《常微分方程教程》*习题 1-1,3

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com

October 24, 2013

习题 (习题 1-1,3,(1)). 求出曲线族 $y = Cx + x^2$ 所满足的微分方程.

解. 易得为

$$y'' = 2. \tag{1}$$

■

注. 注意 $y = Cx + x^2$ 并非 $y'' = 2$ 的通解.

习题 (习题 1-1,3,(2)). 求曲线族 $y = C_1e^x + C_2xe^x$ 所满足的微分方程.

解. 可得

$$\begin{cases} y = \phi(x, C_1, C_2) = C_1e^x + C_2xe^x, \\ y' = \phi'(x, C_1, C_2) = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x \end{cases}. \tag{2}$$

且

$$y'' = C_1e^x + 2C_2e^x + C_2xe^x. \tag{3}$$

由式 (2) 可得雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial C_1} & \frac{\partial\phi}{\partial C_2} \\ \frac{\partial\phi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\phi'}{\partial C_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0. \tag{4}$$

因此 C_1, C_2 是独立的. 因此可以反解出

$$\begin{cases} C_2 = \frac{y'-y}{e^x} \\ C_1 = \frac{y+xy-xy'}{e^x} \end{cases}. \tag{5}$$

将式 (5) 代入式 (3), 可得

$$y'' = 2y' - y. \tag{6}$$

式 (6) 即为曲线族 $y = C_1e^x + C_2xe^x$ 所满足的微分方程. ■

习题 (习题 1-1,3,(3)). 求平面上以原点为中心的一切圆所满足的微分方程.

*丁同仁, 李承治著, 第二版, 高等教育出版社

解. 平面上以原点为中心的任意圆都可以表达成

$$x^2+y^2=r^2 \tag{7}$$

的形式, 其中 r 是任意给定的非零实数. 将 y 看作 x 的隐函数, 则得

$$2x+2yy'=0. \tag{8}$$

即

$$x+yy'=0. \tag{9}$$

此即以原点为中心的一切圆所满足的微分方程. ■

习题 (习题 1-1,3,(4)). 试求平面上一切圆所满足的微分方程.

解. 平面上的任意一个圆的一般方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, r\in\mathbf{R}^+. \tag{10}$$

将 y 看作 x 的隐函数, 可得

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{11a}$$

$$(x-a)+(y-b)y'=0 \tag{11b}$$

$$1+y'^2+(y-b)y''=0 \tag{11c}$$

将式 (11b) 两边同时乘以 y'', 可得

$$(x-a)y''+(y-b)y''y'=0. \tag{12}$$

将式 (11c) 代入式 (12) 可得

$$(x-a)y''=(1+y'^2)y'. \tag{13}$$

将式 (11a) 两边同时乘以 y''^2, 可得

$$[(x-a)y'']^2+[(y-b)y'']^2=r^2y''^2. \tag{14}$$

将式 (11c),(13) 代入 (14), 可得

$$(1+y'^2)^3=r^2y''^2. \tag{15}$$

于是

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}=r^2. \tag{16}$$

将式子 (16) 两边对 x 求导, 最终可得

$$3y'y''^2-(1+y'^2)y'''=0. \tag{17}$$

式 (17) 就是平面上一切圆所满足的微分方程. ■