$\mathbf{R}^n$ 中平行四边形的面积

叶卢庆*

2015 年 1 月 23 日

在此我们探讨 $\mathbf{R}^n$ 中平行四边形的面积. 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$, 我们来计算 $\mathbf{R}^n$ 中以 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为邻边张成的平行四边形 S 的面积. 易得其面积的平方为

$$||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2. \quad (1)$$

我们惊讶地发现,$(a_ib_j-a_jb_i)^2$ 是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 张成的平行四边形在 x_iOx_j 坐标平面的正投影得到的平行四边形的面积的平方, 这样, 我们可以认为式(1)表达的, 和勾股定理很类似, 可以看作是面积之间的“勾股定理”.

下面我们从几何角度来阐述式(1). 设平行四边形 S 所在的平面与坐标平面 x_iOx_j 的夹角为 $\alpha_{i,j}$. 平行四边形 S 正投影到 x_iOx_j 平面上, 得到平行四边形 $S_{i,j}$. 然后平行四边形 $S_{i,j}$ 反过来又正投影到平行四边形 S 所在平面上. 易得 $S_{i,j}$ 在 S 平面上正投影所得的图形 $S'_{i,j}$ 是完全含于 S 的, 且 $S'_{i,j}$ 也是个平行四边形. 且 $S'_{i,j}$ 的面积为 $S\cos^2\alpha_{i,j}$. 且由于 $\mathbf{R}^n$ 中过二维平面外一点有且仅有一条直线与平面垂直, 因此当 $m\neq i$,$m\neq j$,$w\neq i$,$w\neq j$ 这四种情况只要发生一种, 便有图形 $S'_{i,j}\cap S'_{m,n}$ 的面积为 0. 而且 $\cup_{1\leq i<j\leq n}S'_{i,j}=S$. 于是,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}S\cos^2\alpha_{ij}=S.$$

也即,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(S\cos\alpha_{ij})^2=S^2.$$

这就是式(1). 这样我们就给出了式(1)的几何解释.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com