《常微分方程教程》习题2-2,1

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:100201100
Email: h5411167@gmail.com

October 26, 2013

求解下列微分方程,并指出这些方程在Oxy平面上有意义的区域.

Exercise (2-2,1,(1))**.**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}.$$

解. 将该方程化为

$$ydy-x^2dx=0, \tag{1}$$

其中$y\neq 0$.式 (1)是一个恰当微分方程,因此我们可以求通积分,设

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=y, \tag{2}$$

于是,

$$\phi=\frac{1}{2}y^2+f(x). \tag{3}$$

代入下式,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-x^2 \tag{4}$$

可得

$$f'(x)=x^2\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3+C. \tag{5}$$

因此通积分为

$$\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^3+C=0. \tag{6}$$

有意义的区域为$\mathbf{R}^2$ 上纵坐标不为0的点的集合. ■

Exercise (2-2,1,(2))**.**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}.$$

解. 通过分离变量,得到

$$ydy=\frac{x^2}{1+x^3}dx. \tag{7}$$

其中$y(1+x^3)\neq 0$.易得(7)是一个恰当方程,因此可以求通积分.设

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=y, \tag{8}$$

可得

$$\phi = \frac{1}{2}y^2 + f(x). \tag{9}$$

代入式子

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{x^2}{1+x^3}, \tag{10}$$

可得

$$f'(x) = -\frac{x^2}{1+x^3} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\ln|(1+x^3)| + C. \tag{11}$$

因此通积分为

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}\ln|(1+x^3)| + C = 0. \tag{12}$$

其中区域是$\mathbf{R}^2\backslash\{(x,y) : y(1+x^3) = 0.\}$. ■

Exercise (2-2,1,(3))**.**

$$\frac{dy}{dx} + y^2 \sin x = 0.$$

解. 可得

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 \sin x,$$

当$y \neq 0$ 时,也即

$$\frac{1}{y^2}dy = -\sin x dx. \tag{13}$$

于是

$$\frac{\phi}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \phi = -\frac{1}{y} + f(x). \tag{14}$$

于是

$$f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x + C. \tag{15}$$

因此通积分为

$$-\frac{1}{y} - \cos x + C = 0. \tag{16}$$

当$y = 0$ 时,可得

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = C. \tag{17}$$

可见,区域是整个$\mathbf{R}^2$. ■

Exercise (2-2,1,(4))**.**

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2.$$

解. 可得

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)(1+x). \tag{18}$$

因此

$$\frac{1}{1+y^2}dy = (1+x)dx. \tag{19}$$

易得 (19)是一个恰当方程.因此可以求通积分,设

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}, \tag{20}$$

则

$$\phi=\arctan y+f(x). \tag{21}$$

于是

$$f'(x)=-1-x\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+C. \tag{22}$$

因此通积分为

$$\arctan y-\frac{1}{2}x^2-x+C=0. \tag{23}$$

■

Exercise (2-2,1,(5))**.**

$$\frac{dy}{dx}=(\cos x\cos 2y)^2.$$

解. 可得当$\cos 2y\neq 0$ 时,

$$\frac{1}{(\cos 2y)^2}dy=\cos^2 x dx. \tag{24}$$

也即

$$(1+\tan^2 2y)dy-(1+\tan^2 x)dx=0. \tag{25}$$

因此

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-(1+\tan^2 x)\Rightarrow\phi=-\tan x+f(y). \tag{26}$$

于是

$$f'(y)=1+\tan^2 2y\Rightarrow f(y)=\frac{1}{2}\tan 2y+C. \tag{27}$$

因此通积分为

$$-\tan x+\frac{1}{2}\tan 2y+C=0. \tag{28}$$

当$\cos 2y=0$ 时,可得$y=C$.可见微分方程是定义在整个$\mathbf{R}^2$ 上的. ■

Exercise (2-2,1,(6))**.**

$$x\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}.$$

解. 当$y\in(-1,1)$,$x\neq 0$ 时,可得恰当方程

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy-\frac{1}{x}dx=0. \tag{29}$$

于是可得$\phi=-\ln|x|+f(y)$,于是

$$f'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{30}$$

可得$f(y)=\sin^{-1}y+C$.因此通积分为

$$-\ln|x|+\sin^{-1}y+C=0. \tag{31}$$

当$x=0$ 时,$y=\pm1$.当$x\neq 0$, $y=\pm1$ 时,

$$x\frac{dy}{dx}=0. \tag{32}$$

于是可得$y=C$. ∎

Exercise (2-2,1,(7))**.**

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}.$$

解. 我们要求$y+e^y\neq 0$.可得恰当微分方程

$$(y+e^y)dy-(x-e^{-x})dx=0. \tag{33}$$

于是

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=y+e^y, \tag{34}$$

因此

$$\phi=\frac{1}{2}y^2+e^y+f(x). \tag{35}$$

因此

$$f'(x)=-x+e^{-x}\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{2}x^2-e^{-x}+C. \tag{36}$$

因此通积分为

$$\frac{1}{2}y^2+e^y-\frac{1}{2}x^2-e^{-x}+C=0. \tag{37}$$

∎