Ptolemy 定理及其逆定理

叶卢庆*

定理 (Ptolemy 定理)**.** 如果一个四边形内接于一个圆, 则四边形对角线的长度乘积等于四边形的两对对边长度乘积的和.

证明. 如图 (1), 点 A,B,C,D 顺次分布在圆周上. 在复平面上考虑, 设点 A,B,C,D 对应的复数分别为 a,b,c,d. 由于 $\angle ABD=\angle DCA$, 因此
$$\frac{a-b}{d-b}=\lambda_1\frac{a-c}{d-c},$$
其中 $\lambda_1\in\mathbf{R}^+$. 即
$$(a-b)(d-c)=\lambda_1(a-c)(d-b). \tag{1}$$
同理,
$$(a-d)(b-c)=\lambda_2(a-c)(b-d). \tag{2}$$
其中 $\lambda_2\in\mathbf{R}^+$. 为了证明 Ptolemy 定理, 我们只用证明
$$\lambda_1+\lambda_2=1.$$
也就是证明
$$(a-b)(d-c)-(a-d)(b-c)=(a-c)(d-b).$$
这是简单的验证就可以证明的. □

Ptolemy 定理的逆定理如下:

定理 (Ptolemy 定理的逆)**.** 如果一个四边形对角线的长度乘积等于四边形的两对对边长度乘积的和, 则四边形内接于一个圆.

证明. 我们已经知道,
$$\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}+\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}=1,$$
而且现在有
$$\left|\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)}\right|+\left|\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}\right|=1,$$
上面两条式子告诉我们,
$$\frac{(a-b)(d-c)}{(a-c)(d-b)},\frac{(a-d)(b-c)}{(a-c)(b-d)}$$
都是正实数. 这样就证明了 Ptolemy 逆定理. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

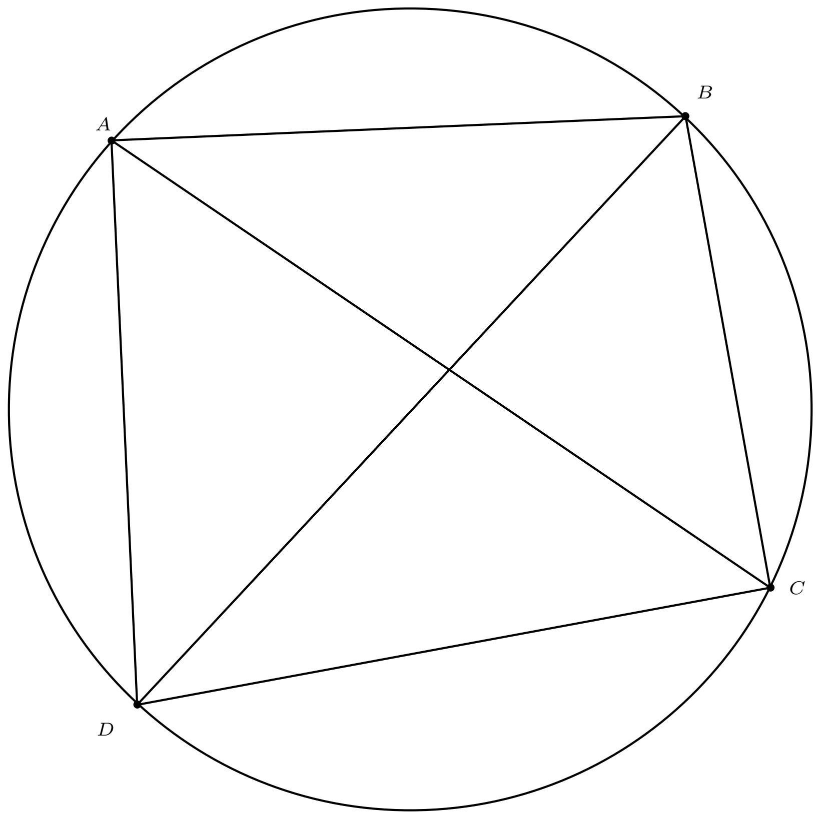

图 1