

# 在 $\mathbf{R}^2$ 中解读《度量空间中有限点集的费马点》

叶卢庆\*

杭州师范大学理学院

2014 年 4 月 27 日

左铨如和林波在文献 [1] 中讨论了非正曲率强外凸度量空间中有限点集费马点的存在性和唯一性. 原文的框架比较广泛, 因此写的比较繁, 但是我想作者应该是以  $\mathbf{R}^2$  作为其论述的直观图景的. 因此在这篇笔记里, 我们在  $\mathbf{R}^2$  中大致复述作者的想法, 而且我们只讨论三个点, 而非一般的有限个点, 因为这并不妨碍我们对主要意思的把握. 在  $\mathbf{R}^2$  中我们采用的距离是常见的欧氏距离.

对于平面  $\mathbf{R}^2$  上的三个点来说, 费马点的存在性是容易的, 可以看文献 [1] 中对于定理 1 的证明. 对于  $\mathbf{R}^2$  上的三个点这个具体的命题来说, 简化的证明也可以见文献 [2] 中的定理 8. 我们着重于证明, 对于平面  $\mathbf{R}^2$  上不共线的点  $P_1, P_2, P_3$  来说, 费马点是唯一的.

**证明.** 如图 (1). 假若  $Q_1, Q_2$  都是点集  $\{P_1, P_2, P_3\}$  的费马点, 则  $|Q_1P_1| + |Q_1P_2| + |Q_1P_3| = |Q_2P_1| + |Q_2P_2| + |Q_2P_3| = S$ . 取  $Q_1, Q_2$  的中点  $P$ . 由于

$$\begin{cases} 2|PP_1| \leq |Q_1P_1| + |Q_2P_1|, \\ 2|PP_2| \leq |Q_1P_2| + |Q_2P_2|, \\ 2|PP_3| \leq |Q_1P_3| + |Q_2P_3|. \end{cases}$$

且三个不等式的等号不可能都成立. 因此把它们相加得到

$$|PP_1| + |PP_2| + |PP_3| < S.$$

于是  $Q_1, Q_2$  不可能是费马点, 矛盾. 这说明假设错误, 因此费马点是唯一的. □

## 参考文献

- [1] 左铨如, 林波. 度量空间中有限点集的费马点 [J]. 数学杂志, 1997, 17(3):359-364.
- [2] Luqing Ye. Finding the Fermat point via analysis, arXiv: <http://arxiv.org/abs/1404.5898>

---

\*叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com

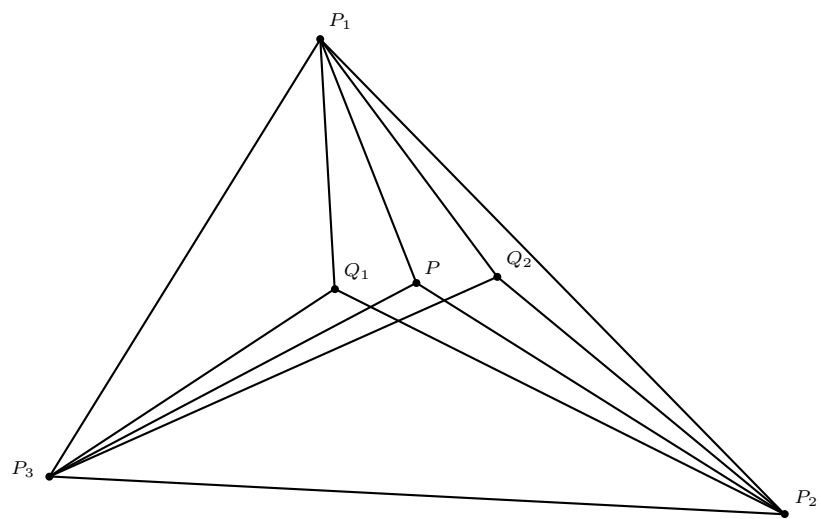


图 1