习题 2.5.2

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 20

习题 (2.5.2). 求解下列微分方程

$$ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0.$$

解. 我们在微分方程两边同时乘以非零函数 $u(x,y)$, 得到

$$u(x,y)ydx + u(x,y)(2xy - e^{-2y})dy = 0.$$

我们希望这是一个恰当微分方程, 即

$$\frac{\partial[u(x,y)y]}{\partial y} = \frac{\partial[u(x,y)(2xy - e^{-2y})]}{\partial x}.$$

也即

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}y + u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}(2xy - e^{-2y}) + 2yu(x,y).$$

不妨让 $u(x,y)$ 只是关于 y 的函数, 则我们得到

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}y + u(x,y) = 2yu(x,y).$$

也就是

$$\frac{du}{dy}y + u = 2yu.$$

令 $uy = p$, 则

$$\frac{dp}{dy} = \frac{du}{dy}y + u,$$

因此

$$\frac{dp}{dy} = 2p \Rightarrow p = ce^{2y}.$$

因此,$u = \frac{ce^{2y}}{y}$. 不妨让 $c = 1$. 因此, 我们得到恰当微分方程

$$e^{2y}dx + \frac{e^{2y}}{y}(2xy - e^{-2y})dy = 0,$$

也即

$$e^{2y}dx + (2xe^{2y} - \frac{1}{y})dy = 0.$$

其中 $y \neq 0$. 设二元函数 $\phi(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^{2y} \Rightarrow \phi = xe^{2y} + f(y).$$

因此可得

$$2xe^{2y} + f'(y) = 2xe^{2y} - \frac{1}{y} \Rightarrow f(y) = -\ln|y| + C.$$

因此我们得到通积分

$$xe^{2y} - \ln|y| + C = 0.$$

而当 $y = 0$ 时, 也是一个解. □