Cauchy-Binet 公式的几何意义

叶卢庆*

2015 年 1 月 31 日

Cauchy-Binet 公式是指:

定理 (Cauchy-Binet)**.** 设 A 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 $n\times N$ 矩阵,B 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 $N\times n$ 矩阵. 则我们知道 AB 是一个 $n\times n$ 的方阵. 当 $n\leq N$ 时,

$$\det(AB)=\sum_{\sigma}\det(A_\sigma)\det(B^\sigma),$$

其中 $\sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$. 其中 $1\leq\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\sigma_n\leq n$. 而且 A_σ 是矩阵 A 中删去所有行列 *(除了下标位于 σ 中的行与列)* 得到的矩阵.B^σ 也一样.

首先我们建立任意两个矩阵乘法与方阵乘法的关系. 为此先举一个例子.

例 1. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}$. 且 $A'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}$,$B'=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&0\\b_{21}&b_{22}&0\\b_{31}&b_{32}&0\end{pmatrix}$. 即矩阵 A',B' 分别是矩阵 A,B 在最右列和最后一行加了一列 0 和一行 0. 则

$$A'B'=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}&0\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

我们发现, 矩阵 $A'B'$ 恰好是矩阵 AB 在最右列和最后一行加了一行 0 和一列 0.

例(1)完全可以推广到一般情形. 不再熬述了. 这个例子说明,

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com