微分方程初步, 例 2.1

叶卢庆*

2014 年 12 月 15 日

例. 由根式求微分方程:
$$y = c_1e^{a_1x} + c_2e^{a_2x}.$$
其中 c_1, c_2 为任意常数.

解.
$$\begin{cases} y' = c_1a_1e^{a_1x} + c_2a_2e^{a_2x}, \\ y'' = c_1a_1^2e^{a_1x} + c_2a_2^2e^{a_2x}. \end{cases}$$
当 $a_1a_2^2e^{(a_1+a_2)x} - a_2a_1^2e^{(a_2+a_1)x} \neq 0$, 即 $a_1a_2(a_2 - a_1) \neq 0$ 时,c_1 和 c_2 有唯一解. 解得
$$c_1 = \frac{a_1y' - y''}{a_1a_2e^{a_2x} - a_2^2e^{a_2x}}, c_2 = \frac{a_2y' - y''}{a_1a_2e^{a_1x} - a_1^2e^{a_1x}}.$$
将 c_1, c_2 代回原式即可得到相应的微分方程. 而当 $a_1 = a_2 \neq 0$ 时,$y = (c_1 + c_2)e^{a_1x}$, 此时,$y' = (c_1 + c_2)a_1e^{a_1x}$, 于是, 此时微分方程是 $a_1y = y'$. 当 $a_1 = 0$ 时,
$$y = c_1 + c_2e^{a_2x},$$
此时 $y' = c_2a_2e^{a_2x}$, 因此 $a_2y' = y''$. 类似地讨论 $a_2 = 0$ 的情形. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com