基变换与坐标变换

叶卢庆[*]

2015 年 1 月 7 日

设向量 $V \in \mathbf{R}^n$, 且 $\alpha = (w_1, \cdots, w_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组有序基, 则存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$, 使得

$$V = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n.$$

$(a_1, \cdots, a_n)$ 叫做 V 在有序基 α 下的坐标. 随着 V 的变化,$(a_1, \cdots, a_n)$ 也会随之变化, 可见, 向量在某个基下的各个坐标是关于向量的函数.

在此, 我们揭示基变换和坐标变换之间的区别和联系. 所谓的基变换, 指的是两个基之间的关系. 设 $\beta = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的另一组有序基, 设

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

即 $\forall 1 \le i \le n$,

$$v_i = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \cdots + a_{ni} w_n.$$

也就是,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

而且, 在基 β 下坐标为 $(b_1, \cdots, b_n)$ 的向量在 α 下的坐标会成为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

这是很容易想到的.

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com