n 维空间中两个 m 维平行体之间的投影

叶卢庆*

2015 年 2 月 1 日

设 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 m 个向量. 集合

$$\{p_1\mathbf{a}_1+p_2\mathbf{a}_2+\cdots+p_m\mathbf{a}_m : p_1,p_2,\cdots,p_m\geq 0, p_1+p_2+\cdots+p_m\leq 1\}$$

叫做 $\mathbf{R}^n$ 中由向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 张成的一个平行体.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中由 m 个线性无关的向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_m$ 张成的一个平行体.B 是 $\mathbf{R}^n$ 中由 m 个线性无关的向量 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 张成的一个平行体. 其中 $m<n$.

当 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 是两两正交的向量时. 设向量 $\mathbf{a}_j$ 在 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 张成的子空间上的正投影为 $\mathbf{a}_j'$, 易得 $\mathbf{a}_j'$ 是存在且唯一的, 而且 $\forall 1\leq i,j\leq m$,

$$(\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_j')\cdot\mathbf{b}_i=0. \iff \mathbf{a}_j\cdot\mathbf{b}_i=\mathbf{a}_j'\cdot\mathbf{b}_i.$$

设 $\mathbf{a}_j'=x_{1j}\mathbf{b}_1+x_{2j}\mathbf{b}_2+\cdots+x_{mj}\mathbf{b}_m$, 代入上面的关系式, 可得 $x_{ij}||b_i||^2=\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{b}_i$. 令 $\mathbf{e}_i=\frac{\mathbf{b}_i}{||\mathbf{b}_i||}$, 可得 $x_{ij}=\mathbf{a}_j\mathbf{e}_i$. 于是

$$\begin{cases}\mathbf{a}_1'=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2+\cdots+(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m,\\ \mathbf{a}_2'=(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2+\cdots+(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m,\\ \vdots\\ \mathbf{a}_m'=(\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2+\cdots+(\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m.\end{cases}$$

可见, 由 $\mathbf{a}_1',\mathbf{a}_2',\cdots,\mathbf{a}_m'$ 张成的平行体的有向体积为行列式

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{e}_m\\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{e}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{e}_m\end{vmatrix} \tag{1}$$

再乘以行列式 $\det(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_m)$. 于是,

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_m\\ \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b}_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_m\end{vmatrix} \tag{2}$$

等于 $\mathbf{a}_1',\mathbf{a}_2',\cdots,\mathbf{a}_m'$ 张成的平行体的有向体积, 除以 $\det(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_m)$, 再乘以 $\mathbf{b}_1',\mathbf{b}_2',\cdots,\mathbf{b}_m'$ 张成的平行体的有向体积, 再除以 $\det(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_m)$. 也就是说, 等于 $\mathbf{a}_1',\mathbf{a}_2',\cdots,\mathbf{a}_m'$ 张成的平行体的有向体积, 再乘以 $\mathbf{b}_1',\mathbf{b}_2',\cdots,\mathbf{b}_m'$ 张成的平行体的有向体积.

当 $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m$ 并非都是两两正交向量时, 可以利用 Gram-Schimit 方法将 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_m\}$ 正交化. 根据行列式的性质, 上述结论仍然成立.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com