常微分方程教程习题 1.1.4

叶卢庆*

2014 年 12 月 15 日

题目. 证明: 设 $y=g(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是一个充分光滑的函数族, 其中 x 是自变量, 而 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个独立的参数 (任意常数), 则存在一个形如

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

的 n 阶微分方程, 使得它的通解恰好是上述函数族.

证明. 可得

$$\begin{cases}y=g(x,C_1,\cdots,C_n),\\ y^{(1)}=g^{(1)}(x,C_1,\cdots,C_n),\\ y^{(2)}=g^{(2)}(x,C_1,\cdots,C_n),\\ \vdots\\ y^{(n-1)}=g^{(n-1)}(x,C_1,\cdots,C_n)\end{cases}. \tag{1}$$

以及

$$y^{(n)}=g^{(n)}(x,C_1,\cdots,C_n). \tag{2}$$

由于常数 $C_1,\cdots,C_n$ 独立, 因此我们可以反解出

$$\begin{cases}C_1=p_1(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}),\\ C_2=p_2(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}),\\ \vdots\\ C_n=p_n(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)})\end{cases}. \tag{3}$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 都是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数. 将式 (3) 代入 (2), 得到

$$y^{(n)}=g^{(n)}(x,p_1(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}),\cdots,p_n(x,y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)})). \tag{4}$$

式 (4) 即为我们所求的微分方程. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com