习题 2.5.1.6

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 21

习题 (2.5.1.6). 解常微分方程

$$y(1+xy)dx - xdy = 0. \tag{1}$$

解. 在微分方程 (1) 的两边同时乘以非零函数 $u(x,y)$, 可得

$$u(x,y)y(1+xy)dx - u(x,y)xdy = 0. \tag{2}$$

我们希望 (2) 是一个恰当微分方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial y}y(1+xy) + u(2+2xy) = -\frac{\partial u}{\partial x}x.$$

不妨让 u 只是关于 y 的函数, 则我们有

$$\frac{du}{dy}y(1+xy) + 2u(1+xy) = 0.$$

当 $xy \neq -1$ 时, 即

$$\frac{du}{dy}y + 2u = 0.$$

当 $y \neq 0$ 时, 不妨让 $u = \frac{1}{y^2}$. 因此我们得到恰当微分方程

$$(\frac{1}{y} + x)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0.$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} + x \Rightarrow \phi = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + f(y).$$

因此,

$$-\frac{x}{y^2}+f'(y)=\frac{-x}{y^2}\Rightarrow f(y)=C.$$

因此我们得到通积分

$$\frac{x}{y}+\frac{1}{2}x^2+C=0.$$

而当 $xy=-1$ 时, 可得 $xdy+0dx=0$, 因此 $y=D,x=\frac{-1}{D}$. 而当 $y=0$ 时, 我们有解 $y=0,x$ 任意.

$\square$