文章编号：1007-9831（2008）03-0012-02

矢量积与楔积的联系

陈白棣[1]，陈行之[2]

（1. 九江学院 理学院，江西 九江 332005；2. 哈尔滨理工大学 测控技术与通信工程学院，黑龙江 哈尔滨 150080）

摘要：给出了矢量积与楔积的关系，并且证明了只有 $n=3$ 时，n 维向量空间才有矢量积.

关键词：外积；矢量积；张量积
中图分类号：O183 文献标识码：A

在《解析几何》中，外积又叫矢量积 （vector product），在《数学分析》中外积又叫楔积（wedge product），这 2 门学科都定义了外积. 2 种外积有什么联系，对任意一个 n 维向量为什么只有在 $n=3$ 时才定义外积（矢量积），$n\neq 3$ 时只定义内积，目前还没有见到这个问题的有关研究.

1 预备知识

2 种外积的定义分别为：

定义 1[1] 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，规定 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的外积是一个向量，记为 $\vec{a}\times\vec{b}$，它的模与方向分别为

（1）$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\times\left|\vec{b}\right|\sin\theta$，$\theta=\left(\vec{a},\ \vec{b}\right)$；

（2）$\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向同时垂直于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，并且 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向符合右手法则.

定义 2[2] 对 $\mathbf{R}^n$ 中 n 个向量 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n$，定义外积（$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$）$\to\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n\in\mathbf{R}$. 要求它具有下列性质：

（1）乘法线性：按每个变量都是线性的.

（2）反交错性：若有某对 i，j 使得 $v_i=v_j$（$i\neq j$），则有 $\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=0$；若在外积中交换 2 个向量的位置，则外积改变符号：$\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_j\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n=-\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_j\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_i\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_n$.

（3）规范性：$\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n=1$，其中 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的标准基.

为了后面叙述的方便，给出张量的概念.

定义 3[3]5 设 V 是 n 维向量空间，V^* 是它的对偶空间，$(p,\ q)$ 是一对非负整数. 所谓 V 上的一个 $(p,\ q)$）型张量是指 $V^*\times\cdots\times V^*\times V\times\cdots\times V$ 上的一个 $p+q$ 重线性函数，其中：p 为反变阶数；q 为协变阶数. 全体 V 上的 $(p,\ q)$ 型张量的集合记为 V_q^p.

定义 4[3]5 线性映射 $\star$：$\wedge^r(M)\to\wedge^{m-r}(M)$ 称为有向黎曼流形 $(M,\ g)$ 上的 Hodge 星算子.

Hodge 星算子具有以下基本性质.

引理 1 设 $(M,\ g)$ 是有向紧致的 m 维黎曼流形，则 Hodge 星算子 $\star$ 有以下性质：

（1）对任意的 $\varphi,\ \psi\in\wedge^r(M)$，有 $\varphi\wedge*\psi=\langle\varphi,\ \psi\rangle\Omega$；

（2）$*\Omega=1$，$*1=\Omega$；

（3）对任意的 $\varphi\in\wedge^r(M)$ 有 $*\cdot*\varphi=(-1)^{rm+r}\varphi$；

收稿日期：2008-01-02
基金项目：九江学院科研基金资助项目（2006-83-06kj29）
作者简介：陈白棣（1963-），男，湖北襄阳人，副教授，硕士，从事泛函分析研究. E-mail：chenslide@163.com

（4）对任意的 $\varphi,\ \psi \in \wedge^r(M)$，有 $(*\varphi,\ *\psi)=(\varphi,\ \psi)$.

引理 2[4]　设 $(M,\ g)$ 是有向紧致的 m 维黎曼流形，则 Hodge 星算子 $*$ 是整个 M 上定义的 $m-r$ 次外微分.

2　主要结论

为区别起见，矢量积指定义 1 中的外积，而外积固定指定义 2 中的外积．由定义 2 知道，$n=3$ 时，n 维空间有外积.

定理 1　在三维空间 $\mathbf{R}^3$，存在一种外积 $\wedge$ 和 Hodge 星算子 $*$，使得 $*(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{a}\times\vec{b}$.

证明　在 $\mathbf{R}^3$ 中假设其基底为 $\{\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{J},\ \boldsymbol{K}\}$，向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 分别为 $\vec{a}=a^1\boldsymbol{I}+a^2\boldsymbol{J}+a^3\boldsymbol{K}\in\wedge^1\mathbf{R}^3$，$\vec{b}=b^1\boldsymbol{I}+b^2\boldsymbol{J}+b^3\boldsymbol{K}\in\wedge^1\mathbf{R}^3$，$\vec{a}\wedge\vec{b}=(a^1\boldsymbol{I}+a^2\boldsymbol{J}+a^3\boldsymbol{K})\wedge(b^1\boldsymbol{I}+b^2\boldsymbol{J}+b^3\boldsymbol{K})=\left(a^1b^2-a^2b^1\right)\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{J}+\left(a^2b^3-a^3b^2\right)\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{K}+\left(a^3b^1-a^1b^3\right)\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{I}\in\wedge^2\mathbf{R}^3$.

令　：$\boldsymbol{I}\wedge\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{K}\to\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}\wedge\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{J}$，则有 $*(\vec{a}\wedge\vec{b})=\left(a^2b^3-a^3b^2\right)\boldsymbol{I}+\left(a^3b^1-a^1b^3\right)\boldsymbol{J}+\left(a^1b^2-a^2b^1\right)\boldsymbol{K}=\vec{a}\times\vec{b}$，即 $*(\vec{a}\wedge\vec{b})=\vec{a}\times\vec{b}$.　　证毕.

下面的定理给出了只有 $n=3$ 时才有矢量积.

定理 2　任何一个 n 维向量当且仅当在 $n=3$ 时有矢量积.

证明　当 $n=3$ 时，有矢量积，见定义 1.

设对任意 $\boldsymbol{v}_i=\left(x_1^i,\ x_2^i,\ \cdots,\ x_n^i\right)\in V$（$i=1,\ 2$）可以定义矢量积，则在 n 维欧氏向量空间 V 中，记 V^* 为 V 的对偶空间，对任意 $1\le m\le n$，定义张量：$\wedge^r V\to\wedge^{m-r}V$，$\delta_1\wedge\cdots\wedge\delta_r\to\delta_{r+1}\wedge\cdots\wedge\delta_m$．在 $\mathbf{R}^3$ 中，由于 $\boldsymbol{\alpha},\ \vec{a},\ \vec{b}\in\mathbf{R}^3$，有 $\vec{a}\times\vec{b}\in\mathbf{R}^3$．在 $\mathbf{R}^m$：$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m$，使得 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m$，对任意 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^m\in\wedge^1\mathbf{R}^m$，使得 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\in\wedge^2\mathbf{R}^m$，且 $*(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，由引理 2 知道，必要求 $*$：$\wedge^2\mathbf{R}^m\to\wedge^{m-2}\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\to^*(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})$．根据 Hodge $*$ 算子的性质，另一方面要求 $*(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\in\mathbf{R}^m=\wedge^1\mathbf{R}^m$，这时必有 $m-2=1$，即 $m=3$.　　证毕.

参考文献：

[1] 同济大学应用数学系．高等数学（下册）[M]．上海：同济大学出版社，2004.

[2] 华东师范大学数学系．数学分析[M]．2 版．北京：高等教育出版社，2003.

[3] 陈维桓．微分流形初步[M]．2 版．北京：高等教育出版社，2002：5.

[4] Li Wei．A Simple Proof of Removable Singularites for Coupled Fermion Fields[J]．Calc. Var. PDEs，2007（30）：547-554.

The relation of wedge product and vector product

CHEN Bai-di[1]，CHEN Xing-zhi[2]

(1. School of Science，Jiujiang University，Jiujiang 332005，China；
2. School of Measure-control Technology and Communication Engineering，Harbin University of Science Technology，Harbin 150080，China)

Abstract：Recheared the relation with wedge product and vector product in vector space，proved that if and only if $n=3$ it has vector product in n diamention vector space.

Key words：wedge product；vector product；tensor product