《常微分方程教程》习题 2-2,4

一个跟踪问题

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 10. 31

习题 (2-2,4). 跟踪: 设某 A 从 Oxy 平面的原点出发, 沿 x 轴正方向前进; 同时某 B 从点 $(0,b)$ 开始跟踪 A, 即 B 的运动方向永远指向 A 并与 A 保持等距 b. 试求 B 的光滑运动轨迹.

解. 设在时刻 t 的时候 A 位于 $(f(t),0)$. 其中 $f(0)=0$, 且 $f(t)$ 是关于 t 的严格单调增函数. 设在时刻 t 的 B 位于 $(P(t),Q(t))$, 其中 $P(0)=0,Q(0)=b$. 不妨设 $b\neq 0$, 否则 B 的运动将与 A 重合, 这是没什么意思的, 再根据对称性不妨设 $b>0$. 且由于 B 的路径光滑, 因此关于 t 的函数 P,Q 都是连续可微的. 由于 B 的方向一直指向 A, 因此

$$(P'(t),Q'(t))=k(f(t)-P(t),-Q(t)). \tag{1}$$

其中 $k>0$. 由于 A,B 间距始终为 b, 因此

$$[P(t)-f(t)]^2+Q(t)^2=b^2. \tag{2}$$

当 $Q(t)\neq 0$ 时,$Q'(t)$ 也不为 0. 此时将 (1) 代入 (2) 可得

$$(P'(t))^2+(Q'(t))^2=b^2k^2=b^2\frac{Q'(t)^2}{Q(t)^2}. \tag{3}$$

于是我们就得到了微分方程

$$(\frac{P'(t)}{Q'(t)})^2+1=\frac{b^2}{Q(t)^2}. \tag{4}$$

也就是

$$(\frac{dP(t)}{dQ(t)})^2+1=\frac{b^2}{Q(t)^2}.$$

也即

$$\frac{dx}{dy}=-\sqrt{(\frac{b}{y})^2-1}.$$

令 $\frac{b}{y}=\cosh a$. 其中 $a\in\mathbf{R}^+$, 于是,

$$\frac{dy}{da}=\frac{-b\tanh a}{\cosh a}.$$

且

$$\frac{dx}{dy}=-\sinh a.$$

因此,

$$\frac{dx}{da}=b(\tanh a)^2=b-b\tanh' a.$$

因此,

$$x=ba-b\tanh a+C.$$

因此,

$$x=b\cosh^{-1}\frac{b}{y}-b\tanh(\cosh^{-1}\frac{b}{y})+C.$$

将初始条件 $x=0,y=b$ 代入, 解得 $C=0$. 于是 B 的光滑轨迹为

$$x=b\cosh^{-1}\frac{b}{y}-b\tanh(\cosh^{-1}\frac{b}{y}).$$

通过这个方程, 我们发现 B 的运动轨迹和 A 的运动无关!

当 $Q(t)=0$ 时, 易得 B 已经和 A 同在 x 轴上运动. □