《常微分方程教程》例 2.3.1

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 4

例 (2.3.1).

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^3(x\neq 0)$$

解. 化为

$$dy+(\frac{1}{x}y-x^3)dx=0.$$

如上不是恰当微分方程, 设

$$u(x)dy+u(x)(\frac{1}{x}y-x^3)dx=0$$

是恰当的, 解得

$$\frac{du(x)}{dx}=u(x)\frac{1}{x}.$$

于是

$$u(x)=ae^{\int\frac{1}{x}dx}, \text{不妨设} a=1, u(x)=x.$$

于是我们得到恰当微分方程

$$e^{\int\frac{1}{x}dx}dy+e^{\int\frac{1}{x}dx}(\frac{1}{x}y-x^3)dx=0.$$

注意上面的微分方程的两个 $\int\frac{1}{x}dx$ 是同一个函数. 设 $\phi(x,y)$ 满足:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{\int\frac{1}{x}dx}\Rightarrow\phi=e^{\int\frac{1}{x}dx}y+f(x). \tag{1}$$

于是,

$$\frac{1}{x}ye^{\int\frac{1}{x}dx}+f'(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\frac{1}{x}y-x^3e^{\int\frac{1}{x}dx}. \tag{2}$$

于是

$$f'(x) = -x^3 e^{\int \frac{1}{x} dx} \Rightarrow f(x) = C - \frac{1}{4} x^4 e^{\int \frac{1}{x} dx} + \frac{1}{16} x^4 e^{\int \frac{1}{x} dx} - \frac{1}{64} x^4 e^{\int \frac{1}{x} dx} + \cdots$$
$$= \frac{-1}{5} x^4 e^{\int \frac{1}{x} dx} + C.$$

因此

$$\phi \equiv y e^{\int \frac{1}{x} dx} - \frac{1}{5} x^4 e^{\int \frac{1}{x} dx} + C = 0.$$

也即,

$$\phi \equiv xy - \frac{1}{5} x^5 + C = 0.$$

$\square$