# 积分因子法求解 Bernoulli 方程: 第 1 次失败尝试

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 22

形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

的方程称为 Bernoulli 方程, 其中 $n\neq 0,1$. 我们已经用变量替换法解决过它. 现在我们用积分因子法解决它. 我们将 Bernoulli 方程化为

$$dy+(p(x)y-q(x)y^n)dx=0. \tag{1}$$

将微分方程 (1) 进行分组, 变成

$$(dy-q(x)y^ndx)+p(x)ydx=0. \tag{2}$$

对于微分方程

$$dy-q(x)y^ndx=0 \tag{3}$$

来说, 当 $y\neq 0$ 时, 易得积分因子为 $\frac{1}{y^n}$.(3) 两边同时乘以 $\frac{1}{y^n}$ 后, 得到

$$\frac{1}{y^n}dy-q(x)dx=0. \tag{4}$$

易得通积分为

$$\frac{1}{1-n}y^{-n+1}-\int q(x)dx+C=0.$$

易得 $\frac{1}{y^n}g(\frac{1}{1-n}y^{-n+1}-\int q(x)dx)$ 也是 (3) 的积分因子, 其中 $g$ 可微. 下面我们来看微分方程

$$p(x)ydx=0. \tag{5}$$

易得积分因子为 $\frac{1}{y}$,(5) 两边乘以积分因子后, 得到通积分为

$$\int p(x)dx + C = 0.$$

易得 $\frac{1}{y}h(\int p(x)dx)$ 也是 (5) 的一个积分因子, 其中 $h$ 可微. 我们希望,

$$\frac{1}{y^n}g(\frac{1}{1-n}y^{-n+1} - \int q(x)dx) = \frac{1}{y}h(\int p(x)dx).$$

即

$$\frac{1}{y^{n-1}}g(\frac{1}{1-n}y^{-n+1} - \int q(x)dx) = h(\int p(x)dx).$$

然后不知道该怎么做了!