"Houston, we've had a problem."

James A. Lovell,in Apollo 13 spacecraft

解析 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2014. 12. 16

我们来看微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0. \tag{1}$$

其中 P,Q 是连续函数.那么这个微分方程到底是什么意思呢?其实该微分方程 确定了 dx 和 dy 在任意一点 (x_0,y_0) 处的线性关系.在任意一点 (x_0,y_0),我们有关系

$$P(x_0,y_0)dx+Q(x_0,y_0)dy=0.$$

其中 dx 和 dy 都是变化的实数,只是通常选的比较小.不妨设 $P(x_0,y_0)\neq 0$[1],那么我们知道,dx 将会成为 dy 的正比例函数,它们之间的函数关系为

$$dx=\frac{-Q(x_0,y_0)}{P(x_0,y_0)}dy.$$

dy 每取一个值,dx 都会相应地取唯一的一个值.如果 x 和 y 在 (x_0,y_0) 附近有函数关系 $x=p(y)$,且 p 在点 y_0 处可微,那么我们将 dy 视作自变量 y 从 y_0 改变到 y_0+dy 的改变量,此时因变量 x 相应改变 Δx,那么

$$\lim_{dy\to 0}\frac{\Delta x}{dy}=p'(y_0).$$

此时,令

$$p'(y_0)=\frac{-Q(x_0,y_0)}{P(x_0,y_0)}, \tag{2}$$

[1]或者可以设 $Q(x_0,y_0)\neq 0$,两者必占其一,因此选取一种.因为如果 $P(x_0,y_0)$ 和 $Q(x_0,y_0)$ 都为0,那么就没什么意思了.

那么我们有

$$\lim_{dy\to 0}\frac{\Delta x}{dy}=\frac{dx}{dy}.$$

此时,称微分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处是恰当的.如果 (2) 不成立,那么微 分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处不是恰当的.如果 x 和 y 在 (x_0, y_0) 附近有函数关系 $x = p(y)$,但是 p 在 (x_0, y_0) 处不可微, 那么微分方程 (1) 在 (x_0, y_0) 处不是恰当的.如果 x 和 y 在 (x_0, y_0) 附近没有函数关系 $x = p(y)$,那么 (1) 不是恰当微分方程.