《常微分方程教程》[1]习题 **2-2,5**

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 3

习题 (2-2,5). 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{1}$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某邻域 (例如区间 $|y - a| \le \varepsilon$) 内连续, 且 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$. 则在直线 $y = a$ 上的每一点, 方程 (1) 的解是局部唯一的, 当且仅当瑕积分

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| = \infty.$$

注 **1.** 首先我得抱怨一下, 书上在给我做这个题目之前并没有介绍"局部唯一"是什么意思. 我将其理解成, 对于直线 $y = a$ 上的任意一个点 (x_0, a), 当 (x_0, a) 的邻域足够小的时候, 满足方程 (1) 的所有积分曲线中, 仅有一条积分曲线通过了 (x_0, a)(也就是仅有 $y = a$ 通过了 (x_0, a)). 另外, 在本文里, 笔者规定所有的邻域都是圆形的.

证明. $\Leftarrow$: 当 $y \neq a$ 时, 我们把 (1) 化为

$$\frac{1}{f(y)} dy - dx = 0. \tag{2}$$

对 (2) 进行积分, 得到通积分

$$\phi(x, y) \equiv \int \frac{1}{f(y)} dy - x + C = 0. \tag{3}$$

[1]丁同仁, 李承治编著, 高等教育出版社第二版.

其中 C 是一个常数. 在这里要注意, 虽然对于 $\frac{1}{f(y)}$ 来说,$y=a$ 时是没意义的, 但是对于 $\phi(x,y)$ 来说,$y=a$ 时是可能有意义的.(3) 结合

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=\infty,$$

可得对于任意给定的正实数 M, 都存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$, 使得对于积分曲线 (3) 上的点 (x_0,y_0) 来说, 当 $y_0\in(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$ 时, 有 $|x_0|>M$. 因此积分曲线 $\phi(x,y)=0$ 与积分曲线 $y=a$ 不相交, 否则设交于 (x_1,a), 由于积分曲线 $\phi(x,y)=0$ 连续, 那么可得 $|x_1|$ 不是一个实数, 而是一个无穷大, 矛盾.

$\Rightarrow$: 若

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|\neq\infty,$$

则

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=N,$$

那么可得积分曲线 (3) 与积分曲线 $y=a$ 交于 $C+N$ 或 $C-N$ 处. 矛盾. $\square$