习题2.5.4

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 21

习题 (2.5.4). 证明定理2.6及其逆定理:在定理2.6的假定下,若 u_1 是微分方程 (2.55) 的另一个积分因子,则 u_1 必可表为 $u_1 = ug(\Phi)$ 的形式,其中 g, Φ 的意义与在定理2.6中的相同.

证明. u 是方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

的一个积分因子,说明,

$$uPdx + uQdy = 0$$

是一个恰当微分方程.同样,

$$u_1Pdx + u_1Qdy = 0$$

也是一个恰当微分方程.则我们有

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}P + u_1\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x}Q + u_1\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

不妨设 $u_1 = ku$,其中 k 是 x, y 的函数.则 (1) 化为

$$(\frac{\partial k}{\partial y}u + \frac{\partial u}{\partial y}k)P + ku\frac{\partial P}{\partial y} = (\frac{\partial k}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial x}k)Q + ku\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

由于我们还有

$$\frac{\partial u}{\partial y}P + u\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}Q + u\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

因此 (2) 化为

$$\frac{\partial k}{\partial y}uP = \frac{\partial k}{\partial x}uQ. \tag{4}$$

(4) 即为

$$\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{5}$$

现在我们来证明 $k = g(\Phi)$,其中 g 可微.也即证明

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

以及

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

根据 (5),这样的 g 是显然存在的.

□