《常微分方程教程》[1]习题 2-2,2

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 10. 30

求解下来微分方程的初值问题.

习题 (2-2,2,(1)).

$$\sin 2x dx + \cos 3y dy = 0, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}.$$

解. 我们先求通解. 显然题目中的微分方程是恰当微分方程. 设

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin 2x, \tag{1}$$

得到

$$\phi = -\frac{1}{2}\cos 2x + f(y). \tag{2}$$

代入下式

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cos 3y. \tag{3}$$

可得

$$f'(y) = \cos 3y \Rightarrow f(y) = \frac{1}{3}\sin 3y + C. \tag{4}$$

于是通积分为

$$-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3y + C = 0. \tag{5}$$

将初值条件代入, 可得

$$\frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

于是可得微分方程的积分为

$$-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3y - \frac{1}{2} = 0.$$

□

[1] 丁同仁, 李承治编著, 高等教育出版社第二版.

习题 (2-2,2,(2)).

$$xdx + ye^{-x}dy = 0, y(0) = 1.$$

解. 显然, 题目中不是恰当方程. 那我们该怎么办呢? 我们另寻出路. 我们发现,

$$e^x xdx + ydy = 0. \tag{6}$$

是一个恰当方程, 我们在下面粉色的阴影部分证明方程 (6) 和题目中的方程等价.

我们来看恰当微分方程

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{7}$$

在任意一个点 (x_0, y_0) 处, 函数 P, Q 的取值分别为 $P(x_0, y_0)$,$Q(x_0, y_0)$. 不妨设 $Q(x_0, y_0) \neq 0$. 根据隐函数定理, 可知在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内,y 是 x 的可微函数 $g(x) = y$. 然后点 (x_0, y_0) 中横坐标变量改变一个微小的量 dx , 纵坐标变量相应改变 $dy = g'(x_0)dx$, 于是点 (x_0, y_0) 变成了点 $(x_0 + dx, y_0 + dy)$. 方程 (7) 告诉了我们 dx 和 dy 的关系:

$$P(x_0, y_0)dx + Q(x_0, y_0)dy = 0. \tag{8}$$

方程 (7) 两边同时乘以一个非零函数 $U(x,y)$, 就可能得到一个非恰当微分方程

$$U(x,y)P(x,y)dx + U(x,y)Q(x,y)dy = 0. \tag{9}$$

对于如上的非恰当微分方程来说, 显然在 (x_0, y_0) 的某个邻域内,y 和 x 仍拥有相同的函数关系 $y = g(x)$.

于是

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = y \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}y^2 + f(x) \Rightarrow f'(x) = xe^x \Rightarrow f(x) = xe^x - e^x + C.$$

于是通积分为

$$\frac{1}{2}y^2 + xe^x - e^x + C = 0$$

将初始条件 $x = 0, y = 1$ 代入通积分, 解得

$$C = \frac{1}{2}.$$

□

习题 (2-2,2,(3)).

$$\frac{dr}{d\theta} = r, r(0) = 2.$$

解. 显然,

$$r = 2e^{\theta}.$$

□

习题 (2-2,2,(4)).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln|x|}{1+y^2}, y(1) = 0.$$

解. 可得

$$(1+y^2)dy - \ln|x|dx = 0.$$

这是一个恰当微分方程. 可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y} &= 1+y^2 \Rightarrow \phi \\ &= \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + f(x) \Rightarrow f'(x) = -\ln|x| \Rightarrow f(x) = -x\ln|x| + x + C.\end{aligned}$$

于是通积分为

$$\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - x\ln|x| + x + C = 0.$$

将 $x = 1, y = 0$ 代入, 解得 $C = -1$. □

习题 (2-2,2,(5)).

$$\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx} = xy^3, y(0) = 1.$$

解. 当 $y \neq 0$ 时, 可得

$$\frac{1}{y^3}dy - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = 0.$$

这是一个恰当微分方程. 于是,

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{1}{y^3} \Rightarrow \phi = \frac{-1}{2}y^{-2} + f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f(x) = -\sqrt{1+x^2} + C.$$

于是通积分为

$$\frac{-1}{2}y^{-2} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C = 0.$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入, 解得 $C = \frac{3}{2}$.

当 $y = 0$ 时, 易得无解. □