《常微分方程教程》例 2.4.3

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 10

例 (2.4.3). 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解. 当 $x \neq y$ 时, 上式化为

$$(x-y)dy - (x+y)dx = 0.$$

令 $y(x) = u(x)x$, 可得

$$x(1-u)dy - x(1+u)dx = 0.$$

由于

$$dy = udx + xdu.$$

将此代入微分方程, 可得

$$x(1-u)(udx + xdu) - x(1+u)dx = 0.$$

整理一下, 可得

$$dx(ux(1-u) - x(1+u)) + du(x^2(1-u)) = 0.$$

当 $x \neq 0$ 时, 两边同时除以 x, 可得

$$dx(-u^2 - 1) + du(x(1-u)) = 0.$$

也即,

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1-u}{-u^2-1}du = 0.$$

这是个变量分离方程, 设二元函数 $\phi(x,u)$ 有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{x}\Rightarrow\phi=\ln|x|+f(u).$$

于是,

$$f'(u)=-\frac{1-u}{1+u^2}\Rightarrow f(u)=\frac{1}{2}\log(u^2+1)-\tan^{-1}(u)+C.$$

因此通积分为

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\log(u^2+1)-\tan^{-1}(u)+C=0.$$

也就是

$$\ln|x^2+y^2|-2\tan^{-1}(\frac{y}{x})+D=0.(x\neq y)$$

当 $x=0$ 时,

$$y=-x+C.(x\neq y).$$

$\square$