

过三角形内任意一点作直线平分三角形面积

叶卢庆*

杭州师范大学理学院

2014 年 4 月 23 日

如图(1), 非退化三角形 ABC . D 是三角形内任意一点. 下面我们考察如何作一条通过点 D 的直线, 该直线平分三角形 ABC 的面积.

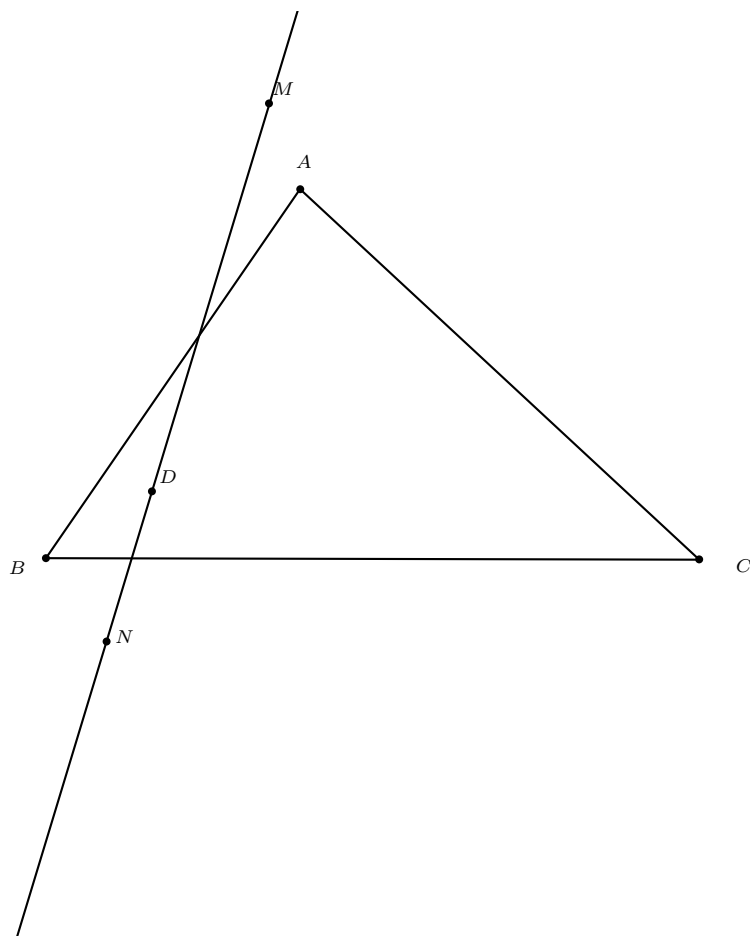


图 1

首先我们来证明,

定理 1. 对于三角形内的任意一点 D , 总存在一条通过 D 的直线, 该直线平分三角形 ABC 的面积.

证明. 如图(1)所示. 作任意一条过 D 的直线 l , 该直线把三角形分成两部分, 一部分的面积为 S_1 , 另一部分的面积为 S_2 . 如果 $S_1 = S_2$, 则 l 即为所求直线. 否则不妨设 $S_1 < S_2$.

假想你站在线段 DN 的中点, 点 N 在你右边, 点 M 在你左边, 不妨设你面对的区域面积为 S_2 , 背对区域的面积为 S_1 . 将直线绕着点 D 逆时针连续旋转 180° , 此时你面对的区域面积将从 S_2 连续地

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeludingmathematics@gmail.com

变成 S_1 , 而你背对的区域的面积将从 S_1 连续地变成 S_2 . 根据连续函数的介值定理, 当直线逆时针旋转某个角度时, 你背对的区域和面对的区域面积会相同. 命题得证. \square

注 1. 通过完全类似的证明, 我们有如下命题: 对于平面上任意给定的一个点和平面上任何一个具有一定面积的几何图形来说, 总存在通过该点的直线使得直线把几何图形的面积二等分.

下面我们具体刻画出把三角形面积二等分的直线的性质. 首先, 直线肯定把三角形 ABC 分成一个三角形和另外一个图形. 如图(2). 设直线 PQ 把三角形 ABC 分成两个面积相等的部分. 则由正弦定理易得

$$2|AP||AQ| = |AB||AC|,$$

即

$$|AP||AQ| = |AB||AE|,$$

其中 E 是线段 AC 的中点. 也即

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AQ|}.$$

这等价于向量 \overrightarrow{PE} 与向量 \overrightarrow{BQ} 共线. 注意, 我们根本不怕点 Q 不在线段 AC 上, 因为当 Q 不在线段 AC 上时, 必定在线段 AC 的延长线上.

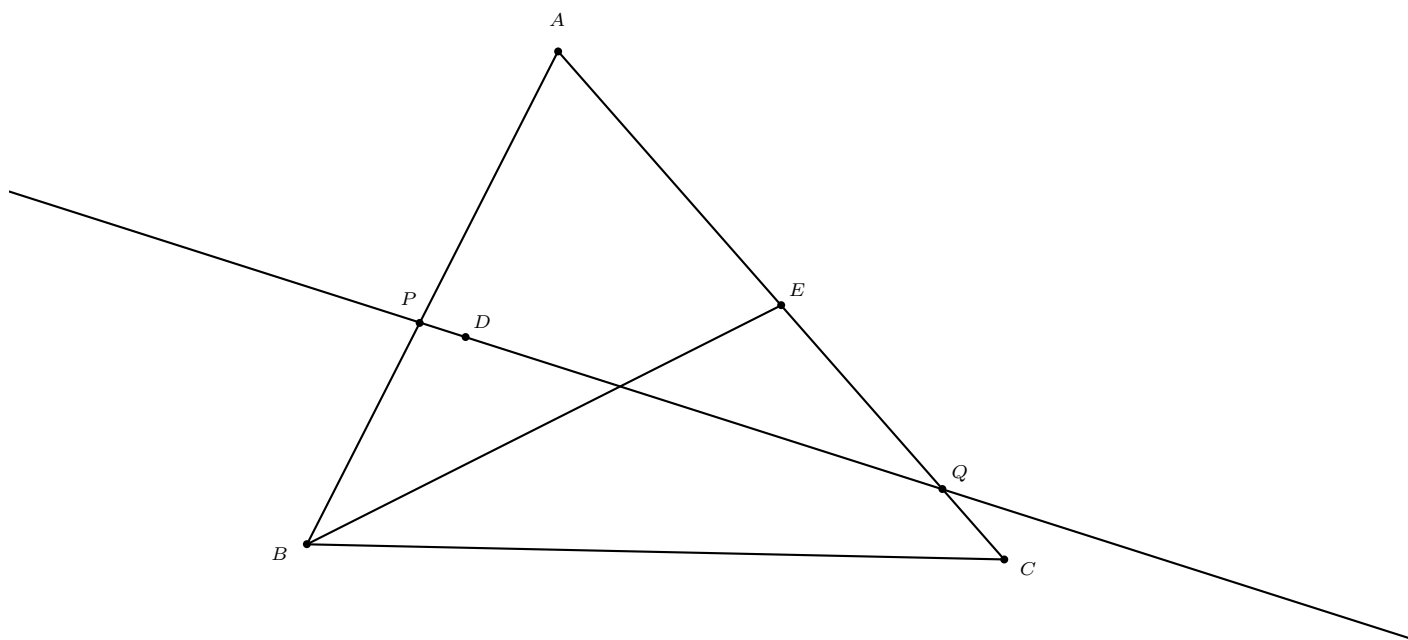


图 2