《常微分方程教 程》[1]习题2-4,1

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学 号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 14

求解下列微分方程

习题 (2.4.1,(1)).
$$y' = \frac{2y-x}{2x-y}.$$

解. 这是一个齐次方程,令 $y(x)=u(x)x$,则在 $x\neq 0$ 时,化为
$$y' = \frac{2u-1}{2-u}.$$
我们知道,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}+u.$$
因此
$$\frac{du}{dx}+u = \frac{2u-1}{2-u}.$$
也即
$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2-1}{2-u}.$$
当 $u\neq \pm 1$ 时,
$$\frac{2-u}{u^2-1}du - dx = 0.$$
这是一个恰当方程.设二元函数 $\phi(u,x)$ 满足
$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{2-u}{u^2-1}.$$

[1][1]

我们先来求

$$\int \frac{2-u}{u^2-1}du.$$

为此,我们先来求

$$\int \frac{1}{u^2-1}du.$$

我们知道,

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow \tanh^2 t - 1 = \frac{-1}{\cosh^2 t},$$

于是,我们不妨令 $u = \tanh t$,那么

$$\int \frac{1}{u^2-1}du = \int -\cosh^2 t du.$$

下面我们给 $\tanh t$ 求导.易得

$$(\tanh t)' = (\frac{\sinh t}{\cosh t})' = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

因此

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

可见,

$$\int \frac{1}{u^2-1}du = \int -1dt = -t + C_1 = -\tanh^{-1} u + C_1.$$

我们再来求

$$\int \frac{u}{u^2-1}du.$$

易得其为

$$\frac{1}{2}\ln|u^2-1| + C_2.$$

综上所述,可得

$$\int \frac{2-u}{u^2-1}du = -2\tanh^{-1} u - \frac{1}{2}\ln|u^2-1| + C.$$

可见,

$$\phi = -2\tanh^{-1} u - \frac{1}{2}\ln|u^2-1| + h(x) \Rightarrow h'(x) = -1 \Rightarrow h(x) = -x + D.$$

综上可见,通积分为

$$-2\tanh^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln|\frac{y^2}{x^2}-1|-x+D=0.(x\neq 0,\frac{y}{x}\neq\pm 1).$$

而当 $x=0$ 时,可得 $y=-2x+D$.当 $x\neq 0$ 且 $\frac{y}{x}=1$ 时,$y=x+D$,当 $x\neq 0$ 且 $\frac{y}{x}=-1$ 时,$y=-x+D$. □

参考文献

1. 李承治. 丁同仁. 常微分方程教程. 高等教育出版社, 2th edition, 2004.