一次形式及其楔积

叶卢庆*

2015 年 1 月 3 日

设 $w = a_1dx_1 + \cdots + a_ndx_n$, 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 是常数, 且 dx_i 是坐标函数, 表示 n 维向量 V 的第 i 个坐标. 可见,w 可以被一个 $1 \times n$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

表示.w 叫做一个一次形式, 且这个一次形式是一个把向量变成实数的线性变换 $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

我们再看另外一个一次形式 $v = b_1dx_1 + \cdots + b_ndx_n$, 其中 $b_1, \cdots, b_n$ 是常数, 且 dx_i 是坐标函数. 两个一次形式 w, v 形成一个整体时, 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换, 可以用一个 $2 \times n$ 的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

任意一个 $\mathbf{R}^n$ 中的向量经过这个矩阵的作用后, 会变成一个 $\mathbf{R}^2$ 中的向量. 任意两个 $\mathbf{R}^n$ 中的向量经过这个矩阵作用后, 会变成两个 $\mathbf{R}^2$ 中的向量. 这两个 $\mathbf{R}^2$ 中的向量可以按照顺序形成一个行列式, 这个行列式就是两个一次形式的楔积对于两个向量的作用.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com