$\mathbf{R}^4$ 中二维平面的位置关系

叶卢庆*

2015 年 2 月 3 日

四维空间直角坐标系 $\mathbf{R}^4$ 中的任意一个二维平面的方程形如

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1w+E_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2w+E_2=0. \end{cases}$$

也就是说,$\mathbf{R}^4$ 中的任意一个二维平面定义为 $\mathbf{R}^4$ 中两个三维体的交. 实际上,$\mathbf{R}^4$ 中任何两个不同的三维体不是平行, 就是相交. 对于 $\mathbf{R}^4$ 中的两个二维平面

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1w+E_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2w+E_2=0. \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} M_1x+N_1y+P_1z+Q_1w+T_1=0, \\ M_2x+N_2y+P_2z+Q_2w+T_2=0. \end{cases} \tag{2}$$

当行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ M_1 & N_1 & P_1 & Q_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 & Q_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

时, 平面(1)和平面(2)交于一个点. 否则, 平面(1) 和(2)的方程联立之后, 可能无解, 也可能有无限个解. 当无解时, 说明两平面平行. 当有无限解时, 说明两平面交于一直线. 注意 $\mathbf{R}^4$ 中的两平面不可能异体. 因为异体至少要求维数达到 $2+2+1=5$.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com