从运动的角度看隐函数定理

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 8

隐函数存在定理叙述如下:

定理 (隐函数存在定理). 设 $f:\mathbf{R}^{n+m}\to\mathbf{R}^m$ 为连续可微函数, $\mathbf{R}^{n+m}$ 中的元素写成 $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ 的形式. 对于任意一点 $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$ 使得 $f(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$, 隐函数存在定理给出了一个充分条件, 用来判断能否在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 附近定义一个 $\mathbf{y}$ 关于 $\mathbf{x}$ 的函数 g, 使得只要 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, 就有 $\mathbf{y}=g(\mathbf{x})$. 严格地说, 就是存在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的邻域 U 和 V, 使得 g 是从 U 到 V 的函数, 并且 g 的函数图像满足

$$\{(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))\}=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})|f(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\}\cap(U\times V).$$

要使的这样的函数 g 存在, 函数 f 的雅可比矩阵一定要满足一定的性质. 对于给定的一点 (a,b),f 的雅可比矩阵写做

$$(Df)(\mathbf{a},\mathbf{b})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{a},\mathbf{b})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{a},\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{a},\mathbf{b})\end{array}\right]=[X|Y]$$

隐函数存在定理说明了: 如果 Y 是一个可逆的矩阵, 那么满足前面性质的 U,V 和函数 g 就会存在.

隐函数存在定理是反函数定理的简单推理. 因此为了从运动的角度解释隐函数存在定理, 我们需要先从运动的角度解释反函数定理. 反函数定理叙述如下:

定理 (反函数定理). 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集合, 并设 $f: E \to \mathbf{R}^n$ 是在 E 上连续可微的函数. 假设 $x_0 \in E$ 使得线性映射 $f'(x_0): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是可逆的, 那么存在含有 x_0 的开集 $U \subset E$ 以及含有 $f(x_0)$ 的开集 $V \subset \mathbf{R}^n$, 使得函数 f 是从 U 到 V 的双射[a]. 而且 f 的逆映射 $f^{-1}: V \to U$ 在点 $f(x_0)$ 处可微, 满足 $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$.

[a]严格地来说, 此时函数 f 的定义域已经改变, 从 E 变成了 U, 已经不再是同一个函数, 但是这影响不大, 我们忽略这种差别.