《常微分方程教程》[1]定理2.3

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学 号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 15

定理. 设 ***Riccati*** 方程

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m, \tag{1}$$

其中 $a\neq 0,b,m$ 都是常数.又设 $x\neq 0$ 和 $y\neq 0$.则当

$$m=0,-2,\frac{-4k}{2k+1},\frac{-4k}{2k-1}(k=1,2,\cdots) \tag{2}$$

时,方程 (1) 可通过适当的变换化为变量分离方程.

证明. • 当 $m=0$ 时,方程 (1) 为

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=b. \tag{3}$$

即为

$$dy+(ay^2-b)dx=0. \tag{4}$$

当 $ay^2-b\neq 0$ 时,两边同时除以 ay^2-b,可得

$$\frac{1}{ay^2-b}dy+dx=0. \tag{5}$$

这是一个变量分离方程.

• 当 $m=-2$ 时,方程 (1) 为

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{-2}. \tag{6}$$

令 $y(x)=\frac{u(x)}{x}$.则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}x-u}{x^2}.$$

因此 (6) 化为

$$x\frac{du}{dx}-u+au^2=b. \tag{7}$$

(7) 即为

$$xdu+(au^2-u-b)dx=0. \tag{8}$$

当 $au^2-u-b\neq 0$ 时,(8) 化为

$$\frac{1}{au^2-u-b}du+\frac{1}{x}dx=0. \tag{9}$$

这是个变量分离方程.

- 当 $m=\frac{-4k}{2k+1}$ 时,方程 (1) 为

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{\frac{-4k}{2k+1}}=bx^{\frac{-2(2k+1)+2}{2k+1}}=bx^{-2}x^{\frac{2}{2k+1}}. \tag{10}$$

[1].下面我们来解 (10).令

$$y=u(x)x^{-1}x^{\frac{1}{2k+1}}=u(x)x^{\frac{-2k}{2k+1}},$$

则

$$\frac{1}{x^{\frac{-4k}{2k+1}}}\frac{dy}{dx}+au^2(x)=b. \tag{11}$$

且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x^{\frac{-2k}{2k+1}}+\frac{-2k}{2k+1}u(x)x^{\frac{-4k-1}{2k+1}}.$$

因此

$$\frac{du}{dx}x^{\frac{2k}{2k+1}}-\frac{2k}{2k+1}u(x)x^{\frac{-1}{2k+1}}+au^2(x)=b. \tag{12}$$

令 $t=x^{\frac{2k}{2k+1}}$,则

$$\frac{du}{dx}t-u\frac{dt}{dx}+au^2=b. \tag{13}$$

饶恕我吧,我真的不知道该怎么做了!

□

参考文献

1. 李承治. 丁同仁. 常微分方程教程. 高等教育出版社, 2th edition, 2004.

[1]我们发现,如果 $k\to\infty$,则 (10) 化为了 (6),可见 (6) 是 (10) 的极限情形.