《常微分方程教程》[1]习题 2-2,5

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 2

习题 (2-2,5). 设微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(y), \tag{1}$$

其中 $f(y)$ 在 $y = a$ 的某邻域 (例如区间 $|y - a| \le \varepsilon$) 内连续, 且 $f(y) = 0$ 当且仅当 $y = a$. 则在直线 $y = a$ 上的每一点, 方程 (1) 的解是局部唯一的, 当且仅当瑕积分

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| = \infty.$$

注 **1.** 首先我得抱怨一下, 书上在给我做这个题目之前并没有介绍"局部唯一"是什么意思. 我将其理解成, 对于直线 $y = a$ 上的任意一个点 (x_0, a), 当 (x_0, a) 的邻域足够小的时候, 满足方程 (1) 的所有积分曲线中, 仅有一条积分曲线通过了 (x_0, a) 的该邻域. 另外, 在本文里, 笔者规定所有的邻域都是圆形的.

注 **2.** 该题目有明显的物理意义. 将 x 看作时间, 将 y 看作质点在一条直线上的一维位置. 则 $\frac{dy}{dx} = f(y)$ 表示质点在直线上的一维速度. 质点的速度在位置区间 $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ 上连续 (这在物理中是自明的, 速度不会突变.), 且只有在位置 $y = a$ 的地方速度才为 0. 且质点的速度是位置的函数. 我们知道, 满足如上条件的质点可能有无数种运动方式.

如果质点所有的运动方式都有如下特征: 当质点还没达到 $y = a$ 这个位置, 但是已经很接近 $y = a$ 这个位置的时候, 如果质点每接近 $y = a$ 这

[1]丁同仁, 李承治编著, 高等教育出版社第二版.

个位置相同的距离, 所花费的时间会越来越长, 最后是寸步难进 (虽然始终在运动), 即使向 $y=a$ 前进哪怕是很小很小的一段距离, 所消耗的时间也会惊人地多, 以至于无论给这个质点多长的时间, 质点都将无法到达 $y=a$ 这个位置, 那么想要质点在一定的时间内通过 $y=a$ 的哪怕是很小很小的邻域都是做不到的, 唯一能做的就是把质点直接放在 $y=a$ 这个地方保持静止.

而相反地, 如果质点无法在一定的时间内通过 $y=a$ 的哪怕是很小很小的邻域, 那么在别处的质点只有经过无穷长的时间才能达到 $y=a$ 处 (也就是永远达不到).

证明. 当 $y \neq a$ 时, 我们把 (1) 化为

$$\frac{1}{f(y)}dy - dx = 0. \tag{2}$$

对 (2) 进行积分, 得到通积分

$$\int \frac{1}{f(y)}dy - x + C = 0. \tag{3}$$

其中 C 是一个常数. 该通积分在 $y \neq a$ 的时候, 确定了 x 和 y 的函数关系 $x = g(y)$.

$\Leftarrow$: 假如存在直线 $y=a$ 上的某个点 (x_0, a), 微分方程在 (x_0, a) 的任意邻域内解不唯一, 即除了 $y=a$ 这个解外还有其它解, 那么有如下几个关键点:

- 瑕积分

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| = \infty, \text{意思就是} |\int_a^{a+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| = \infty \text{以及} |\int_a^{a-\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| = \infty. \tag{4}$$

- $\frac{1}{f(y)}$ 在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 的去心邻域内连续, 可得对于任意给定的正实数 $\delta \in (0, \varepsilon)$,

$$|\int_{a-\delta}^{a-\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| \text{和} |\int_{a+\delta}^{a+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| \text{都有限}. \tag{5}$$

将第 1 个关键点和第 2 个关键点结合起来, 可得如下关键点

- 对于任意给定的正实数 $\delta \in (0, \varepsilon)$,

$$|\int_{a-\delta}^{a} \frac{dy}{f(y)}| = \infty \text{以及} |\int_a^{a+\delta} \frac{dy}{f(y)}| = \infty. \tag{6}$$

下面我们把 (6) 和 (3) 结合起来, 推出矛盾. 由(3) 结合 Newton-Leibniz 公式可知, 当 (x, y) 处于点 (x_0, a) 的足够小的邻域 V 内时,$\frac{dy}{f(y)}$ 在邻域 V 内的积分也会足够小 (不会超过邻域 V 的直径), 这与 (6) 矛盾.

$\Rightarrow$: 易得满足方程 (1) 的积分曲线是可微的, 因此连续. 当在直线 $y = a$ 的每一点上微分方程 (1) 的解都是局部唯一的时候, 也就是说, 方程(1) 在直线 $y = a$ 的任意一点 (x_0, a) 的足够小的邻域 U 上的唯一解是 $y = a$ 本身, 此时, 任意给定的积分曲线

$$\int \frac{1}{f(y)} dy - x + C_0 = 0. \tag{7}$$

都将避开邻域 U. 假如

$$|\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}| \neq \infty,$$

那么

$$\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} = M, \tag{8}$$

其中 M 是一个实数. 当然, 在这里, 我们不考虑 $\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}$ 不存在的情形, 因为由于 $\frac{1}{f(y)}$ 在 a 的去心邻域上的连续性,$\int_a^{a\pm\varepsilon} \frac{dy}{f(y)}$ 不存在的现象不会发生.

式 (8) 结合 (3), 可得积分曲线会在点 (M, a) 处和直线 $y = a$ 相交! 矛盾! $\square$