# 利用变量替换法计算一个面积分

叶卢庆*

2014 年 12 月 19 日

**题目.** 计算面积分

$$\int_S f(x,y,z)dS,$$

其中曲面 $S$ 代表球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的上半面,$f(x,y,z)=z^2$.

**解.** 变量替换. 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\sqrt{1-r^2}$, 其中 $\theta\in[0,2\pi)$,$0\leq r\leq 1$. 则曲面 $S$ 上的任意一点都可以表示为 $P(\theta,r)=(r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$. 且

$$\begin{aligned}\int_S f(x,y,z)dS &= \int_S (1-r^2)dS \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} F(\theta,r)d\theta dr.\end{aligned}$$

其中 $T=[0,2\pi)\times[0,1]$ 是 $\theta-O-r$ 平面直角坐标系上的一个长方形区域. 令

$$F(\theta,r)d\theta dr=(1-r^2)dS.$$

则

$$F(\theta,r)=(1-r^2)\frac{dS}{d\theta dr}.$$

易得

$$\frac{\partial P}{\partial\theta}=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0), \frac{\partial P}{\partial r}=(\cos\theta,\sin\theta,\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}).$$

因此

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\theta}\times\frac{\partial P}{\partial r}\right|=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

因此

$$\frac{dS}{d\theta dr}=\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

可见,$F(\theta,r)=r\sqrt{1-r^2}$. 于是我们之用计算

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1-r^2}d\theta dr=2\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{2\pi}{3}.$$

完毕. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com