一次形式楔积的几何解释

叶卢庆*

2015 年 1 月 11 日

在此我们从几何的角度来解释一次形式的楔积. 两个一次形式分别形如

$$w = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \cdots + a_ndx_n, v = b_1dx_1 + b_2dx_2 + \cdots + b_ndx_n.$$

两个一次形式的楔积 $w \wedge v$ 的几何意义, 必须要通过作用于具体的向量才能看出来. 设 V_1, V_2 是 $T_p\mathbf{R}^n$ 中两个线性无关的向量, 我们来看

$$w \wedge v(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} w(V_1) & v(V_1) \\ w(V_2) & v(V_2) \end{vmatrix}$$

的几何解释. 首先,$T_p\mathbf{R}^n$ 中的向量 V_1 在 $\langle w \rangle$ 上的投影再乘以 $\langle w \rangle$ 的长度就是 $w(V_1)$,V_1 在 $\langle v \rangle$ 上的投影再乘以 $\langle v \rangle$ 的长度就是 $w(V_2)$. 向量 $\langle w \rangle$ 和向量 $\langle v \rangle$ 未必是正交的, 如图所示.$OA = w(V_1), OB = v(V_1)$, 则点 P 的坐标是 $(w(V_1), v(V_1))$, 其中 $OAPB$ 是平行四边形. 类似地,P' 的坐标是 $(w(V_2), v(V_2))$.

以向量 OP', OP 为邻边, 张成了一个平行四边形. 该平行四边形的面积, 再除以向量 $\frac{\langle w \rangle}{|\langle w \rangle|}$ 和 $\frac{\langle v \rangle}{|\langle v \rangle|}$ 张成的平行四边形的面积, 就是 $w \wedge v(V_1, V_2)$.

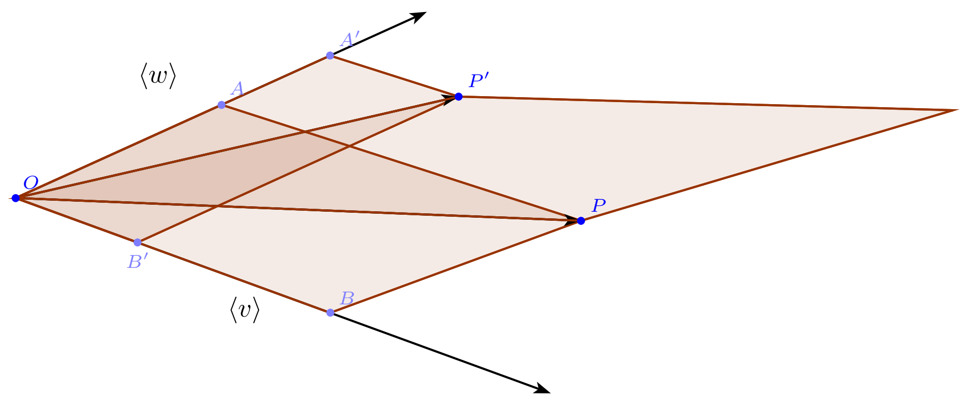

图 1

下面我们根据对一次形式楔积的几何解释, 来说明为什么一次形式的楔积具有分配律. 也就是, 为什么会有

$$w \wedge (v_1 + v_2) = w \wedge v_1 + w \wedge v_2,$$

其中 $v_2 = c_1dx_1 + c_2dx_2 + \cdots + c_ndx_n$.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com