

"Houston, we've had a problem."

James A. Lovell, in Apollo 13 spacecraft

解析 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

叶卢庆

杭州师范大学理学院, 学号: 1002011005

Email: h5411167@gmail.com

2013. 11. 17

我们来看微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \quad (1)$$

其中 P, Q 是连续函数. 那么这个微分方程到底是什么意思呢? 其实该微分方程确定了 dx 和 dy 在任意一点 (x_0, y_0) 处的线性关系. 在任意一点 (x_0, y_0) , 我们有关系

$$P(x_0, y_0)dx + Q(x_0, y_0)dy = 0.$$

其中 dx 和 dy 都是一个实数. 不妨设 $P(x_0, y_0) \neq 0$ ¹, 那么我们知道, dx 将会成为 dy 的正比例函数, 它们之间的函数关系为

$$dx = \frac{-Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}dy.$$

dy 每取一个值, dx 都会相应地取唯一的一个值. 如果 x 和 y 在 (x_0, y_0) 附近有函数关系 $x = p(y)$, 且 p 在点 y_0 处可微, 那么我们将 dy 视作自变量 y 从 y_0 改变到 $y_0 + dy$ 的改变量, 此时因变量 x 相应改变 Δx , 那么

$$\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{dy} = p'(y_0).$$

此时, 如果

$$p'(y_0) = \frac{-Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}, \quad (2)$$

¹或者可以设 $Q(x_0, y_0) \neq 0$, 两者必占其一, 因此选取一种. 因为如果 $P(x_0, y_0)$ 和 $Q(x_0, y_0)$ 都为 0, 那么就没什么意思了.

那么我们有

$$\lim_{dy \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{dy} = \frac{dx}{dy}.$$

此时,称微分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处是恰当的.如果 (2) 不成立,那么微分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处不是恰当的.如果 x 和 y 在 (x_0, y_0) 附近有函数关系 $x = p(y)$,但是 p 在 (x_0, y_0) 处不可微,那么微分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处不是恰当的.如果 x 和 y 在 (x_0, y_0) 附近没有函数关系 $x = p(y)$,那么 (1) 不是恰当微分方程.