吕林根, 许子道《解析几何》习题 4.7.9

叶卢庆*

2014 年 11 月 19 日

题目. 试证明双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z(a\neq b)$ 上的两直母线直交时, 其交点必在一双曲线上.

解. 双曲抛物面的 u 族直母线为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=uz,\\ u(\frac{x}{a}-\frac{y}{b})=2\end{cases}$$

v 族直母线为

$$\begin{cases}v(\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=2,\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=vz.\end{cases}$$

其中 u,v 为参数. 由于双曲抛物面的同族直母线必异面, 异族直母线必相交, 因此只可能是异族直母线直交. 于是, 存在 u_0 和 v_0, 使得

$$\left[\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},-u_0\right)\times\left(\frac{u_0}{a},\frac{-u_0}{b},0\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{v_0}{a},\frac{v_0}{b},0\right)\times\left(\frac{1}{a},\frac{-1}{b},-v_0\right)\right]=0.$$

根据 Lagrange 恒等式, 即

$$\begin{vmatrix}\frac{v_0}{a^2}+\frac{v_0}{b^2} & \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+u_0v_0\\ \frac{u_0v_0}{a^2}-\frac{u_0v_0}{b^2} & \frac{u_0}{a^2}+\frac{u_0}{b^2}\end{vmatrix}=0,$$

可得

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)u_0v_0.$$

异族直线的交点 (x_0,y_0,z_0) 满足

$$\begin{cases}\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}=u_0z_0,\\ u_0(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b})=2,\\ v_0(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b})=2,\\ \frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}=v_0z_0.\end{cases}$$

可得 $z_0=\frac{2}{u_0v_0}$ 是一个非零常数, 且

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=2z_0$$

可见, 交点在双曲线上. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com