$\mathbf{R}^4$ 中二次形式可分解为一次形式楔积的必要条件

叶卢庆*

2015 年 2 月 4 日

我们知道,$\mathbf{R}^4$ 中的任意二次形式都可以写作

$$a_1 dx \wedge dy + a_2 dy \wedge dz + a_3 dz \wedge dw + a_4 dw \wedge dx = dx \wedge (a_1 dy - a_4 dw) + dz \wedge (a_3 dw - a_2 dy).$$

可见,$\mathbf{R}^4$ 里的任意二次形式 ω 都可以写为两个二次形式 ω_1 与 ω_2 的和,$\omega = \omega_1 + \omega_2$. 其中这两个二次形式都是都是一次形式的楔积, 也即

$$\omega_1 = \nu_1 \wedge \nu_2, \omega_2 = \xi_1 \wedge \xi_2.$$

其中 $\nu_1, \nu_2, \xi_1, \xi_2$ 都是 $\mathbf{R}^4$ 中的一次形式. 我们来证明如下结论:

定理. 若 $\langle\nu_1\rangle$,$\langle\nu_2\rangle$ 张成的平面和 $\langle\xi_1\rangle$,$\langle\xi_2\rangle$ 张成的平面仅有一个交点, 则二次形式 ω 不能表达成一次形式的楔积.

证明. $\langle\nu_1\rangle$,$\langle\nu_2\rangle$ 张成的平面和 $\langle\xi_1\rangle$,$\langle\xi_2\rangle$ 张成的平面仅有一个交点, 说明 $\det(\langle\nu_1\rangle, \langle\nu_2\rangle, \langle\xi_1\rangle, \langle\xi_2\rangle) \neq 0$. 于是, 对于任意 $\mathbf{R}^4$ 中线性无关的向量 V_1, V_2, V_3, V_4

$$\omega \wedge \omega(V_1, V_2, V_3, V_4) = (\omega_1 + \omega_2) \wedge (\omega_1 + \omega_2)(V_1, V_2, V_3, V_4) = 2\nu_1 \wedge \nu_2 \wedge \xi_1 \wedge \xi_2(V_1, V_2, V_3, V_4) \neq 0.$$

假设 $\omega = \delta_1 \wedge \delta_2$, 其中 δ_1, δ_2 是 $\mathbf{R}^4$ 中的两个一次形式, 则应该有 $\omega \wedge \omega = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \delta_1 \wedge \delta_2 = 0$. 矛盾. 说明假设错误. 于是二次形式 ω 不能表达成一次形式的楔积. □

根据这个定理, 我们有推论:

推论. 若 $\mathbf{R}^4$ 中的二次形式 ω 能表达成一次形式的楔积, 则 $\langle\nu_1\rangle$,$\langle\nu_2\rangle$ 张成的平面和 $\langle\xi_1\rangle$,$\langle\xi_2\rangle$ 张成的平面或者只有一条交线, 或者平行, 或者重合.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com