, 说明 $y_t=y_{t+w}$. 在方程 (7) 的两边同时乘以 $e^{H(t+w)-H(t)}$, 可得

$$y_te^{H(t+w)}-K(t)e^{H(t+w)-H(t)}+Ce^{H(t+w)-H(t)}=0. \tag{9}$$

(9) 减去 (8), 可得

$$K(t+w)-K(t)e^{H(t+w)-H(t)}+C(e^{H(t+w)-H(t)}-1)=0. \tag{10}$$

根据 $p(x)$ 的周期性, 可得(10) 也就是

$$K(t+w)-K(t)e^{\int_0^w p(x)dx}+C(e^{\int_0^w p(x)dx}-1)=0. \tag{11}$$

从 (11) 可以看出,$\int_0^w p(x)dx=0$ 当且仅当 C 被唯一确定. □