习题2.4.2

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 17

利用适当的变换,求解下列方程

习题 (2.4.2.1).
$$y' = \cos(x-y).$$

解. 令 $u = x - y$,可得
$$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}.$$
因此
$$1 - \cos u = \frac{du}{dx}.$$
当 $\cos u \neq 1$ 时,
$$dx - \frac{1}{1-\cos u} du = 0,$$
设存在二元函数 $\phi(x,u)$,使得
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1 \Rightarrow \phi = x + f(u).$$
可见,
$$f'(u) = -\frac{1}{1-\cos u} = -\frac{1}{1-(2\cos^2\frac{u}{2}-1)} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{-1}{2}(1+\frac{1}{\tan^2\frac{u}{2}}).$$
我们知道,
$$(\cot u)' = (\frac{1}{\tan u})' = -\frac{1}{\tan^2 u}(1+\tan^2 u) = -(1+\frac{1}{\tan^2 u}).$$

因此,

$$f(u)=\cot\frac{u}{2}+C.$$

于是我们得到通积分

$$\phi\equiv x+\cot\frac{u}{2}+C=0.$$

可见,

$$x+\cot\frac{x-y}{2}+C=0.$$

当 $\cos u=1$ 时,$x-y=u=2\pi k, k=\cdots,-1,0,1,\cdots$ □

习题 (2.4.2.2).

$$(3uv+v^2)du+(u^2+uv)dv=0.$$

解. 这是关于 u,v 的齐次方程,$v=0$ 的情形是简单的,因此不予讨论.当 $v\neq 0$ 时,设 $u=kv$,其中 k 是 v 的函数.因 此可得

$$(3v^2k+v^2)du+(k^2v^2+kv^2)dv=0.$$

因此

$$(3k+1)du+(k^2+k)dv=0.$$

$k=\frac{-1}{3}$ 的情形是简单的,因此不予讨论.因此当 $k\neq\frac{-1}{3}$ 时,

$$\frac{du}{dv}=-\frac{k^2+k}{3k+1}.$$

我们知道,

$$\frac{du}{dv}=\frac{dk}{dv}v+k.$$

因此

$$\frac{dk}{dv}v=\frac{-4k^2-2k}{3k+1}.$$

$k=0$ 或 $\frac{-1}{2}$ 的情形是简单的,因此不予讨论.因此 当 $k\neq\frac{-1}{3}$ 且 $k\neq 0,\frac{-1}{2}$ 时,我们有

$$\frac{1}{v}dv+\frac{3k+1}{4k^2+2k}dk=0.$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$,使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial v}=\frac{1}{v}\Rightarrow\phi=\ln|v|+f(k).$$

因此,

$$f'(k)=\frac{3k+1}{4k^2+2k}=\frac{3k+1}{2k(2k+1)}=\frac{2k+1+k}{2k(2k+1)}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k+2}.$$

可见,

$$f(k)=\frac{1}{2}\ln|2k|+\frac{1}{4}\ln|4k+2|+C.$$

于是我们得到通积分

$$\ln|v|+\frac{1}{2}\ln|2k|+\frac{1}{4}|4k+2|+C=0.$$

也即

$$\ln|v|+\frac{1}{2}\ln|2\frac{u}{v}|+\frac{1}{4}|4\frac{u}{v}+2|+C=0.$$

□