连续可微可逆映射对单位正方形的作用

叶卢庆
杭州师范大学理学院, 学号:1002011005
Email:h5411167@gmail.com
2013. 12. 13

在这篇文章里, 我们探索连续可微的可逆映射 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 对 $\mathbf{R}^n$ 中的正方形 $P_k=[0,\frac{1}{k}]\times\cdots\times[0,\frac{1}{k}]$ 的作用. 我们怀疑,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{m(T(P_k))}{m(p_k)}=|\det T|.$$

其中 $|\det T|$ 是 T 在 $(0,\cdots,0)$ 处的 Jacobi 行列式.

为了证明这一点, 我们首先考虑 $n=1$ 的情形.P_k 是一条线段 $[0,\frac{1}{k}]$.T 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的连续可微函数, 且 T 可逆. 根据微分中值定理, 可得

$$\frac{T(x)-T(0)}{x}=T'(\xi),0<\xi<x.$$

因此, 根据导函数的连续性, 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{T(x)-T(0)}{x}=T'(0).$$

因此,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{T(\frac{1}{k})-T(0)}{\frac{1}{k}}=T'(0).$$

成立.

当 $n=2$ 时, 函数 T 把点 (x,y) 映射成点 $(T_1(x,y),T_2(x,y))$. 我们知道, 在 $\lambda\in[0,1]$ 时, 直线段 $\lambda(0,0)+(1-\lambda)(0,\frac{1}{k})$ 在线性映射

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial T_1}{\partial x}&\frac{\partial T_1}{\partial y}\\\frac{\partial T_2}{\partial x}&\frac{\partial T_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

的作用下, 会变成直线段

$$\lambda(0,0)+(1-\lambda)(\frac{\partial T_1}{\partial y}\frac{1}{k},\frac{\partial T_2}{\partial y}\frac{1}{k}).$$

而直线段 $\lambda(0,0)+(1-\lambda)(0,\frac{1}{k})$ 在映射 T 的作用下会变成连续可微的曲线, 该曲线的两个端点分别为

$$(0,0),(T_1(0,\frac{1}{k}),T_2(0,\frac{1}{k})).$$

将 T_1 在点 $(0,0)$ 附近进行带余项的 Taylor 展开, 我们来看函数

$$\phi(t)=T_1(0+th,0+tp)=T_1(th,tp).$$

易得

$$\phi(t)=\phi(0)+\frac{\phi'(0)}{1!}t+o(t).$$

而且,

$$\phi'(0)=h\frac{\partial T_1}{\partial x}(0,0)+p\frac{\partial T_1}{\partial y}(0,0).$$

现在, 我们令

$$h=0,p=1,$$

此时, 可得

$$\phi(\frac{1}{k})=T_1(0,\frac{1}{k})=T_1(0,0)+\frac{1}{k}\frac{\partial T_1}{\partial y}(0,0)+o(\frac{1}{k}).$$

因此, 可得

$$T_1(0,\frac{1}{k})-T_1(0,0)=\frac{1}{k}\frac{\partial T_1}{\partial y}(0,0)+o(\frac{1}{k}).$$

可见, 当 $\frac{1}{k}\to 0$ 时, 我们有

$$\lim_{\frac{1}{k}\to 0}\frac{T_1(0,\frac{1}{k})-T_1(0,0)}{\frac{1}{k}}=\frac{\partial T_1}{\partial y}(0,0).$$

简直太棒了. 其余的几乎可以略了.