数形结合在中学数学中的应用

1 引言

著名法国数学家拉格朗日曾经说过: "只要代数同几何分道扬镳, 它们的进展就缓慢, 它们的应用就狭窄. 但是当这两门学科结合时, 它们就互相吸取对方的力量, 然后趋于完善."

我国著名数学家华罗庚曾赋诗: "数与形, 本是相倚依, 焉能分作两边飞. 数缺形时少直观, 形少数时难入微. 形数结合百般好, 隔离分家万事休. 切莫忘, 几何代数统一体, 永远联系, 切莫分离!"

什么是数? 什么是形? 这两个词汇都没有准确的数学定义, 因为现代数学里的概念, 归根结底, 大都基于 Cantor 所创立的集合论, 至于论证方式, 是基于公理化的推理, 而集合论和公理体系是没有什么数与形的区分的. 而且, 据笔者所知, 数形结合这种说法, 大都也只出现在中学数学的教育领域里, 在真正的数学研究里, 很少有人说什么 "我们利用数形结合的思想", 因为数学里其实到处都在数形结合, 没必要分明地指出来. 大体上来说, 所谓数, 就是数量关系, 是抽象的符号, 能用来运算. 所谓形, 就是空间形式, 在我们的大脑里存在直观的图景. 我们的大脑经过漫长的自然进化, 能感受到直观, 想象得出形状. 数形结合的巨大威力, 本质上就是我们利用我们的大脑的这种先天优势, 对数学进行整体上的直观洞察, 得出靠单纯的代数运算很难得到的结论, 从而为我们的数学研究指明方向. 可以说, 在某些方面, 形可以作为数的指南针. 在靠形指明了方向之后, 我们就可以再靠数来进行精确化. 所以, 更一般地来说, 数形结合其实是我们的大脑利用自己所熟悉的材料, 来指导学习和发现自己所不熟悉的材料.

就中学数学而言, 数形结合其实无处不在. 比如, 实数集合 $\mathbf{R}$ 和实数轴之间的一一对应, 就是数形结合. 实数对集合 $\mathbf{R}^2$ 和平面直角坐标系之间的一一对应, 也是数形结合. 我们在平面直角坐标系上画出函数的图像, 仍然是数形结合. 我们把复数集合 $\mathbf{C}$ 和平面直角坐标系上的点一一对应, 从而把一个复数看作一个平面向量, 还是数形结合. 在几百年前, 人们的心里还是不大容易接受虚数 $a+bi$ 的, 后来高斯等人把 $a+bi$ 解释为平面直角坐标系上的向量后, 人们就接受虚数了, 可见图形对于人们心理上的巨大作用. 甚至在某些学数学的人的心里, 理解数学在很多时候意味着找到一个几何解释, 只要找到了一个几何解释, 在自己的脑海里产生直观, 他们便能心安理得地接受所学的数学知识.

以前的高中教材, 在教授空间几何的时候会介绍所谓的 "三垂线定理", 现在已经没了, 大家都喜欢用向量. 利用向量的和, 差, 垂直, 内积等概念一算, 便能计算出各种角度, 长度, 从而免除了作辅助线的烦恼, 把空间几何题目的解决程序化, 降低了学习空间几何的难度, 以至于现在的某些学生一看到这些题目, 就会下意识地建立空间直角坐标系. 这样子做对于学生的发展利弊姑且不论, 反正这也是数形结合在中学数学里的一个巨大用处, 是数帮助了人们解决形的问题. 而整个中学的解析几何, 都是在谈怎么用数来帮助人们解决形的问题, 这也是笛卡尔发明解析几何的初衷.

下面, 我们举出几个具体的数形结合的例子.

2 例子

例 1 (一个不等式的几何证明). 我们来看不等式

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c) \tag{1}$$

的几何证明, 其中 a,b,c 为非负实数.

证明. 构造图形如下. 图 (1) 中凡四边形都是正方形. 边长已经标记. 则

$$|AB|+|BC|+|CD|=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2},$$

$$|AD| = \sqrt{2}(a+b+c).$$

由于平面上两点之间线段最短, 因此 $|AB|+|BC|+|CD| \geq |AD|$. 因此不等式成立.

□

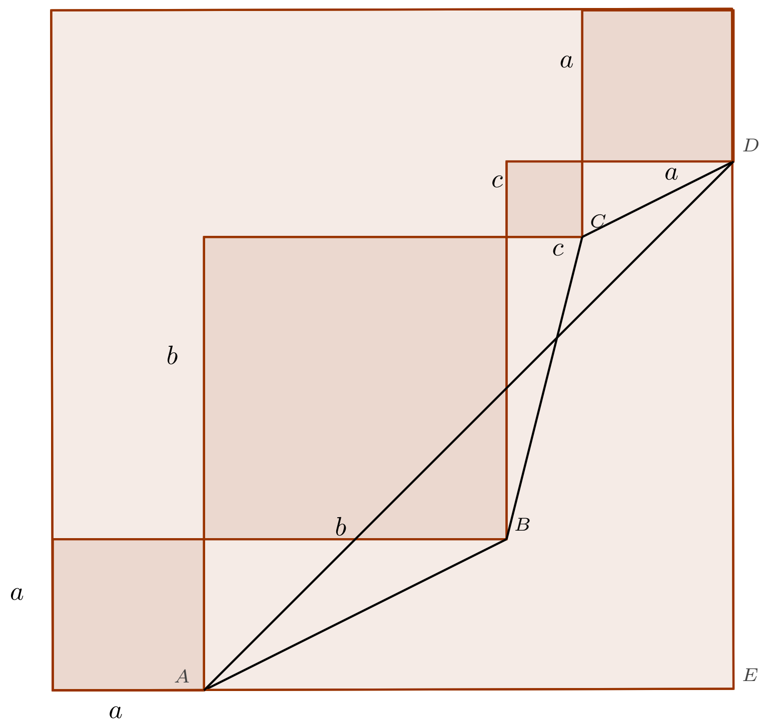

图 1

不等式 (1) 其实也可以用柯西不等式来证明. 而柯西不等式除了可以用数学归纳法来做之外, 本身其实是一个几何的不等式.

例 2 (柯西不等式的几何证明)**.** 柯西不等式说, 如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是实数, 则

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2. \tag{2}$$

等号成立当且仅当存在不全为 0 的实数 λ_1, λ_2, 使得 $\lambda_1(a_1, \cdots, a_n) + \lambda_2(b_1, \cdots, b_n) = (0, \cdots, 0)$.

证明. 设 $\overrightarrow{OA} = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $\overrightarrow{OB} = (b_1, \cdots, b_n)$ 为实数域上的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两个向量, 其中 O 为坐标原点 $(0, \cdots, 0)$. 则结合勾股定理, 向量 $\overrightarrow{OA}$ 的长度与向量 $\overrightarrow{OB}$ 的长度可以归纳地定义为

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}, |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}.$$

如图 (2) 所示, 根据向量内积的定义和内积的分配律, 可得

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OB}^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 \\
&= |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{OA}|^2
\end{aligned}$$

由此可得

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2}.$$

这正是余弦定理. 由于

$$\frac{|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n,$$

因此可得 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$. 于是,

$$|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OA}|^2 \cos^2\alpha = (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

由于 $\cos\alpha^2 \leq 1$, 因此便可得柯西不等式 (2). 且等号成立当且仅当 $\cos\alpha = \pm 1$, 当且仅当 $\alpha = 0$ 或者 π, 当且仅当向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}$ 线性相关. $\square$

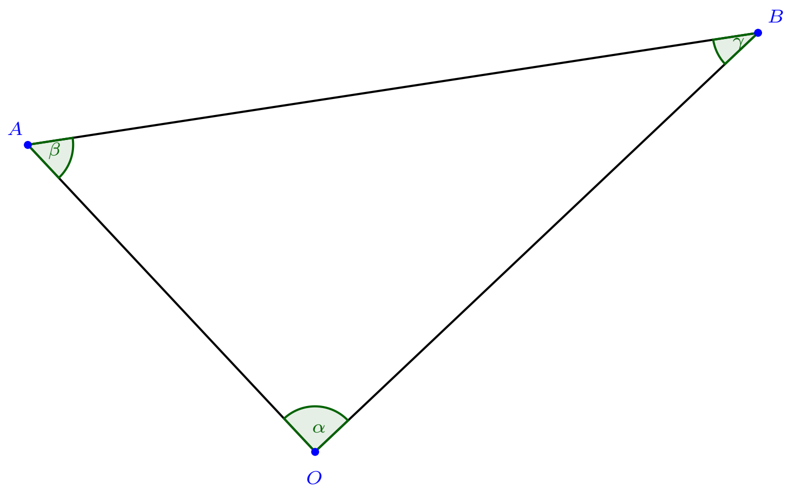

图 2