# 《常微分方程教程》习题 2-1

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com

October 25, 2013

这些重复的题目真无聊啊, 但是我忍了. 静下心边做边感悟. 判断下列方程是否为恰当方程, 并对恰当方程求解.

**习题 (2-1,1).** $(3x^2-1)dx+(2x+1)dy=0$.

解. 设 $P(x,y)=3x^2-1$,$Q(x,y)=2x+1$, 因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}=2.$$

因此不是恰当方程. ■

**习题 (2-1,2).** $(x+2y)dx+(2x-y)dy=0$.

解. 设 $P(x,y)=x+2y$,$Q(x,y)=2x-y$, 可得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2,\frac{\partial Q}{\partial x}=2,$$

令 $\phi$ 满足

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=x+2y, \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=2x-y. \tag{1b}$$

将式 (1a) 对 $x$ 积分, 得到

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2yx+f(y). \tag{2}$$

将 (2) 代入 (1b), 可得

$$2x+f'(y)=2x-y. \tag{3}$$

因此

$$f'(y)=-y. \tag{4}$$

于是 $f(y)=\frac{-1}{2}y^2+K$. 因此

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2+K. \tag{5}$$

因此可得通积分为

$$\phi(x,y)\equiv\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2+K=0.$$

■

习题 (2-1,3). $(ax+by)dx+(bx+cy)dy=0$($a,b,c$ 为常数).

解. 令 $P(x,y)=ax+by$,$Q(x,y)=bx+cy$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=b=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6}$$

因此题目中的是恰当方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=P(x,y)=ax+by, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=Q(x)=bx+cy. \tag{7b}$$

则将式 (7a) 两边对 $x$ 积分, 可得

$$\phi=\frac{1}{2}ax^2+bxy+f(y). \tag{8}$$

将式 (8) 代入 (7b), 可得

$$bx+f'(y)=bx+cy\Rightarrow f(y)=\frac{1}{2}cy^2+C. \tag{9}$$

因此通积分为

$$\phi(x,y)\equiv\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2+C=0. \tag{10}$$

■

习题 (2-1,4). $(ax-by)dx+(bx-cy)dy=0$($b\neq 0$).

解. 显然不是恰当方程. ■

习题 (2-1,5).

$$(t^2+1)\cos u du+2t\sin u dt=0.$$

解. 设 $P(u,t)=(t^2+1)\cos u$,$Q(u,t)=2t\sin u$. 则

$$\frac{\partial P}{\partial t}=2t\cos u=\frac{\partial Q}{\partial u}.$$

可见题目中的微分方程是恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}=P(u)=(t^2+1)\cos u. \tag{11}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=Q(u,t)=2t\sin u. \tag{12}$$

则把式子 (11) 两边沿着 $u$ 坐标方向积分, 得到

$$\phi=(t^2+1)\sin u+f(t). \tag{13}$$

将式 (13) 代入 (12), 得到

$$2t\sin u+f'(t)=2t\sin u. \tag{14}$$

因此 $f(t)=C$. 于是 $\phi=(t^2+1)\sin u+C$. 于是通积分为

$$(t^2+1)\sin u+C=0.$$

■

习题 (2-1,6).

$$(ye^x + 2e^x + y^2)dx + (e^x + 2xy)dy = 0.$$

解. 令 $P(x,y) = ye^x + 2e^x + y^2$,$Q(x,y) = e^x + 2xy$. 则易得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 2y.$$

因此题目中的常微分方程为恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y) = ye^x + 2e^x + y^2. \tag{15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^x + 2xy. \tag{16}$$

先对式 (15) 沿着 $x$ 方向积分, 则

$$\phi = ye^x + 2e^x + xy^2 + f(y). \tag{17}$$

将式 (17) 代入式 (16), 得到

$$e^x + 2xy + f'(y) = e^x + 2xy \Rightarrow f(y) = C. \tag{18}$$

因此 $\phi(x,y) = ye^x + 2e^x + xy^2 + C$, 因此通积分为

$$ye^x + 2e^x + xy^2 + C = 0. \tag{19}$$

■

习题 (2-1,7).

$$(\frac{y}{x} + x^2)dx + (\ln x - 2y)dy = 0.a, b, c\text{均为常数}.$$

解. 设 $P(x,y) = \frac{y}{x} + x^2$,$Q(x,y) = \ln x - 2y$. 则易得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{20}$$

因此是恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x,y) = \frac{y}{x} + x^2, \tag{21}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = Q(x,y) = \ln x - 2y. \tag{22}$$

将式 (22) 沿着 $y$ 方向积分, 得到

$$\phi = y\ln x - y^2 + f(x). \tag{23}$$

将式 (23) 代入式 (21), 可得

$$\frac{y}{x} + f'(x) = \frac{y}{x} + x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C. \tag{24}$$

因此可得 $\phi = y\ln x - y^2 + \frac{1}{3}x^3 + C$. 于是通积分为

$$y\ln x - y^2 + \frac{1}{3}x^3 + C = 0.$$

■

习题 (2-1,8).
$$(ax^2+by^2)dx+cxydy=0$$
*($a,b,c$ 为常数.)*

解. 要分类讨论. 当 $2b=c$ 时, 是恰当微分方程, 否则不是. 我们来针对 $2b=c$ 是恰当微分方程时的情形. 此时原微分方程变为

$$(ax^2+by^2)dx+2bxydy=0.$$

设

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=ax^2+by^2 \tag{25}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2bxy. \tag{26}$$

根据式 (26) 可得

$$\phi=bxy^2+f(x). \tag{27}$$

将式 (27) 代入 (25), 可得

$$by^2+f'(x)=ax^2+by^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}ax^3+C. \tag{28}$$

于是通积分为

$$bxy^2+\frac{1}{3}ax^3+C=0.$$

■

习题 (2-1,9).
$$\frac{2s-1}{t}ds+\frac{s-s^2}{t^2}dt=0.$$

解. 显然是恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{2s-1}{t} \tag{29}$$

得到 $\phi=(2s-1)\ln|t|+f(s)$. 代入下面的式子

$$\frac{\partial\phi}{\partial s}=\frac{s-s^2}{t^2}. \tag{30}$$

可得

$$2\ln|t|+f'(s)=\frac{s-s^2}{t^2}. \tag{31}$$

因此

$$f(s)=-2t(\ln|t|-1)+\frac{1}{2t^2}s^2-\frac{1}{3t^2}s^3+C.$$

因此通积分为

$$(2s-1)\ln|t|-2t(\ln|t|-1)+\frac{1}{2t^2}s^2-\frac{1}{3t^2}s^3+C=0.$$

■

习题 (2-1,10). *$xf(x^2+y^2)dx+yf(x^2+y^2)dy=0$, 其中 $f(\cdot)$ 是连续可微的.*

解. 设 $P(x,y)=xf(x^2+y^2)$,$Q(x,y)=yf(x^2+y^2)$, 令 $x^2+y^2=u$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy\frac{\partial f}{\partial u}. \tag{32}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy\frac{\partial f}{\partial u}. \tag{33}$$

因此题目中的是恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=xf(x^2+y^2), \tag{34}$$

在 $x$ 方向进行积分, 得到 $\phi=\frac{1}{2}F(x^2+y^2)+f(y).$, 其中 $F$ 是 $f$ 的原函数. 代入下式

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=yf(x^2+y^2). \tag{35}$$

可得

$$yf(x^2+y^2)+f'(y)=yf(x^2+y^2)\Rightarrow f(y)=C.$$

于是通积分为

$$\frac{1}{2}F(x^2+y^2)+C=0.$$

■