教材章节	
教学目的要求	

教学摘要与评议 2014.11.15 14:56

习题 4.7.4. 由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的中心,引三条两两互相垂直的射线,分别交曲面于点 P_1, P_2, P_3, 设 $OP_1=r_1, OP_2=r_2, OP_3=r_3$, 试证

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

证明: 设这三条射线所在的直线方程分别为

$$\begin{cases}\frac{x}{\lambda_1}=\frac{y}{\mu_1}=\frac{z}{\nu_1}=t_1 & ① \\ \frac{x}{\lambda_2}=\frac{y}{\mu_2}=\frac{z}{\nu_2}=t_2 & ② \\ \frac{x}{\lambda_3}=\frac{y}{\mu_3}=\frac{z}{\nu_3}=t_3 & ③\end{cases}$$

且

$$\begin{cases}\cancel{\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1} & ④ \\ \cancel{\lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1} & ⑤ \\ \cancel{\lambda_3^2+\mu_3^2+\nu_3^2=1} & ⑥ \\ \cancel{\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0} & ⑦ \\ \cancel{\lambda_1\lambda_3+\mu_1\mu_3+\nu_1\nu_3=0} & ⑧ \\ \cancel{\lambda_2\lambda_3+\mu_2\mu_3+\nu_2\nu_3=0} & ⑨\end{cases}$$

故而只需要证明

$$\frac{1}{t_1^2}+\frac{1}{t_2^2}+\frac{1}{t_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

也就是证明

$$\left(\frac{\lambda_1^2}{a^2}+\frac{\mu_1^2}{b^2}+\frac{\nu_1^2}{c^2}\right)+\left(\frac{\lambda_2^2}{a^2}+\frac{\mu_2^2}{b^2}+\frac{\nu_2^2}{c^2}\right)+\left(\frac{\lambda_3^2}{a^2}+\frac{\mu_3^2}{b^2}+\frac{\nu_3^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

~~这是容易的~~．

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-1}{a^2}+\frac{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2-1}{b^2}+\frac{\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2-1}{c^2}=0. \quad ④$$

~~由条件①~③可得~~，

$$\cancel{\pm\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \lambda_1&\mu_1&\nu_1\\ \lambda_2&\mu_2&\nu_2\end{vmatrix}=\pm(\lambda_3\vec{i}+\mu_3\vec{j}+\nu_3\vec{k})},$$

~~因此~~

~~由条件①~③可得，不失一般性地，不妨设~~

$$\cancel{\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \lambda_1&\mu_1&\nu_1\\ \lambda_2&\mu_2&\nu_2\end{vmatrix}=\lambda_3\vec{i}+\mu_3\vec{j}+\nu_3\vec{k}},$$

由于 (λ_1,μ_1,ν_1)，(λ_2,μ_2,ν_2)，(λ_3,μ_3,ν_3) 是单位向量且两两正交，因此

$$\begin{cases}\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1\\ \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1\\ \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1\end{cases} \quad \cdots\cdots \quad ⑤$$

这样就证明了④式．可见，命题成立