吕林根, 许子道《解析几何》习题 4.7.5

叶卢庆*

2014 年 11 月 19 日

题目. 求与两直线 $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 相交, 而且与平面 $2x+3y-5=0$ 平行的直线的轨迹.

解. 设直线为

$$\frac{x-p_1}{\lambda_1}=\frac{y-p_2}{\lambda_2}=\frac{z-p_3}{\lambda_3}. \tag{1}$$

由直线(1)与平面 $2x+3y-5$ 平行可得

$$2\lambda_1+3\lambda_2=0. \tag{2}$$

直线(1)与直线 $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 相交, 意味着

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ p_1-6 & p_2 & p_3-1 \end{vmatrix}=0,$$

也即

$$(2p_3-p_2-2)\lambda_1+(p_1-3p_3-3)\lambda_2+(3p_2-2p_1+12)\lambda_3=0. \tag{3}$$

式(3)结合式(2), 可得

$$\lambda_2(2p_1+3p_2-12p_3)+\lambda_3(6p_2-4p_1+24)=0. \tag{4}$$

直线(1)与直线 $\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 相交, 意味着

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 3 & 2 & -2 \\ p_1 & p_2-8 & p_3+4 \end{vmatrix}=0,$$

也即

$$(2p_3+2p_2-8)\lambda_1-(2p_1+3p_3+12)\lambda_2+(3p_2-2p_1-24)\lambda_3=0. \tag{5}$$

式(5)结合式(2)可得

$$\lambda_2(-6p_3-3p_2-2p_1)+(3p_2-2p_1-24)\lambda_3=0. \tag{6}$$

方程(4)和(6)联立表明

$$\begin{cases} (3p_2-2p_1)\lambda_3=6p_3\lambda_2, \\ -24\lambda_3=(2p_1+3p_2)\lambda_2. \end{cases}$$

显然 $\lambda_2\neq 0$, 因此

$$9p_2^2-4p_1^2+144p_3=0. \tag{7}$$

于是, 直线的轨迹就是

$$9y^2-4x^2+144z=0.$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com