教材章节	
教学目的要求	

教学摘要与评议

习题 4.4.6. 已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ($c<a<b$)，试求过x轴并与曲面的交线是圆的平面.

解：设平面的方程为 $my+nz=0$.

则要使得平面与椭球面的交线是圆，必须使 $m\neq0, n\neq0$. 将平面方程代入椭球面方程，可得曲线的方程为

$$\cancel{\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}\right)y^2=1 & ① \\ \frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{n^2}{m^2b^2}+\frac{1}{c^2}\right)z^2=1. & ②\end{cases}}$$

~~轴直角坐标系上的椭圆①的长轴与短轴之比为~~ ~~XY~~

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}\right)y^2=1 \\ my+nz=0\end{cases} \quad ①$$

$$\cancel{\begin{cases} z^2 \quad y^2= \cos\alpha\, y' - \sin\alpha\, z' \\ z^2= \sin\alpha\, y' + \cos\alpha\, z'.\end{cases}} \quad \cancel{②}$$

~~将②代入①，使得z'在①里变为0：~~ ~~旋转变换~~

为了使得 ① 表示圆，当且仅当

$$\frac{2|a|}{2\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{m^2}{n^2c^2}}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{c^2}-a^2\right) = a^2-\frac{1}{b^2}$$

可见当 ① $a^2c^2=1$，$a^2b^2\neq 1$ 时，就不存在这样的平面

当 ② $a^2c^2\neq 1$ 时，$\frac{m^2}{n^2} = \frac{a^2-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-a^2}$.

此时若 $\frac{a^2-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-a^2} < 0$，也不存在这样的平面

此时若 $\frac{a^2-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-a^2} \geq 0$，则让

$$\frac{m}{n} = \pm\sqrt{\frac{a^2-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-a^2}}$$ 即可.