《常微分方程教程》[1]性质 2.3.1,2.3.3,2.3.4 证明

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 5

丁同仁, 李承治编著, 高等教育出版社第二版的《常微分方程教程》第 34 页性质 1 声称

齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$$

的解或者恒等于 0, 或者恒不等于 0. 其中函数 $p(x),q(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 上连续.

证明. 显然,$y=0$ 是化为

$$dy+p(x)ydx=0.$$

方程两边同时乘以非零函数 $u(x)$, 得到

$$u(x)dy+u(x)p(x)ydx=0.$$

设如上方程是恰当的, 则

$$\frac{du(x)}{dx}=u(x)p(x).$$

于是 $u(x)=ae^{\int p(x)dx}$, 不妨设 $a=1$. 则我们得到恰当方程

$$e^{\int p(x)dx}dy+e^{\int p(x)dx}p(x)ydx=0.$$

[1]丁同仁, 李承治编著, 高等教育出版社第二版

设二元函数 $\phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{\int p(x)dx}\Rightarrow\phi=ye^{\int p(x)dx}+f(x).$$

因此,

$$f'(x)+ye^{\int p(x)dx}p(x)=yp(x)e^{\int p(x)dx}.$$

得到 $f(x)=C$, 于是通积分为

$$ye^{\int p(x)dx}+C=0.$$

可得 $C=0,y=0$ 是一个解, 当 $C\neq 0$ 时,

$$y=\frac{-C}{e^{\int p(x)dx}}$$

永远不为 0. □

性质 2.3.3 声称

齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{1}$$

的任何解的线性组合仍是它的解; 齐次线性方程 (1)的任一解与非齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{2}$$

的任一解之和是非齐次线性方程组 (2) 的解; 非齐次线性方程 (2) 的任意两解之差必定是相应齐次线性方程 (1)的解. 其中函数 $p(x),q(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 上连续.

解. 设 $y=g_1(x),y=g_2(x)$ 是方程 (1) 的两个解, 即

$$g_1'(x)+p(x)g_1(x)=0,g_2'(x)+p(x)g_2(x)=0.$$

因此,

$$(g_1(x)+g_2(x))'+p(x)(g_1(x)+g_2(x))=0.$$

完毕. 其余的证明完全类似. 这里主要用到了导数运算的线性性质. 奇怪吧? 导数运算竟然有线性性质. 呵呵, 因为其实导数的本质就是线性映射. □

下面来看性质 2.3.4

非齐次线性方程 (2) 的任一解与相应的齐次线性方程 (1) 的通解之和构成非齐次线性方程 (2) 的通解.

解. :-), 具体的证明省略了, 从解的公式可以很容易看出来. 其实不看解的公式也完全可以证出来, 齐次线性方程 (1) 的通解的作用是带来一个独立的任意给定的常数. □