平面上有限点集的费马曲线是连续曲线

叶卢庆*

杭州师范大学理学院

2014 年 4 月 27 日

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的有限点集 $\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$, 其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n\in\mathbf{R}^2$. 该点集的费马曲线, 指的是这样的轨迹, 该轨迹上的所有点到点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的距离和是一个定值 $c>0$, 且到 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的距离和是一个定值 c 的点全在该轨迹上. 也就是说, 该轨迹是这样的集合:

$$\left\{|PP_1|+|PP_2|+\cdots+|PP_n|=c:P,P_1,\cdots,P_n\in\mathbf{R}^2\right\}$$

设 $P=(x,y)$ 位于轨迹上, 则我们得到

$$\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}+\cdots+\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}=c. \tag{1}$$

设

$$f(x,y)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}+\cdots+\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}.$$

则 (1) 会成为 $f(x,y)=c$. 我们要证明 $f(x,y)=c$ 是一条连续的曲线. 当 $P\notin\{P_1,\cdots,P_n\}$ 时, 我们来看

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\dfrac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\cdots+\dfrac{x-a_n}{\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\dfrac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\cdots+\dfrac{y-b_n}{\sqrt{(x-a_n)^2+(y-b_n)^2}}=0.\end{cases} \tag{2}$$

令

$$\mathbf{L_1}=(x-a_1,y-b_1),\mathbf{L_2}=(x-a_2,y-b_2),\cdots,\mathbf{L_n}=(x-a_n,y-b_n).$$

则方程组 (2) 等价于

$$\frac{\mathbf{L_1}}{|\mathbf{L_1}|}+\cdots+\frac{\mathbf{L_n}}{|\mathbf{L_n}|}=\mathbf{0}. \tag{3}$$

易得 (3) 式成立当且仅当向量

$$\frac{\mathbf{L_1}}{|\mathbf{L_1}|},\frac{\mathbf{L_2}}{|\mathbf{L_2}|},\cdots,\frac{\mathbf{L_n}}{|\mathbf{L_n}|}$$

两两之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com