连续可微可逆映射对单位正方形的作用

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 12

在这篇文章里, 我们探索连续可微的可逆映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 对 $\mathbf{R}^n$ 中的正方形 $P_k=[0,\frac{1}{k}]\times\cdots\times[0,\frac{1}{k}]$ 的作用. 我们怀疑,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m(T(P_k))}{m(p_k)}=|\det T|.$$

其中 $|\det T|$ 是 T 在 $(0,\cdots,0)$ 处的 Jacobi 行列式.

为了证明这一点, 我们首先考虑 $n=1$ 的情形.P_k 是一条线段 $[0,\frac{1}{k}]$.T 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续可微函数, 且 T 可逆. 根据微分中值定理, 可得

$$\frac{T(x)-T(0)}{x}=T'(\xi),0<\xi<x.$$

因此, 根据导函数的连续性, 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{T(x)-T(0)}{x}=T'(0).$$

因此,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{T(\frac{1}{k})-T(0)}{\frac{1}{k}}=T'(0).$$

成立.

当 $n=2$ 时, 我们把 T 看成 (T_1,T_2). 其中 $T_1:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,$T_2:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, 具体地, 若 $T((x_1,x_2))=(y_1,y_2)$, 则 $T_1((x_1,x_2))=y_1$,$T_2((x_1,x_2))=y_2$. 现在, 我们将函数 T_1 和 T_2 在 $(0,0)$ 附近进行带余项的 Taylor 展开. 我们来看函数

$$\phi_1(t)=T_1(0+th,0+tk)=T_1(th,tk).$$

易 得

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) + \frac{\phi_1'(0)}{1!}t + o(t).$$

易 得

$$\phi_1'(0) = h\frac{\partial T_1}{\partial x} + k\frac{\partial T_1}{\partial y}.$$