定理3.1:皮卡定理(唯一性)

叶卢庆
杭州师范大学理学院,学 号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 29

定理 (皮卡定理)**.** 设初值问题:

$$(E): \frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$$

内连续,而且对 y 满足李普希兹条件.则 (E) 在区间 $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ 上有且只 有一个解,其中常数

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, M > \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|.$$

证明. 首先,笔者要做一个声明,就是笔者不打算过分地关注 h 的具体数值.而且笔者 在此文章中,只是考虑唯一性的证明.至于存在性的证明,笔者在将来考虑.

我们考虑该问题的物理意义.物理意义是质点的一维运动.其中 x 是时间,y 是位移.$f(x,y)$ 是速度.质点的速度是连续的.质点在时间 x_0 从点 y_0 出发,初始速度为 $f(x_0,y_0)$.

而李普希兹条件是为了给速度一个控制.质点可能存在多种运动方式,但是李普 希兹条件保证了,在同一个时刻 t,速度不会超过在 t 时刻不同运动方式导致的 位移差的某个固定倍数.题目就是叫我们证明,李普希兹条件导致了该质点在出发不 久的时间里运动方式的唯一性.

我们先来看下面这种特殊情形.如果质点在时间 x_0,位置 y_0的速度 为0,即 $f(x_0, y_0) = 0$,且 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续且对y 满足李 普希兹条件,则质点在时间 x_0 附近足够短的时间段内的唯一运动方式就是静止在 y_0 处.下面 我们来证明这一点.我们用反证法.假如质点在 x_0 附近的任意短的时间段内,除了静止之外, 还有一种运动方式,设依着这种运动方 式,质点的速度随时间的函数为 $h(t)$,则我们知道,$h(x_0) = 0$.经过时 间 t,质点的位移为

$$\int_{x_0}^{x_0+t} h(s)ds.$$

由于当 $t \to 0$ 时,

$$\int_{x_0}^{x_0+t} h(s)ds = o(h(x_0 + t)),$$

因此当 $\int_{x_0}^{x_0+t} h(s)ds \neq 0$ 时,

$$\lim_{t \to 0} \frac{h(x_0 + t)}{\int_{x_0}^{x_0+t} h(s)ds} = \infty.$$

可见,李普希兹条件不满足.因此质点只能是静止这一种运动方式.

接下来我们看一般情形.假如质点在时间 x_0,位置 y_0的速度 为 $f(x_0, y_0)$,其中 $f(x_0, y_0)$ 未必为0,且 $f(x, y)$ 在矩形区域 R 内连续且对y 满足李 普希兹条件,则质点在时间 x_0 附近足够短的时间段内的运动方式是唯一的.我 们采用反证法.假设质点在时间 x_0 附近的任意短的时间段内的运动方式不唯一,则设存在两种运动方式 A 和 B.当质点按照运动方式 A 的时候,设速度随时间的函数为 $V_A(t)$.当质点按照运动方式 B 的时候,设速度随时间的函数为 $V_B(t)$.我们知 道,$V_A(x_0) = f(x_0, y_0)$,且经过时间 t 后,质点按照运动方式 A 的位移为

$$\int_{x_0}^{x_0+t} V_A(s)ds.$$

按照运动方式 B 的位移为

$$\int_{x_0}^{x_0+t} V_B(s)ds.$$

下面我们来看

$$V_A(t) - V_B(t)$$

与

$$\int_{x_0}^{x_0+t} (V_A(s) - V_B(s))ds.$$

易得当 $t \to 0$ 时,

$$\int_{x_0}^{x_0+t} (V_A(s) - V_B(s))ds = o(V_A(t) - V_B(t)).$$

因此,当 $\int_{x_0}^{x_0+t} (V_A(s) - V_B(s))ds \neq 0$ 时,我们有

$$\lim_{t \to 0} \frac{V_A(t) - V_B(t)}{\int_{x_0}^{x_0+t} (V_A(s) - V_B(s))ds} = \infty.$$

因此,李普希兹条件不满足,矛盾. $\square$