基本对称矩阵与 Vandermond 矩阵的关系

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

2014 年 2 月 15 日

我们把行列式

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_n}\end{bmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(r_i-r_j) \tag{1}$$

叫基本对称行列式, 其中 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 为关于 $r_1,\cdots,r_n$ 的 n 个基本对称多项式, 也即,

$$\begin{cases}\sigma_1=r_1+r_2+\cdots+r_n,\\ \sigma_2=r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_{n-1}r_n,\\ \sigma_3=r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots+r_{n-2}r_{n-1}r_n,\\ \vdots\\ \sigma_n=r_1r_2\cdots r_n.\end{cases}$$

即, 对于两两不等的 $p_1,\cdots,p_i$,

$$\sigma_i=\sum_{1\leq p_1<p_2<\cdots<p_i\leq n}r_{p_1}r_{p_2}\cdots r_{p_i}.$$

我们发现, 基本对称行列式和 Vandermond 行列式

$$\det\begin{bmatrix}r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(r_i-r_j) \tag{2}$$

的值相等. 因此我们来寻找矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_1}{\partial r_n}\\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_2}{\partial r_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_1} & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial\sigma_n}{\partial r_n}\end{bmatrix} \tag{3}$$

和矩阵

$$\begin{bmatrix}r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

的关系. 我们先来考察简单的情形, 当 $n=2$ 时, 我们尝试发现

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ r_2 & r_1\end{bmatrix} \tag{5}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

和

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

的关系. 设

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_2 & r_1 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

当 $n = 3$ 时, 我们尝试发现

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_2 + r_3 & r_1 + r_3 & r_1 + r_2 \\ r_2 r_3 & r_1 r_3 & r_1 r_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

和

$$\begin{bmatrix} r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

的关系. 设

$$\begin{bmatrix} r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_2 + r_3 & r_1 + r_3 & r_1 + r_2 \\ r_2 r_3 & r_1 r_3 & r_1 r_2 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

则

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 & -(r_1 + r_2 + r_3) & 1 \\ r_1 + r_2 + r_3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$