习题 2.5.1.1

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 20

习题 (2.5.1.1). 求解下来微分方程:

$$(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

解. 微分方程两边同时乘以非零函数 $u(x,y)$, 得到

$$u(x,y)(3x^2y + 2xy + y^3)dx + u(x,y)(x^2 + y^2)dy = 0. \tag{1}$$

我们希望 (1) 是恰当的, 即

$$\frac{\partial[u(x,y)(3x^2y + 2xy + y^3)]}{\partial y} = \frac{\partial[u(x,y)(x^2 + y^2)]}{\partial x}. \tag{2}$$

也即,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}(3x^2y + 2xy + y^3) + u(x,y)(3x^2 + 3y^2)\\&= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 也即

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}y(1 + \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + y^2}) + 3u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}.$$

让 $u(x,y)$ 是只关于 x 的函数, 则我们得到

$$3u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x},$$

不妨让 $u(x,y)=e^{3x}$. 因此我们得到恰当微分方程

$$e^{3x}(3x^2y+2xy+y^3)dx+e^{3x}(x^2+y^2)dy=0.$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2e^{3x}+y^2e^{3x}\Rightarrow\phi=x^2e^{3x}y+\frac{1}{3}e^{3x}y^3+f(x). \tag{3}$$

因此

$$f'(x)=0\Rightarrow f(x)=C. \tag{4}$$

于是得到通积分

$$\phi\equiv x^2e^{3x}y+\frac{1}{3}e^{3x}y^3+C=0. \tag{5}$$

□