初等阵对单位正方形的作用

叶卢庆
杭州师范大学理学院，学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 6

在这篇文章里，我们研究 $n \times n$ 的初等矩阵 P 对 n 维单位正方形的作用. 这里的初等阵 P 代表的是矩阵的初等行变换，且不包括将某一行乘以一个非零数这种操作. 我们希望证明,n 维单位正方形在 P 所代表的线性映射的作用下，体积不变.

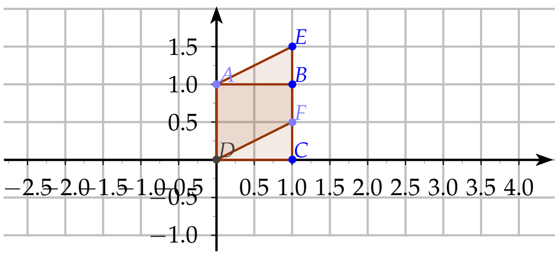
为此我们先考虑 $n = 2$ 的特殊情形. 此时，不妨设单位正方形为 $[0,1] \times [0,1]$. 在此时，若 P 代表的操作是行交换，则 $\mathbf{R}^2$ 中的点 (x,y) 在 P 的作用下会变成 (y,x). 因此单位正方形在 P 的作用下连位置都没发生变动，更不必说面积了. 若 P 代表的操作是某一行乘以一个非零常数后加到另一行上，不妨设是第一行乘以 λ 后加到第二行上，则 P 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

点 (x,y) 在 P 的作用下变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}.$$

这个时候，$[0,1] \times [0,1]$ 会如何变化呢? 我们画图. 作为 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的特例，我们发现正方形 $ABCD$ 会成为平行四边形 $AEFD$. 显然，此时面积并不发生变化.



现在我们探索一般情形. 在一般情形, 当 $n \times n$ 矩阵 P 对应的操作是第 i 行和第 j 行互换之时, 显然 P 会把一个单位正方形变成同一个单位正方形, 此时显然面积不变. 当 P 对应的操作是第 i 行乘以一个非零常数 λ 加到第 j 行上时,$\mathbf{R}^n$ 中的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$ 在 P 的作用下变成 $(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, \lambda x_i + x_j, \cdots, x_n)$. 因此单位正方形在 P 的作用下形成的几何体在空间 $(x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ 上的垂直投影的测度为 1. 且在维度 x_j 上发生的是平移, 因此体积不变.