n 阶常微分方程通解中常数独立的意义

叶卢庆*

2014 年 12 月 16 日

丁同仁, 李承治编《常微分方程教程》第二版的定义 1.3 给出了 n 阶常微分方程

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

的通解的定义:

定义. 如果 $y = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 是方程 *1* 的解, 且常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是独立的, 那么称 $y = \phi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 是方程 *1* 的通解. 所谓 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 独立, 其含义是 *Jacobi* 行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial C_1} & \frac{\partial \phi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial \phi'}{\partial C_1} & \frac{\partial \phi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \phi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2}$$

其中

$$\begin{cases} \phi = \phi(x, C_1, \cdots, C_n), \\ \phi^{(1)} = \phi^{(1)}(x, C_1, \cdots, C_n), \\ \phi^{(2)} = \phi^{(2)}(x, C_1, \cdots, C_n), \\ \vdots \\ \phi^{(n-1)} = \phi^{(n-1)}(x, C_1, \cdots, C_n). \end{cases} \tag{3}$$

有些人可能会看不懂, 书上为什么用这么晦涩的方式来定义 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的独立性? 这到底是什么意思? 下面我利用反函数定理来解释. 对于微分方程 (1), 我们给出初值条件:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

把这些初值条件代入 (3) 时, 得到

$$\begin{cases} y_0 = \phi(x_0, C_1, \cdots, C_n), \\ y_1 = \phi^{(1)}(x_0, C_1, \cdots, C_n), \\ \vdots \\ y_{n-1} = \phi^{(n-1)}(x_0, C_1, \cdots, C_n) \end{cases} \tag{4}$$

由于行列式 (2) 不为 0, 因此根据多元反函数定理, 可得方程组 (4) 中的 $C_1, \cdots, C_n$ 能被解出, 也即,$C_1, \cdots, C_n$ 能分别被表达成 $y_0, \cdots, y_{n-1}, x_0$ 的关系式. 这就是常数 $C_1, \cdots, C_n$ 独立的意义.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com