习题2.5.1.8

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 21

习题 (2.5.1.8). 求解微分方程

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \cos y) dy = 0.$$

解. 在微分方程的两边同时乘以非零函数 $u(x,y)$,可得

$$ue^x dx + u(e^x \cot y + 2y \cos y) dy = 0. \tag{1}$$

我们希望 (1) 是个恰当方程,即

$$\frac{\partial u}{\partial y} e^x = \frac{\partial u}{\partial x}(e^x \cot y + 2y \cos y) + u(e^x \cot y).$$

不妨让 u 只是关于 y 的函数,于是我们得到

$$\frac{du}{dy} = u \cot y.$$

于是

$$\frac{1}{u} du - \cot y dy = 0.$$

不妨让 u 和 y 的关系为

$$\ln u - \ln \sin y = 0.$$

即 $u = siny$.于是我们得到恰当微分方程

$$\sin y e^x dx + \sin y (e^x \cot y + 2y \cos y) dy = 0. \tag{2}$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$ 使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=sinye^x\Rightarrow\phi=e^x\sin y+f(y).$$

因此

$$e^x\cos y+f'(y)=e^x\cos y+2y\cos y\sin y.$$

因此

$$f'(y)=y\sin 2y\Rightarrow f(y)=1/4(\sin(2x)-2x\cos(2x))+C.$$

可见,通积分为

$$e^x\sin y+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C=0.$$

$\square$