《常微分方程教程》习题 2.3.6

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 8

习题 (2.3.6). 设连续函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有界. 证明: 方程

$$y' + y = f(x)$$

在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上有且仅有一个有界解. 试求出这个有界解, 并进而证明: 当 $f(x)$ 还是以 w 为周期的周期函数时, 这个有界解也是一个以 w 为周期的周期函数.

证明. 我们用反证法. 假如方程有两个有界解 $y_1(x), y_2(x)$, 即

$$y_1'(x) + y_1(x) = f(x), \tag{1}$$

$$y_2'(x) + y_2(x) = f(x), \tag{2}$$

则可得

$$(y_1(x) - y_2(x))' = -(y_1(x) - y_2(x)). \tag{3}$$

设 $p(x) = y_1(x) - y_2(x)$, 则

$$p'(x) = -p(x) \Rightarrow p(x) = ce^{-x}. \tag{4}$$

由于 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $y_1(x_0) \neq y_2(x_0)$, 因此 $c \neq 0$. 令 $x \to -\infty$, 可得 $|p(x)| = |y_1(x) - y_2(x)| \to \infty$, 这与 $y_1(x), y_2(x)$ 有界矛盾. 可见只可能存在一个有界解. 下面求出这个有界解 $y(x)$. 把题目中的微分方程化为

$$dy + (y - f(x))dx = 0. \tag{5}$$

方程两边同时乘以积分因子 e^x, 得到恰当微分方程

$$e^x dy + e^x(y - f(x))dx = 0. \tag{6}$$

设存在二元函数 $\phi(x,y)$, 使得

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = e^x \Rightarrow \phi = ye^x + h(x).$$

因此

$$ye^x + h'(x) = ye^x - f(x)e^x. \Rightarrow h'(x) = -f(x)e^x.$$

于是得到

$$e^x y + C = \int f(x)e^x dx.$$

则

$$e^{x_a}y_a - e^{x_b}y_b = \int_{x_b}^{x_a} f(x)e^x dx.$$

令 $x_b \to -\infty$, 由于 y 有界, 因此 $-e^{x_b}y_b \to 0$, 由于 $f(x)$ 有界, 因此

$$\int_{-\infty}^{x_a} f(x)e^x dx$$

是一个实数. 可见,

$$y_a = \frac{\int_{-\infty}^{x_a} f(x)e^x dx}{e^{x_a}}.$$

至于有界解和 $f(x)$ 有同样的周期从如上公式可以显然看出. $\square$