《常微分方程教程》[1]例 2.3.2

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 9

例 (2.3.2). 设微分方程
$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x), \tag{1}$$
其中 $a>0$ 为常数, 而 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数. 试求方程 (1) 的 2π 周期解.

解. 方程 (1) 化为
$$dy+(ay-f(x))dx=0. \tag{2}$$
两边同时乘以非零函数 $u(x)$, 得到
$$u(x)dy+u(x)(ay-f(x))dx=0. \tag{3}$$
假设 (3) 是恰当方程, 则
$$\frac{du(x)}{dx}=au(x)\Rightarrow u(x)=be^{ax}, \text{不妨设} b=1. \tag{4}$$
于是我们得到恰当方程
$$e^{ax}dy+e^{ax}(ay-f(x))dx=0. \tag{5}$$
设对于二元函数 $\phi(x,y)$ 来说,
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=e^{ax}\Rightarrow \phi=ye^{ax}+g(x). \tag{6}$$

[1] [1]

因此

$$yae^{ax} + g'(x) = yae^{ax} - f(x)e^{ax} \Rightarrow g'(x) = -f(x)e^{ax}. \tag{7}$$

因此

$$g(x) = -\int f(x)e^{ax}dx + C. \tag{8}$$

因此通积分为

$$ye^{ax} - \int f(x)e^{ax}dx + C = 0. \tag{9}$$

设 $H(x) = \int f(x)e^{ax}$, 则 $x = t$ 时,

$$y_t e^{at} - H(t) + C = 0. \tag{10}$$

当 $x = 2\pi + t$ 时,

$$y_{2\pi+t}e^{2\pi a+ta} - H(2\pi + t) + C = 0. \tag{11}$$

式 (10) 减去式 (11) 可得

$$y_t e^{at} - y_{2\pi+t}e^{2\pi a+ta} + \int_t^{2\pi+t} f(x)e^{ax} = 0. \tag{12}$$

由于是 2π 周期解, 因此 $y_t = y_{2\pi+t}$, 因此

$$y_t = \frac{\int_t^{2\pi+t} f(x)e^{ax}}{e^{2\pi a+ta} - e^{at}} = \frac{\int_t^{2\pi+t} f(x)e^{ax-at}dx}{e^{2\pi a} - 1}. \tag{13}$$

□

参考文献

1. 李承治. 丁同仁. 常微分方程教程. 高等教育出版社, 2th edition, 2004.