任意二次形式满足的性质

叶卢庆*

2015 年 1 月 5 日

所谓的二次形式, 指的是满足如下条件的从 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的双线性变换 T, 满足

- $T(V_1, V_2) = -T(V_2, V_1)$
- $T(V_1, V_2 + V_3) = T(V_1, V_2) + T(V_1, V_3)$,$T(V_1 + V_2, V_3) = T(V_1, V_3) + T(V_2, V_3)$.
- $T(V_1, cV_2) = T(cV_1, V_2) = cT(V_1, V_2)$.

推论 1. 由第一条, 立马可以得到
$$T(V, V) = -T(V, V),$$
因此
$$T(V, V) = 0.$$

推论 2. 由第三条, 可得 $\forall c \in \mathbf{R}$,
$$T(V, \mathbf{0}) = T(V, c\mathbf{0}) = cT(V, \mathbf{0}),$$
因此
$$T(V, \mathbf{0}) = 0 = T(\mathbf{0}, V).$$

设 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基, 则我们只要知道 $T(v_i, v_j)$ 的值, 就能计算出 $T(V, W)$ 的值, 其中 i, j 取遍 $[1, n]$ 中的所有整数, 且 V, W 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意的向量. 这是因为, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意的向量 V, W,
$$V = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n,$$
$$W = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n,$$
因此
$$\begin{aligned} T(V, W) &= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) \\ &= T(a_1 v_1, b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) + \cdots + T(a_n v_n, b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) \\ &= a_1 b_1 T(v_1, v_1) + a_1 b_2 T(v_1, v_2) + \cdots + a_1 b_n T(v_1, v_n) \\ &+ \cdots \\ &+ a_n b_1 T(v_n, v_1) + a_n b_2 T(v_n, v_2) + \cdots + a_n b_n T(v_n, v_n). \end{aligned}$$

而且,

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

引理. $\forall 1 \le i, j \le n$, 都存在相应的 $1 \le p, q \le n$, 使得 $dx_p \wedge dx_q(v_i, v_j) \neq 0$.

证明. 假若存在 $1 \le i, j \le n$, 使得对所有的 $1 \le k, l \le n$, 都有 $dx_k \wedge dx_l(v_i, v_j) = 0$, 则易得向量 v_i 和 v_j 线性相关, 这与 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组基矛盾. □

根据这个引理, 可得

定理. 对于任意 $1 \le i, j \le n$, 都存在相应的实数 $c_{i,j}$ 和相应的 $1 \le p, q \le n$, 使得

$$T(v_i, v_j) = c_{i,j} dx_p \wedge dx_q(v_i, v_j).$$

综合以上结论, 可得每个二次形式 $T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 都可以被集合 $\{dx_i \wedge dx_j : 1 \le i, j \le n\}$ 里的二次形式进行线性表达.