习题 2.5.1.4

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 20

习题 (2.5.1.4).

$$ydx - (x^2 + y^2 + x)dy = 0. \tag{1}$$

解. 先将微分方程分组为

$$(ydx - xdy) - (x^2 + y^2)dy = 0.$$

对于线性微分方程

$$ydx - xdy = 0 \tag{2}$$

来说, 当 $y \neq 0$ 时, 易得积分因子为 $\frac{1}{y^2}$, 于是我们得到微分方程

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \phi = \frac{x}{y} + f(y).$$

因此

$$-\frac{x}{y^2} + f'(y) = \frac{-x}{y^2} \Rightarrow f(y) = C.$$

因此我们得到通积分

$$\frac{x}{y} + C = 0.$$

易得 $\frac{1}{y^2}g(\frac{x}{y})$ 也是 (2) 的积分因子, 其中 g 是可微函数. 我们再来看微分方程

$$-(x^2 + y^2)dy = 0, \tag{3}$$

易得积分因子为 $\frac{1}{x^2+y^2}$, 得到微分方程

$$-dy = 0$$

得到通积分

$$-y + C = 0.$$

易得 $\frac{1}{x^2+y^2}h(y)$ 也是 (3) 的积分因子, 其中 h 是可微函数. 我们希望

$$\frac{1}{y^2}g(\frac{x}{y}) = \frac{1}{x^2+y^2}h(y)$$

即希望

$$((\frac{x}{y})^2 + 1)g(\frac{x}{y}) = h(y).$$

令 $g(\frac{x}{y}) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}$,$h(y) = 1$. 于是当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 我们得到(1) 的积分因子为 $\frac{1}{x^2+y^2}$, 得到

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx - (1 + \frac{x}{x^2+y^2})dy = 0. \tag{4}$$

设存在二元函数 $\Phi(x, y)$, 使得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1} \Rightarrow \Phi = \arctan\frac{x}{y} + p(y).$$

其中 $y \neq 0$. 因此,

$$\frac{-x}{(x^2+y^2)} + p'(y) = -1 - \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow p(y) = -y + C.$$

因此可得通积分

$$\Phi \equiv \arctan\frac{x}{y} - y + C = 0$$

而当 $y = 0$ 时, 可得

$$(x^2 + x)dy + 0dx = 0.$$

即 x 可取任意值. □