吕林根, 许子道《解析几何》习题 4.7.10

叶卢庆*

2014 年 11 月 20 日

> **题目.** 已知空间两异面直线间的距离为 $2a$, 夹角为 2θ, 过这两直线分别作平面, 并使这两平面互相垂直. 求这样的两平面交线的轨迹.

解. 设其中一条直线的方程为 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0}$. 另一条直线的方程为 $\frac{x-0}{\cos 2\theta}=\frac{y-0}{\sin 2\theta}=\frac{z-2a}{0}$. 其中 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. 过直线 $\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0}$ 的平面设为

$$my+nz=0. \tag{1}$$

过直线 $\frac{x-0}{\cos 2\theta}=\frac{y-0}{\sin 2\theta}=\frac{z-2a}{0}$ 的平面设为

$$-\sin 2\theta x+\cos 2\theta y+Cz-2aC=0. \tag{2}$$

平面(1)和平面(2)垂直, 当且仅当

$$m\cos 2\theta+Cn=0. \tag{3}$$

于是平面(1)的方程可以化为

$$-Cy+\cos 2\theta z=0. \tag{4}$$

结合式(4)和式(1), 可得平面的交线运动形成的轨迹为

$$z^2\cos 2\theta-2az\cos 2\theta+y^2\cos 2\theta-xy\sin 2\theta=0.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, 可得轨迹为 $xy=0$, 这是两个坐标平面. 当 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$ 时, 可得轨迹为

$$(z-a)^2+y^2-xy\tan 2\theta=a^2. \tag{5}$$

为了判断(5)的类型, 我们考虑以 z 坐标轴为转轴旋转 xOy 平面. 令

$$\begin{cases}z=z',\\ x=x'\cos\phi-y'\sin\phi,\\ y=x'\sin\phi+y'\cos\phi.\end{cases}$$

代入式(5), 要消去交叉项 $x'y'$, 让 $\phi=\theta$, 可得方程 (5)会变成

$$(z'-a)^2+x'^2(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta)+y'^2(\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta)=a^2.$$

当 $\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta=0$, 即 $\theta=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arctan\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时, 曲面是柱面.
当 $\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta=0$, 即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, 曲面是柱面.
当 $\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta>0$ 且 $\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta>0$ 时, 曲面是椭球面.
当 $\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta<0$ 且 $\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta<0$ 时, 曲面是双叶双曲面.
当 $(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta)(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\tan 2\theta)<0$ 时, 曲面是单叶双曲面. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com