吕林根, 许子道《解析几何》习题 3.1.1

叶卢庆*

2014 年 11 月 9 日

题目. 求下列各平面的坐标式参数方程和一般方程.

- 通过点 $M_1(3,1,-1)$ 和 $M_2(1,-1,0)$ 且平行于向量 $\{-1,0,2\}$ 的平面.
- 通过点 $M_1(1,-5,1)$ 和 $M_2(3,2,-2)$ 且垂直于 xOy 坐标面的平面.
- 已知四点 $A(5,1,3),B(1,6,2),C(5,0,4),D(4,0,6)$, 求通过直线 AB 且平行于直线 CD 的平面, 并求通过直线 AB 且与 $\triangle ABC$ 所在平面垂直的平面.

- 平面的坐标式参数方程由平面的向量式参数方程演化而来. 设平面上任意一点为 $M(x,y,z)$, 则

  $$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M}&=u\overrightarrow{M_1M_2}+v(-1,0,2)\\&=u(-2,-2,1)+v(-1,0,2)\\&=(-2u-v,-2u,u+2v)\end{aligned}$$

  可见,

  $$(x,y,z)-(3,1,-1)=(-2u-v,-2u,u+2v).$$

  于是, 平面的坐标式参数方程为

  $$\begin{cases}x=3-2u-v,\\y=1-2u,\\z=-1+u+2v\end{cases}.$$

  解出了平面的坐标式一般方程之后, 就可以解出平面的一般方程为

  $$4x+2z-3y-7=0.$$

- 设平面上任意一点为 $M(x,y,z)$, 则

  $$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M}&=u\overrightarrow{M_1M_2}+v(0,0,1)\\&=u(2,7,-3)+v(0,0,1)\\&=(2u,7u,-3u+v).\end{aligned}$$

  于是, 平面的坐标式参数方程为

  $$\begin{cases}x=1+2u,\\y=-5+7u,\\z=1-3u+v.\end{cases}$$

  由坐标式参数方程可得平面的一般方程为

  $$7x-2y-17=0.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

- 设平面上的任意一点为 $M(x, y, z)$, 则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{CD} &= u(-4, 5-1) + v(-1, 0, 2)\\ &= (-4u - v, 5u, -u + 2v).\end{aligned}$$

于是, 平面的参数方程为

$$\begin{cases} x = 5 - 4u - v, \\ y = 1 + 5u, \\ z = 3 - u + 2v \end{cases}.$$

由平面的参数方程可得平面的一般方程为

$$10x + 9y + 5z - 45 = 0.$$

下面我们来求另外一个平面的方程.$\triangle ABC$ 所在平面的一个法向量为 $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(-4, 5, -1)\times(0, -1, 1) = (1, 1, 1)$. 设欲求平面上任意一点为 M, 于是欲求平面的向量式参数方程为

$$\overrightarrow{AM} = u\overrightarrow{AB} + v(1, 1, 1) = u(-4, 5, -1) + v(1, 1, 1) = (-4u + v, 5u + v, -u + v).$$

于是欲求平面的坐标式参数方程为

$$\begin{cases} x = 5 - 4u + v, \\ y = 1 + 5u + v, \\ z = 3 - u + v \end{cases}.$$

可见, 欲求平面的一般式方程为

$$2x + y - 3z - 2 = 0.$$