

习题2.5.3

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 11. 21

习题 (2.5.3). 证明齐次方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

有积分因子 $u = \frac{1}{xP+yQ}$.

证明. 不妨设 $Q(x, y) \neq 0$. 令 $y = ux$, 其中 u 是 x 的函数, 则

$$x^m P(1, u)dx + x^m Q(1, u)dy = 0.$$

设 $x \neq 0$, 则

$$P(1, u)dx + Q(1, u)dy = 0.$$

我们知道,

$$dy = xdu + udx.$$

因此

$$P(1, u)dx + Q(1, u)(xdu + udx) = 0.$$

即

$$(P(1, u) + uQ(1, u))dx + xQ(1, u)du = 0. \quad (2)$$

易得 (2) 的积分因子为

$$\frac{1}{x(P(1, u) + uQ(1, u))}.$$

因此, (1) 的积分因子为

$$\frac{1}{x^{m+1}(P(1, u) + uQ(1, u))} = \frac{1}{xP + yQ}.$$

□