平面上的点到平面上三定点距离和的最小值

叶卢庆[*]

2014 年 4 月 15 日

设平面上有三点 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$. 我们来考察平面上的点到这三点的距离和的最小值是否存在, 以及如果存在, 会是多少. 设 (x,y) 是平面上的任意一点, 则点 (x,y) 到三个定点的距离和为

$$f(x,y)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}+\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}+\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}. \tag{1}$$

我们来证明 $f(x,y)$ 的最小值存在, 并且将其求出. 易得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{x-a_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y-b_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{y-b_3}{\sqrt{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2}}. \tag{3}$$

在平面的某点 (x_0,y_0) 处, 有三种情况.

1. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.
2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$.
3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ 都为 0.

当情况 1 成立时, 根据隐函数定理, 存在 (x_0,y_0) 的某邻域 U_0, 在该邻域内,y 是关于 x 的连续可微的函数 $y=g(x)$. 则在该邻域内,

$$z=f(x,y)=f(x,g(x)),$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com