双重向量积公式

叶卢庆*

2014 年 10 月 25 日

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是三维欧式空间 $\mathbf{R}^3$ 中的三个向量, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 线性无关. 我们来计算

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}. \tag{1}$$

设向量 $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + k\mathbf{d}$, 其中向量 $\mathbf{d}$ 和向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都正交. 于是式(1)成为

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + k\mathbf{d}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}. \tag{2}$$

无论是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}$, 还是 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$, 都是在向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 张成的二维平面上. 令

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \gamma(\mathbf{b} - t\mathbf{a}),$$

其中 $\gamma > 0$, 且 $(\mathbf{b} - t\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$. 于是 $t = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$. 因此,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \gamma(\mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}).$$

由于

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})|\mathbf{b}| \sin\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle,$$

因此,$\gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. 可见,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a}. \tag{3}$$

且

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}. \tag{4}$$

下面我们来确定 λ, μ. 因为

$$\begin{cases} (\mathbf{c} - \lambda \mathbf{a} - \mu \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0, \\ (\mathbf{c} - \lambda \mathbf{a} - \mu \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

所以 λ 和 μ 就能解出,

$$\mu = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})}{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}, \lambda = \frac{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})}{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}. \tag{5}$$

将式(3),(4),(5)代入式(2), 化简可得

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com