《常微分方程教程》习题 2.3.5

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 6

习题 (2.3.5,(1)). 考虑方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

其中 $p(x),q(x)$ 都是以 $w>0$ 为周期的连续函数. 试证: 若 $q(x)\equiv 0$, 则方程 (1) 的任一非零解以 w 为周期, 当且仅当函数 $p(x)$ 的平均值

$$\frac{1}{w}\int_0^w p(x)dx=0.$$

证明. 我们知道, 方程 (1) 的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right), \tag{2}$$

其中 C 是任一常数. 当 $q(x)\equiv 0$ 时,(2) 变为

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{3}$$

设 $H(x)=\int p(x)dx$, 可得

$$y_0H(0)=C,y_wH(w)=C.$$

当解 (3) 以 w 为周期时, 可得 $y_0=y_w$, 因此

$$H(w)-H(0)=0,$$

即

$$\frac{1}{w}\int_0^w p(x)dx = 0.$$

而当

$$\frac{1}{w}\int_0^w p(x)dx = 0$$

时, 鉴于 $p(x)$ 的周期性, 说明

$$\int_t^{t+w} p(x)dx = 0.$$

(为什么? 注: 画个图有助于理解.) 因此

$$H(t+w) - H(t) = 0 \Rightarrow H(t+w) = H(t).$$

我们知道,

$$y_t H(t) = C, y_{t+w} H(t+w) = C.$$

于是

$$y_t H(t) = y_{t+w} H(t+w).$$

当 $H(t) = H(t+w) \neq 0$ 时, $y_t = y_{t+w}$. 当 $H(t) = H(t+w) = 0$ 时, 可得 $C = 0$, 因此 $y = 0$, 照样有 $y_t = y_{t+w}$. □