《已知相邻三边长及其夹角的四边形》审稿意见

作者: 何万程　审稿人: 叶卢庆*

2014 年 2 月 9 日

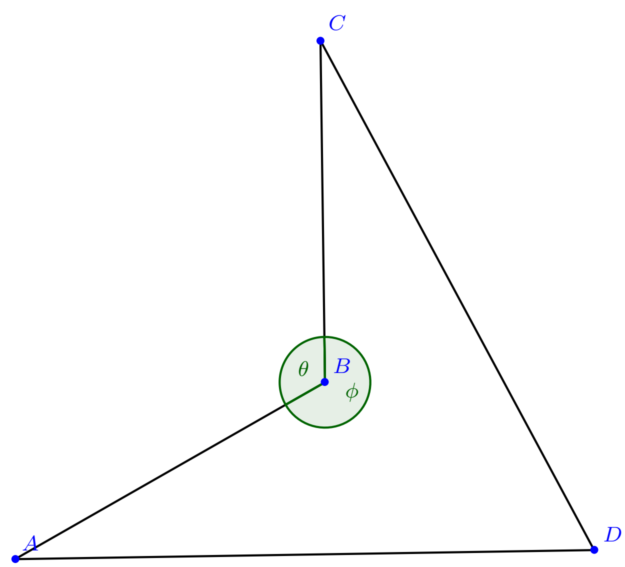
定理 1. 边不自交的四边形 $ABCD$ 中,$AB = a$,$BC = b$,$CD = c$,$\angle ABC = \alpha$,$\angle BCD = \beta$, 则

$$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ca\cos(\alpha+\beta).$$

审稿人意见. 如图, 凹四边形 $ABCD$. 此时,$\angle ABC$ 到底指的是图中的角 θ 呢还是图中的角 ϕ 呢? 如果指的是 θ, 则定理的结论不正确, 要改成

$$AD^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha - 2bc\cos\beta + 2ca\cos(\alpha-\beta).$$

如果指的是 ϕ, 则定理的结论正确. 作者的本意应该是指内角 ϕ, 希望作者能指明. 另外, 希望作者能指明: 点 A, B, C, D 是顺次相连的.



*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

也就是说, 希望定理能重新叙述如下:

边不自交的四边形 $ABCD$ 中,A,B,C,D 顺次相连, 且 $|AB|=a$,$|BC|=b$,$|CD|=c$, 四边形内角 $\angle ABC=\alpha$, 内角 $\angle BCD=\beta$, 则

$$AD^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha-2bc\cos\beta+2ca\cos(\alpha+\beta).$$

证明. 由 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ 得

$$\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB},$$

所以

$$AD^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\alpha-2bc\cos\beta+2ca\cos(\alpha+\beta).\blacksquare$$

定理 2. 边不自交的四边形 $ABCD$ 中,$AB=a$,$BC=b$,$CD=c$,$\angle ABC=\alpha$,$\angle BCD=\beta$, 则

$$S_{\ ABCD}=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin(\alpha+\beta)).$$

证明. 设四边形 $ABCD$ 是凸四边形,$\alpha+\beta>180^\circ$, 延长 AB、DC 相交于点 E, 设 $BE=x$,$DE=y$(应该要改成 $CE=y$), 由正弦定理得

$$x=-\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}b,\ y=-\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}b,$$

所以

$$\begin{aligned}S_{\ ABCD}&=S_{\triangle ADE}-S_{\triangle BCE}\\&=-\frac{1}{2}((a+x)(c+y)-xy)\sin(\alpha+\beta)\ (\text{忘了负号})\\&=\frac{1}{2}(ab\sin\alpha+bc\sin\beta-ac\sin(\alpha+\beta))\ (\text{这里跨度较大, 希望作者能指出详细运算过程.}).\end{aligned}$$

当四边形 $ABCD$ 是凸四边形,$\alpha+\beta=180^\circ$ 时容易验证上面的公式仍然适用; 当四边形 $ABCD$ 是凸四边形,$\alpha+\beta<180^\circ$ 时或四边形 $ABCD$ 是凹四边形时可类似上面的方法进行证明.(这段文字不太恰当.) ■

定理 3. 边不自交的四边形 $ABCD$ 中,$AB=a$,$BC=b$,$CD=c$, 则当四边形有外接圆, 且 DA 是外接圆直径时四边形的面积最大.

证明. 作六边形 $ABCDB'C'$, 使四边形 $ABCD$ 与四边形 $DB'C'A$ 全等,$DB'=AB$,$B'C'=BC$,$C'A=CD$, 则六边形 $ABCDB'C'$ 有固定的周长, 且面积是四边形 $ABCD$ 面积的两倍, 所以六边形 $ABCDB'C'$ 在有外接圆时面积最大, 此时四边形 $ABCD$ 也有外接圆且面积也最大,DA 是是外接圆直径. ■

下面来求 3中四边形面积最大时的外接圆半径. 设外接圆半径是 R, 此时必定 $AD=2R$, 根据四边形 $ABCD$ 的外接圆半径公式, 得

$$R^2=\frac{(2aR+bc)^2(2bR+ac)^2(2cR+ab)^2}{(-2R+a+b+c)(2R-a+b+c)(2R+a-b+c)(2R+a+b-c)},$$

化简得

$$4R^3-\left(a^2+b^2+c^2\right)R-abc=0,$$

这个方程有三个实数根, 但只有一个是正根, 于是就得

$$R=\frac{1}{3}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3abc\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\right).$$

由上面的推导, 知凸四边形有一边是其外接圆直径, 其余三边分别是 a、b、c, 则外接圆半径是

$$R=\frac{1}{3}\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3abc\sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}\right).$$

审稿人总意见. 定理 *3* 还未审. 希望作者能为每个定理都先配一幅图. 建议先退稿让作者完善细节.