“数学解题研究”课程试题五道

叶卢庆*
杭州师范大学理学院

1 选择题

题目. *(2013 年辽宁高考理科数学第 12 题)* 设函数 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$,$f(2)=\frac{e^2}{8}$, 则 $x>0$ 时,$f(x)$

A 有极大值, 无极小值.

B 有极小值, 无极大值.

C 既有极大值, 又有极小值.

D 既无极大值也无极小值.

解. 答案是 D. 我们直接来解微分方程

$$\frac{dy}{dx}x^2+2xy=\frac{e^x}{x}. \tag{1}$$

将 (1) 化为

$$x^2dy+(2xy-\frac{e^x}{x})dx=0. \tag{2}$$

我们发现 (2) 是一个恰当微分方程. 设二元函数 $\phi(x,y)$ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=x^2 \tag{3}$$

以及

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2xy-\frac{e^x}{x}. \tag{4}$$

由 (3) 可得,

$$\phi(x,y)=yx^2+g(x). \tag{5}$$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的函数. 将 (5) 代入 (4), 可得

$$2xy+g'(x)=2xy-\frac{e^x}{x}\Rightarrow g'(x)=-\frac{e^x}{x}. \tag{6}$$

因此 $g(x)=-\int\frac{e^x}{x}dx+C$, 其中 C 是一个常数. 因此我们可得通积分为

$$\phi(x,y)\equiv yx^2-\int\frac{e^x}{x}dx+C=0.$$

令 $H(x)=\int\frac{e^x}{x}dx$, 则由题目条件可知,

$$\frac{e^2}{2}-H(2)+C=0.$$

可见,

$$y=\frac{H(x)+\frac{e^2}{2}-H(2)}{x^2}=\frac{\int_2^x\frac{e^x}{x}dx+\frac{e^2}{2}}{x^2}.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

因此

$$y' = \frac{e^x - 2(\int_2^x \frac{e^x}{x}dx + \frac{e^2}{2})}{x^3}.$$

下面我们来看函数

$$p(x) = e^x - 2(\int_2^x \frac{e^x}{x}dx + \frac{e^2}{2}).$$

易得

$$p'(x) = e^x - \frac{2e^x}{x}.$$

可见, 当 $0 < x < 2$ 时,$p(x)$ 递减, 当 $x \geq 2$ 时,$p(x)$ 递增, 且 $p(2) = 0$. 可见,y' 恒不小于 0, 且只有在 $x = 2$ 处等于 0. 可见,y 在 $x > 0$ 时没有极值点. 于是选 D. □

2 判断题

题目. *空间直角坐标系中存在五个不同的点, 使得五个点之间的距离 (这里的距离, 指的是通常的欧氏距离, 也就是中学几何里的距离) 两两相等.*

答案. 错误. 三维空间中最多存在四个距离两两相等的点. □

3 填空题

题目. 已知函数 $f : x \to f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 值域是 $\mathbf{R}$. 则函数 $g : x \to f(x + 1)$ 的定义域是______.

答案. $[-1, 0]$ □

4 两道证明题

题目. 设 α, β 是满足等式 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$ 的两个锐角, 证明 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

解. 根据柯西不等式,

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \sin^2\beta &= \sin(\alpha + \beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
&\leq \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta},
\end{aligned}$$

于是 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta \leq \cos^2\alpha+\cos^2\beta$, 因此 $\cos 2\alpha \geq \cos(\pi-2\beta)$, 结合单调性即 $2\alpha \geq \pi-2\beta$, 即 $\alpha+\beta \geq \frac{\pi}{2}$. 又因为 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \leq 1$, 于是 $\sin\alpha \leq \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$, 结合单调性,$\alpha \leq \frac{\pi}{2} - \beta$, 即 $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. 故只能是 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. 而且易得当 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 时, 总会有 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)$. 证明完毕. □

题目. 能表示成形如 $\frac{p}{q}$ 的实数叫有理数, 其中 $p, q \in \mathbf{Z}$ 且 $q \neq 0$. 不是有理数的实数叫无理数. 请证明 $\tan 1°$ 是无理数.

解. 反证法. 假若 $\tan 1° \in \mathbf{Q}$, 则 $\tan 2° = \frac{2\tan 1°}{1-\tan^2 1°} \in \mathbf{Q}$,$\tan 3° = \frac{\tan 1°+\tan 2°}{1-\tan 1°\tan 2°} \in \mathbf{Q}$,$\cdots$,$\tan 60° \in \mathbf{Q}$. 然而 $\tan 60° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是无理数, 矛盾. 因此假设错误. 于是 $\tan 1°$ 是无理数. □