吕林根, 许子道《解析几何》习题 4.7.6

叶卢庆*

2014 年 11 月 19 日

题目. 求与下列三条直线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = z, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -z \end{cases}$$

与

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}.$$

都共面的直线所构成的曲面.

解. 设直线的方程为

$$\frac{x-p_1}{\lambda_1} = \frac{y-p_2}{\lambda_2} = \frac{z-p_3}{\lambda_3}. \tag{1}$$

直线(1)与直线 $\begin{cases} x = 1, \\ y = z \end{cases}$ 共面, 表明

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ p_1 - 1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

直线(1)与直线 $\begin{cases} x = -1, \\ y = -z \end{cases}$ 共面, 表明

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ p_1 + 1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

直线(1)与直线 $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{5}$ 共面, 表明

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -3 & 4 & 5 \\ p_1 - 2 & p_2 + 1 & p_3 + 2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

方程(2),(3),(4)联立, 可知

$$\begin{cases} (p_3 - p_2)\lambda_1 + (p_1 - 1)\lambda_2 - (p_1 - 1)\lambda_3 = 0, \\ (p_3 + p_2)\lambda_1 - (p_1 + 1)\lambda_2 - (p_1 + 1)\lambda_3 = 0, \\ (4p_3 - 5p_2 + 3)\lambda_1 + (5p_1 + 3p_3 - 4)\lambda_2 + (-3p_2 - 4p_1 + 5)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

该关于 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的方程组显然不止有一个解 $(0,0,0)$, 因此行列式

$$\begin{vmatrix} p_3 - p_2 & p_1 - 1 & -(p_1 - 1) \\ p_3 + p_2 & -(p_1 + 1) & -(p_1 + 1) \\ 4p_3 - 5p_2 + 3 & 5p_1 + 3p_3 - 4 & -3p_2 - 4p_1 + 5 \end{vmatrix} = 0.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

将第二行加到第一行上, 可得

$$\begin{vmatrix} 2p_3 & -2 & -2p_1 \\ p_3+p_2 & -(p_1+1) & -(p_1+1) \\ 4p_3-5p_2+3 & 5p_1+3p_3-4 & -3p_2-4p_1+5 \end{vmatrix} = 0.$$

将第一行乘以 -2 加到第三行上, 可得

$$\begin{vmatrix} 2p_3 & -2 & -2p_1 \\ p_3+p_2 & -(p_1+1) & -(p_1+1) \\ -5p_2+3 & 5p_1+3p_3 & -3p_2+5 \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$\begin{vmatrix} p_3 & -1 & -p_1 \\ p_3+p_2 & -(p_1+1) & -(p_1+1) \\ -5p_2+3 & 5p_1+3p_3 & -3p_2+5 \end{vmatrix} = 0.$$

再将第一行乘以 -1 加到第二行上, 可得

$$\begin{vmatrix} p_3 & -1 & -p_1 \\ p_2 & -p_1 & -1 \\ -5p_2+3 & 5p_1+3p_3 & -3p_2+5 \end{vmatrix} = 0.$$

再将第二行乘以 5 加到第三行上, 可得

$$\begin{vmatrix} p_3 & -1 & -p_1 \\ p_2 & -p_1 & -1 \\ 3 & 3p_3 & -3p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

即

$$p_1^2+p_2^2-p_3^2=1.$$

可见, 曲面为

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

□