

# 2013年辽宁高考理科数学第12题解析

叶卢庆

杭州师范大学理学院,学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 11. 14

在齐建民老师的QQ空间里,我看到了2013年辽宁高考理科数学第12道选择题.我眼睛一亮,竟然是个一阶线性微分方程的题目,真不错.因此就写下此篇解析短文.

## 2013年辽宁高考理科数学第12题

设函数  $f(x)$  满足  $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $f(2) = \frac{e^2}{8}$ , 则  $x > 0$  时,  $f(x)$

- A 有极大值,无极小值.
- B 有极小值,无极大值.
- C 既有极大值,又有极小值.
- D 既无极大值也无极小值.

解. 我们直接来解微分方程

$$\frac{dy}{dx}x^2 + 2xy = \frac{e^x}{x}. \quad (1)$$

将 (1) 化为

$$x^2 dy + (2xy - \frac{e^x}{x}) dx = 0. \quad (2)$$

我们发现 (2) 是一个恰当微分方程. 设二元函数  $\phi(x, y)$  满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \quad (3)$$

以及

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy - \frac{e^x}{x}. \quad (4)$$

由 (3) 可得,

$$\phi(x, y) = yx^2 + g(x). \quad (5)$$

其中  $g(x)$  是关于  $x$  的函数. 将 (5) 代入 (4), 可得

$$2xy + g'(x) = 2xy - \frac{e^x}{x} \Rightarrow g'(x) = -\frac{e^x}{x}. \quad (6)$$

因此  $g(x) = -\int \frac{e^x}{x} dx + C$ , 其中  $C$  是一个常数. 因此我们可得通积分为

$$\phi(x, y) \equiv yx^2 - \int \frac{e^x}{x} dx + C = 0.$$

令  $H(x) = \int \frac{e^x}{x} dx$ , 则由题目条件可知,

$$\frac{e^2}{2} - H(2) + C = 0.$$

可见,

$$y = \frac{H(x) + \frac{e^2}{2} - H(2)}{x^2} = \frac{\int_2^x \frac{e^x}{x} dx + \frac{e^2}{2}}{x^2}.$$

因此

$$y' = \frac{e^x - 2(\int_2^x \frac{e^x}{x} dx + \frac{e^2}{2})}{x^3}.$$

下面我们来看函数

$$p(x) = e^x - 2(\int_2^x \frac{e^x}{x} dx + \frac{e^2}{2}).$$

易得

$$p'(x) = e^x - \frac{2e^x}{x}.$$

可见, 当  $0 < x < 2$  时,  $p(x)$  递减, 当  $x \geq 2$  时,  $p(x)$  递增, 且  $p(2) = 0$ . 可见,  $y'$  恒不小于 0, 且只有在  $x = 2$  处等于 0. 可见,  $y$  在  $x > 0$  时没有极值点. 于是选 D.  $\square$