两直线共面的充要条件

叶卢庆[*]

2014 年 11 月 14 日

下面这道题目来自吕林根, 许子道编《解析几何》例 3.8.3.

定理. 试证两直线

$$l_1:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

与

$$l_2:\begin{cases}A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0,\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}$$

在同一平面上的充要条件是

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4\end{vmatrix}=0.$$

证明. 行列式为 0 时, 向量 $(A_1,B_1,C_1,D_1),\cdots,(A_4,B_4,C_4,D_4)$ 线性相关. 不失一般性地, 不妨设 (A_1,B_1,C_1,D_1) 能被 $(A_2,B_2,C_2,D_2),(A_3,B_3,C_3,D_3),(A_4,B_4,C_4,D_4)$ 线性表出为

$$(A_1,B_1,C_1,D_1)=a(A_2,B_2,C_2,D_2)+b(A_3,B_3,C_3,D_3)+c(A_4,B_4,C_4,D_4).$$

于是,

$$(A_1,B_1,C_1,D_1)-a(A_2,B_2,C_2,D_2)=b(A_3,B_3,C_3,D_3)+c(A_4,B_4,C_4,D_4). \tag{1}$$

由于平面 $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ 和 $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ 相交于直线 l_2, 因此平面 $b(A_3,B_3,C_3,D_3)+c(A_4,B_4,C_4,D_4)$ 也经过直线 l_2, 于是, 平面 $(A_1,B_1,C_1,D_1)-a(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 经过直线 l_2. 但是由于平面 $(A_1,B_1,C_1,D_1)-a(A_2,B_2,C_2,D_2)$ 还经过 l_1, 因此 l_1 和 l_2 共面.

而当 l_1,l_2 共面时, 必定有一个平面 s 同时经过 l_1,l_2. 且 s 能表示成

$$p(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2),$$

而且 s 能表示成

$$m(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+n(A_4x+B_4y+C_4z+D_4),$$

于是,

$$p(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=m(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)+n(A_4x+B_4y+C_4z+D_4).$$

这就表明了向量 $(A_1,B_1,C_1,D_1),\cdots,(A_4,B_4,C_4,D_4)$ 线性相关, 于是行列式为 0. □

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com