

习题2.4.5

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 11. 19

习题 (2.4.5). 求一曲线,使得过这曲线上任意点的切线与该点向径的夹角等于 45 度.

解. 当 $x \neq 0$ 时,我们得到微分方程

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{y}{x}} = 1.$$

即

$$(x - y) \frac{dy}{dx} = x + y.$$

可得曲线就是例2.4.3中的螺线

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\arctan \frac{y}{x}}.$$

或者我们得到微分方程

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{y}{x}} = -1.$$

即

$$(x + y) \frac{dy}{dx} = y - x.$$

令 $u = -x$, 则 $du = -dx$, 则

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{du}.$$

因此

$$(u - y) \frac{dy}{du} = y + u.$$

这样就化为了已解决情形.

□