

连续可微可逆映射对单位正方形的作用

叶卢庆

杭州师范大学理学院, 学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 9

在这篇文章里, 我们探索连续可微的可逆映射 $T_n: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 对 \mathbf{R}^n 中的正方形 $P_k = [0, \frac{1}{k}] \times \cdots \times [0, \frac{1}{k}]$ 的作用. 我们怀疑,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m(T(P_k))}{m(P_k)} = |\det T|.$$

其中 $|\det T|$ 是 T 在 $(0, \dots, 0)$ 处的 Jacobi 行列式. 为了证明这一点, 我们首先考虑 $n = 1$ 的情形. P_1 是一条线段 $[0, \frac{1}{k}]$. T_1 是从 \mathbf{R} 到 \mathbf{R} 的连续可微函数, 且 T_1 可逆. 根据微分中值定理, 可得

$$\frac{T_1(x) - T_1(0)}{x} = T_1'(\xi), 0 < \xi < x.$$

因此, 根据导函数的连续性, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_1(x) - T_1(0)}{x} = T_1'(0).$$

因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T_1(\frac{1}{k}) - T_1(0)}{\frac{1}{k}} = T_1'(0).$$

成立.

当 $n = 2$ 时,