

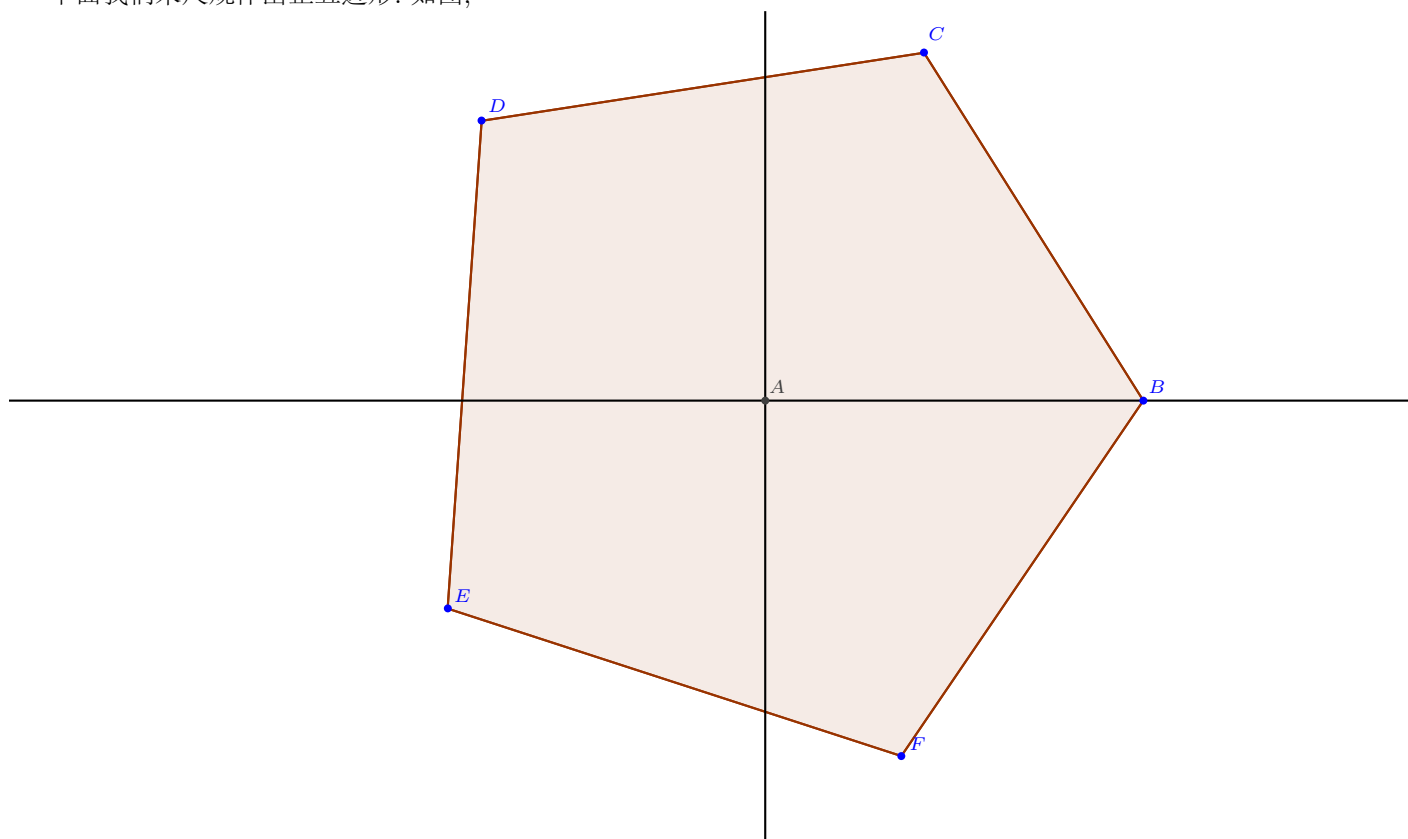
# 尺规作图画出正五边形

叶卢庆\*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 3 月 6 日

下面我们来尺规作出正五边形. 如图,



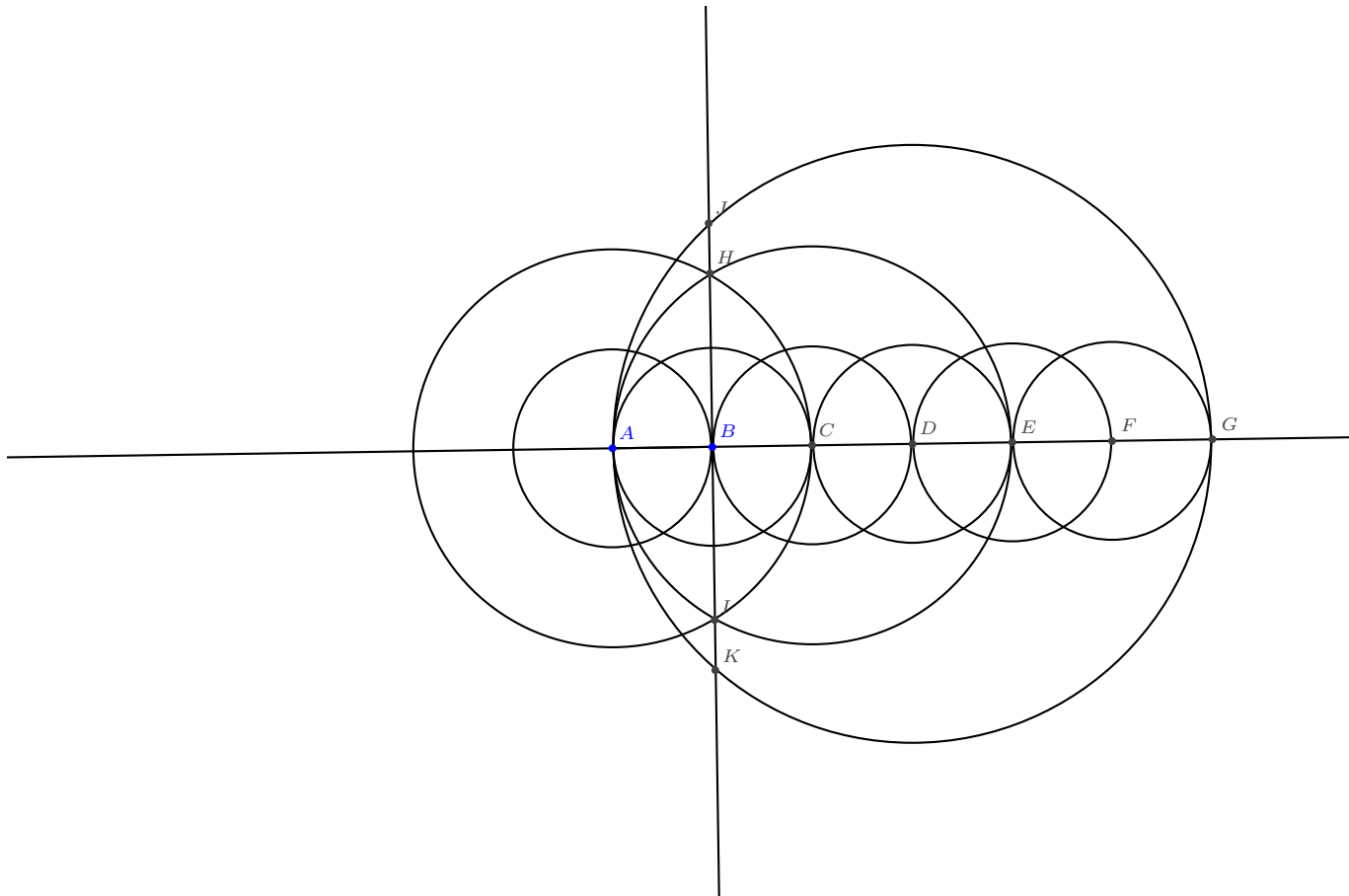
设  $A$  位于原点,  $B$  的坐标为  $(1, 0)$ , 我们的关键是用尺规画出点  $C$ . 点  $C$  对应的坐标为  $(\cos \frac{2\pi}{5}, \sin \frac{2\pi}{5})$ .

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}.$$

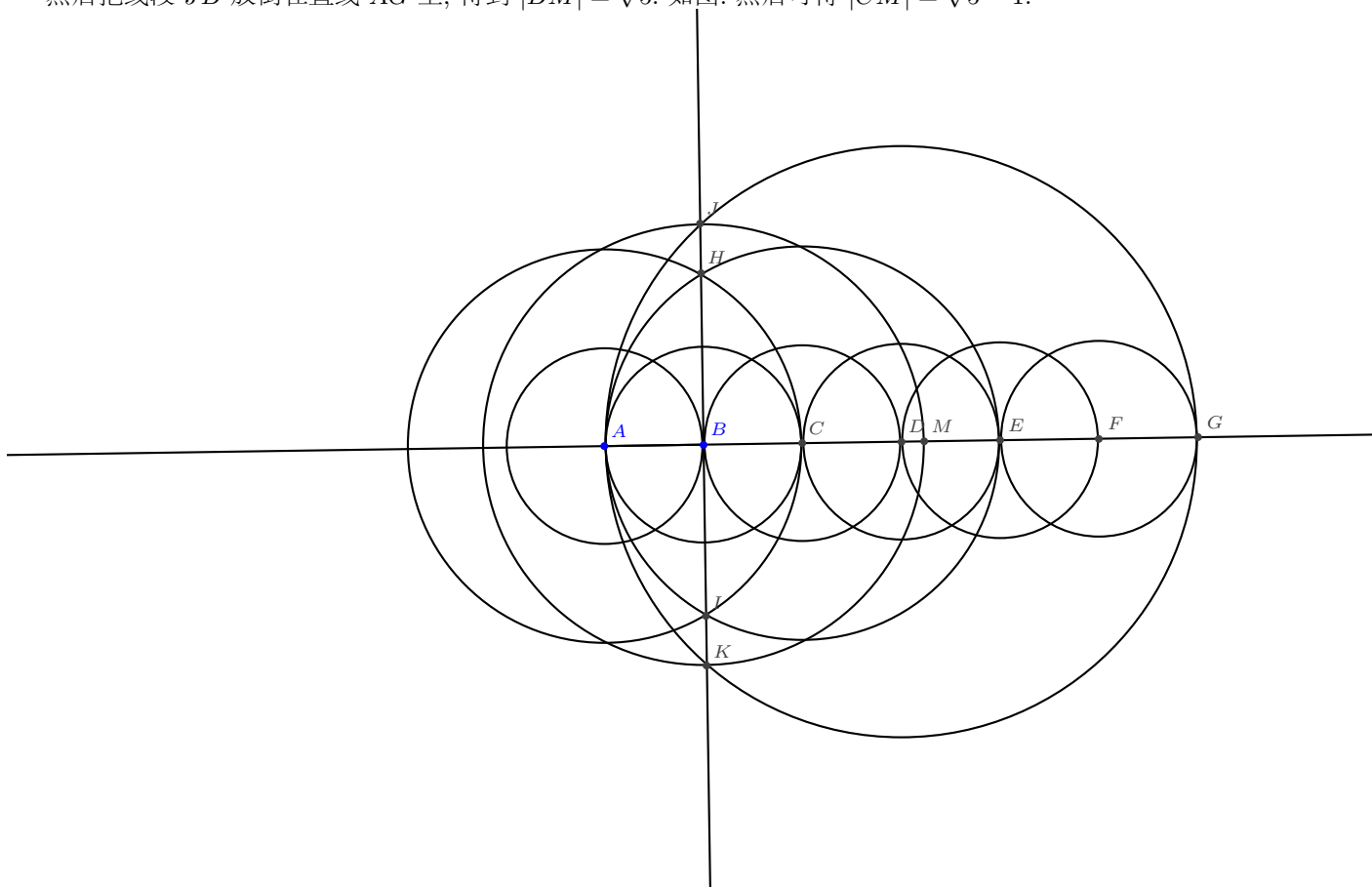
我们先尺规作出长度  $\cos \frac{2\pi}{5}$ . 先作出长度  $\sqrt{5}$ . 如图,  $JB$  的长度为  $\sqrt{5}$ .

---

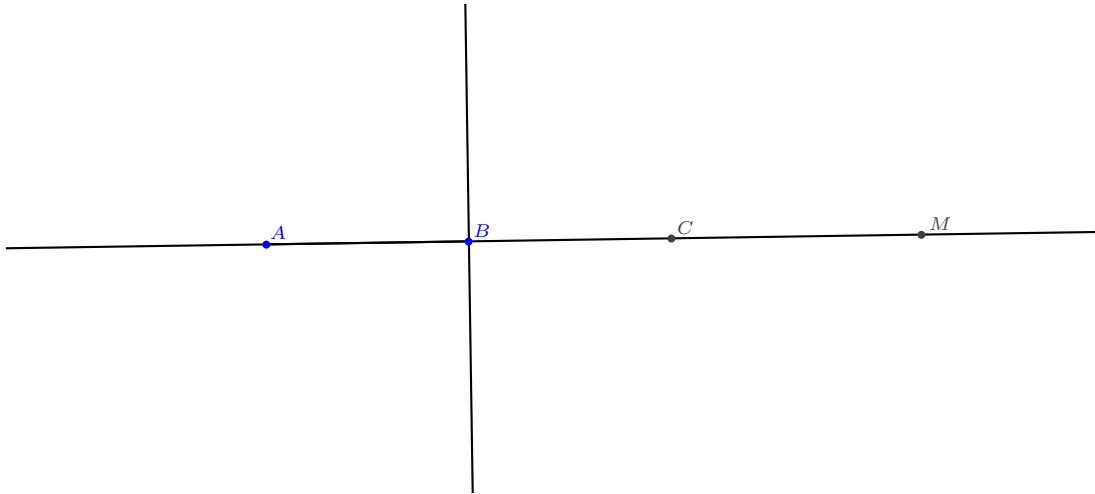
\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com



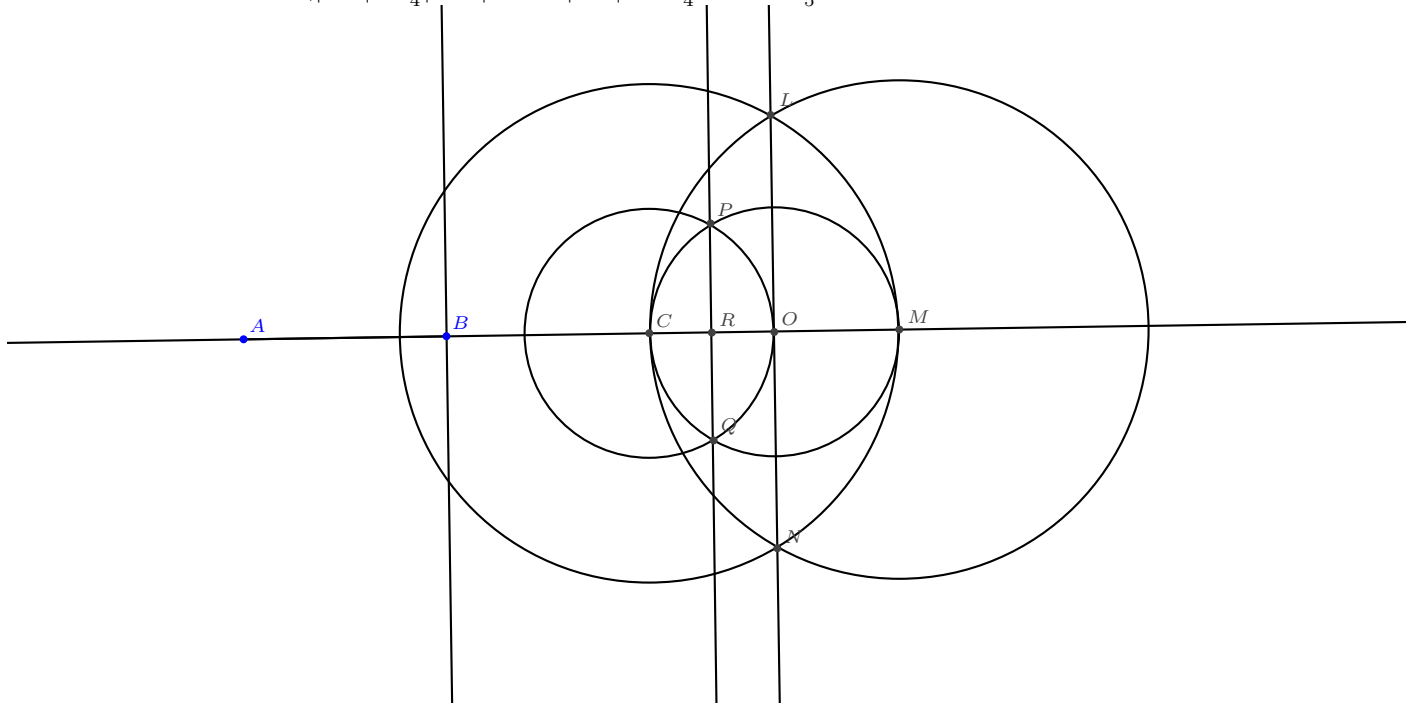
然后把线段  $JB$  放倒在直线  $AG$  上, 得到  $|BM| = \sqrt{5}$ . 如图. 然后可得  $|CM| = \sqrt{5} - 1$ .



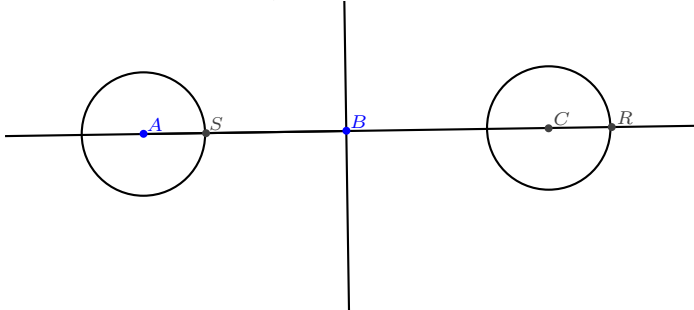
去掉那些凌乱的辅助线, 得到如下图. 然后我们考虑将  $CM$  四等分.



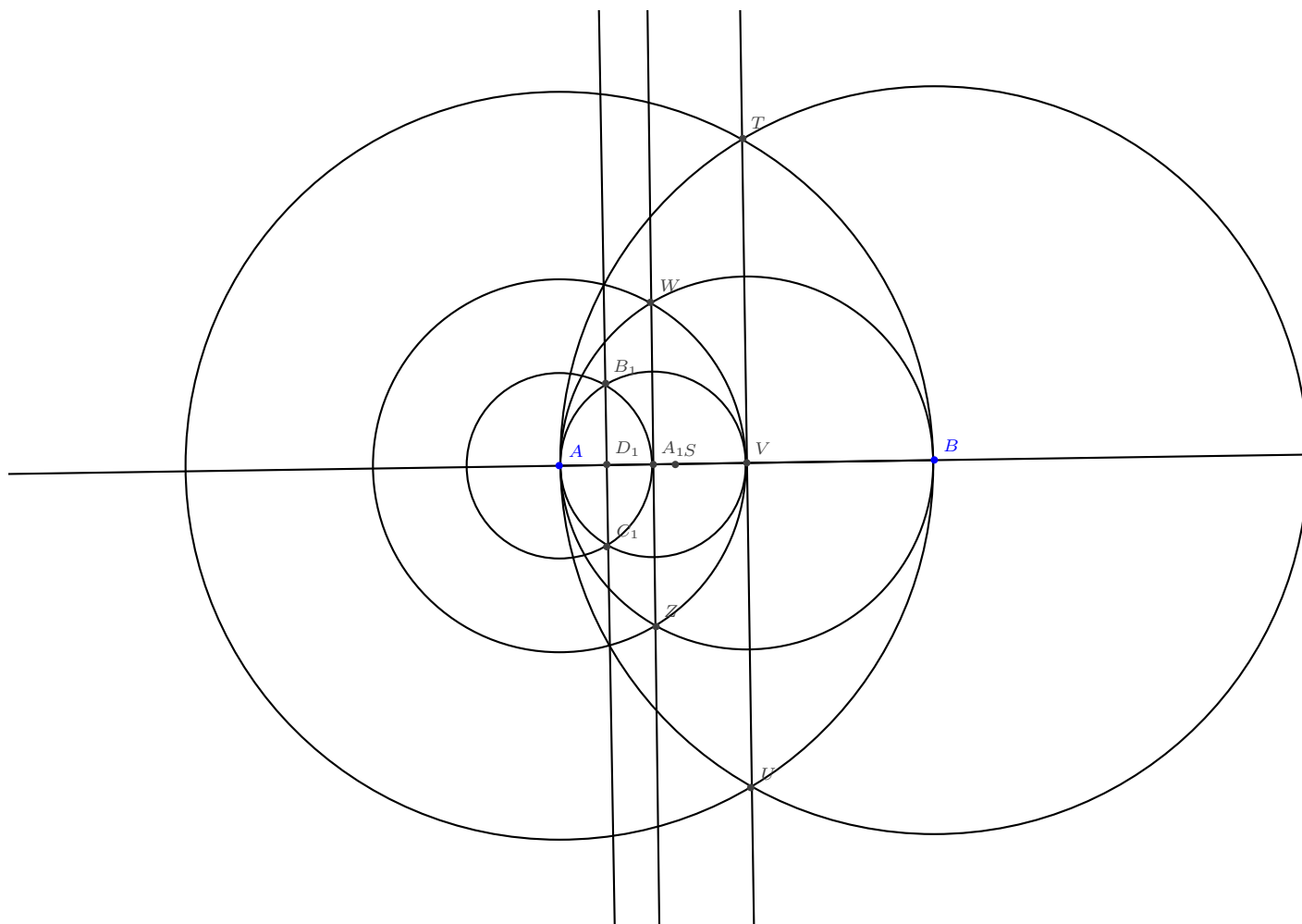
$CM$  四等分如下: 如图,  $|CR| = \frac{1}{4}|CM|$ . 于是  $|CR| = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos \frac{2\pi}{5}$ .



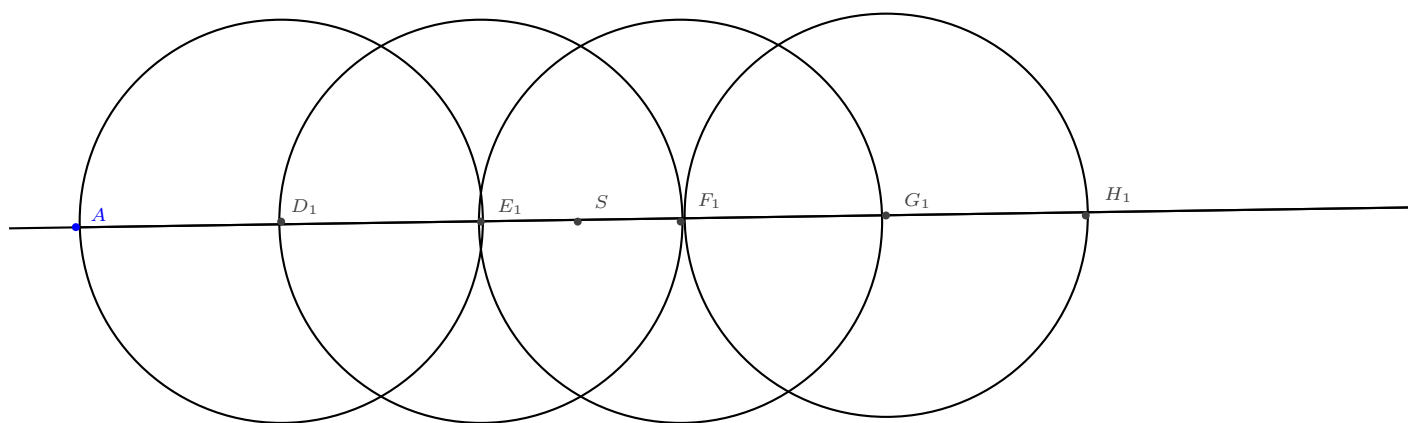
去掉那些凌乱的辅助线, 我们只看  $CR$ . 我们考虑以  $A$  为圆心以  $|CR|$  为半径作圆. 这是圆规的功能. 然后我们经过千辛万苦, 终于得到了点  $S$ .



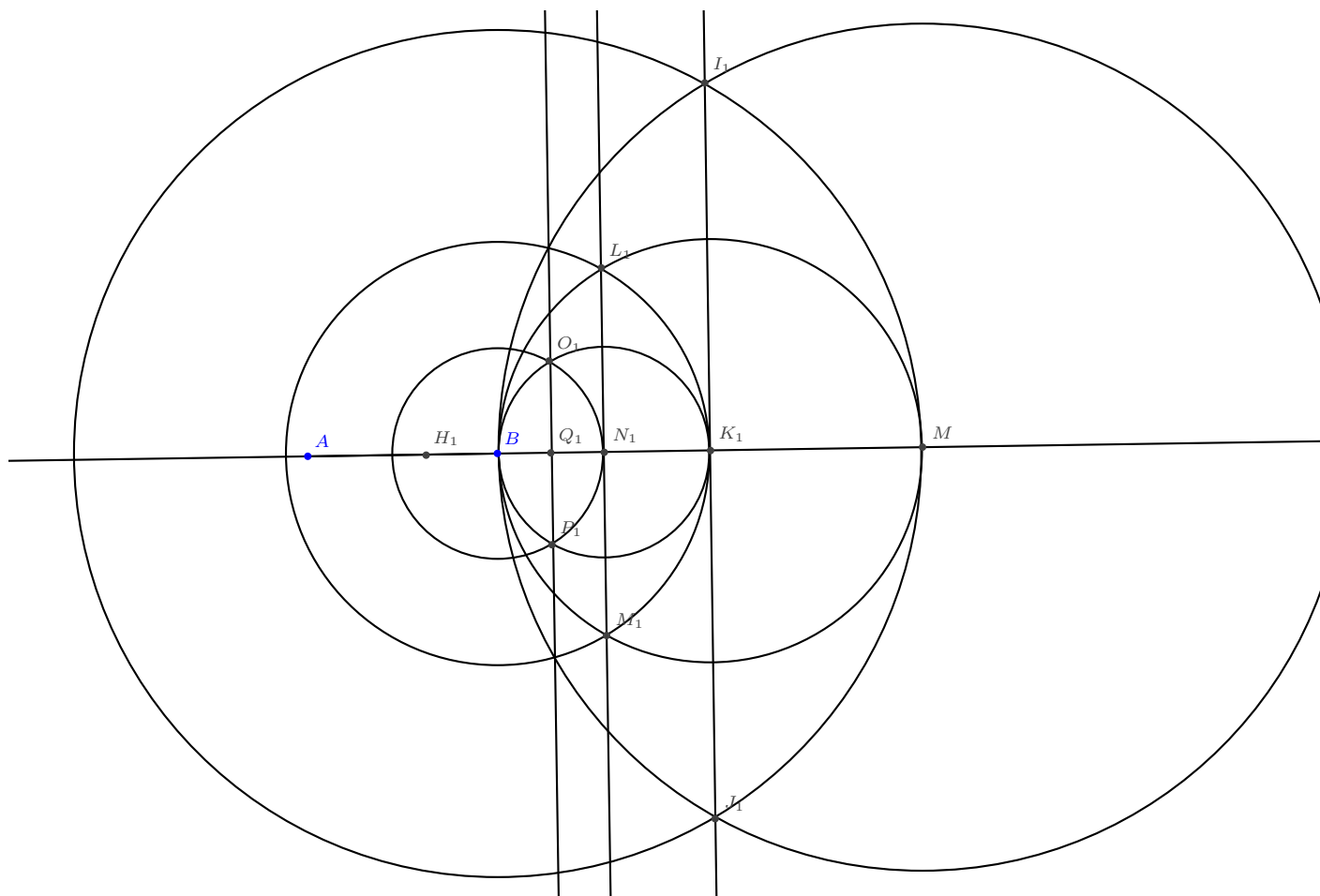
接下来我们要考虑的是作出长度  $\sin \frac{2\pi}{5} = \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$ . 我们先作出长度  $\frac{5}{8}$ . 如图,  $|AD_1| = \frac{1}{8}$ .



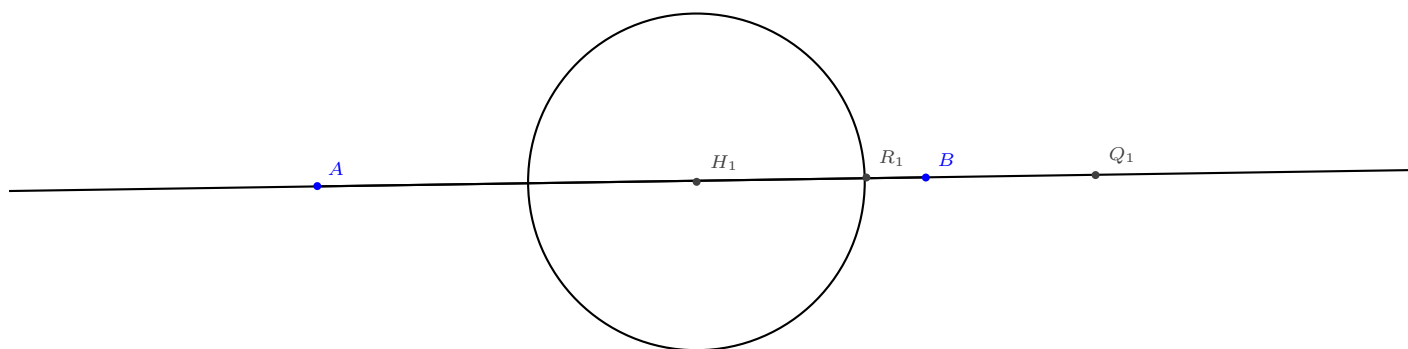
再看下图, 如图所示,  $AH_1$  的长度为  $\frac{5}{8}$ .



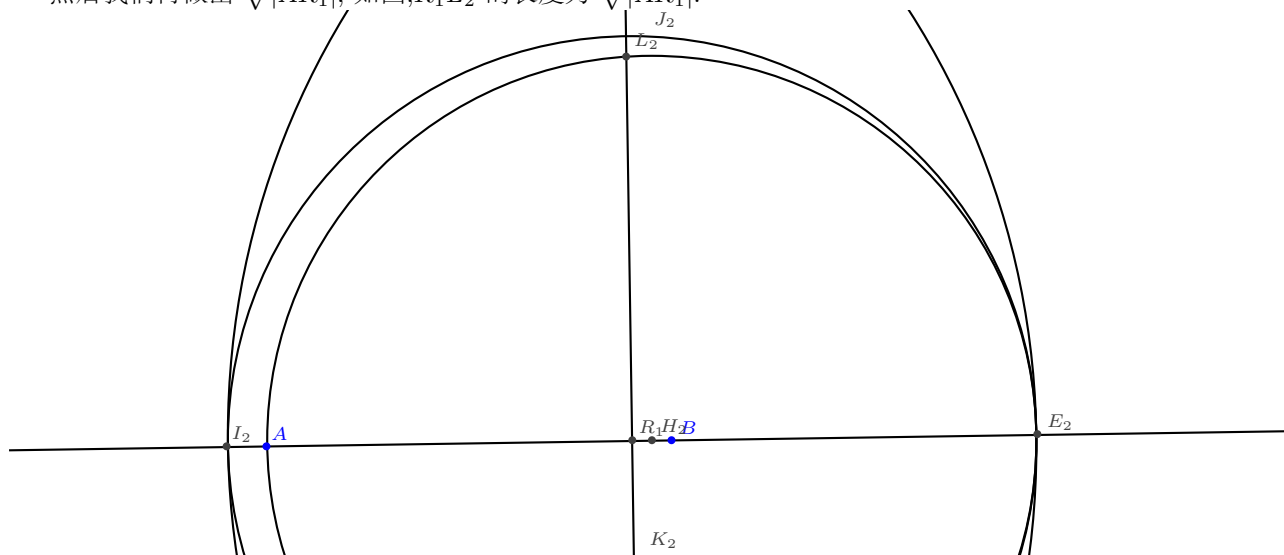
我们记得,  $BM$  的长度为  $\sqrt{5}$ , 现在将其八等分, 如图,  $|BQ_1| = \frac{1}{8}|BM| = \frac{1}{8}\sqrt{5}$ .



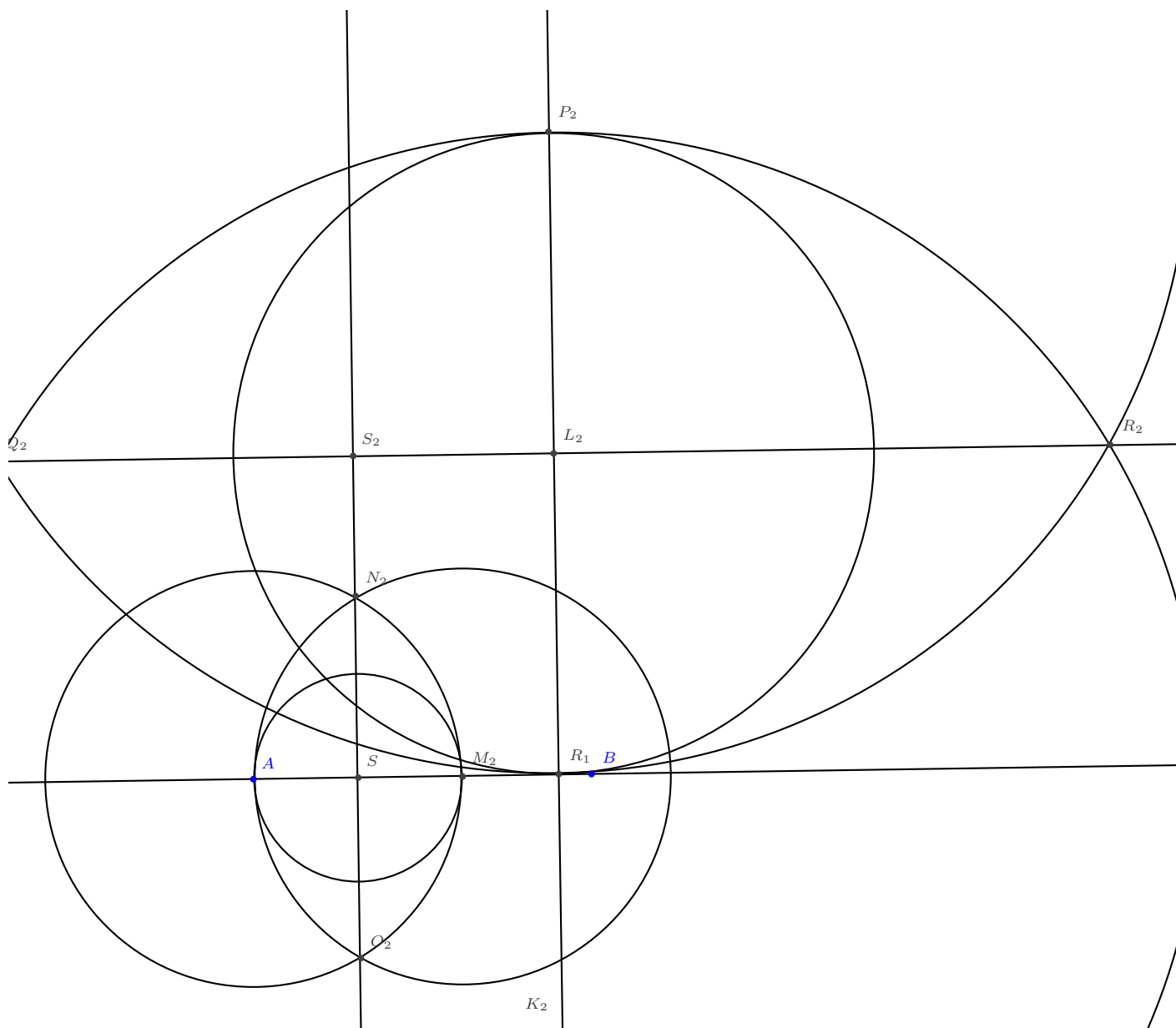
如图, 然后我们利用圆规把  $AH$  和  $BQ_1$  拼接起来. 得到  $|AR_1| = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}$ .



然后再做出  $\sqrt{|AR_1|}$ , 如图,  $R_1L_2$  的长度为  $\sqrt{|AR_1|}$ .



然后如图, 构造出点  $S_2$ .



然后, 如图, 我们得到了正五边形.

