

习题 4.4.6

叶卢庆*

2015 年 1 月 9 日

题目. 已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (c < a < b)$, 试求过 x 轴并与曲面的交线是圆的平面.

解. 设平面的方程为

$$z = py.$$

则要使得平面与椭球面的交线是圆, 必须使 $p \neq 0$. 将平面方程代入椭球面方程, 可得曲线的方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = py \end{cases}.$$

即

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + (\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2})y^2 = 1, \\ z = py. \end{cases} \quad (1)$$

在 XOY 平面上,

$$\frac{x^2}{a^2} + (\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2})y^2 = 1$$

的两条半轴长度分别为

$$a, \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}}.$$

两条半轴依次投影到 $z = py$ 平面上, 得到的线段的长度的平方依次为

$$a^2, (p \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}})^2.$$

令

$$a^2 = (p \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}})^2.$$

解得

$$p \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2 - c^2}}.$$

这样我们就确定了平面, 使得曲线(1)是一个圆. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com