《常微分方程教程》[1]习题 2.3.3

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 5

习题 (2.3.3). 设 $y=\phi(x)$ 满足微分方程
$$y'+a(x)y\leq 0(x\geq 0).$$
求证:
$$\phi(x)\leq\phi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}(x\geq 0).$$

证明. 可得
$$\frac{dy}{dx}+a(x)y=b(x), \text{其中} b(x)\leq 0(x\geq 0).$$
也就是
$$dy+(a(x)y-b(x))dx=0.$$
两边同时乘以非零函数 $u(x)$, 我们希望
$$u(x)dy+u(x)(a(x)y-b(x))dx=0$$
是一个恰当方程. 因此我们希望
$$\frac{u(x)}{dx}=u(x)a(x)\Rightarrow u(x)=be^{\int a(x)dx}, \text{不妨令} b=1.$$
于是我们得到恰当方程
$$e^{\int a(x)dx}dy+e^{\int a(x)dx}(a(x)y-b(x))dx=0.$$

[1]丁同仁, 李承治第二版.

设二元函数 $w(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial w}{\partial y} = e^{\int a(x)dx} \Rightarrow w = ye^{\int a(x)dx} + f(x).$$

因此

$$ya(x)e^{\int a(x)dx} + f'(x) = ya(x)e^{\int a(x)dx} - b(x)e^{\int a(x)dx}.$$

因此

$$f(x) = -\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C.$$

因此通积分为

$$ye^{\int a(x)dx} = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx - C.$$

令 $K(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx$,$H(x) = \int e^{\int a(x)dx}$. 则

$$y_0e^{H(0)} = K(0) - C, y_te^{H(t)} = K(t) - C, \text{其中} t > 0.$$

因此

$$y_te^{H(t)} - y_0e^{H(0)} = K(t) - K(0) = \int_0^t b(x)e^{\int a(x)dx}dx \leq 0(\text{因为} b(x) \leq 0).$$

可见

$$y_te^{H(t)} \leq y_0e^{H(0)} \Rightarrow y_te^{\int_0^t a(x)dx} \leq y_0.$$

□