基变换与坐标变换

叶卢庆*

2015 年 1 月 9 日

设向量 $V\in\mathbf{R}^n$, 且 $\alpha=(w_1,\cdots,w_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组有序基, 则存在 $a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$, 使得

$$V=a_1w_1+\cdots+a_nw_n.$$

$(a_1,\cdots,a_n)$ 叫做 V 在有序基 α 下的坐标. 随着 V 的变化,$(a_1,\cdots,a_n)$ 也会随之变化, 可见, 向量在某个基下的各个坐标是关于向量的函数.

在此, 我们揭示基变换和坐标变换之间的区别和联系. 所谓的基变换, 指的是两个基之间的关系. 设 $\beta=(v_1,\cdots,v_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的另一组有序基, 设

$$[I]_\beta^\alpha=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

即 $\forall 1\leq i\leq n$,

$$v_i=a_{1i}w_1+a_{2i}w_2+\cdots+a_{ni}w_n.$$

也就是,

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}.$$

而且, 在基 β 下坐标为 $(b_1,\cdots,b_n)$ 的向量在 α 下的坐标会成为

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}.$$

这是很容易想到的.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com