习题 2.5.1.5

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 20

习题 (2.5.1.5). 求解微分方程

$$2xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0.$$

解. 将方程两边同时乘以非零函数 $u(x, y)$, 可得

$$2xy^3u(x,y)dx + u(x,y)(x^2y^2 - 1)dy = 0. \tag{1}$$

我们希望 (1) 是恰当的. 即

$$2xy^3\frac{\partial u}{\partial y} + 4xy^2u = \frac{\partial u}{\partial x}(x^2y^2 - 1).$$

不妨设 u 是只关于 y 的函数, 则得到

$$2xy^3\frac{du}{dy} + 4xy^2u = 0.$$

当 $xy \neq 0$ 时, 可得

$$y\frac{du}{dy} + 2u = 0$$

不妨让 $u = \frac{1}{y^2}$. 因此我们得到恰当微分方程

$$2xydx + (x^2 - \frac{1}{y^2})dy = 0. \tag{2}$$

设存在二元函数 $\phi(x, y)$ 使得

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \phi = x^2y + f(y).$$

因此

$$x^2+f'(y)=x^2-\frac{1}{y^2}\Rightarrow f(y)=\frac{1}{y}+C.$$

因此可得通积分为

$$x^2y+\frac{1}{y}+C=0.$$

而当 $y=0$ 时, 可得

$$-1dy+0dx=0.$$

可得 x 可取任意值.

□