解三次方程——一种行不通的思路

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 2 月 14 日

根据分解定理, 寻求三次方程 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 的根 x,y,z 等价于求解下述方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=-b \\ xy+yz+xz=c \\ xyz=-d. \end{cases}$$

其中 x,y,z 是复数. 为了求解方程组, 我们先介绍一种思路. 但是这是一种行不通的思路.

1 行不通的思路

复数 x,y,z 在复平面上对应于点 X,Y,Z, 这是三角形的三个顶点 (当然, 如果 X,Y,Z 有重合, 则三角形为退化的三角形, 因此我们假设 X,Y,Z 两两不重合). 由于 $x+y+z=-b$, 因此三角形的重心对应于复数 $\frac{-b}{3}$. 我们只要将三个顶点 X,Y,Z 平移成 X',Y',Z', 其中 X',Y',Z' 对应的复数分别为 x',y',z', 且 $x'=x+\frac{b}{3},y'=y+\frac{b}{3},z'=z+\frac{b}{3}$. 就得到了重心位于原点的三角形 $X'Y'Z'$. 可得

$$\begin{cases} x'+y'+z'=0 \\ x'y'+y'z'+x'z'=c' \\ x'y'z'=-d' \end{cases}.$$

现在, 我们考虑从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的可逆线性映射 T, 该可逆线性映射要把三角形 $X'Y'Z'$ 变成顶点在单位圆上的三角形 $X''Y''Z''$, 其中点 X' 被 T 映射成 X'',Y' 被 T 映射成 Y'',Z' 被 T 映射成 Z''. 且 $X''=(1,0)$,$Y''=(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3})$,$Z''=(\cos\frac{4\pi}{3},\sin\frac{4\pi}{3})$. 然而事实上这是不可能的, 因为**$\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的可逆线性映射不可能把平面上的非正三角形变成正三角形.** 因此这种思路行不通. 我们换一种思路.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com