单叶双曲面异族直母线共面

叶卢庆[*]

2014 年 12 月 30 日

定理. 单叶双曲面异族直母线共面.

证明. 对于单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

来说, 它的方程可以化为

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right).$$

因此该单叶双曲面的 u 族直母线为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=u(1+\frac{y}{b}),\\ u(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=1-\frac{y}{b}.\end{cases},$$

v 族直母线为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=v(1-\frac{y}{b}),\\ v(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=1+\frac{y}{b}.\end{cases}$$

下面我们来证明 u 族直母线和 v 族直母线共面. 为此, 只用证明

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&\frac{-u}{b}&\frac{1}{c}&-u\\ \frac{u}{a}&\frac{1}{b}&\frac{-u}{c}&-1\\ \frac{1}{a}&\frac{v}{b}&\frac{1}{c}&-v\\ \frac{v}{a}&\frac{-1}{b}&\frac{-v}{c}&-1\end{vmatrix}=0,$$

也就是证明

$$\frac{1}{a}\left(-\frac{2}{bc}-\frac{2uv}{bc}\right)+\frac{u}{b}\left(\frac{-2u}{ac}+\frac{2v}{ac}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{-2uv}{ab}+\frac{2}{ab}\right)+u\left(\frac{2v}{abc}+\frac{2u}{abc}\right)=0$$

这是容易验证的. 所以单叶双曲面异族直母线共面. □

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com