$\mathbf{R}^n$ 中平行四边形的面积

叶卢庆*

2015 年 1 月 25 日

在此我们探讨 $\mathbf{R}^n$ 中平行四边形的面积. 设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\mathbf{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$, 我们来计算 $\mathbf{R}^n$ 中 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 张成的平行四边形 S 的面积的平方. 所谓 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 张成的平行四边形 S, 指的是如图 (1)所示.

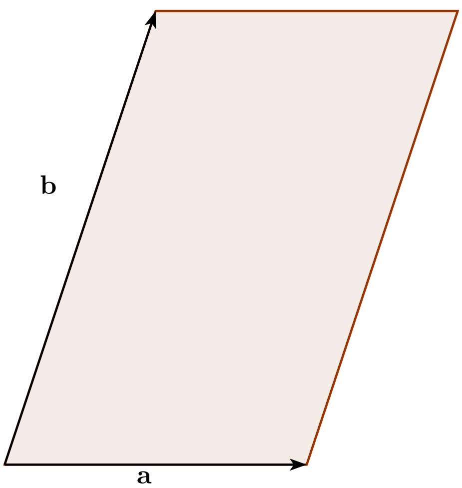

图 1

易得平行四边形 S 面积的平方为

$$||\mathbf{a}||^2||\mathbf{b}||^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_ib_j-a_jb_i)^2. \tag{1}$$

我们发现,$(a_ib_j-a_jb_i)^2$ 是平行四边形 S 在 x_iOx_j 坐标平面的正投影得到的平行四边形的面积的平方, 这样, 我们可以认为式(1)表达的, 和高维空间中的勾股定理很类似, 可以看作是面积之间的“勾股定理”.

下面我们从更加几何化的角度来剖析式(1). 讨论平行四边形 S 在 $\mathbf{R}^n$ 的 $\binom{n}{2}$ 个互相垂直的二维坐标平面上正投影的问题, 在某种意义下, 和讨论 $\mathbf{R}^{\binom{n}{2}}$ 空间中的线段 S' 在各个互相垂直的坐标轴上正投影的问题是一样的. 因此为了从几何上证明式(1), 我们只用证明,$\mathbf{R}^{\binom{n}{2}}$ 中经过原点的线段的长度之平方, 等于其在各个互相垂直的坐标轴上正投影得到的线段之平方的和. 而这正是 $\mathbf{R}^{\binom{n}{2}}$ 中的勾股定理.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com