李祖泉的一个题

叶卢庆*

2015 年 1 月 11 日

题目. 在空间中, 设 xOy 平面上有圆心在 x 正半轴且过 O 的圆. 一条动直线与此圆交于 A 点, 与 z 轴交于点 B. 且满足

$$|OA| = k|OB|,$$

k 为一个正常数. 求此动直线所产生的曲面方程.

解. 设圆的圆心为 $(a,0,0)$, 其中 a 是个正常数. 则圆的方程为

$$\begin{cases} z = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2. \end{cases} \tag{1}$$

设点 A 的坐标为 $(x_A, y_A, 0)$, 设点 B 的坐标为 $(0,0,b)$. 则点 A 满足方程 (1), 也即,

$$x_A^2 - 2ax_A + y_A^2 = 0. \tag{2}$$

且由题意,

$$x_A^2 + y_A^2 = k^2b^2. \tag{3}$$

结合方程(2)和(3), 可得

$$2ax_A = k^2b^2. \tag{4}$$

经过点 A, B 的直线方程为

$$\frac{x}{x_A} = \frac{y}{y_A} = \frac{z-b}{-b} = t. \tag{5}$$

将式(5)代入式(2), 可得

$$(\frac{x}{t})^2 - 2a\frac{x}{t} + (\frac{y}{t})^2 = 0,$$

即

$$x^2 - 2axt + y^2 = 0. \tag{6}$$

将方程(5)代入方程(4), 可得

$$2a\frac{x}{t} = k^2b. \tag{7}$$

由方程(5)可得

(8)

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com