Picard 定理存在性部分证明

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 数学 112, 学号:1002011005

2014 年 4 月 5 日

在这篇文章里, 笔者证明 Picard 定理中存在性的部分, 即证明下面的定理"有且仅有"中的"有".

定理 (Picard 定理)**.** *设初值问题:*

$$(E): \frac{dy}{dx} = f(x, y), y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R: |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

内连续, 而且对 y 满足 Lipschitz 条件, 即存在一个正实数 h, 使得在矩形区域 R 内任意的不同点 $(x, y_1), (x, y_2)$, 都有

$$\left|\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leqslant h.$$

则 (E) 在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且只有一个解, 其中常数

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M > \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|.$$

证明. 我们考虑该问题的物理意义. 物理意义是质点的一维运动. 其中 x 是时间,y 是位移.$f(x, y)$ 是速度. 质点的速度随时间的函数是连续的. 质点在时间 x_0 从点 y_0 出发, 初始速度为 $f(x_0, y_0)$.

在接下来很短的时间 $[x_0, x_0 + \Delta x)$ 里, 让质点以速度 $f(x_0, y_0)$ 进行匀速直线运动. 当质点走完时间 Δx 后, 我们继续为这个质点分配同样短的一段时间 Δx, 质点在接下来的时间段 $[x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x)$ 内以速度 $f(x_0 + \Delta x, y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x)$ 进行匀速直线运动.

就这样不断地为质点分配相同短的运动时间 Δx, 在每段很短的时间里, 质点的运动都为匀速直线运动, 且速度为质点在该段时间初始的速度. 这样从总体上看来, 质点就存在了一种折线运动方式. 以质点的位置为纵坐标, 时间为横坐标, 我们可以画出质点的时间 -位置图像, 以此来描述质点的运动. 如图(1), 我们发现每段时间为 Δx 的时候, 质点的运动从整体上呈现出一条折线.

易得, 每给定一个 Δx, 质点就存在唯一的一个相应运动方式. 现在, 我们将每小段的时间 Δx 减半, 变成 $\frac{\Delta x}{2}$, 则质点的运动将呈现出如图(2)中的状态.

以此类推, 可见, 当我们不断地将质点的匀速运动时间 Δx 二等分, 质点的运动将会越来越精细. 现在我们来看序列

$$\Delta x, \frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{4}, \cdots, \frac{\Delta x}{2^n}, \cdots$$

该序列中的每一个数都对应着质点的唯一一种折线运动状态. 质点的每个运动状态都是质点的位置关于时间的函数, 因此上面的序列依次对应一列函数

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

由于在微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ 中质点的运动速度是时间的连续函数, 因此当 n 足够大时, 质点在相邻时间段内的运动发生的偏折不会太大, 也即在相邻时间段, 质点的速度的差距不会太大. 更精确地来讲, 对于任意给定的正实数 ε, 都存在相应的正整数 N, 使得对于一切 $n > N$, 当质点按照数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 对应的运动方式进

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

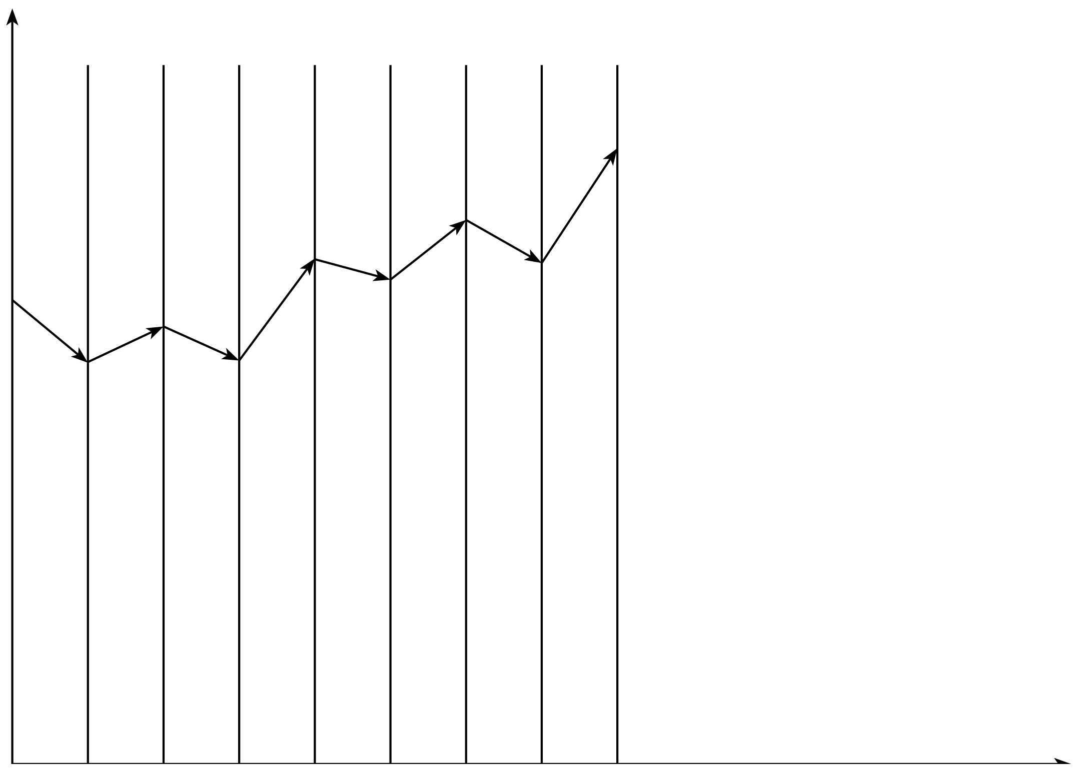

图 1

行折线运动时, 对于任意两个相邻的时间段来说, 质点的速度差都会控制在 ε 以内. 这根据闭区间上的连续函数一致连续是很容易证明的.

现在, 我们证明, 当 $n \to \infty$ 时, 数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 对应的运动方式存在, 且此时很可能已经不再是折线运动, 而可能是一条光滑的曲线. 更加详细地说, 我们要证明的是, 函数列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$$

一致收敛于某个连续可微的函数 $f(x)$.

我们来看数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 对应的质点折线运动路径和 $\frac{\Delta x}{2^{n+1}}$ 对应的质点折线运动路径. 在时间 $[x_0, x_0+\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 里, 两种运动方式完全重合, 因此没有造成路程差. 在时间 $[x_0+\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+2\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 里, 两种运动方式有可能造成距离差异. 不妨设此时数 $\frac{\Delta x}{2^{n+1}}$ 对应的运动方式在时间 $[x_0+\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+2\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 与数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 对应的运动方式造成了距离 G. 然后在时间段 $[x_0+2\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+3\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 里, 根据 Lipchitz 条件, 我们知道, 两种运动方式速度顶多相差 Gh. 因此两种运动方式在经过了时间段 $[x_0+2\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+3\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 后的总路程差至多为 $G+Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}}$.

然后质点继续在时间段 $[x_0+3\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+4\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 里运动. 由于当 n 足够大时, 质点在每个相邻的时间段内速度差都会足够小, 不妨设 $n>N$, 且质点在每个相邻时间段内的速度差都小于 $\varepsilon(n)$(这是由速度的连续性保证的, 闭区间上的连续函数一致连续). 则质点在经过时间段 $[x_0+3\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+4\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 后, 两种运动方式造成的总路程差至多为

$$G+Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}}+(Gh+\varepsilon(n))\frac{\Delta x}{2^{n+1}}.$$

然后, 质点继续运动, 开始经历时间段 $[x_0+4\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+5\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$, 在这段时间里, 根据 Lipchitz 条件, 质点按照两种运动方式最大的速度差为

$$(G+Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}}+(Gh+\varepsilon(n))\frac{\Delta x}{2^{n+1}})h,$$

因此质点在经过时间段 $[x_0+4\frac{\Delta x}{2^{n+1}}, x_0+5\frac{\Delta x}{2^{n+1}}]$ 后, 按照两种运动方式造成的总路程差最大为

$$G+Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}}+(Gh+\varepsilon(n))\frac{\Delta x}{2^{n+1}}+(G+Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}}+(Gh+\varepsilon(n))\frac{\Delta x}{2^{n+1}})h\frac{\Delta x}{2^{n+1}}.$$

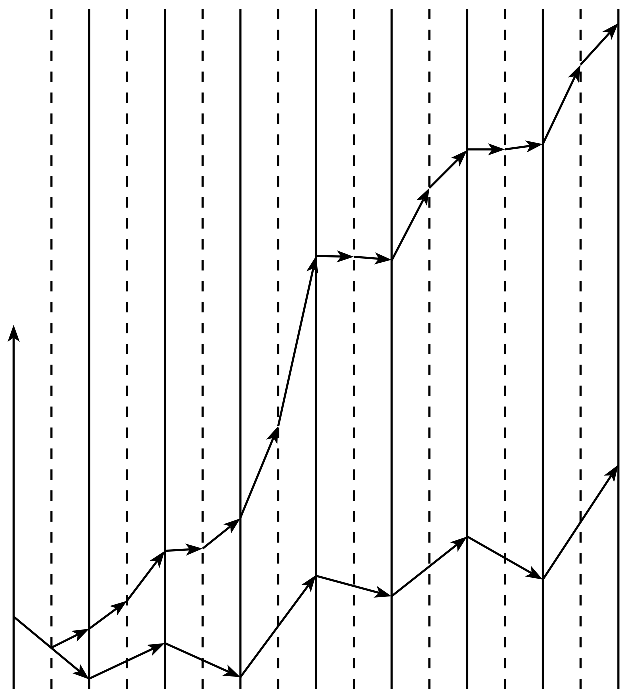

图 2

然后就这样不断地迭代下去. 这真是有点复杂啊, 我得整理一下. 我们面对的是这样的情形, 首先, 我们有一个数 G, 然后将 G 经过函数 T 的作用变成

$$T(G) = G + Gh\frac{\Delta x}{2^{n+1}} + (Gh + \varepsilon(n))\frac{\Delta x}{2^{n+1}}.$$

然后不断迭代

$$T^{(k)}(G) = T(T(T(T(T(\cdots T(G)))))).$$

这里迭代了 k 次. 我们将 T(G) 整理成

$$T(G) = G + Gh\frac{\Delta x}{2^n} + \frac{\varepsilon(n)\Delta x}{2^{n+1}}.$$

其中 $h, \Delta x, \varepsilon(n), n$ 都给定. 我们来看迭代足够多次后,$T^{(2^n)}(G)$ 会不会趋于无界. 为此我们准备求出 $T^{(2^n)}(G)$ 的表达式. 令 $1 + h\frac{\Delta x}{2^n} = P$, $\frac{\varepsilon(n)\Delta x}{2^{n+1}} = Q$, 易得

$$T^{(2^n)}(G) = P^{2^n+1}G + P^{2^n}Q + \cdots + PQ + Q = P^{2^n+1}G + Q(\frac{1-P^{2^n+2}}{1-P}). \tag{1}$$

下面我们来看 P^{2^n}, 易得

$$\lim_{n\to\infty} P^{2^n} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{h\Delta x}{2^n})^{2^n} = e^{h\Delta x}.$$

因此可得

$$\lim_{n\to\infty} T^{(2^n)}(G) = Pe^{h\Delta x}G + Q(\frac{1-P^2e^{h\Delta x}}{1-P}) = \lim_{n\to\infty}(e^{h\Delta x}G + \frac{\varepsilon(n)}{2}(e^{h\Delta x}-1)) = 0.$$

不过, 证到这里, 并没有结束. 我们发现我们的证明方向出现了偏差. 到目前为止, 其实我们只是证明了当 Δx 给定, 且 n 无论多大的时候, 质点按照数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 和 $\frac{\Delta x}{2^{n+1}}$ 两种运动方式走完 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 这段时间所造成的路程差都是有界的, 且当 $n \to \infty$ 时, 造成的路程差也趋于 0. 光凭这一点, 还不能判断质点所有的路径最后会一致收敛于某条路径. 虽然如此, 我们仍然可以继续做下去. 我们已经知道,

$$T^{(2^n)}(G) = P^{2^n+1}G + P^{2^n}Q + \cdots + PQ + Q = P^{2^n+1}G + Q(\frac{1-P^{2^n+2}}{1-P}). \tag{2}$$

将其化简, 可得

$$T^{(2^n)}(G) = P^{2^n+1}G + \frac{\varepsilon(n)}{2h}(P^{2^n+2} - 1) \leqslant P^{2^n+1}\frac{\varepsilon(n)\Delta x}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2h}(P^{2^n+2} - 1)$$

易得

$$\limsup_{n\to\infty} \varepsilon(n) \leqslant \frac{U(n)}{2^n}, \text{其中 } U \text{ 是某个函数, 且 } \lim_{n\to\infty} U(n) = 0.$$

因此

$$T^{(2^n)}(G) \leqslant P^{2^n+1}\frac{\varepsilon(n)\Delta x}{2^{n+1}} + \frac{U(n)}{2^{n+1}h}(P^{2^n+2} - 1)$$

因此对于任意给定的正实数 δ, 都存在相应的足够大的正整数 N, 使得对于任意的 $m, n > N$, 当质点按照数 $\frac{\Delta x}{2^m}$ 和数 $\frac{\Delta x}{2^n}$ 对应的运动方式运动时, 两种运动方式在时间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 造成的路程差会小于 δ. 因此

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$$

一致收敛于某函数 $f(x)$.

至于 $f(x)$ 的连续可微的性, 应该是容易证明和想象的. $\square$