

楔积与向量积

叶卢庆*

2015 年 1 月 19 日

设 $\langle \omega \rangle = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \langle \nu \rangle = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$, 则

$$\begin{aligned}\langle \omega \rangle \times \langle \nu \rangle &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3) \mathbf{i} + (b_1 a_3 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

我们还知道, 设 $\omega = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, \nu = b_1 dx + b_2 dy + b_3 dz$, 则

$$\omega \wedge \nu = (a_1 b_2 - a_2 b_1) dx \wedge dy + (a_2 b_3 - a_3 b_2) dy \wedge dz + (a_3 b_1 - a_1 b_3) dz \wedge dx.$$

可见, 在映射 $T(dx \wedge dy) = \mathbf{k}, T(dy \wedge dz) = \mathbf{i}, T(dz \wedge dx) = \mathbf{j}$ 下, 楔积和向量积之间建立了同构的关系. 且

$$T(\omega \wedge \nu) = \langle \omega \rangle \times \langle \nu \rangle. \quad (1)$$

根据 Lagrange 恒等式,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \nu(V_1, V_2) &= \begin{vmatrix} \omega(V_1) & \nu(V_1) \\ \omega(V_2) & \nu(V_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \omega \rangle \cdot V_1 & \langle \nu \rangle \cdot V_1 \\ \langle \omega \rangle \cdot V_2 & \langle \nu \rangle \cdot V_2 \end{vmatrix} \\ &= (V_1 \times V_2) \cdot (\langle \omega \rangle \times \langle \nu \rangle),\end{aligned}$$

可见, $\omega \wedge \nu(V_1, V_2)$ 的几何意义, 就是以向量 V_1, V_2 为邻边的有向平行四边形, 投影到 $\langle \omega \rangle, \langle \nu \rangle$ 展成的平面上所得的平行四边形的有向面积, 再乘以以 $\langle \omega \rangle, \langle \nu \rangle$ 为邻边的平行四边形的有向面积. 相当于两个有向平行四边形之间进行的“内积”.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com