

常微分方程教程习题 1.1.4

叶卢庆*

2014 年 12 月 15 日

题目. 证明: 设 $y = g(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ 是一个充分光滑的函数族, 其中 x 是自变量, 而 C_1, C_2, \dots, C_n 是 n 个独立的参数 (任意常数), 则存在一个形如

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

的 n 阶微分方程, 使得它的通解恰好是上述函数族.

证明. 可得

$$\begin{cases} y = g(x, C_1, \dots, C_n), \\ y^{(1)} = g^{(1)}(x, C_1, \dots, C_n), \\ y^{(2)} = g^{(2)}(x, C_1, \dots, C_n), \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = g^{(n-1)}(x, C_1, \dots, C_n) \end{cases}. \quad (1)$$

以及

$$y^{(n)} = g^{(n)}(x, C_1, \dots, C_n). \quad (2)$$

由于常数 C_1, \dots, C_n 独立, 因此我们可以反解出

$$\begin{cases} C_1 = p_1(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \\ C_2 = p_2(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \\ \vdots \\ C_n = p_n(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \end{cases}. \quad (3)$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_n 都是从 \mathbf{R}^n 到 \mathbf{R} 的函数. 将式 (3) 代入 (2), 得到

$$y^{(n)} = g^{(n)}(x, p_1(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}), \dots, p_n(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})). \quad (4)$$

式 (4) 即为我们所求的微分方程. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com