论向量法解几何问题的基本思路

张景中[1,2] 彭翕成[1]

(1 武汉 华中师范大学教育信息技术工程研究中心 430079
2 广州 广州大学教育软件研究所 510006)

引言

随着向量知识进入高中教材,很多老师希望进一步学习研究有关向量的理论和方法.《数学通报》针对广大读者的需求,近期先后推出李尚志教授和齐民友教授的指导性文章[1,2],深入浅出地阐述了有关向量的基本数学理论,以及教学中应该注意的关键点,实为雪中送炭之举.

学生们学过平面几何和立体几何,知道一些几何问题,一旦学了向量,自然想用新的知识处理原来熟悉的问题.新课程的教材,也常常选用一些例题,说明向量方法能够解决几何问题,并介绍用向量方法解决几何问题的途径.在这样的背景下,近年来刊物上发表了大量有关用向量法解初等几何问题的文章.这表明老师们不仅希望进一步学习研究有关向量的理论和方法,更对向量法解题,特别是解初等几何问题有浓厚的兴趣,希望知道向量方法解题的基本思路和技巧.

读了几种教材上以及大量文章中有关向量解题的例子,我们感到,目前许多老师还不了解用向量法解几何问题的基本途径,所用的方法偏于繁琐,远不及综合几何的初等方法,体现不出向量解题平易简捷的优势.一些参考书上谈到向量法解题,也只是介绍坐标法,对于直接用向量基本性质和运算律的简便方法则语焉不详.于是感到有必要在[1,2]两文的基础上,更具体地探讨用向量法解几何问题的基本思路和技巧.

1 向量法解题的基本工具和基本思路

向量法解题的基本工具不多,只有 4 条:

第 1 条,是向量相加的“首尾相连法则”,即 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.这个法则可以推广到多个向量,用来写出许多向量等式;

第 2 条,是向量数乘的意义和运算律,特别是可以用数乘一个向量来表示和它平行或共线的向量;

第 3 条,是向量内积(数量积)的意义和运算律,特别是相互垂直的向量内积为 0;

第 4 条,是平面向量的基本定理:如果 e_1, e_2 是平面上两个不共线的向量,则对于平面上任一向量 a,存在唯一的一对实数 λ_1, λ_2,使得 $a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$.

从这条基本定理可知,如果四个向量之间有等式 $a+b=c+d$,并且 a 和 c 共线,b 和 d 共线,但 a 和 b 不共线,立刻推得 $a=c$ 和 $b=d$.此法则的重要性不言而喻.

初等几何解题要用许多公理和定理,而向量法仅仅用这几条,这从根本上体现了向量法平易简捷的特色.

以上几条的意义和背景,教材上都有叙述,文[1,2]中有更详细深刻的阐述,此处不再多说.下面结合具体的例子,循序渐进,说明这些工具的用法.

本文所讨论的问题,只涉及点和线段.这类问题已经足够广泛.我们在中学数学教学类书刊中所看到的有关向量解几何问题的例子,都不超出这个范围.

几何问题中图形的构造,一般是先作几个任意点,从这些点出发相继作图得到一些受到几何条件约束的点—约束点,例如连接两点成为线段,取线段的中点或定比分点,作线段的交点等等.所要证明的结论或要计算的几何量,总可以写成含有约束点的等式或数学表达式.只要不断地把后作出的点代换成先前的点,直到消去所有的约束

点,一般总会水落石出而得到解答.

如果作图过程只涉及中点或定比分点而无交点,用向量法很容易消去约束点而得到简捷的解法. 下面就从这类比较简单的问题开始探讨.

2　涉及中点或定比分点的几何问题

这类比较简单的题目,只要用向量和的首尾连接法则选择适当的回路,写出回路等式,再根据题目条件把回路等式简化,最后有时可使用基本定理,即可奏效.

例 1　如图 1,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 是 BC 边上中点,求证:$2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

思路　将回路等式 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ 相加;

证明　$2\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,证毕.

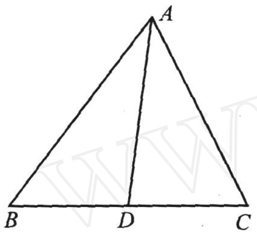

图 1

例 1 的结论提供了化解涉及中点的向量的容易记忆的公式,在解题时用起来很方便.

例 2　求证:顺次连接任意四边形各边中点,构成平行四边形.

思路　利用回路等式 $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$ 和中点条件把两个回路等式 $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}$ 和 $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{GF}$ 连起来.

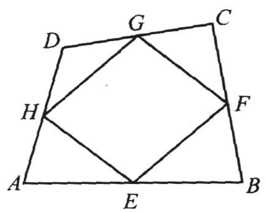

图 2

证明　如图 2, $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{GF}$,证毕.

例 3　求证:梯形 $ABCD$ 的两对角线的中点的连线平行于底边且等于两底差的一半[3].

思路　把回路等式 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ 和 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{0}$ 用中点条件联系起来.

证明　如图 3,消去两中点后整理即得:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD})$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}).$$

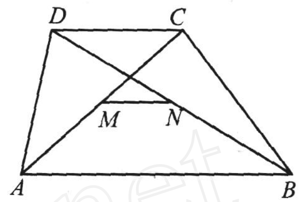

图 3

例 4　在任意四边形 $ABCD$ 中,点 M,N 分别是 AD,BC 中点,求证:$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

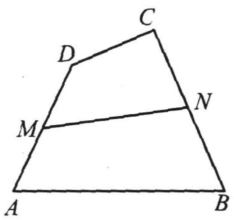

图 4

证明　如图 4, $2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})$

$=(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$,证毕.

推论　如果 C,D 两点重合,$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$,此即三角形中位线定理,如果 $AB\parallel CD$,此时四边形为梯形,则 $AB\parallel CD\parallel MN$,$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ 表示梯形的中位线定理.

例 5　求定比分点的向量形式(如图 5,已知 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,将 $\overrightarrow{OP}$ 表成 $u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$ 的形式).

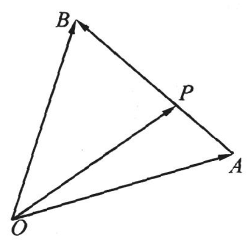

图 5

思路　类似例 1,将回路等式 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

和 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$ 的 λ 倍相加.

解　如图5,将等式 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$ 的 λ 倍相加,应用条件 $\overrightarrow{AP}+\lambda\overrightarrow{BP}=\mathbf{0}$

得 $(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$,即 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$.

这是消去定比分点的有效工具.利用定比分点的向量形式来解题,会比其坐标形式更加方便.文[4]中证明梅涅劳斯定理的过程就是如此,显然比文[2,续2]的证明显得思路更为清晰,过程也更简练.

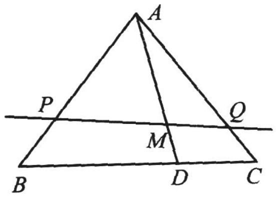

图6

作为向量的定比分点公式的应用,给出下面3个例子.

例6　如图6,在 $\triangle ABC$ 的 BC 边上取点 D 使 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$,在 AD 上取 M 使 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD}$,过 M 作直线交 AB、AC 于 P、Q 两点,问 $\dfrac{AB}{AP}+\dfrac{2AC}{AQ}=$?

思路　用两种方法将 $\overrightarrow{AM}$ 写成 $u\overrightarrow{AP}+v\overrightarrow{AQ}$ 的形式,再用平面向量基本定理.

解　设 $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}=b\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AP}+(1-m)\overrightarrow{AQ}$.

由 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}a\overrightarrow{AP}+\dfrac{2}{3}b\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4}{3}m\overrightarrow{AP}+\dfrac{4}{3}(1-m)\overrightarrow{AQ}$,有 $a=4m$, $2b=4(1-m)$, $a+2b=4m+4(1-m)=4$,即为所求.

类似的思路,可以解决下面的例题.

例7　如图7,在 $\triangle ABC$ 中,设 AM 是 BC 边上的中线.任作一直线,使之顺次交 AB、AC、AM 于 P、Q、N.求证:$\dfrac{AB}{AP}$,$\dfrac{AM}{AN}$,$\dfrac{AC}{AQ}$ 成等差数列.

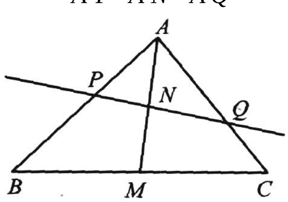

图7

证明　设 $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}=b\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AC}=c\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}=m\overrightarrow{AP}+(1-m)\overrightarrow{AQ}$.由 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 得 $2b\overrightarrow{AN}=a\overrightarrow{AP}+c\overrightarrow{AQ}=2b(m\overrightarrow{AP}+(1-m)\overrightarrow{AQ})$,有 $a=2bm$, $c=2b(1-m)$, $a+c=2bm+2b(1-m)=2b$,即所欲证.

例8　如图8,一直线经过三角形重心 G,且分别交边 CA、CB 于 P、Q,若 $\dfrac{CP}{CA}=h$,$\dfrac{CQ}{CB}=k$,求证:$\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}=3$.

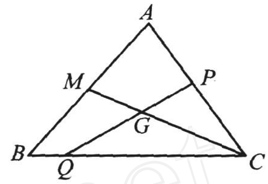

图8

证明　设 AB 中点为 M,则 $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{h}\overrightarrow{CP}+\dfrac{1}{k}\overrightarrow{CQ}\right)$.

因为 $\overrightarrow{CG}$、$\overrightarrow{CP}$、$\overrightarrow{CQ}$ 共起点,且 P、G、Q 三点共线,所以 $1=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}\right)$,即 $\dfrac{1}{h}+\dfrac{1}{k}=3$.

例9　如图9,在凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上取点 K 和 M,在对角线 BD 上取点 P 和 T,使得 $AK=MC=\dfrac{1}{4}AC$, $BP=TD=\dfrac{1}{4}BD$.证明:过 AD 和 BC 中点的连线,通过 PM 和 KT 的中点.(第17届全俄数学奥林匹克试题)

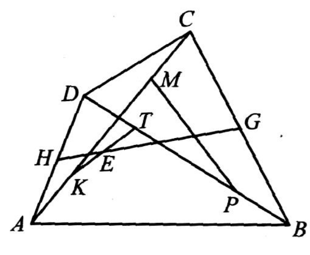

图9

证明　设 H、G、E 分别是 AD、BC、KT 的中点,则

$$\overrightarrow{KT}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DT}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BD},$$

$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{ET}+\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{DH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KT}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}-$$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$,

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD})$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$,显然 $\overrightarrow{GH} = 4\overrightarrow{EH}$,所以 H、E、G 三点共线,即 HG 过点 E. 同理可证 HG 过 PM 的中点.

3　涉及交点的几何问题

如果题目涉及两线段的交点,解题过程中一般需要先确定交点在线段上的位置,也就是计算交点在线段上的分比,这相当于求解二元一次联立方程组. 如果设置未知数列方程求解,或者写出点和向量的坐标求解,步步为营地计算,当然能够成功(本文所引文献中常常这样做),但显得笨拙繁琐. 而向量的回路方法,却能够利用向量运算法则和平面向量的基本定理,从向量等式中直接提取方程的解,这是使得向量法解题能够平易简捷的奥秘所在. 后面将看到,如果动用向量的内积工具,能够更有效地从向量等式中直接提取方程的解,从而解决更繁难的问题.

为了简便,下面提到回路时不再写出向量和式,只写出点的顺序. 例如,回路 $ABCDE$ 表示等式 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA} = \mathbf{0}$ 或其移项得到的等式.

下面是一个最简单的例子.

例 10　求证:平行四边形对角线互相平分. 反之,对角线互相平分的四边形是平行四边形. [3,5]

思路　用平行四边形对边平行相等的条件把回路 AOB 和 DOC 联系起来.

证明　如图 10,$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$;因为 $\overrightarrow{AO}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 共线,$\overrightarrow{DO}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 共线,但 $\overrightarrow{AO}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 不共线,根据平面向量基本定理可得 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. 反之,若 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$,则 $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$,即 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,证毕.

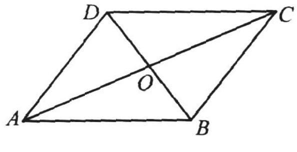

图 10

例 11　如图 11,在平行四边形 $ABCD$ 中 E,F 分别为 CD,DA 中点,连接 BE,BF 交 AC 于点 T,R,求证:T,R 分别为 AC 三等分点[6].

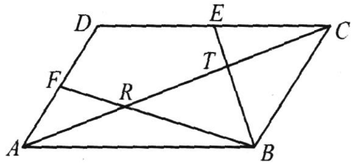

图 11

思路　用平行四边形性质和中点条件把回路 ATB 和 ETC 联系起来.

证明　由题意得 $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{ET} + 2\overrightarrow{TC}$;类似例 10,根据平面向量的基本定理,得 $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TC}$,$T$ 点为 AC 三等分点. 同理 R 点为 AC 三等分点.

上面两个例子方法类似,都是利用平行四边形的性质把两个回路等式联系起来变成一个等式,再用基本定理. 此处例 10 的解法比[5]略简捷,而[6]中提供的例 11 的解法将近 2 页,看不出向量解题的好处了.

上面用过的方法稍加变化,就能解决下面这个受到几篇文章关心的问题:

例 12　证明:三角形三条中线交于一点,且分三中线的线段比都为 2∶1. [2,3,7,8,9]

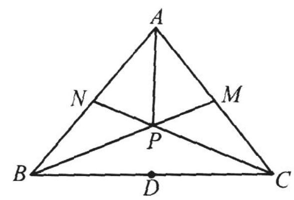

图 12

思路　(1) 用中点条件把回路 $BPCA$ 和 $NPMA$ 联系起来,用平面向量基本定理求出分比;

(2) 用中点条件和求得的比值把回路 $ACBP$ 和 $PMCD$ 联系起来.

证明　如图 12,设中线 BM,CN 交于点 P,连接 AP,则

$$\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM})$$

根据平面向量基本定理,则有 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PM}$,$\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PN}$,

所以 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} = 2(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} +$

$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{PD}$.

上面等式的几何意义:A, P, D 三点共线,且点 P 分三中线的线段比都为 2∶1.

将这里的方法与所引诸文相比,繁简判然.

类似的思路,还可解决下面的问题:

例 13 如图 13,在△ABC内,D, E是 BC 边的三等分点,D在 B 和 E 之间,F是 AC 的中点,G是 AB 的中点.设 H是线段 EG和 DF 的交点,求比值 EH∶HG.[10]

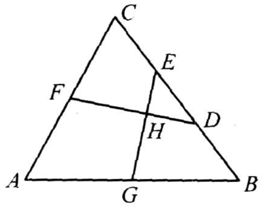

图 13

思路 用中点和分点条件,把回路 $FHGA$ 和 EHD 联系起来.

解 由题意可得 $2\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{ED}$,即$2(\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HG})=\overrightarrow{CB}=3(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HD})$,根据平面向量基本定理,可得 EH∶HG=2∶3.

例 14 如图 14,在△ABC中,$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, BN 和 CM 交于点 P.试用$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$表示向量$\overrightarrow{AP}$.[11]

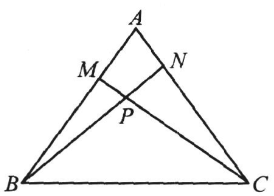

图 14

思路 先要确定交点 P在线段上的分比.试探发现两个回路还不能直接解决问题.利用题设的 2 个比值条件,用 3 个回路 BPM, CPN 和 $MPNA$ 就可以解决问题了.略加变化可得多解.

解 1 由$\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{AN}$,得到:

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PC})$$

整理得到:$9\overrightarrow{MP}+8\overrightarrow{PN}=3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{PC}$,于是有$\overrightarrow{MP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{PC}=\frac{2}{11}\overrightarrow{MC}=\frac{2}{11}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})$

所以有$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AM}+\frac{2}{11}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$.

解 2 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{AN}=3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})+\overrightarrow{AN}=3(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PN})$,

由基本定理得$\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{PN}=\frac{8}{3}\overrightarrow{PN}$,

即$\overrightarrow{BP}=\frac{8}{11}\overrightarrow{BN}$.

于是得$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{8}{11}\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{8}{11}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{11}\overrightarrow{AC}$.

解 3 也可以将已知条件都用向量的形式表达出来,再通过回路和式确定交点 P的位置.

$\frac{3}{2}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM})=\overrightarrow{BA}$, $\frac{4}{3}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CB}$;

三式相加:$\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{PM}+\frac{4}{3}\overrightarrow{NP}=\mathbf{0}$,即$\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}+\frac{4}{3}\overrightarrow{NP}=\mathbf{0}$,即$\overrightarrow{BP}=\frac{8}{11}\overrightarrow{BN}$,下略.

(未完待续)

(上接第 5 页)

有不少书,把利用微积分从开普勒定律导出万有引力公式,作为应用写进课文.

6. 改变单一的教学方式,调动学生学习的积极性,培养学生的独立阅读、独立思考和善于表达的能力

改革开放以来,单一的教学方式有所改变,以此来调动学生在教学过程中的主动性.

有的学校的数学系已多年在低年级(一年级下)开办“讨论班”或“读书班”.学生自愿,教师指导,不记学分.这是调动学生学习积极性、贯彻因材施教的好途径,效果显著.

大多数学校的数学系,为学生经常举办学术通俗讲演,以开阔学生的眼界,增强对数学和专业的认识.