《常微分方程教程》习题 2-2,6

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 3

利用上题结果[1](而不解方程), 作出下列微分方程积分曲线族的草图

习题 (2-2,6,(1)).

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{|y|}.$$

解. 该微分方程不满足上题的条件, 因为对于任意给定的正实数 ε,

$$\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$$

不是无穷. 我先作个弊, 把方程解掉. 显然 $y=0$ 是一个解. 当 $y>0$ 时, 根据反函数定理, 方程变为

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

于是,

$$x=2\sqrt{y}+C.$$

[1]我把上题结果呈现如下: 设微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(y),\tag{1}$$

其中 $f(y)$ 在 $y=a$ 的某邻域 (例如区间 $|y-a|\leq\varepsilon$) 内连续, 且 $f(y)=0$ 当且仅当 $y=a$. 则在直线 $y=a$ 上的每一点, 方程 (1) 的解是局部唯一的, 当且仅当瑕积分

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=\infty.$$

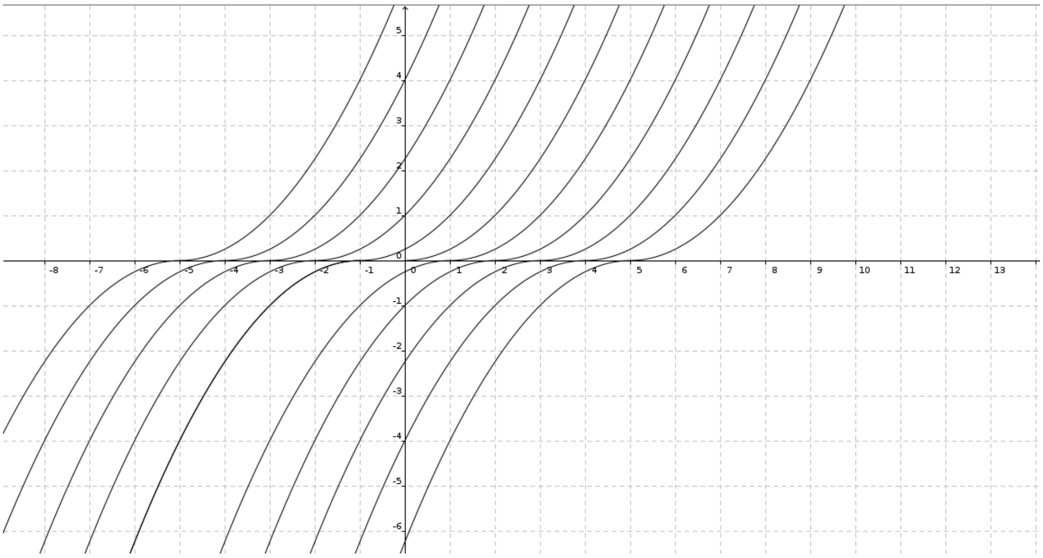
其中 $x > C$. 当 $y < 0$ 时, 根据反函数定理, 方程变为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{-y}}.$$

于是

$$x = -2\sqrt{-y} + C.$$

其中 $x < C$. 做图如下:



注意上面的图中我们只画了有限条积分曲线, 事实上积分曲线有无数条, 填满了整个平面. 我们不可能把它们全画出来, 否则我要直接泼墨了, 给你一个黑屏. □

习题 (2-2,6,(2)).

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} y\ln|y|, y \neq 0, \\ 0, y = 0. \end{cases}$$

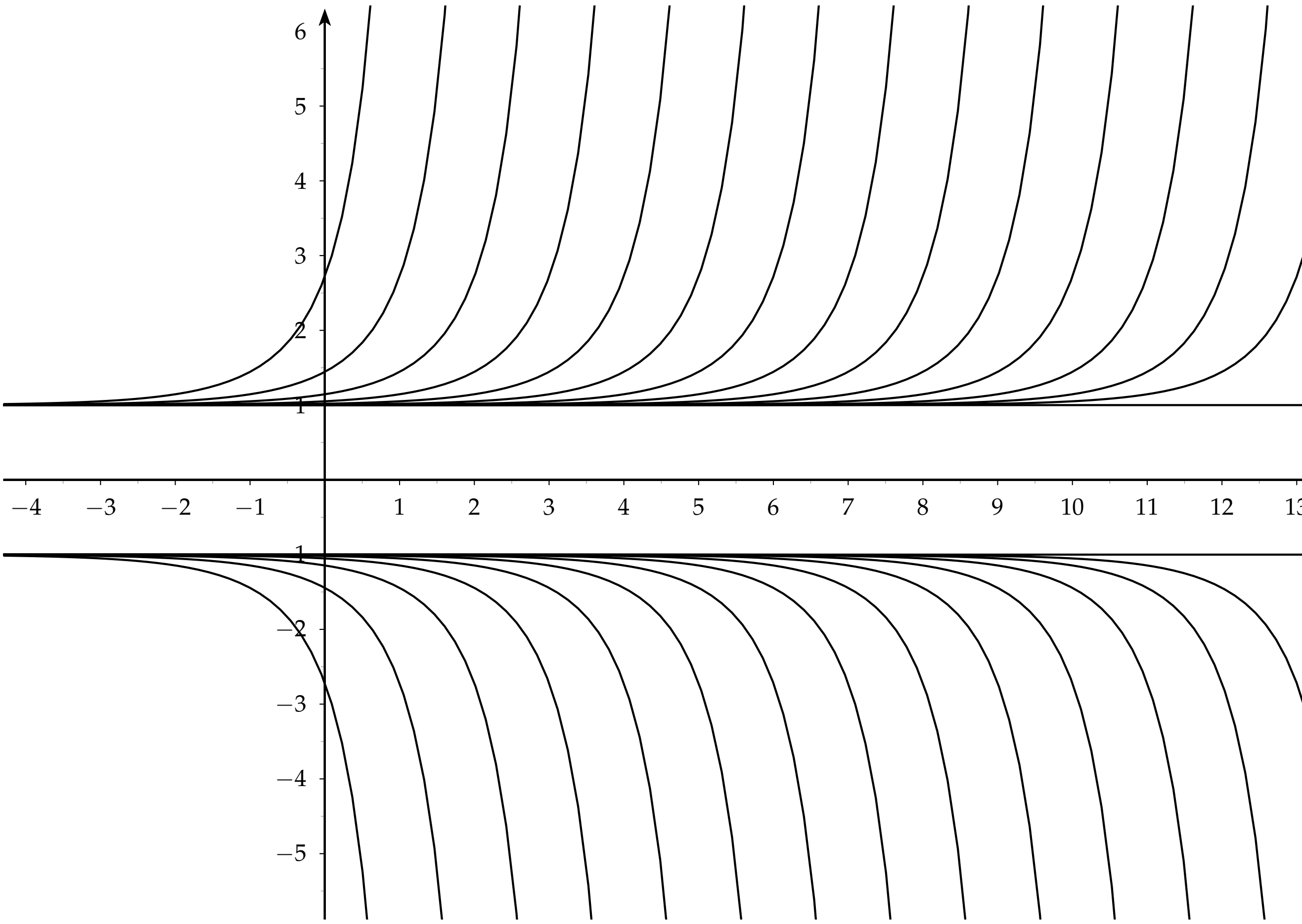
解. 我们发现, 只有当 $y = \pm 1$ 的时候, 条件 $y\ln|y| = 0$ 和

$$\int_1^{1\pm\varepsilon} \frac{1}{y\ln|y|} = \infty$$

同时满足. 我们现在画出积分曲线族验证一下. 我们也作弊把方程解掉. 易得 $y \neq 0$ 时,

$$x = \ln\ln|y| + C.$$

做出积分曲线族可得



我们发现符合我们的预期要求. □