

## 前 言

高等院校工科和部分理科(非数学专业)的常微分方程,大多是在高等数学课程中讲授,篇幅少,内容不多。对于那些需要常微分方程较多较深的专业,例如力学、自动控制、无线电电子学,以及化学动力学、生态学等专业,这是远为不够的。编写一本合适的教学参考书或教材,供有关专业使用,很有必要。本书是针对这一情况而编写的。它可作为需要常微分方程较多的理(非数学专业)工科各专业的教学参考书,也可作为教材使用。同时可供广大工程技术人员自学和参考。

全书共分五章,第一、二两章是常微分方程组、线性常微分方程组的基本概念和基本理论。第三章是常系数线性微分方程组的几种解法。这里我们不采用矩阵的约当法式,而是首先用归纳法证明了通解形式,然后用循环列的方法讲授具体解法。鉴于工程学科的需要,我们还介绍了矩阵指数法和拉普拉斯变换法。第四章论述了定性理论的基本内容,包括奇点,极限环及其存在或不存在的判别法。第五章论述了稳定性的基本概念和基本理论。较为详细地介绍了自治系统的李雅普诺夫稳定性和全局稳定性,论证了李雅普诺夫第二方法的有关定理。给出了常系数线性系统渐近稳定情形的李雅普诺夫函数存在性的证明,在例题中指明了这种情形的李雅普诺夫函数的作法。该章对非自治系统也作了介绍。书中还介绍了常微分方程组在线性电路、非线性电路、自动控制、生态平衡等方面的实例。各章备有适量的习题,书末附有答案。

本书只要求读者具有微积分和线性代数的基本知识。书中用到的矩阵指数和常微分方程组的解对初值的连续依赖性定理,在附录中给出。

本书第二、四、五章由蔡燧林编写,第一、三章由盛骤编写。全书插图由张礼明同志绘制。

本书承湖南大学李森林教授和山东海洋学院梁中超教授审阅,他们提出了许多宝贵的意见,我们表示衷心的感谢。

书中不足和错误之处,恳切地希望读者批评和指正。

蔡燧林 盛 骤

1985年8月

# 目 录

<b>第一章 常微分方程组的基本概念</b> .....	1
§ 1 基本概念 .....	1
§ 2 解的存在唯一性定理 .....	4
§ 3 可积组合 .....	10
<b>第二章 线性微分方程组的一般理论</b> .....	15
§ 1 概述 .....	15
§ 2 线性齐次微分方程组通解的结构 .....	17
§ 3 基本解矩阵 .....	22
§ 4 线性非齐次微分方程组通解的结构·常数变易法 .....	28
<b>第三章 常系数线性微分方程组</b> .....	32
§ 1 常系数线性齐次方程组解法 I——特征根法 .....	32
§ 2 常系数线性齐次方程组解法 II——矩阵指数法 .....	48
§ 3 常系数线性齐次方程组解法 III——拉普拉斯变换法 .....	56
§ 4 常系数线性非齐次微分方程组的解法 .....	57
§ 5 几个应用的例子 .....	61
<b>第四章 定性理论初步</b> .....	70
§ 1 自治系统·相空间 .....	70
§ 2 平面自治系统的奇点 .....	75
§ 3 极限环 .....	88
§ 4 单摆运动·范德坡方程 .....	95
<b>第五章 稳定性理论基础</b> .....	106
§ 1 李雅普诺夫稳定性概念·用一次近似判定稳定性 .....	106
§ 2 李雅普诺夫第二方法(直接方法) .....	117
§ 3 全局稳定性 .....	132
§ 4 非自治系统的稳定性 .....	138
§ 5 艾瑞尔曼问题·柯尔莫哥洛夫模型 .....	144

附录一	向量级数 .....	151
附录二	矩阵指数 $e^A$ .....	153
附录三	微分方程组的解对初值的连续依赖性定理 .....	156
习 题	.....	157
习题答案	.....	170

# 第一章 常微分方程组的基本概念

## § 1 基本概念

常微分方程组是用来描述物理系统、化学系统、生物系统、经济系统等等的有力工具。例如,在现代控制理论中,在分析动态连续系统时,系统通常都是由常微分方程组来描述的。下面举一个例子。

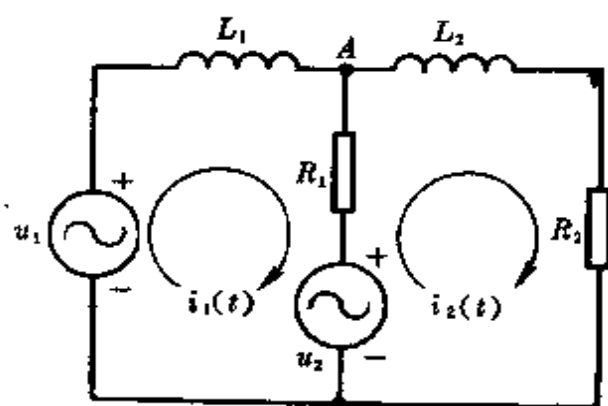


图 1-1

设有一电路如图 1-1 所示。输入电源电压  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  为已知, 需要求  $A$  点的电压  $u_A(t)$ , (以  $u_1, u_2$  的负极为基准) 即系统的输出。电路的参数  $L_1, L_2, R_1, R_2$  为已知常数。设  $i_1(t), i_2(t)$  为回路中的电流。根据基尔霍夫 (Kirchhoff) 定律知, 电路的行为可以用下面的常微分方程组来描述:

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 - R_1 i_2 - u_1(t) + u_2(t) = 0, \\ L_2 \frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 - u_2(t) = 0. \end{cases}$$

或即

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{R_1}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} u_1(t) - \frac{1}{L_1} u_2(t), \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{R_1}{L_2} i_1 - \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_2 - \frac{1}{L_2} u_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

若能从中求出  $i_1(t), i_2(t)$ , 则所求的  $A$  点的电压为

$$u_1(t) = i_1(t)R_1 - i_2(t)R_2 + u_2(t).$$

(1.1)式是含有两个未知函数  $i_1, i_2$  的常微分方程组,

本书研究含有  $n$  个未知函数的微分方程组<sup>[1]</sup>, 其形式为

[illegible]

其中  $f_i(t, x_1, \cdots, x_n) (i=1, 2, \cdots, n)$  为定义在  $n+1$  维空间  $(t, x_1, \cdots, x_n)$  的某区域  $D \triangleq (a, b) \times G$  内的函数, 这里  $(a, b)$  为  $t$  的变化区间,  $G$  为  $(x_1, \cdots, x_n)$  的变化区域. 我们称微分方程组 (1.2) 为一阶微分方程组的标准形式.

我们首先指出, 任意一个已就最高阶导数解出的  $n$  阶常微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \quad (1.3)$$

在引入适当的未知函数后, 就能化成一阶微分方程组的标准形式 (1.2), 事实上, 只要令

$$x = x_1, \frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

那么,方程(1.3)就化成了含  $n$  个未知函数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一阶微分方程组

1) 我们常将常微分方程组简称为微分方程组, 在本书中还简称为方程组.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.4)$$

容易知道,任意一个已就最高阶导数解出的微分方程组,用上述的办法也能化成一阶微分方程组的标准形式.由此可见,讨论一阶微分方程组的标准形式(1.2)具有普遍的意义.

若在区间 $(\alpha, \beta)$  ( $a \leq \alpha < \beta \leq b$ )内定义的 $n$ 个连续可微函数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ ,能使

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \equiv f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \alpha < t < \beta \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

则称函数组 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 为方程组(1.2)在区间 $(\alpha, \beta)$ 内的解.有时省去“在区间 $(\alpha, \beta)$ 内”一词.

我们还考虑方程组(1.2)满足初值条件的解.方程组(1.2)的初值条件的形式如下:

$$x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}, \quad (1.5)$$

其中 $t_0$ 是自变量的某个指定的初值;而 $x_{10}, \dots, x_{n0}$ 依次是未知函数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ 的某个指定的初值.

方程组(1.2)与初值条件(1.5)一起,即

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_i(t_0) = x_{i0}, \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

构成一个初值问题.方程组(1.2)满足初值条件(1.5)的解,称为初值问题(1.6)的解.

方程组(1.2)的含有 $n$ 个任意常数 $c_1, \dots, c_n$ 的解族

$$x_i(t) = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n), (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

如果对于区域  $D$  内任意给定的点  $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ , 总能确定  $c_1, \dots, c_n$  的值, 使得对应的解(1.7)满足初值条件(1.5), 则称解族(1.7)为方程组(1.2)在区域  $D$  内的**通解**.

如果由函数方程组:

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_n) = 0, (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.8)$$

所确定的隐函数:

$$x_i(t) = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

是方程组(1.2)的通解, 则称(1.8)为(1.2)的**通积分**.

## § 2 解的存在唯一性定理

引入向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \mathbf{x}) \\ f_2(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix},$$

则方程组(1.2)可写成

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (1.9)$$

初值条件(1.5)可写成

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \text{其中 } \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

初值问题(1.6)就成为



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.6')$$

初值问题(1.6')的解是一个向量函数  $x = x(t)$ .

初值问题(1.6')的解在什么条件下存在? 这个问题在理论上是必需要研究的, 在实际上也是十分重要的. 因为只有解存在时, 才能研究它. 这时, 即使无法获得精确解, 也可采用适当的方法求出其近似解, 或对方程组的解作定性的研究. 如果方程组的解根本不存在, 那么一切努力都是徒劳的.

关于初值问题(1.6')的解的存在唯一性的研究, 人们已做过大量工作. 下面介绍其中一个最常用的存在唯一性定理.

**定理 1.1** 设

1. 向量函数  $f(t, x)$  在  $n+1$  维空间  $(t, x)$  中的闭区域

$$D: |t - t_0| \leq a, \quad \|x - x_0\|^{(1)} \leq b$$

上连续;

2.  $f(t, x)$  在  $D$  上关于  $x$  满足李普希茨条件, 即存在常数  $K > 0$ , 使对于  $D$  上任意两点  $(t, x_1), (t, x_2)$ , 不等式

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\| \quad (1.11)$$

都成立. 则初值问题(1.6')在区间  $|t - t_0| \leq h$  上存在唯一的解.

其中  $M = \max_{(t, x) \in D} \|f(t, x)\|$ ,  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ .

**证明** 我们采用逐次逼近法来证明. 其步骤是, (i) 在区间  $|t - t_0| \leq h$  上构造一个适当的连续向量函数序列  $\{x_n(t)\}$ ; (ii) 证明  $\{x_n(t)\}$  在  $|t - t_0| \leq h$  上一致收敛于某向量函数  $x^*(t)$ ; (iii) 证明  $x^*(t)$  是初值问题(1.6')的解; (iv) 证明解是唯一的.

(i) 以  $x_0$  代替方程组(1.9)右端  $f(t, x)$  中的  $x$ , 得

1)  $\|\cdot\|$  是向量的范数, 见附录一.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_0). \quad (1.12)$$

将上式对  $t$  积分, 并令它满足条件  $x(t_0) = x_0$ , 得到方程组 (1.12) 满足条件  $x(t_0) = x_0$  的解  $x_1(t)$ , 即

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_0) dt.$$

$x_1(t)$  在区间  $|t - t_0| \leq h$  上连续, 且在该区间上有

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x_0\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(t, x_0)\| dt \right| \leq M|t - t_0| \leq \\ &\leq Mh \leq b. \end{aligned} \quad (1.13)$$

即当  $|t - t_0| \leq h$  时,  $(t, x_1(t)) \in D$ .

再以  $x_1(t)$  代替方程组 (1.9) 右端  $f(t, x)$  中的  $x$ , 得

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_1(t)). \quad (1.14)$$

将上式积分 (这是允许的, 因为当  $|t - t_0| \leq h$  时  $(t, x_1(t)) \in D$ ), 仍令它满足条件  $x(t_0) = x_0$ , 得到方程组 (1.14) 满足条件  $x(t_0) = x_0$  的解  $x_2(t)$ , 即

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_1(t)) dt.$$

$x_2(t)$  在  $|t - t_0| \leq h$  上连续, 且在该区间上有

$$\|x_2(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq Mh \leq b.$$

故当  $|t - t_0| \leq h$  时,  $(t, x_2(t)) \in D$ .

重复以上的步骤, 得到一个向量序列  $\{x_n(t)\}$ , 其中

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x_{n-1}(t)) dt. \quad (1.15)$$

$x_n(t)$  是方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_{n-1}(t))$$

满足条件  $x(t_0) = x_0$  的解. 下面我们用数学归纳法证明  $x_n(t)$  在  $|t - t_0| \leq h$  上连续, 且在该区间上有

$$\|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b, (n=1, 2, \cdots).$$

事实上, 当  $n=1, 2$  时已证明是对的. 设  $n-1$  时是对的, 即设  $\mathbf{x}_{n-1}(t)$  在  $|t-t_0| \leq h$  上连续, 且在该区间上有

$$\|\mathbf{x}_{n-1}(t) - \mathbf{x}_0\| \leq b,$$

则由 (1.15) 式知,  $\mathbf{x}_n(t)$  在  $|t-t_0| \leq h$  上连续, 且在该区间上有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_0\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_{n-1}(t)) dt \right\| \leq \\ &\leq M |t - t_0| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

$\{\mathbf{x}_n(t)\}$  就是我们所要求的序列.

(ii) 现在证明  $\{\mathbf{x}_n(t)\}$  在区间  $|t-t_0| \leq h$  上一致收敛. 这等价于证明级数

$$\mathbf{x}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t)] \quad (1.16)$$

在  $|t-t_0| \leq h$  上一致收敛<sup>1)</sup>. 为此, 我们用数学归纳法来证明在  $|t-t_0| \leq h$  上有

$$\|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)\| \leq \frac{K^n M}{(n-1)!} |t-t_0|^{n+1}, (n=1, 2, \cdots).$$

由条件 (1.11) 知,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) dt \right\| \leq \left\| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| dt \right\| \leq \\ &\leq M |t - t_0|, \\ \|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)] dt \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0)\| dt \right\| \leq \\ &\leq \left\| K \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| dt \right\| \leq \\ &\leq KM \left\| \int_{t_0}^t |t - t_0| dt \right\| = KM \frac{|t - t_0|^2}{2!}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> 向量函数级数 (1.16) 一致收敛的意义见附录一.

一般, 假定有

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \frac{K^{n-1}M}{n!} |t - t_0|^n,$$

则有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t [f(t, x_n(t)) - f(t, x_{n-1}(t))] dt \right\| \leq \\ &\leq K \left\| \int_{t_0}^t \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| dt \right\| \leq \\ &\leq \frac{K^n M}{n!} \left\| \int_{t_0}^t |t - t_0|^n dt \right\| = \\ &= \frac{K^n M}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

由数学归纳法知, 级数(1.16)的每一项的范数都不大于级数

$$\|x_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n-1}M}{n!} |t - t_0|^n \quad (1.17)$$

的对应项. 但当  $|t - t_0| \leq h$  时, 级数(1.17)的每一项都不大于收敛正项级数

$$\|x_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n-1}M}{n!} h^n$$

的对应项. 故级数(1.16)在区间  $|t - t_0| \leq h$  上一致收敛. 因此, 当  $n \rightarrow \infty$  时  $x_n(t)$  在区间  $|t - t_0| \leq h$  一致收敛于极限函数  $x^*(t)$ . 又由于级数(1.16)的每一项在  $|t - t_0| \leq h$  上连续, 故  $x^*(t)$  在  $|t - t_0| \leq h$  上也连续.

(iii) 现在来证明  $x^*(t)$  是初值问题(1.6')的解. 注意到对于  $n = 1, 2, \dots$ , 都有  $x_n(t_0) = x_0$ . 在上式中令  $n \rightarrow \infty$  取极限, 即有  $x^*(t_0) = x_0$ . 即  $x^*(t)$  满足(1.6')中的初值条件.

要证  $x^*(t)$  满足方程组(1.9), 可以在方程组

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(t, x_{n-1}(t)) \quad (1.18)$$

中令  $n \rightarrow \infty$  得到。事实上,

1° 由(1.18)知在区间  $|t-t_0| \leq h$  上  $x_n(t)$  有连续的导数; 2° 由条件(1.11)及  $\{x_n(t)\}$  的一致收敛性知, 序列  $\{f(t, x_n(t))\}$  在  $|t-t_0| \leq h$  上一致收敛于  $f(t, x^*(t))$ 。于是在(1.18)式中令  $n \rightarrow \infty$ , 得

$$\frac{d}{dt}[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)] = f(t, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}(t)),$$

或即

$$\frac{dx^*(t)}{dt} = f(t, x^*(t)). \quad (1.19)$$

上式表明  $x^*(t)$  是方程组(1.9)的解。

(iv) 最后证明解的唯一性。设另有一向量函数  $\tilde{x}(t)$  也满足初值问题(1.6'), 即

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(t, \tilde{x}(t)), & |t-t_0| \leq h, \\ \tilde{x}(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.20)$$

将(1.20)与(1.19)相减, 得

$$\frac{d}{dt}[x^*(t) - \tilde{x}(t)] = f(t, x^*(t)) - f(t, \tilde{x}(t)).$$

将上式两边从  $t_0$  到  $t$  积分, 并设  $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ , 得

$$\begin{aligned} x^*(t) - \tilde{x}(t) &= \int_{t_0}^t [f(t, x^*(t)) - f(t, \tilde{x}(t))] dt, \\ ||x^*(t) - \tilde{x}(t)|| &\leq \int_{t_0}^t ||f(t, x^*(t)) - f(t, \tilde{x}(t))|| dt \leq \\ &\leq K \int_{t_0}^t ||x^*(t) - \tilde{x}(t)|| dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

记  $u(t) = \int_{t_0}^t ||x^*(t) - \tilde{x}(t)|| dt$ , 知  $u(t) \geq 0$ 。(1.21)式即

可写成

$$u'(t) - Ku(t) \leq 0.$$

上式两边同乘以  $e^{-K(t-t_0)}$ , 得

$$[u(t)e^{-K(t-t_0)}]' \leq 0.$$

从  $t_0$  到  $t$  积分得

$$u(t)e^{-K(t-t_0)} \leq 0.$$

即有

$$u(t) \leq 0,$$

因此

$$u(t) \equiv 0.$$

即得

$$\mathbf{x}^*(t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t).$$

对于  $t \in [t_0 - h, t_0]$ , 同样可证  $\mathbf{x}^*(t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t)$ .

由(1.19)式, 我们还看到, 在存在唯一性定理的条件下, 初值问题(1.6')在区间  $|t - t_0| \leq h$  上的唯一解, 在该区间上具有连续的导数.

### § 3 可积组合

一般说来, 象用初等积分法解微分方程那样, 用初等积分的方法来求微分方程组(1.2)的解是困难的. 这是因为, 在(1.2)的第  $i$  个方程中, 除了含有  $x_i, \frac{dx_i}{dt}$  和  $t$  以外, 一般, 还出现其它的  $x_j$  ( $j \neq i$ ), 而这些  $x_j$  与  $t$  或  $x_i$  与  $x_j$  之间存在着何种关系是未知的. 但对于某些特殊类型的方程组, 我们能够将方程组中的一部分或所有的方程进行重新组合, 然后引进新的未知函数, 使得得到一个只含一个自变量的一阶微分方程, 并且可以用初等积分法求解. 这种方程叫做可积组合. 利用一个可积组合, 可使原方程组所含的未知函数的个数减少一个. 沿用这种方法可求得原方程组的解. 下面举例来说明.

#### 例 1 解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2(x_1^2 + x_2^2)t, \\ \frac{dx_2}{dt} = 4x_1x_2t. \end{cases} \quad (1.22)$$

**解** 方程组(1.22)的每一个方程都不可能单独积分. 将两个方程相加, 得到

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{dt} = 2(x_1 + x_2)^2 t,$$

若将  $x_1 + x_2$  当作一个未知函数看待, 上式是可以积分的. 故它是一个可积组合. 将上式写成

$$\frac{d(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2} = 2t dt,$$

积分得

$$-\frac{1}{x_1 + x_2} = t^2 - c_1,$$

或

$$\frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = c_1. \quad (1.23)$$

将方程组(1.22)的第一个方程减去第二个方程可得到另一个可积组合

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 2(x_1 - x_2)^2 t,$$

或

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = 2t dt.$$

积分得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = c_2. \quad (1.24)$$

因此, 方程组(1.22)的通积分为:

$$\frac{1}{x_1 + x_2} + t^2 = c_1, \quad \frac{1}{x_1 - x_2} + t^2 = c_2.$$

## 例 2 解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 1. \end{cases} \quad (1.25)$$

解 将方程组(1.25)的第一个方程减去第二个方程得

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

积分得  $x_1 - x_2 = c_1.$  (1.26)

将(1.26)代入(1.25)的第二、第三个方程, 得到含两个未知函数  $x_2, x_3$  的方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = \frac{c_1}{x_3 - t}, \\ \frac{dx_3}{dt} = c_1 + 1. \end{cases} \quad (1.27)$$

再由(1.27)的第二个方程得到

$$x_3 = (c_1 + 1)t + c_2.$$

将上式代入(1.27)的第一个方程, 就有

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{c_1}{c_1 t + c_2}.$$

积分得  $x_2 = \ln(c_1 t + c_2) + c_3.$  于是得到原方程组的通解为

$$x_1 = \ln(c_1 t + c_2) + c_1 + c_3,$$

$$x_2 = \ln(c_1 t + c_2) + c_3,$$

$$x_3 = (c_1 + 1)t + c_2.$$

在例 2 中, 我们是利用已经得到的积分(1.26)代入原方程组以减少方程和未知函数的个数, 从而求得其通解的. 这种方法经常可以采用的.



有时,我们将方程组(1.2)写成如下的对称形式

$$\begin{aligned}\frac{dt}{\psi_0(t, x_1, \dots, x_n)} &= \frac{dx_1}{\psi_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{\psi_n(t, x_1, \dots, x_n)},\end{aligned}\quad (1.28)$$

其中,

$$\frac{\psi_i(t, x_1, \dots, x_n)}{\psi_0(t, x_1, \dots, x_n)} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), i=1, 2, \dots, n.$$

在(1.28)中,变量  $t, x_1, \dots, x_n$  是可以同等看待的. 写成这种形式可利用比例的性质,便于求出可积组合.

**例 3** 解方程组

$$\frac{dt}{x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} \quad (1.29)$$

**解** 由方程组的前一个等式得

$$\ln t \, dt = -x \, dx.$$

积分得

$$t(\ln t - 1) + \frac{1}{2}x^2 = c_1.$$

将方程组(1.29)的第一项分子、分母同乘以 2, 然后将各项的分子、分母分别相加,由比例的性质,得

$$\frac{dt}{x} = \frac{dx}{-\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x} = \frac{d(2t + x + y)}{0}.$$

因此有

$$d(2t + x + y) = 0.$$

积分得

$$2t + x + y = c_2.$$

于是得方程组(1.29)的通积分为

$$t(\ln t - 1) + \frac{1}{2}x^2 = c_1, \quad 2t + x + y = c_2.$$

**例 4** 解方程组

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{t - 2x} = \frac{dy}{tx + ty + 2x - t}. \quad (1.30)$$

解 由方程组(1.30)的前一等式,得

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{x}{t} = 1.$$

这是一阶线性方程,其解为

$$x = \frac{t}{3} + \frac{c_1}{t^2}.$$

对(1.30)式应用比例的性质,得

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx + dy}{(t - 2x) + (tx + ty + 2x - t)}$$

或即 
$$\frac{dx - dy}{tx + ty} = \frac{dt}{t}, \text{ 即 } \frac{d(x - y)}{x + y} = dt.$$

积分,得 
$$x + y = c_2 e^t.$$

于是得方程组(1.30)的通积分为

$$x = \frac{t}{3} + \frac{c_1}{t^2}, \quad x + y = c_2 e^t.$$

由此得到方程组(1.30)的通解

$$x = \frac{t}{3} + \frac{c_1}{t^2}, \quad y = c_2 e^t - \frac{t}{3} - \frac{c_1}{t^2}.$$

## 第二章 线性微分方程组的一般理论

线性微分方程组是一类有着广泛应用、理论研究得较为完整的微分方程组。并且它也是讨论非线性微分方程组的基础。本章研究线性微分方程组的一般理论。

### § 1 概 述

如果微分方程组(1.2)中的每一个函数  $f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)$  都是变量  $x_1, \dots, x_n$  的线性函数, 则称这种微分方程组为**线性微分方程组**, 简称**线性方程组**。线性方程组的标准形式是

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.1)$$

其中  $a_{ij}(t)$  和  $f_i(t)$  ( $i, j=1, \dots, n$ ) 是  $t$  的已知函数,  $t \in (a, b)$ 。

前面已经讲过, 已解出最高阶导数的  $n$  阶方程可化成一阶方程组。作为特例, 对于  $n$  阶线性方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + p_n(t)x = f(t), \quad (2.2)$$

引入  $n$  个新的未知函数

$$x = x_1, \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \quad (2.3)$$

之后, 可将它化为形如(2.1)的含  $n$  个未知函数的线性方程组:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{dx_2}{dt} &= \quad \quad \quad x_3, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= \quad \quad \quad x_n, \\
\frac{dx_n}{dt} &= -p_n(t)x_1 - p_{n-1}(t)x_2 - \dots - p_1(t)x_n + f(t).
\end{aligned}
\tag{2.4}$$

采用矩阵和向量记号,能使书写简单,运算方便. 由于线性微分方程组的理论与线性代数之间有密切关系,因此线性微分方程组的理论和具体求解的方法,解决得比较完善. 记

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

则(2.1)可写成

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{2.5}$$

若  $f(t) \equiv 0$ , 则(2.5)成为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2.6}$$

我们称它为线性齐次方程组. 若  $f(t) \not\equiv 0$ , 则称(2.5)为线性非齐次方程组. 我们又称(2.6)为(2.5)对应的齐次方程组.

关于(2.5),我们有下述初值问题解的存在唯一性定理.

**定理 2.1** 设  $A(t), f(t)$  在区间  $(a, b)$  内连续, 则初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in (a, b) \end{cases}
\tag{2.7}$$

在区间  $(a, b)$  内存在唯一的解  $x = x(t)$ .

显然,此解在区间  $(a, b)$  内连续可微.

此定理的证明与定理1.1的证明类似. 应该注意的是, 这里

保证解存在的区间与  $A(t)$  和  $f(t)$  连续的区间  $(a, b)$  一致, 并没有缩小. 读者可用逐次逼近法证明定理 2.1 (见第二章习题 1), 在证明过程中, 可看出区间没有缩小的原因.

以后, 本章中讨论的方程组都假定满足定理 2.1 的条件, 即设  $A(t)$  和  $f(t)$  在区间  $(a, b)$  内连续, 不再一一说明.

注意, 在定理 2.1 的条件下, 齐次方程组 (2.6) 满足零初值条件, 即满足  $x(t_0) = 0$  的唯一解就是  $x(t) \equiv 0$ . 事实上,  $x(t) \equiv 0$  显然满足齐次方程组 (2.6) 及零初值条件. 又由初值问题解的唯一性知, 满足齐次方程组 (2.6) 及零初值条件的解只有  $x(t) \equiv 0$ . 这种解称为零解, 或称平凡解.

## § 2 线性齐次微分方程组通解的结构

本节讨论线性齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.6)$$

通解的结构. 首先有下述的定理:

**定理 2.2** 设  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是 (2.6) 的  $n$  个解,  $c_1, \dots, c_n$  是  $n$  个常数, 则

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \quad (2.8)$$

也是 (2.6) 的解.

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \frac{d}{dt} x_i(t). \end{aligned}$$

由定理的条件知,

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = A(t)x_i(t), \quad (i=1, \dots, n).$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_i(t) = \\ &= \mathbf{A}(t) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{x}_i(t) = \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

即(2.8)是(2.6)的解.

为研究(2.6)的通解的结构,引入向量函数线性无关、线性相关的定义如下:

**定义 2.1** 设  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$  是定义在区间  $(a, b)$  内的  $m$  个向量函数. 如果存在  $m$  个不全为零的常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , 使

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{x}_i(t) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in (a, b), \quad (2.9)$$

则称这  $m$  个向量函数  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$  在区间  $(a, b)$  内 **线性相关**; 否则, 称为 **线性无关**.

换言之, 所谓向量函数  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_m(t)$  在区间  $(a, b)$  内线性无关, 是指: 若(2.9)成立, 则必推出  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ .

**例 1** 设  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  是  $m$  个  $n$  维非零常向量,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  是  $m$  个各不相同的常数. 试证明向量  $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_m e^{\lambda_m t}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内线性无关.

**证明** 用反证法. 设  $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \gamma_m e^{\lambda_m t}$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内线性相关, 则存在  $m$  个不全为零的常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , 使

$$\begin{aligned}\alpha_1 \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_m \gamma_m e^{\lambda_m t} &\equiv \mathbf{0}, \\ t &\in (-\infty, +\infty).\end{aligned} \quad (2.10)$$

我们不妨设上式中的  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  都不为零. 事实上, 如果有某些  $\alpha_i$  为零, 那么在(2.10)中就把这些  $\alpha_i$  所对应的项剔除, 剔除后并不改变(2.10)的形式. 用  $e^{\lambda_1 t}$  除(2.10)两边, 得

$$\alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \cdots + \alpha_m \gamma_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0, \quad (2.11)$$

两边对  $t$  求导数, 得

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \gamma_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \cdots + \alpha_m (\lambda_m - \lambda_1) \gamma_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)t} \equiv 0, \quad (2.12)$$

注意, 由于  $\lambda_i (i=1, \cdots, m)$  各不相同, 从而

$$\lambda_i - \lambda_j \neq 0, \lambda_i - \lambda_1 \neq \lambda_j - \lambda_1, (i, j = 2, \cdots, m; i \neq j),$$

故(2.12)与(2.10)有同样的形式, 且满足同样的条件. 因此可以按上法一直进行下去, 直至得到如下形式的恒等式

$$\beta_m \gamma_m e^{\gamma_m t} \equiv 0.$$

但由假设知,  $\beta_m \neq 0, \gamma_m \neq 0$ . 此与上述恒等式矛盾. 因而证得  $\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \gamma_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, \gamma_m e^{\lambda_m t}$  线性无关<sup>1)</sup>.

在线性方程组通解的理论中,  $n$  个向量函数的朗斯基(Wronsky)行列式起到重要的作用.

**定义 2.2** 设  $x_1(t), \cdots, x_n(t)$  是定义在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个向量函数

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \cdots, x_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

以  $x_i(t)$  作为第  $i$  列 ( $i=1, 2, \cdots, n$ ) 所成的矩阵记为

$$\Phi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)). \quad (2.14)$$

我们将行列式  $\det \Phi(t)$  称为向量函数  $x_1(t), \cdots, x_n(t)$  的朗斯基行列式, 记为  $W(t)$ . 即

$$W(t) = \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

向量函数  $x_1(t), \cdots, x_n(t)$  的线性相关、线性无关与它们的

1) 这个例子很重要, 所用的证法, 以后还会见到.

朗斯基行列式有着密切的关系。我们有下述定理。

**定理 2.3** 设  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个线性无关的解<sup>1)</sup>, 则它们的朗斯基行列式 (2.15) 在区间  $(a, b)$  内处处不等于零, 即  $W(t) \neq 0, t \in (a, b)$ 。

**证明** 用反证法。设存在点  $t_0 \in (a, b)$  使  $W(t_0) = 0$ 。考虑以  $(x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$  为系数矩阵以  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  为未知数的线性齐次代数方程组

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_0) = 0.$$

由于系数行列式  $W(t_0) = 0$ , 故上述线性齐次代数方程组存在非零解

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)^T.$$

由定理 2.2 知, 向量函数

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* x_i(t)$$

是满足方程 (2.6) 和零初值条件

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* x_i(t_0) = 0$$

的解。于是应有  $x(t) \equiv 0$ 。即存在不全为零的数  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*$ , 使

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^* x_i(t) \equiv 0.$$

亦即向量函数  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是线性相关的。这与定理的假设矛盾。

定理 2.3 可改述如下: 设  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个解, 只要在区间  $(a, b)$  内有一点使它们的朗斯基

1) 再提醒一句, 这里及以后都假定 (2.6) 的系数在区间  $(a, b)$  内连续, 因而满足定理 2.1 的条件。



行列式等于零, 则这  $n$  个向量函数必定是线性相关的.

有了这些准备知识, 我们就可以证明下述线性齐次方程组通解的结构定理.

**定理 2.4** 设  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是线性齐次方程组(2.6)的  $n$  个解, 且它们在区间  $(a, b)$  内线性无关,  $c_1, \dots, c_n$  是  $n$  个任意常数, 则

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) \quad t \in (a, b) \quad (2.8')$$

是(2.6)的通解.

**证明** 由定理 2.2 知, (2.8') 是(2.6)的解. 今要证(2.8')是(2.6)的通解, 就是要证明对任意给定的初值条件  $x(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in (a, b)$ , 必可求得相应的常数  $c_{i0} (i=1, \dots, n)$ , 使对应的(2.8')满足所给的初值条件

$$\sum_{i=1}^n c_{i0} x_i(t_0) = x_0. \quad (2.16)$$

注意到(2.16)可以看作含  $n$  个未知数  $c_{i0} (i=1, \dots, n)$  的线性代数方程组, 它的系数行列式就是向量函数  $x_i(t) (i=1, \dots, n)$  的朗斯基行列式  $W(t)$  在  $t=t_0$  处的值  $W(t_0)$ . 由定理条件及定理 2.3 知,  $W(t_0) \neq 0$ . 故对任意给定的  $x_0$ , (2.16) 存在唯一的解  $c_{i0} (i=1, \dots, n)$ .

**例 2** 考虑系统

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 4x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2x_2 - x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 + x_2 - x_3.$$

通过直接验证知道,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

是所给系统的三个解. 由例 1 知, 这三个解在区间  $(-\infty, +\infty)$  内线性无关. 由定理 2.4 知, 向量函数

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是所给系统在区间  $(-\infty, +\infty)$  内的通解, 其中  $c_1, c_2$  和  $c_3$  是任意常数.

一般, 对于系数为常数的线性齐次微分方程组, 已经有一套完整的解法, 我们将在下一章介绍. 例 2 仅说明定理 2.4 的用法.

### § 3 基本解矩阵

知道了(2.6)的  $n$  个线性无关的解  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ , 由公式(2.8')就得到(2.6)的通解. 现在自然要问, (1) 怎样来判定  $n$  个向量函数线性无关? (2) (2.6)是否一定存在  $n$  个线性无关的解? 下面就来回答这两个问题.

**定理 2.5** 设  $n$  个  $n$  维的向量函数  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  在区间  $(a, b)$  内线性相关, 则它们的朗斯基行列式  $W(t) \equiv 0, t \in (a, b)$ .

**证明** 因  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  在区间  $(a, b)$  内线性相关, 故存在  $n$  个不全为零的数  $c_1^*, \dots, c_n^*$ , 使

$$\sum_{i=1}^n c_i^* \mathbf{x}_i(t) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in (a, b).$$

对于任意的  $t_0 \in (a, b)$ , 上式当然也成立, 即有

$$\sum_{i=1}^n c_i^* \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{0}.$$

将上式看成含  $n$  个未知数  $c_1^*, \dots, c_n^*$  的线性齐次代数方程组. 由于它有非零解, 因此它的系数行列式  $W(t_0) = 0$ . 又由于  $t_0$  为区间  $(a, b)$  内的任意值, 故有  $W(t) \equiv 0, t \in (a, b)$ .

**定理 2.5** 还常叙述成: 设在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个向量函数  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  的朗斯基行列式  $W(t) \equiv 0, t \in (a, b)$ , 则这  $n$  个向量函数在区间  $(a, b)$  内线性无关.

**推论** 方程组 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个解的朗斯基行列式, 要么在  $(a, b)$  内处处不为零, 要么在  $(a, b)$  内处处为零.

**证明** 只要证明: 若  $W(t_0) = 0, t_0 \in (a, b)$ , 就有  $W(t) \equiv 0, t \in (a, b)$ . 事实上, 由  $W(t_0) = 0$  及定理 2.3 知,  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  在区间  $(a, b)$  内线性相关. 再由定理 2.5 可知  $W(t) \equiv 0, t \in (a, b)$ .

注意, 定理 2.5 中并未假定  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是 (2.6) 的解. 定理 2.5 的逆命题不真. 例如

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \quad \text{与} \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

在区间  $(-\infty, +\infty)$  内线性无关 (见上节例 1). 但这两个向量函数的朗斯基行列式

$$\begin{vmatrix} e^t & -e^{2t} \\ -e^t & e^{2t} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

如果定理 2.5 中添上条件“ $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是 (2.6) 的解”, 那么它的逆命题亦成立 (即定理 2.3). 因此有

**定理 2.6** 设  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  是方程组 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个解. 它们在区间  $(a, b)$  内线性无关的充要条件是存在一点  $t_0 \in (a, b)$ , 使得这  $n$  个解的朗斯基行列式  $W(t)$  在该点处不为零:  $W(t_0) \neq 0$ .

**例 1** 通过直接代入方程, 可以验证

$$x_1 = e^{2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t), \quad y_1 = e^{2t}(2 \cos 6t - \sin 6t)$$

是系统

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (-1 - 9 \cos^2 6t + 12 \sin 6t \cos 6t)x + \\ &\quad + (12 \cos^2 6t + 9 \sin 6t \cos 6t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (-12 \sin^2 6t - 9 \sin 6t \cos 6t)x - \\ &\quad - (1 + 9 \sin^2 6t + 12 \sin 6t \cos 6t)y\end{aligned}$$

的一个解。试求此系统的通解。

解 作变换

$$z = x - \frac{\cos 6t + 2 \sin 6t}{2 \cos 6t - \sin 6t} y,$$

引进新的未知函数  $z$ ，经计算得

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{-20 \cos 6t + 25 \sin 6t}{2 \cos 6t - \sin 6t} z = \\ &= \left( -13 + \frac{12 \sin 6t + 6 \cos 6t}{2 \cos 6t - \sin 6t} \right) z.\end{aligned}$$

求得

$$z = \frac{-5 e^{-13t}}{2 \cos 6t - \sin 6t}.$$

从而求得

$$\begin{aligned}x &= z + \frac{\cos 6t + 2 \sin 6t}{2 \cos 6t - \sin 6t} y = \\ &= \frac{-5 e^{-13t}}{2 \cos 6t - \sin 6t} + \frac{\cos 6t + 2 \sin 6t}{2 \cos 6t - \sin 6t} y.\end{aligned}$$

将上式代入所给系统的第一个方程，经计算求得

$$y_2 = e^{-13t}(\cos 6t + 2 \sin 6t).$$

相应地求得

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-5 + (\cos 6t + 2 \sin 6t)^2}{2 \cos 6t - \sin 6t} e^{-13t} = \\ &= \frac{-5(\cos^2 6t + \sin^2 6t) + (\cos 6t + 2 \sin 6t)^2}{2 \cos 6t - \sin 6t} e^{-13t} =\end{aligned}$$

$$= (\sin 6t - 2 \cos 6t)e^{-13t}.$$

于是得到所给系统的两个解

$$x_1 = e^{2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t), \quad y_1 = e^{2t}(2 \cos 6t - \sin 6t),$$

和

$$x_2 = e^{-13t}(\sin 6t - 2 \cos 6t), \quad y_2 = e^{-13t}(2 \sin 6t + \cos 6t).$$

这两个解的朗斯基行列式

$$\begin{aligned} e^{-11t} \begin{vmatrix} \cos 6t + 2 \sin 6t & \sin 6t - 2 \cos 6t \\ 2 \cos 6t - \sin 6t & 2 \sin 6t + \cos 6t \end{vmatrix} = \\ = 5 e^{-11t} \neq 0. \end{aligned}$$

由定理 2.6 和定理 2.4, 即可得知所给系统的通解为

$$x = c_1 e^{2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t) + c_2 e^{-13t}(\sin 6t - 2 \cos 6t),$$

$$y = c_1 e^{2t}(2 \cos 6t - \sin 6t) + c_2 e^{-13t}(2 \sin 6t + \cos 6t),$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是任意常数.

现在来解决本节提出的第二个问题.

**定理 2.7** 方程组(2.6)在区间  $(a, b)$  内必存在  $n$  个且至多也只有  $n$  个线性无关的解.

**证明** 任取  $n$  个线性无关的  $n$  维向量, 例如, 取

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x, \\ x(t_0) = e_i, \end{cases} \quad t \in (a, b), \quad (2.17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

由解的存在唯一性知, 相应于每一个  $i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 可得到方程组的一个解  $x_i(t)$ . 这些解的朗斯基行列式  $W(t)$  在  $t = t_0$  的值

是

$$\begin{aligned} W(t_0) &= \det(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \det I = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

由定理 2.6 知  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  在区间  $(a, b)$  内线性无关. 此外, 由通解公式 (2.8') 知 (2.6) 的任意  $n+1$  个解必线性相关, 故 (2.6) 有且至多只有  $n$  个线性无关的解.

**定义 2.3** 方程组 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的  $n$  个线性无关的解  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  称为 (2.6) 的一个**基础解系**; 由它们组成的矩阵

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

称为 (2.6) 的一个**基本解矩阵**.

定理 2.7 断言, (2.6) 的基本解矩阵  $X(t)$  必存在. 于是 (2.6) 的通解可写成

$$x(t) = X(t)c, \quad (2.18)$$

其中  $c$  为任意的  $n$  维常向量.

由此可以知道, (2.6) 的解的全体构成一个  $n$  维线性空间, 而且基本解矩阵的  $n$  个列向量是这个  $n$  维线性空间的一个基底.

现在简单说一下满足初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.19)$$

的解.

在通解公式 (2.18) 中, 代入初值条件, 就有  $X(t_0)c = x_0$ . 或即  $c = X^{-1}(t_0)x_0$ . 于是得 (2.19) 的解为

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0. \quad (2.20)$$

如果基本解矩阵  $X^*(t)$  是由 (2.17) 的  $n$  个特解按照  $i=1,$

2, ..., n 的次序排列而成的矩阵, 则由  $X^*(t_0) = I$  知, (2.19) 的解 (2.20) 可写成

$$x(t) = X^*(t)x_0. \quad (2.21)$$

由上面的讨论可以知道, 要求出 (2.6) 的通解或初值问题 (2.19) 的解, 只需要求出 (2.6) 的基本解矩阵  $X(t)$  即可.

为了下一章的需要, 我们介绍有关基本解矩阵的下述重要性质:

1. 由于基本解矩阵  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  的每一列向量都满足 (2.6), 从而知道  $X(t)$  满足与 (2.6) 同一形式的下述矩阵方程<sup>1)</sup>

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X, \quad t \in (a, b). \quad (2.22)$$

反之, 设  $X(t)$  是 (2.22) 在  $(a, b)$  内的解, 且存在  $t_0 \in (a, b)$ ,  $\det X(t_0) \neq 0$ , 则  $X(t)$  显然就是 (2.6) 在区间  $(a, b)$  内的一个基本解矩阵.

由此可知, 求 (2.6) 的基本解矩阵, 等价于求矩阵方程 (2.22) 满足条件  $\det X(t_0) \neq 0$  的解  $X(t)$ , 其中  $t_0 \in (a, b)$ .

2. 设  $X(t)$  是 (2.6) 的一个基本解矩阵.  $T$  是非奇异常数矩阵, 则  $X(t)T$  也是 (2.6) 的一个基本解矩阵. 事实上,

$$\frac{d}{dt} X(t)T = \frac{dX(t)}{dt}T = A(t)X(t)T,$$

即  $X(t)T$  是矩阵方程 (2.22) 在  $(a, b)$  内的解, 且

$$\det[X(t)T] = \det X(t) \cdot \det T \neq 0.$$

由 1. 知道,  $X(t)T$  也是 (2.6) 在  $(a, b)$  内的一个基本解矩阵.

---

1) 我们将  $n$  个形如 (2.6) 的向量方程  $\frac{dx_i}{dt} = A(t)x_i$  合在一起写成  $\frac{d}{dt} (x_1, \dots, x_n) = A(t)(x_1, \dots, x_n)$  并简写为 (2.22).

## § 4 线性非齐次微分方程组通解的结构 · 常微变易法

现在来讨论线性非齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (2.5)$$

的通解的结构。我们有

**定理 2.8** 设  $\tilde{x}(t)$  是 (2.5) 的一个特解,  $X(t)c$  是 (2.5) 所对应的齐次方程组 (2.6) 的通解, 则

$$x(t) = X(t)c + \tilde{x}(t) \quad (2.23)$$

是 (2.5) 的通解。

**证明** 首先证明 (2.23) 是 (2.5) 的解。事实上,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{dX(t)c}{dt} + \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \\ &= A(t)X(t)c + A(t)\tilde{x}(t) + f(t) = \\ &= A(t)(X(t)c + \tilde{x}(t)) + f(t) = \\ &= A(t)x(t) + f(t), \end{aligned}$$

即证得 (2.23) 是 (2.5) 的解。

其次, 设  $x(t)$  是 (2.5) 的任一特解, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x(t) - \tilde{x}(t)] &= A(t)x(t) + f(t) - [A(t)\tilde{x}(t) + f(t)] = \\ &= A(t)(x(t) - \tilde{x}(t)), \end{aligned}$$

故  $x(t) - \tilde{x}(t)$  是齐次方程 (2.6) 的一个解, 于是

$$x(t) - \tilde{x}(t) = X(t)c_0,$$

其中  $c_0$  是某常向量。从而

$$x(t) = X(t)c_0 + \tilde{x}(t).$$

这表明, (2.5) 的任一特解可以由 (2.23) 中的  $c$  等于  $c_0$  而得到。这说明 (2.23) 是 (2.5) 的通解。

现在介绍求线性非齐次方程组解的所谓“常数变易法”。



设  $X(t)c$  是 (2.5) 所对应的齐次方程组 (2.6) 的通解.  
将  $c=c(t)$  看成是未知的向量函数, 并设

$$x = X(t)c(t) \quad (2.24)$$

是 (2.5) 的解, 于是

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX(t)}{dt}c(t) + X(t)\frac{dc(t)}{dt} \\ &= A(t)X(t)c(t) + X(t)\frac{dc(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

以 (2.24)、(2.25) 代入 (2.5), 得

$$A(t)X(t)c(t) + X(t)\frac{dc(t)}{dt} = A(t)X(t)c(t) + f(t),$$

或即

$$X(t)\frac{dc(t)}{dt} = f(t).$$

以  $X^{-1}(t)$  左乘上式两边, 再从  $t_0$  到  $t$  积分, 并取  $c(t_0)=0$   
 $t_0 \in (a, b)$ , 得

$$c(t) = \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.26)$$

将 (2.26) 的  $c(t)$  代入 (2.24), 就可得到 (2.5) 的一个特解

$$x(t) = X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.27)$$

再由 (2.23) 得 (2.5) 的通解

$$x(t) = X(t)c + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau. \quad (2.28)$$

若给定初值条件  $x(t_0)=x_0$ , 则得  $c=X^{-1}(t_0)x_0$ , 从而得初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad t_0 \in (a, b) \quad (2.7)$$

的解为

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad (2.29)$$

$$t_0 \in (a, b).$$

由上所述, 我们有下述定理:

**定理 2.9** 设  $X(t)$  是 (2.6) 的基本解矩阵, 则 (2.28) 是 (2.5) 的通解, (2.29) 是初值问题 (2.7) 的解.

上述由线性齐次方程组 (2.6) 的通解求线性非齐次方程组 (2.5) 的解的方法, 称为常数变易法.

**例 1** 已知方程组

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t}x - y + t, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}y - t^2, \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

的对应齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}x - y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}y \quad (2.31)$$

有解  $x = t^2, y = -t$ . 试求 (2.30) 的通解.

**解** 先求 (2.31) 的通解. 仿照上节例 1, 引进新的未知函数  $z = x + ty$ , 于是

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x}{t} - y + y + t \left( \frac{x}{t^2} + \frac{2}{t}y \right) = \frac{2}{t}z.$$

求得  $z = t^2$ , 从而  $x = t^2 - ty$ . 代入 (2.31) 的第一个方程, 解得  $y = t \ln t$ , 对应地  $x = t^2(1 - \ln t)$ . 于是获得 (2.31) 的两个解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} t^2(1 - \ln t) \\ t \ln t \end{pmatrix}.$$

它们的朗斯基行列式

$$\begin{vmatrix} t^2 & t^2(1 - \ln t) \\ -t & t \ln t \end{vmatrix} = t^3 \neq 0, \quad (t > 0).$$

从而得到 (2.31) 的基本解矩阵

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^2(1 - \ln t) \\ -t & t \ln t \end{pmatrix}.$$

为了应用常数变易法公式 (2.28), 先计算  $X^{-1}(\tau)$ . 经计算,

$$X^{-1}(\tau) = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} \ln \tau & \tau \ln \tau - \tau \\ 1 & \tau \end{pmatrix}.$$

又

$$f(\tau) = \begin{pmatrix} \tau \\ -\tau^2 \end{pmatrix}.$$

从而

$$X^{-1}(\tau)f(\tau) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \ln \tau - \tau^2 \ln \tau + \tau^2 \\ 1 - \tau^2 \end{pmatrix}.$$

为简单起见, 取  $t_0 = 1$ , 则有

$$\int_1^t X^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln^2 t - \frac{t^2}{2} \ln t + \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{4} \\ \ln t - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

最后得到通解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^2(1 - \ln t) \\ -t & t \ln t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{2} \ln^2 t - \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2} \ln^2 t + \frac{t}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^3 + \frac{3}{4} t \end{pmatrix}.$$

或即

$$x = c_1 t^2 + c_2 t^2(1 - \ln t) + \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{2} \ln^2 t + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{4},$$

$$y = -c_1 t + c_2 t \ln t + \frac{t}{2} \ln^2 t + \frac{t}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^3 + \frac{3}{4} t.$$

### 第三章 常系数线性微分方程组

若线性微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad (3.1)$$

的系数矩阵  $A$  是一个  $n$  阶常数矩阵, 则称 (3.1) 为常系数线性微分方程组. 这是一种最简单、最重要的方程组. 它的通解可以通过代数和积分运算而得到. 本章介绍常系数线性方程组 (3.1) 的求解方法. 我们先从齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.2)$$

讲起. 下面分三节介绍方程组 (3.2) 的三种求解方法.

#### § 1 常系数线性齐次方程组解法 I

##### ——特征根法

与解常系数线性方程类似, 由方程组 (3.2) 是齐次、线性、 $A$  是常数矩阵的特点, 我们来求 (3.2) 的形如

$$x = \gamma e^{\lambda t} \quad (3.3)$$

的解, 其中

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

为待定的常向量,  $\lambda$  为待定常数. 将 (3.1) 代入 (3.2) 并约去非零因子  $e^{\lambda t}$ , 得  $\lambda\gamma = A\gamma$ . 注意到  $\gamma = I\gamma$  (其中  $I$  是单位矩阵), 于是得

$$(A - \lambda I)\gamma = 0. \quad (3.4)$$

这是一个含 $n$ 个未知量 $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )的齐次线性代数方程组.(3.4)有非零解的充要条件是它的系数行列式

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (3.5)$$

由线性代数知道,(3.5)就是矩阵 $A$ 的特征方程.若 $\lambda_k$ 是 $A$ 的任一

特征根,而 $\gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ 是 $\lambda_k$ 对应的特征向量,即

$$(A - \lambda_k I)\gamma_k = 0,$$

则 $x = e^{\lambda_k t} \gamma_k$ 是方程(3.2)的解.

系数矩阵 $A$ 的特征方程(3.5)也称为方程组(3.2)的特征方程,(3.5)的根也称为方程组(3.2)的特征根.

下面我们就特征根均为单根或有重根两种情况来讨论.

### (一) 特征根均为单根的情况

设矩阵 $A$ 的特征方程(3.5)的根都是单根,即有 $n$ 个不同的特征根: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . 设 $\gamma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )是特征根 $\lambda_k$ 对应的特征向量,则方程组(3.2)有 $n$ 个不同的解:

$$\gamma_1 e^{\lambda_1 t}, \gamma_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \gamma_n e^{\lambda_n t}. \quad (3.6)$$

由第二章§2例1知,它们在区间 $(-\infty, \infty)$ 内是线性无关的.因此,它们构成方程组(3.2)的基础解系.即得方程组(3.2)的通解为

$$x = \sum_{k=1}^n c_k \gamma_k e^{\lambda_k t},$$

其中 $c_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )为任意常数.

若方程组(3.2)具有复根.现设 $A$ 是实矩阵,于是复的特征根必共轭地成对出现.若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 是(3.2)的一个特征根,而 $\gamma_1 = p + iq$ 是 $\lambda_1$ 所对应的一个特征向量,则 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是(3.2)的一个特征根,且 $\gamma_2 = \bar{\gamma}_1 = p - iq$ 是 $\lambda_2$ 所对应的一个特征向量.因而方程组(3.2)有复值解

$$\begin{aligned}x_1(t) &= (p + iq)e^{(\alpha + i\beta)t} \triangleq u(t) + iv(t), \\x_2(t) &= (p - iq)e^{(\alpha - i\beta)t} \triangleq u(t) - iv(t).\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}u(t) &= e^{\alpha t}(p \cos \beta t - q \sin \beta t), \\v(t) &= e^{\alpha t}(p \sin \beta t + q \cos \beta t).\end{aligned}$$

由第二章习题第 6 题知,  $x_1(t)$  的实部  $u(t)$  和虚部  $v(t)$  分别是方程组 (3.2) 的两个实值解. 因此, 一对共轭复特征根, 对应了方程组的一对实值解.

当我们遇到一对共轭复特征根时, 在基础解系 (3.6) 中, 用它们对应的一对实值解来代替相应的复值解, 这样就能得到  $n$  个实值解. 又由第二章习题第 14 题知道它们是线性无关的. 因此, 这  $n$  个实值解构成方程组 (3.2) 的一个基础解系. 从而就可得到方程组的实值通解.

### 例 1 解方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

解

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

它的特征方程是

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0.\end{aligned}$$

$\mathbf{A}$  有特征根  $\lambda = 1, 3, -2$ . 它们对应的特征向量依次为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此得方程组的通解为

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

**例 2** 解方程组

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

**解**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

它的特征方程是

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 & -5 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+5)=0. \end{aligned}$$

$\mathbf{A}$  有特征根  $\lambda=2, 2+i, 2-i$ . 求出  $\lambda=2$  对应的特征向量为  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

于是得到原方程组的一个解  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$ . 又求出  $\lambda=2+i$  对应的特

征向量为  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \\ 5 \end{pmatrix}$ , 得到原方程组的一个复值解:

$$e^{(2+i)t} \begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \\ 5 \end{pmatrix} = e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (\cos t + i \sin t).$$

它的实部和虚部分别为

$$u(t) = e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right],$$

$$v(t) = e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \sin t \right].$$

于是, 方程组的通解为

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right] +$$

$$+ c_3 e^{2t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \sin t \right].$$

## (二) 特征根有重根的情况

如果矩阵  $A$  有相等的特征根, 则不一定能得到形如 (3.6) 的  $n$  个线性无关的解. 在此情况下, 方程组 (3.2) 的  $n$  个线性无关的解具有何种形式呢? 下述定理回答了这一问题.

**定理 3.1** 设矩阵  $A$  的特征方程 (3.5) 具有  $r$  重的特征根  $\lambda_0$ , 则对应于  $\lambda_0$ , 方程组 (3.2) 存在  $r$  个线性无关的解. 这些解具有形式

$$(v_k + t v_{k-1} + \cdots + t^k v_0) e^{\lambda_0 t}, \quad 0 \leq k \leq r-1.$$

其中  $v_i (i=0, 1, \cdots, k)$  是常向量.

**证明** 首先, 作变量变换, 令  $x = e^{\lambda_0 t} z$ , 即  $z = e^{-\lambda_0 t} x$ . 代入方程组 (3.2), 得



$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{z}}{dt} &= e^{-\lambda_0 t} \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \mathbf{x} = e^{-\lambda_0 t} \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \mathbf{x} = \\ &= (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) e^{-\lambda_0 t} \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{z}.\end{aligned}$$

记  $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}$ , 则方程组 (3.2) 变换为

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{B}\mathbf{z}. \quad (3.7)$$

由于  $\mathbf{A}$  有  $r$  重特征根  $\lambda_0$ , 故有

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (\lambda - \lambda_0)^r P(\lambda), & P(\lambda_0) &\neq 0; \\ \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) &= \det(\mathbf{A} - (\lambda_0 + \lambda) \mathbf{I}) \\ &= \lambda^r P(\lambda_0 + \lambda) = \lambda^r Q(\lambda), & Q(0) &\neq 0.\end{aligned}$$

即知矩阵  $\mathbf{B}$  有  $r$  重特征根  $\lambda = 0$ .

下面, 我们来证明, 方程组 (3.7) 对应于  $\mathbf{B}$  的  $r$  重特征根  $\lambda = 0$  有  $r$  个线性无关的解, 这些解具有如下形式

$$\mathbf{v}_k + t\mathbf{v}_{k-1} + \cdots + t^k \mathbf{v}_0, \quad 0 \leq k \leq r-1.$$

下面用数学归纳法(关于  $r$  的)来证明上述结论.

由于  $\mathbf{B}$  是奇异矩阵, 代数方程组  $\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}$  必有形如  $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 1)^T$  的非零解(必要时可调换  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T$  的分量的次序). 因而, 方程组 (3.7) 必具有非零常数解  $\mathbf{z} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 1)^T$ . 于是当  $r=1$  时上述结论成立.

作变换

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} u_n + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

引入新变量  $u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n$ . 并记

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

它是  $n-1$  维向量. 这样,

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{du_n}{dt} + \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Bx = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} u_n + B \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是经变换(3.8)后, (3.7)化为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{du_n}{dt} + \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

设  $B = (b_{ij})$ , 比较(3.9)式两边的第  $n$  行, 得

$$\frac{du_n}{dt} = \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} u_j, \quad (3.10)$$

于是(3.9)式前  $n-1$  行对应的方程组可写成

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} b_{nj} u_j = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} (b_{1j} - \alpha_1 b_{nj}) u_j \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{n-1} (b_{n-1,j} - \alpha_{n-1} b_{nj}) u_j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

记  $n-1$  阶矩阵

$$C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = b_{ij} - \alpha_i b_{nj}, \quad (i, j = 1, \cdots, n-1).$$

则(3.11)可写成

$$\frac{du}{dt} = Cu. \quad (3.12)$$

(3.12)是一个包含  $n-1$  个未知函数  $u_1, \cdots, u_{n-1}$ , 由  $n-1$  个方程组成的线性微分方程组。(3.12)的系数矩阵  $C = (c_{ij})$  是由矩阵  $B = (b_{ij})$  经过行运算得到的, 由本章习题第 36 题知, 0 是  $C$  的  $r-1$  重特征根, 由归纳法的假设, (3.12)存在  $r-1$  个线性无关的解

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1,n-1} \end{pmatrix}, \cdots, \quad u_{r-1} = \begin{pmatrix} u_{r-1,1} \\ \vdots \\ u_{r-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

将  $u_j (j=1, \dots, r-1)$  的分量代入 (3.10), 得到的解  $u_n$  记为  $u_{j,n}$  (精确到一个常数项). 再由 (3.8), 得到方程组 (3.7) 的  $r$  个解

$$z_j = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} u_{j,n} + \begin{pmatrix} u_j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (j=1, 2, \dots, r-1), \quad (3.13)$$

$$z_r = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由归纳法假设, 诸  $u_j (j=1, \dots, r-1)$  具有形式

$$\tilde{v}_k + t \tilde{v}_{k-1} + \dots + t^k \tilde{v}_0, \quad 0 \leq k \leq r-2.$$

其中  $\tilde{v}_i (i=0, 1, \dots, k)$  是  $n-1$  维常向量. 那么, 由 (3.10) 及 (3.13), 容易看出诸  $z_j (j=1, \dots, r)$  具有形式

$$v_k + t v_{k-1} + \dots + t^k v_0, \quad 0 \leq k \leq r-1,$$

其中  $v_i (i=0, 1, \dots, k)$  是  $n$  维常向量.

最后来证明 (3.13) 中  $r$  个解是线性无关的. 事实上, 如果存在常数  $a_1, \dots, a_{r-1}, a_r$  使得

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} u_{j,n} + \sum_{j=1}^{r-1} a_j \begin{pmatrix} u_j \\ 0 \end{pmatrix} + a_r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

由最后一个分量的等式推得

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j u_{j,n} + a_r = 0.$$

由前  $n-1$  个分量的等式推得

$$\left[ \sum_{j=1}^{r-1} a_j u_{j,n} + a_r \right] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{r-1} a_j u_j = 0.$$

即

$$\sum_{j=1}^{r-1} a_j u_j = 0.$$

由归纳法假设  $u_1, \dots, u_{r-1}$  线性无关, 于是由上式推得  $a_1 = \dots = a_{r-1} = 0$ .

由此推得  $a_r = 0$ ，这就证明了(3.13)中  $r$  个解是线性无关的。

根据上述定理，容易得到方程组(3.4)的基础解系和通解。我们有下述定理。

**定理 3.2** 设方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (3.2)$$

的系数矩阵  $A$  有不同的特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ，其重数分别为  $n_1, \dots, n_s$ ，( $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$ )，则对应于每一个根  $\lambda_i$ ，方程组(3.2)存在  $n_i$  个线性无关的解

$$(S_i): p_i^{(j)}(t)e^{\lambda_i t}, \quad (j=1, 2, \dots, n_i).$$

其中  $p_i^{(j)}(t)$  是  $n$  维向量函数，其分量为  $t$  的次数不超过  $n_i - 1$  的多项式， $(S_1), \dots, (S_s)$  合起来构成方程组(3.2)的一个基础解系，且方程组(3.2)的通解为

$$x(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} c_i^{(j)} p_i^{(j)}(t) e^{\lambda_i t}. \quad (3.14)$$

其中  $c_i^{(j)} (i=1, \dots, s; j=1, \dots, n_i)$  是任意常数。

**证明** 由定理 3.1 知，方程组(3.2)存在形如  $(S_1), \dots, (S_s)$  的  $n$  个解。因此只需证明  $(S_1), \dots, (S_s)$  线性无关即可。设这些解之间存在着线性恒等关系

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} p_1^{(j)}(t) e^{\lambda_1 t} + \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j} p_2^{(j)}(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + \\ + \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_{sj} p_s^{(j)}(t) e^{\lambda_s t} \equiv 0, \end{aligned}$$

这里  $\alpha_{ij} (i=1, \dots, s; j=1, 2, \dots, n_i)$  是不全为零的常数。将上式写成

$$q_1(t) e^{\lambda_1 t} + q_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + q_s(t) e^{\lambda_s t} = 0. \quad (3.15)$$

这里  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)$  是向量函数，它们不全恒等于零。以

下不妨假设  $q_i(t) (i=1, \dots, s)$  都不恒等于零. 设  $q_i(t)$  的分量中含  $t$  的最高方次为  $m_i (i=1, \dots, s)$ . 以  $e^{\lambda_1 t}$  除(3.15)式两边, 并将所得结果对  $t$  求导数, 得

$$q_1'(t) - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} [q_2'(t) + (\lambda_2 - \lambda_1)q_2(t)] + \dots = 0. \quad (3.16)$$

由于  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 故上式中与  $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$  相乘的向量函数不恒等于零, 且其分量含  $t$  的最高方次仍为  $m_2$ . 对于未写出的那些项中的向量函数也有相似的结论. 由此知, 将(3.16)对  $t$  连续求导  $m_1$  次, 便可得到新的恒等式

$$h_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + h_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} \equiv 0.$$

其中  $h_2(t), \dots, h_s(t)$  都是不恒等于零的向量函数, 且其分量含  $t$  的最高方次仍分别为  $m_2, \dots, m_s$ , 而  $\lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_s - \lambda_1$  也还是互异的. 这些特点和恒等式(3.15)的特点完全一样, 只是项数减少 1. 继续进行同样的步骤, 最后得到一个形如

$$e^{\mu t} \phi(t) \equiv 0$$

的恒等式, 其中  $\mu$  是常数, 而  $\phi(t)$  是一个不恒等于零的向量函数. 但这是不可能的. 由这一矛盾证得定理的结论成立.

**注** 由于方程组(3.2)至多只有  $n$  个线性无关的解, 由定理 3.1 与定理 3.2 知道, 对应于  $A$  的  $r$  重特征根, 方程组(3.2)恰有  $r$  个线性无关的解.

根据定理 3.2 的结论, 我们能用待定系数法求得方程组(3.2)的基础解系或通解. 方法是, 先求出系数矩阵  $A$  的各个相异的特征根  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, s)$  与它们的重数  $n_i$ , 然后对于每一个根  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, s)$  以表达式

$$x = e^{\lambda_i t} (v_{n_i-1} + t v_{n_i-2} + \dots + t^{n_i-1} v_0) \quad (3.17)$$

代入(3.2)以确定待定的系数向量  $v_j (j=0, 1, \dots, n_i-1)$ , 从而求得  $n_i$  个线性无关的解. 最后将分别得到的  $n_1, n_2, \dots, n_s$  个解合起来就得到(3.2)的基础解系.

但是, 在具体求解时, 并不需要一开始就将(3.17)代入(3.2)

求解,而可采用如下做法.

对应于  $A$  的  $r$  重特征根  $\lambda_0$ , 先来求方程组形如

$$x = e^{\lambda_0 t} v_0 \quad (3.18)$$

的解. 为此, 将上式代入方程组(3.2), 得到

$$A v_0 = \lambda_0 v_0. \quad (3.19)$$

由此确定  $v_0$ , 从而求得方程组的形如(3.18)的解. 若已得到  $r$  个线性无关的解, 就停做(因为由定理 3.2 后面的注知道, 对应于  $r$  重特征根  $\lambda_0$ , 正好只对应  $r$  个线性无关的解). 若不足  $r$  个, 再来求方程组形如

$$x = e^{\lambda_0 t} \left( v_1 + \frac{t v_0}{1!} \right) \quad (3.20)$$

的解. 将上式代入方程组, 得到

$$\begin{cases} A v_0 = \lambda_0 v_0, \\ A v_1 = \lambda_0 v_1 + v_0. \end{cases} \quad (3.21)$$

由于(3.21)的第一个式子与(3.19)是相同的, 故我们只需对于上面求得的每个  $v_0$  代入(3.21)的第二式以求  $v_1$ , 从而就能求得方程组形如(3.20)的解. 如果以上总共已得到  $r$  个线性无关的解, 则就停做. 否则, 再来求方程组形如

$$x = e^{\lambda_0 t} \left( v_2 + \frac{t v_1}{1!} + \frac{t^2 v_0}{2!} \right) \quad (3.22)$$

的解. 将上式代入方程(3.2), 得到

$$\begin{cases} A v_0 = \lambda_0 v_0, \\ A v_1 = \lambda_0 v_1 + v_0, \\ A v_2 = \lambda_0 v_2 + v_1. \end{cases} \quad (3.23)$$

由于(3.23)的前面两个式子与(3.21)是相同的, 故只需对于上面求得的每对  $v_0$  和  $v_1$ , 再由(3.23)求出  $v_2$ , 从而求得方程组(3.2)的解. 如果以上总共已得到  $r$  个线性无关的解, 就停做. 否则, 再继续做下去. 由定理 3.1 知, 我们一定能得到  $r$  个线性无关的解.

按这里所说的具体做法,先求  $v_0$ ,接着求出  $v_1, v_2, \dots$ ,叫做循环列的方法.

### 例 3 解方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

解 系数矩阵  $A$  的特征方程为

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & -5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda+2) = 0, \end{aligned}$$

它具有一个单根  $-2$  和一个二重根  $-1$ .

容易算得对应于  $\lambda = -2$  的一个特征向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,从而得到方

程组的一个解

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

对应于二重根  $\lambda = -1$ ,我们先来求方程组的形如

$$x = e^{-t} v_0$$

的解. 将上式代入原方程组,得

$$Av_0 = -v_0.$$

解得  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,于是得到原方程组的第二个解

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

再来求方程组的形如

$$x = e^{-t} \left( v_1 + \frac{t v_0}{1!} \right)$$

的解。将上式代入原方程组,得

$$A v_0 = -v_0,$$

$$A v_1 = -v_1 + v_0.$$

以  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  代入上式,解得  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 于是得到原方程组的第

三个解

$$x_3 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \right] e^{-t} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ -2+t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

最后得方程组的通解为

$$\begin{aligned} x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} + \left[ c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ -2+t \end{pmatrix} \right] e^{-t}. \end{aligned}$$

**例 4** 解方程组

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$A$  的特征方程为



$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0,$$

特征方程有一个单根  $\lambda = 2$  和一个二重根  $\lambda = -1$ .

容易算得对应于  $\lambda = 2$  的一个特征向量为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 从而得到方

程组的一个解

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

对应于二重根  $\lambda = -1$ , 我们来求方程组的形如

$$x = e^{-t} v_0$$

的解. 将上式代入原方程组, 得

$$A v_0 = -v_0,$$

令  $v_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  代入上式, 即有  $A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , 或即

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a + b + c = 0, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

得到两个线性无关的特征向量  $v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $v_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 于是

得到方程组两个线性无关的解

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

通解为

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

**例 5 解初值问题**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**解**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}$  的特征方程为

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^3 = 0.$$

它具有一个三重根  $\lambda = 2$ .

先求方程组的形如

$$\mathbf{x} = e^{2t} \mathbf{v}_0$$

的解. 将上式代入原方程组, 得

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_0 = 2 \mathbf{v}_0.$$

解得  $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . 于是得原方程组的一个解

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

再来求方程组的形如

$$x = e^{2t} \left( v_1 + \frac{t v_0}{1!} \right)$$

的解。将上式代入原方程组,得

$$\begin{cases} A v_0 = 2 v_0, \\ A v_1 = 2 v_1 - v_0. \end{cases}$$

已知  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 自上述方程解得  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 于是得原方程组的第二个解

$$x_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \right] e^{2t}.$$

最后来求方程组的形如

$$x = e^{2t} \left( v_2 + \frac{t v_1}{1!} + \frac{t^2 v_0}{2!} \right)$$

的解。将上式代入原方程组,得

$$\begin{cases} A v_0 = 2 v_0, \\ A v_1 = 2 v_1 + v_0, \\ A v_2 = 2 v_2 + v_1. \end{cases}$$

已知  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 再自第三个方程解得  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

于是得原方程组第三个解:

$$x_3 = \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t^2 \right] e^{2t}.$$

原方程组的通解为

$$\begin{aligned}
 x &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \\
 &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} t^2 \\ 2 + t \\ 1 + \frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix} e^{2t}
 \end{aligned}$$

以初值条件  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  代入, 解得  $c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0$ , 于是所求的解为

$$x = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

## § 2 常系数线性齐次方程组解法 II ——矩阵指数法

本节介绍方程组求解的另一种方法, 即直接求出它的解矩阵. 我们将看到方程组的解矩阵可表示成矩阵指数, 它具有表达形式简洁的特点.

我们注意到常系数线性方程

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

具有形如

$$x = e^{at}$$

的解. 类似地, 由于  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ , 因而矩阵方程

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

具有形如

$$X = e^{At}$$

的解。又由于

$$\det e^{At} \Big|_{t=0} = \det e^{A0} = I,$$

由第二章基本解矩阵的性质(见 27 页)知道

$$X = e^{At} \quad (3.24)$$

是方程组(3.2)的一个基本解矩阵。由(2.18)式知道,方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

的通解为

$$x = e^{At}c, \quad (3.25)$$

其中  $c$  为任意常向量。由(2.20)式知,初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

的解为

$$x = e^{At}e^{-At_0}x_0,$$

或即

$$x = e^{A(t-t_0)}x_0. \quad (3.27)$$

特别,当  $t_0=0$  时有

$$x = e^{At}x_0. \quad (3.28)$$

上式表明,将表征初始状态的向量  $x_0$  (这是一个常向量)左乘以矩阵  $e^{At}$ ,就得到表征区间  $t \geq 0$  上状态的向量  $x = x(t)$ 。我们也称  $e^{At}$  为状态转移矩阵。

如上所述,方程组(3.2)的求解问题就可归结为求矩阵指数  $e^{At}$  的问题。下面介绍两种求  $e^{At}$  的方法。

### (一) 求 $e^{At}$ 的解析方法

**定理 3.3** 设  $n$  阶矩阵  $A$  具有特征根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (它们不一定相异),则

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)P_j,$$

其中

$$P_0 = I;$$

$$P_j = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_j I), (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

是  $n$  个  $n$  阶矩阵, 而函数  $r_1(t), r_2(t), \cdots, r_n(t)$  是初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = \lambda_1 r_1, \\ \frac{dr_2}{dt} = r_1 + \lambda_2 r_2, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dr_n}{dt} = r_{n-1} + \lambda_n r_n, \\ r_1(0) = 1, r_2(0) = \dots = r_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

的解.

上述定理将求  $e^{At}$  的问题归结为求解初值问题 (3.29). 而 (3.29) 是一个特殊的初值问题, 它具有十分简洁的形式, 它的解是很容易得到的.

**证明** 令  $r_0(t) \equiv 0$ , 而  $r_1, r_2, \cdots, r_n$  为 (3.29) 的解.

记矩阵

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) P_j. \quad (3.30)$$

注意到 (3.29), 即有

$$\Phi'(t) = \sum_{j=0}^{n-1} r'_{j+1}(t) P_j = \sum_{j=0}^{n-1} (r_j(t) + \lambda_{j+1} r_{j+1}(t)) P_j. \quad (3.31)$$

因而

$$\begin{aligned} \Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t) &= \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [r_j(t) P_j + \lambda_{j+1} r_{j+1}(t) P_j - \lambda_n r_{j+1}(t) P_j]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

由于  $r_0(t) \equiv 0$ ,  $\sum_{i=0}^{n-1} r_i(t) \mathbf{P}_i$  可改写成  $\sum_{i=0}^{n-2} r_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i+1}$ , 于是(3.32)式

右端成为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-2} r_{i+1}(t) \mathbf{P}_{i+1} + \left( \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_{i+1} r_{i+1}(t) \mathbf{P}_i \right) + \lambda_n r_n(t) \mathbf{P}_{n-1} - \\ & - \left( \lambda_n \sum_{i=0}^{n-2} r_{i+1}(t) \mathbf{P}_i \right) - \lambda_n r_n(t) \mathbf{P}_{n-1} = \\ & = \sum_{i=0}^{n-2} [\mathbf{P}_{i+1} + (\lambda_{i+1} - \lambda_n) \mathbf{P}_i] r_{i+1}(t). \end{aligned}$$

因  $\mathbf{P}_{i+1} = (\mathbf{A} - \lambda_{i+1} \mathbf{I}) \mathbf{P}_i$ , 则有

$$\begin{aligned} \Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{i=0}^{n-2} [(\mathbf{A} - \lambda_{i+1} \mathbf{I}) \mathbf{P}_i + (\lambda_{i+1} - \lambda_n) \mathbf{P}_i] r_{i+1}(t) = \\ &= (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{P}_i r_{i+1}(t) = (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) [\Phi(t) - r_n(t) \mathbf{P}_{n-1}] = \\ &= \mathbf{A} \Phi(t) - \lambda_n \mathbf{I} \Phi(t) - r_n(t) (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{P}_{n-1} = \\ &= \mathbf{A} \Phi(t) - \lambda_n \mathbf{I} \Phi(t) - r_n(t) \mathbf{P}_n. \end{aligned}$$

由线性代数的凯莱-哈密顿定理知

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{0}.$$

因此,

$$\Phi'(t) = \mathbf{A} \Phi(t).$$

又由  $\Phi(0) = \mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ , 知  $\Phi(t)$  的第  $i$  列 ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 是下列初值问题的解:

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \text{ 位于第 } i \text{ 行.}$$

而  $e^{\mathbf{A}t}$  的第  $i$  列也是上述初值问题的解。由解的唯一性知,  $\Phi(t)$  的第  $i$  列与  $e^{\mathbf{A}t}$  的第  $i$  列相等。于是

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t}.$$

例如, 设 3 阶矩阵  $\mathbf{A}$  具有 3 重特征根  $\lambda$ , 此时 (3.29) 式即为

$$\begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = \lambda r_1, & r_1(0) = 1, \\ \frac{dr_2}{dt} = r_1 + \lambda r_2, & r_2(0) = 0, \\ \frac{dr_3}{dt} = r_2 + \lambda r_3, & r_3(0) = 0. \end{cases}$$

容易求得上述初值问题的解

$$r_1 = e^{\lambda t}, \quad r_2 = t e^{\lambda t}, \quad r_3 = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t}.$$

于是

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t} \left[ \mathbf{I} + t(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) + \frac{t^2}{2} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \right].$$

例 1 设  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 试求  $e^{\mathbf{A}t}$ .

解  $\mathbf{A}$  具有特征根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$ . 解初值问题



$$\begin{cases} \frac{dr_1}{dt} = r_1, & r_1(0) = 1, \\ \frac{dr_2}{dt} = r_1 + 2r_2, & r_2(0) = 0, \\ \frac{dr_3}{dt} = r_2 + 2r_3, & r_3(0) = 0. \end{cases}$$

得

$$r_1(t) = e^t;$$

$$r_2(t) = -e^t + e^{2t};$$

$$r_3(t) = e^t + e^{2t} + te^{2t}.$$

于是

$$e^{At} = e^t I + (-e^t + e^{2t})(A - I) + (e^t + e^{2t} + te^{2t})(A - I)$$

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^t - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 2e^{2t} + te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

## (二) 求 $e^{At}$ 的数值计算方法

以上我们介绍的初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

的求解方法,都是基于要先获得矩阵  $A$  的特征根的精确值. 当不能求得  $A$  的特征根的精确值时,我们可借助于数值方法直接求 (3.26) 的解. 现在介绍求  $x(t)$  在时刻  $t = kT (k=1, 2, \dots)$  的数值的计算方法. 在 (3.26) 的解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 \quad (3.27)$$

中,令  $t = (k+1)T, t_0 = kT$ , 其中  $T$  为给定的常数,则有

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT). \quad (3.33)$$

当  $x(0)$  给出时,按上式就可以逐次计算出  $x(kT), k=1, 2, \dots$ .

由此,我们只需研究  $e^{At}$  的数值计算方法即可.

由于对于任意有限的  $t$ , 无穷级数

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \quad (3.34)$$

都是收敛的(参看附录一),因此,可以取上式右端的前有限项作为  $e^{At}$  的近似,即

$$e^{At} \approx I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} A^k t^k. \quad (3.35)$$

这里要将  $k$  取得足够大. 当  $t$  的值不大时,可以用此近似式来计算  $e^{At}$ .

然而当  $k$  相当大时,用(3.35)计算  $e^{At}$  的近似值,计算工作量是很大的. 以下介绍另一个方法.

设  $A$  为  $n$  阶矩阵,根据凯莱-哈密顿定理,我们可将  $A^k (k \geq n)$  表示成  $I, A, \dots, A^{n-1}$  的线性组合(见下面).因而在利用  $e^{At}$  的幂级数展开式(3.34)计算  $e^{At}$  时,其中  $A^k (k \geq n)$  就不需要直接计算,这样可以减少计算工作量.

设  $A$  的特征方程为

$$\psi(\lambda) \triangleq \det(\lambda I - A) \triangleq \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.36)$$

由凯莱-哈密顿定理知  $\psi(A) = 0$ , 即有

$$A^n = -a_{n-1} A^{n-1} - a_{n-2} A^{n-2} - \dots - a_0 I. \quad (3.37)$$

反复使用上式,可将  $A^{n+m} (m \geq 0)$  表示成  $I, A, \dots, A^{n-1}$  的线性组合,即可写成

$$A^{n+m} = a_{0,m} I + a_{1,m} A + \dots + a_{n-1,m} A^{n-1}, \quad (3.38)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots).$$

上式右端的系数可按如下的方法来确定. 设  $A^{n+m-1}$  中的系数  $a_{0,m-1}, a_{1,m-1}, \dots, a_{n-1,m-1}$  为已知. 因为

$$A^{n+m} = A^{n+m-1} A,$$

又由(3.37)和(3.38)式,得

$$\begin{aligned} a_{0,m} I + a_{1,m} A + \dots + a_{n-1,m} A^{n-1} &= \\ &= (a_{0,m-1} I + a_{1,m-1} A + \dots + a_{n-1,m-1} A^{n-1}) A = \end{aligned}$$

$$= a_{0,m-1} \mathbf{A} + a_{1,m-1} \mathbf{A}^2 + \cdots + a_{n-2,m-1} \mathbf{A}^{n-1} + \\ - a_{n-1,m-1} (-a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2} \mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_0 \mathbf{I}).$$

比较上式两边  $\mathbf{A}$  的同次幂的系数得到

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= -a_0 a_{n-1,m-1}; \\ a_{1,m} &= a_{0,m-1} - a_1 a_{n-1,m-1}; \\ &\vdots \\ a_{n-1,m} &= a_{n-1,m-2} - a_{n-1} a_{n-1,m-1}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

因  $a_{00} = -a_0, a_{10} = -a_1, \cdots, a_{n-1,0} = -a_{n-1}$ , 则从  $m=1$  起依次使用(3.39)式可以决定  $a_{0,m}, a_{1,m}, \cdots, a_{n-1,m}$ . 将(3.39)式代入  $e^{\mathbf{A}T}$  的幂级数表达式, 得到

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}T} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}T)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^k}{k!} \mathbf{A}^k + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^{n+m}}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,m} \mathbf{A}^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \left[ \frac{T^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{k,m} T^{n+m}}{(n+m)!} \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

在  $e^{\mathbf{A}T}$  的幂级数表达式中取到  $N+1$  项, 相当于在方括号内的第二项取到  $m=N-n$  项. 使用(3.39)式计算  $e^{\mathbf{A}T}$  的步骤如下.

- (i) 计算  $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \cdots, \mathbf{A}^n$ ;
- (ii) 按下列线性代数中的勒维列(Leverrier)公式写出  $\mathbf{A}$  的特征多项式  $\psi(\lambda)$  的系数

$$a_{n-1} = -\text{tr}(\mathbf{A});$$

$$a_{n-2} = -\frac{1}{2} \left[ a_{n-1} \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{A}^2) \right];$$

.....

$$a_0 = -\frac{1}{n} \left[ a_1 \text{tr}(\mathbf{A}) + \cdots + a_{n-1} \text{tr}(\mathbf{A}^{n-1}) + \text{tr}(\mathbf{A}^n) \right].$$

- (iii) 根据要求的精度在(3.40)式方括号内第二项适当地选

取有限项,在此基础上计算  $e^{At}$ .

当然,以上所说的求  $e^{At}$  的数值算法,需要采用数字计算机才能完成.

### § 3 常系数线性齐次方程组解法 III ——拉普拉斯变换法

与利用拉普拉斯变换解常系数线性微分方程类似,拉普拉斯变换也能用来解常系数线性微分方程组的初值问题.我们假设读者已具有有关拉普拉斯变换的知识,在这里仅介绍解题方法,而不写明推理所需的条件.

我们来解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.26')$$

记

$$\begin{aligned} X(s) &= \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix} = \mathcal{L}\{x(t)\} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^\infty e^{-st} x_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st} x_n(t) dt \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

将方程组  $\frac{dx}{dt} = Ax$  两边分别取拉普拉斯变换,得到

$$sX(s) - x(0) = AX(s),$$

即  $(sI - A)X(s) = x(0),$

或即  $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0),$

将上式两边分别取拉普拉斯逆变换,就得到初值问题(3.26')的解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}(0). \quad (3.41)$$

可见用拉普拉斯变换解初值问题, 只需求出逆阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  然后求它的拉普拉斯逆变换就可以了.

**例1** 解初值问题

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

$$\text{解 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s^2 + 5s - 6} \begin{pmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{s+5}{s^2 + 5s - 6} & \frac{6}{s^2 + 5s - 6} \\ \frac{-1}{s^2 + 5s - 6} & \frac{s}{s^2 + 5s - 6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是得所求的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+5}{s^2 + 5s - 6}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{6}{s^2 + 5s - 6}\right) \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s^2 + 5s - 6}\right) & \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 5s - 6}\right) \end{pmatrix} \mathbf{x}(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 3e^{-2t} & 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} & e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix} \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

比较(3.28)和(3.41)两式, 由解的唯一性知道,

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}. \quad (3.42)$$

上式提供了求方程组(3.2)的基本解矩阵  $e^{\mathbf{A}t}$  的另一个方法.

## § 4 常系数线性非齐次微分方程组的解法

我们可以用第二章 § 4 中所介绍的常数变易法来求常系数线性非齐次方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

的解.

由于  $e^{At}$  是 (3.43) 所对应的齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

的基本解矩阵, 于是由 (2.29) 式得初值问题 (3.43) 的通解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau, \quad (3.44)$$

或

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (3.45)$$

### 例 1 解初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

其中  $u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

解

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix},$$

在上节例 1 中已求得

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

再由 (3.45) 式得原方程组的解

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau = \\
&= e^{At}x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 6e^{-2(t-\tau)} - 6e^{-3(t-\tau)} \\ -2e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} \end{pmatrix} d\tau = \\
&= \begin{pmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{pmatrix} x_0 + \\
&\quad + \begin{pmatrix} 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

我们也可用拉普拉斯变换来求初值问题(3.43)的解. 将(3.43)式两边分别取拉普拉斯变换, 得

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + \mathcal{L}\{f(t)\},$$

其中  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ . 于是

$$(sI - A)X(s) = x(0) + \mathcal{L}\{f(t)\},$$

解得

$$X(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + \mathcal{L}\{f(t)\}].$$

对上式求拉普拉斯逆变换, 就能求得原方程组的解.

**例2** 用拉普拉斯变换求例1的初值问题的解.

**解** 对原方程组两边分别取拉普拉斯变换. 注意到

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s},$$

得到

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s},$$

或

$$(sI - A)X(s) = x(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s}.$$

得

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left[ \mathbf{x}(0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \right].$$

在上节例 1 中已求得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{6}{s^2+5s+6} \\ \frac{-1}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{pmatrix},$$

因而

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} \frac{6}{s(s^2+5s+6)} \\ \frac{1}{s^2+5s+6} \end{pmatrix}.$$

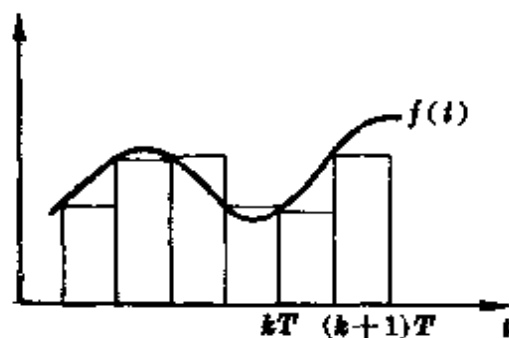


图 3-1

由拉普拉斯逆变换求出原初值问题的解  $\mathbf{x}(t)$ , 其结果与例 1 所得相同。

当矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根的精确值不能求得时, 我们也能采用数值计算的方法来求初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

的解(3.44)在时刻  $t = kT (k=0, 1, 2, \dots)$  的数值。

在(3.44)中令  $t = (k+1)T, t_0 = kT$  即有

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{f}(\tau) d\tau. \quad (3.46)$$

现在用呈阶梯形的函数逼近连续变化的输入函数  $\mathbf{f}(t)$ 。即假定在区间  $[kT, (k+1)T]$  上输入值一定, 都等于  $\mathbf{f}(kT)$  (参见图 3-1)。

此时(3.46)式就成为



$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + e^{\mathbf{A}(k+1)T} \left( \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{f}(kT)$$

再在上式右边的积分中作变量变换, 令  $\tau = -\tau' + (k+1)T$ , 即得

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{G} \mathbf{f}(kT), \quad (3.47)$$

其中

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau.$$

当  $\mathbf{x}(0)$  给定时, 按(3.47)式可以逐次算出  $\mathbf{x}(kT)$ ,  $k=1, 2, \dots$ .

在(3.47)的右边包含  $e^{\mathbf{A}T}$  和  $\mathbf{G}$ . 求  $e^{\mathbf{A}T}$  的数值计算方法在上一节已经讲解清楚. 而

$$\mathbf{G} = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \tau^k d\tau = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (\mathbf{A}T)^k.$$

将它与

$$e^{\mathbf{A}T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}T)^k$$

比较, 可知  $\mathbf{G}$  的计算可以和  $e^{\mathbf{A}T}$  的计算同样进行. 这样就能求得解(3.44)在时刻  $kT$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 的数值了.

以上我们介绍了线性常系数齐次和非齐次方程组的几种求解方法. 最后我们还要提到, 当  $n$  较小时, 将线性方程组(齐次的或非齐次的)用消去法将它化成高阶线性方程来求解也是可行的.

## § 5 几个应用的例子

在特定范围内, 很多工程技术系统是线性的. 线性系统可以用线性代数方程、线性差分方程或线性微分方程来描述. 在可用线性常微分方程描述的工程技术系统中, 相当一部份可用常系数线性微分方程组来描述. 因此, 线性常微分方程组应用的广泛性是明显的了. 下面举几个例子.

**例 1** 考虑如图 3-2 所示的机械系统。设弹簧服从虎克定律，轮子的摩擦力可忽略不计。

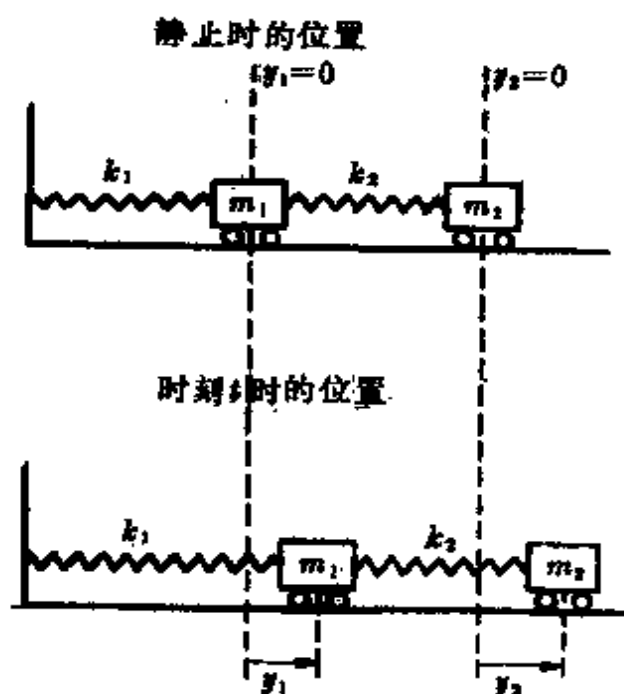


图 3-2

如图 3-2，设  $y_1, y_2$  为物体的位移， $m_1, m_2$  为物体的质量， $k_1, k_2$  为弹簧的弹性系数。试写出物体的运动方程，并在下述条件下，求出运动方程的解。这些条件是

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{m_1} &= 12, & \frac{k_2}{m_1} &= \frac{k_2}{m_2} = 8; \\ y_1|_{t=0} &= 0, & y_2|_{t=0} &= 0; \\ \left. \frac{dy_1}{dt} \right|_{t=0} &= 0, & \left. \frac{dy_2}{dt} \right|_{t=0} &= 24. \end{aligned}$$

**解** 由牛顿第二定律得运动方程为

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = k_2(y_2 - y_1) - k_1 y_1, \\ m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -k_2(y_2 - y_1), \end{cases}$$

或即

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_2. \end{cases}$$

以  $\frac{k_1}{m_1} = 12, \frac{k_2}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = 8$  代入，方程组化为

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -20 y_1 + 8 y_2, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 8 y_1 - 8 y_2, \end{cases} \quad (3.48)$$

这是一个二阶方程组，为将它化成一阶方程组，令

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad y_2 x_3 = \frac{dy_1}{dt}, \quad x_4 = \frac{dy_2}{dt},$$

此时

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} = x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -20 x_1 + 8 x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 8 x_1 - 8 x_2.$$

于是方程组(3.48)化成

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

现在来求(3.49)的解.

(3.49)的特征方程是

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -20 & 8 & -\lambda & 0 \\ 8 & -8 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 24) = 0.$$

它具有复根  $\pm 2i$  和  $\pm \sqrt{24}i$ ，容易算得对应于  $\lambda = 2i$  的一个特征

向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 4i \end{pmatrix}$ ，从而得到方程组(3.49)的一个复值解

$$e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 4i \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] (\cos 2t + i \sin 2t),$$

它的实部和虚部分别为

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin 2t,$$

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t.$$

它们都是方程组(3.49)的解。又算得对应于  $\lambda = \sqrt{24}i$  的一个特

征向量  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{24}i \\ -\sqrt{24}i \end{pmatrix}$ , 从而得到方程组(3.49)的一个复值解

$$e^{\sqrt{24}it} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{24}i \\ -\sqrt{24}i \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{24} \\ -\sqrt{24} \end{pmatrix} \right] [\cos \sqrt{24}t + i \sin \sqrt{24}t].$$

它的实部和虚部分别为

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \sqrt{24}t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{24} \\ -\sqrt{24} \end{pmatrix} \sin \sqrt{24}t,$$

$$v_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{24} \\ -\sqrt{24} \end{pmatrix} \cos \sqrt{24}t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin \sqrt{24}t,$$

于是得到方程组(3.49)的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 u_1(t) + c_2 v_1(t) + c_3 u_2(t) + c_4 v_2(t),$$

特别有

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 2t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 2t + \\ - c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \sqrt{24}t + c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \sqrt{24}t.$$

由条件  $y_1|_{t=0}=0$ ,  $y_2|_{t=0}=0$ , 得  $c_1=c_3=0$ . 由条件  $\left. \frac{dy_1}{dt} \right|_{t=0}=0$ ,

$\left. \frac{dy_2}{dt} \right|_{t=0}=24$  得  $c_2=\frac{24}{5}$ ,  $c_4=-\frac{\sqrt{24}}{5}$ . 于是所求的解是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \sin 2t - \frac{4\sqrt{6}}{5} \sin \sqrt{24}t \\ \frac{48}{5} \sin 2t + \frac{2\sqrt{6}}{5} \sin \sqrt{24}t \end{pmatrix}.$$

**例 2** 一电路如图 3-3 所示, 输入电压  $E$  以及电路参数  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $R_1$ ,  $R_3$  为已知. 当  $t=0$  时接通电路, 其时电流  $I_1=I_2=0$ . 试求电流  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ,  $I_3(t)$ .

解 考虑节点  $A$ . 由基尔霍夫定律, 有

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad (1)$$

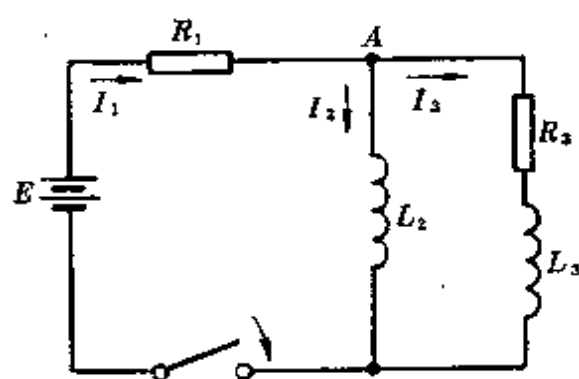


图 3-3

分别考虑左边及外面的回路。由基尔霍夫定律，有

$$R_1 I_1 + L_2 \frac{dI_2}{dt} = E, \quad (2)$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 + L_3 \frac{dI_3}{dt} = E. \quad (3)$$

在(1), (2), (3)中消去  $I_1$ , 得到

$$\begin{cases} \frac{dI_2}{dt} = -\frac{R_1}{L_2} I_2 - \frac{R_1}{L_2} I_3 + \frac{E}{L_2}, \\ \frac{dI_3}{dt} = -\frac{R_1}{L_3} I_2 - \frac{R_1 + R_3}{L_3} I_3 + \frac{E}{L_3}, \end{cases} \quad (3.50)$$

或写成

$$\begin{pmatrix} \frac{dI_2}{dt} \\ \frac{dI_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \\ -\frac{R_1}{L_3} & -\frac{R_1 + R_3}{L_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{L_2} \\ \frac{E}{L_3} \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\frac{R_1}{L_2} - \lambda & -\frac{R_1}{L_2} \\ -\frac{R_1}{L_3} & -\frac{R_1 + R_3}{L_3} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{或即 } L_2 L_3 \lambda^2 + (R_1 L_3 + R_1 L_2 + R_3 L_2) \lambda + R_1 R_3 = 0. \quad (3.52)$$

它的判别式

$$\Delta = (R_1 L_2)^2 + 2 R_1 L_2 (R_3 L_2 + R_1 L_3) + (R_3 L_2 - R_1 L_3)^2 > 0.$$

于是可知方程(3.52)具有两个不相等的负实根。将这两个负的特征根分别记为  $-a_1$  和  $-a_2$ , 这样, 特征方程可写成

$$L_2 L_3 (\lambda + a_1)(\lambda + a_2) = 0. \quad (3.53)$$

可得分别对应于  $-a_1$  和  $-a_2$  的特征向量

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ a_1 L_2 - R_1 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} R_1 \\ a_2 L_2 - R_1 \end{pmatrix}.$$

这就得到方程组(3.51)所对应的齐次方程组

$$\begin{pmatrix} \frac{dI_2}{dt} \\ \frac{dI_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1}{L_2} \\ -\frac{R_1}{L_3} & -\frac{R_1 + R_3}{L_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

的通解

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}_c = c_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ a_1 L_2 - R_1 \end{pmatrix} e^{-a_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} R_1 \\ a_2 L_2 - R_1 \end{pmatrix} e^{-a_2 t}. \quad (3.54)$$

易见, 方程组(3.51)具有形如

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

的特解. 将上式代入方程组(3.51)即可得方程组(3.51)的一个特解

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}_p = \frac{E}{R_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

于是方程组(3.51)的通解为

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ a_1 L_2 - R_1 \end{pmatrix} e^{-a_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} R_1 \\ a_2 L_2 - R_1 \end{pmatrix} e^{-a_2 t} + \frac{E}{R_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

由初值条件  $I_1(0) = I_2(0) = 0$ , 可得

$$c_1 = -\frac{E(a_2 L_2 - R_1)}{R_1^2 L_2(a_2 - a_1)}, c_2 = \frac{E(a_1 L_2 - R_1)}{R_1^2 L_2(a_2 - a_1)}.$$

将上述  $c_1, c_2$  代入(3.55), 就得所要求的解  $I_2(t), I_3(t)$ . 然后又由  $I_1 = I_2 + I_3$ , 得

$$I_1(t) = -\frac{E a_1(a_2 L_2 - R_1)}{R_1^2(a_2 - a_1)} e^{-a_1 t} + \frac{E a_2(a_1 L_2 - R_1)}{R_1^2(a_2 - a_1)} e^{-a_2 t} + \frac{E}{R_1}.$$

**例 3** 有两种生物群体为了争夺同样的食物来源而竞争, 在时刻  $t$ , 第一种、第二种生物群体所含的个体数分别为  $x(t)$ 、 $y(t)$ . 它们满足下列方程组<sup>1)</sup>

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy(t)}{dt} = -2x + 3y. \end{cases} \quad (3.56)$$

当  $t=0$  时  $x=2000$ ,  $y=1600$ , 试求群体中的个体数  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

**解** 方程组(3.56)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

它具有两个实根  $\lambda_1=5$ ,  $\lambda_2=1$ , 易得方程组(3.56)的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

由初值条件  $x|_{t=0}=2000$ ,  $y|_{t=0}=1600$  可得  $c_1=200$ ,  $c_2=1800$ . 于是所求的解是

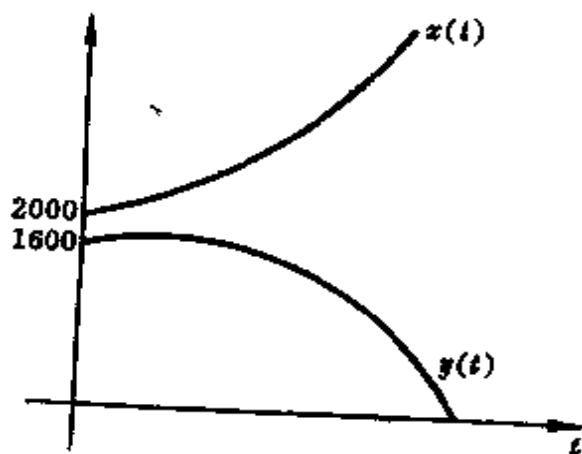


图 3-4

1) 在一般情况下, 模型是非线性的(见第五章第 5 节). 但在  $x, y$  的一定范围内, 它们满足线性方程组.



$$\begin{cases} x(t) = 200 e^{5t} + 1800 e^t, \\ y(t) = -200 e^{5t} + 1800 e^t. \end{cases}$$

它们的图形如图 3-4 所示. 其中  $x(t)$  是  $t$  的单调增加函数. 函数  $y(t)$  在  $t = \frac{1}{4} \ln \frac{9}{5} \approx 0.147$  时取到最大值. 当  $t > \frac{1}{4} \ln \frac{9}{5}$  时函数  $y(t)$  单调减少, 当  $t = \frac{1}{4} \ln 9 \approx 0.549$  时  $y = 0$ . 这就是说当  $t = \frac{1}{4} \ln 9$  时, 第二种生物群体就消亡了, 生物群体一经消亡就再也不会复生. 因而当  $t \geq \frac{1}{4} \ln 9$  时, 只留下第一种生物群体, 故知这两种生物群体的竞争直至第二种群体消亡而告终.

## 第四章 定性理论初步

从十七世纪到十九世纪后半期这一段相当长的时期内,人们设法用各种方法求微分方程的以初等函数及其积分所表达出来的通解.但是随着历史的进展,人们在求解的过程中遇到的困难越来越大.1841年刘维尔(Liouville)指出,即使象形状甚为简单的黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (p(x) \neq 0),$$

除了某些特殊类型外,一般是不能用初等方法求解的.但是,另一方面,科学技术的发展,又提出了大量的常微分方程问题,这就要求人们寻找新的途径来解决这些问题.在这种情况下,法国数学家庞加莱(H. Poincaré)创建了常微分方程定性理论.与此同时,俄国数学家李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)创建了稳定性理论.这些理论的特点是,在不求出解的情况下,根据微分方程本身的特点,研究解的性质.在近三、五十年来,由于科学技术的促进,常微分方程定性理论与稳定性理论已有了很大的发展.本章及下章分别介绍定性理论初步与稳定性理论基础,内容包括奇点及其附近的性态,是否存在周期解,解的稳定性概念,以及如何判别稳定性等等.在这两章的最后,分别举例说明这些理论在力学,非线性  $RLC$  回路,自动调节系统以及生态学等方面的应用.

### § 1 自治系统·相空间

如果微分方程组(1.2)的右端不明显含自变量  $t$ ,即

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

则称此方程组为自治系统. 右端明显含  $t$  的系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (t, x) \in (a, b) \times G \subset \mathbf{R}^{n+1}, \quad (1.9)$$

称为非自治系统. 这里  $G$  是  $n$  维空间  $\mathbf{R}^n$  中的一个区域, 也可以是整个空间  $\mathbf{R}^n$ ,  $(a, b)$  是  $t$  的变化区间. 以后, 如果不作另外声明, 总认为  $G = \mathbf{R}^n$ .

现在对系统 (4.1) 和 (1.9) 作一个力学解释. 若把  $t$  看作时间,  $x$  看作  $\mathbf{R}^n$  中点的坐标, 那么,  $\frac{dx}{dt}$  是点  $x$  的运动速度, 系统 (4.1) 或 (1.9) 在  $\mathbf{R}^n$  中确定了一个速度场  $f(x)$  或  $f(t, x)$ . (4.1) 或 (1.9) 的解  $x = x(t)$  可看作  $\mathbf{R}^n$  中的一个运动.

**定义 4.1**  $\mathbf{R}^n$  中的点集

$$\{x \mid x = x(t) \text{ 满足 (4.1) (或 (1.9)), } t \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)\}.$$

称为 (4.1) (或 (1.9)) 的相轨线, 简称轨线. 其中  $(\alpha, \beta)$  是  $x(t)$  的定义区间. 空间  $\mathbf{R}^n$  称为相空间. 所有轨线在相空间中的分布图称为相图.

轨线通常按  $t$  的增加方向来定义其正向<sup>1)</sup>.

自治系统 (4.1) 在相空间定义的速度场  $f(x)$  不随时间  $t$  而变, 称为稳定场; 非自治系统 (1.9) 在相空间定义的速度场  $f(t, x)$  随时间  $t$  而变, 称为不稳定场.

系统 (4.1) 或 (1.9) 的解  $x = x(t)$  在空间  $(t, x)$  所对应的曲线, 称为该系统的积分曲线. 显然,  $x = x(t)$  对应的积分曲线在相空间的投影, 就是  $x = x(t)$  对应的轨线.

**例 1** 系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

1) 以下即将看到, 奇点也是一条轨线, 但它只是一个点, 不能定义正向.

满足初值条件  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$  的解是

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t = r_0 \cos(t + \varphi_0),$$

$$y = x_0 \sin t + y_0 \cos t = r_0 \sin(t + \varphi_0).$$

其中  $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2, \sin \varphi_0 = y_0/r_0, \cos \varphi_0 = x_0/r_0$ . 对应的积分曲线为空间  $(t, x, y)$  中柱面  $x^2 + y^2 = r_0^2$  上的螺线(图 4-1); 轨线为相平面  $(x, y)$  中以原点  $O$  为中心、 $r_0$  为半径的圆周  $x^2 + y^2 = r_0^2$ (图 4-2). 对于  $r_0 \in (0, +\infty)$  对应的轨线是一族同心圆. 若  $x_0 = y_0 = 0$ , 则  $r_0 = 0$ . 对应的轨线是相平面上一个点  $(0, 0)$ . 而与此相对应的积分曲线是空间  $(t, x, y)$  的  $t$  轴.

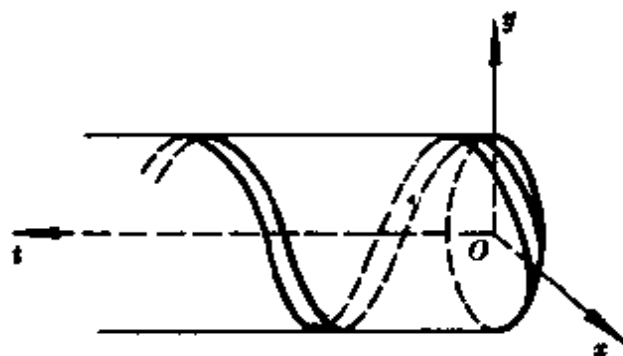


图 4-1

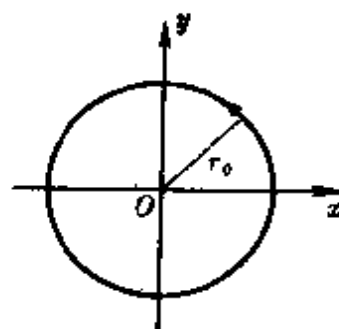


图 4-2

本章除特别声明外,都是讨论自治系统(4.1),其中  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}^n$  中的  $n$  维向量函数. 并假定(4.1)的初值问题的解存在且唯一.

以下,我们来研究(4.1)的轨线的一些性质.

**性质 1** 设  $x = x(t), \alpha < t < \beta$ , 是(4.1)的一个解,  $t_0$  是常数, 则  $x = x(t - t_0), \alpha + t_0 < t < \beta + t_0$ , 也是(4.1)的解, 且这两个解所对应的轨线互相重合.

**证明** 作时间  $t$  的变换, 令  $t = \tau + t_0$ , 引入新的自变量  $\tau$ . 于是方程(4.1)成为

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x). \quad (4.2)$$

它与(4.1)的形式一致. 因为  $x = x(t)$ ,  $\alpha < t < \beta$ , 是(4.1)的解, 故  $x = x(\tau)$ ,  $\alpha < \tau < \beta$ , 是(4.2)的解, 因而  $x = x(t - t_0)$ ,  $\alpha + t_0 < t < \beta + t_0$ , 也是(4.1)的解.  $x = x(t)$  和  $x = x(t - t_0)$  所不同的是,  $x(t)$  在  $t = 0$  时经过  $x(0) \triangleq x_0$ , 而  $x(t - t_0)$  在  $t = t_0$  时经过  $x_0$ . 如果  $t_0 > 0$ , 则  $x(t - t_0)$  始终比  $x(t)$  落后一个时间  $t_0$  才能到达  $x(t)$  曾经到达过的点  $x$ . 因此, 两者在相空间中的轨线重合. 对于积分曲线来说, 显然, 将  $x = x(t)$ ,  $\alpha < t < \beta$ , 所对应的积分曲线沿  $t$  轴平移  $t_0$  就得到  $x = x(t - t_0)$ ,  $\alpha + t_0 < t < \beta + t_0$ , 所对应的积分曲线.

可以类似地讨论  $t_0 < 0$  的情形.

**性质 2** 对于相空间的每一点  $x_0$ , (4.1) 有且仅有一条轨线经过(这个性质称为轨线的唯一性).

**证明** 为了清楚地表明解依赖于初值, 我们将(4.1)的当  $t = t_0$  时  $x = x_0$  的解记为

$$x = x(t, t_0, x_0), \quad (4.3)$$

则对任意  $t_1$ , (4.1) 的当  $t = t_1$  时  $x = x_0$  的解为

$$x = x(t, t_1, x_0), \quad (4.4)$$

要证轨线的唯一性, 即证(4.3)和(4.4)所对应的轨线互相重合.

将(4.3)作时间平移, 得

$$x = x(t - t_1 + t_0, t_0, x_0). \quad (4.5)$$

由性质 1 知, 它也是(4.1)的解, 它所对应的轨线与(4.3)所对应的轨线重合. 因此, 要证(4.3)与(4.4)对应的轨线重合, 只需证(4.5)与(4.4)对应的轨线重合. 注意, 以  $t = t_1$  代入(4.5)右边得  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ . 因此, (4.5)满足条件  $x|_{t=t_1} = x_0$ . 而(4.4)亦满足条件  $x|_{t=t_1} = x(t_1, t_1, x_0) = x_0$ . 由解的唯一性知, (4.5)与(4.4)恒等:

$$x(t - t_1 + t_0, t_0, x_0) \equiv x(t, t_1, x_0).$$

由此证得(4.3)与(4.4)对应的轨线重合.

**注 1** 由性质 2 可知, 经过  $x_0$  的轨线只有一条, 但它所对应

的解有无限多, 其中任意一个解可以由其它任意一确定的解经过时间  $t$  的平移而得到. 即, 如果  $x=x(t)$  是经过  $x_0$  的轨线所对应的一个解, 则经过  $x_0$  的轨线对应的任意一个解必可写成  $x(t-t_0)$ , 其中  $t_0$  是某常数. 从这个意义上讲, 我们可以说, 经过  $x=x_0$  的解也是“唯一”的.

**注 2** 由性质 2 可知, 轨线与轨线不会相交, 同一轨线也不会自身相交.

**注 3** 对非自治系统(1.9)来说, 性质 2 (性质 1 以及下面的性质 3) 是不成立的. 事实上, 设  $t=t_0$  时经过相空间中的点  $x=x_0$ , 那么轨线在该点  $x_0$  的方向为  $f(t_0, x_0)$ . 如果经过相空间中的点  $x=x_0$  的时间不是  $t_0$  而是  $t_1$ , 则轨线在该点  $x_0$  的方向是  $f(t_1, x_0)$ . 经过同一点  $x_0$  的方向既然不一样, 对应的轨线当然也就不会互相重合了.

**性质 3** 设于  $t=0$  时自  $x=x_0$  出发的轨线于  $t=t_1$  时到达  $x_1$ , 又设于  $t=0$  时自  $x=x_1$  出发的轨线于  $t=t_2$  时到达  $x_2$ . 则于  $t=0$  时自  $x=x_0$  出发的轨线于  $t=t_1+t_2$  时到达  $x_2$ , 即

$$x(t_1+t_2, 0, x_0) = x(t_2, 0, x(t_1, 0, x_0)). \quad (4.6)$$

这一性质称为时间的可加性.

**证明**  $t=0$  时  $x=x_0$  的解为

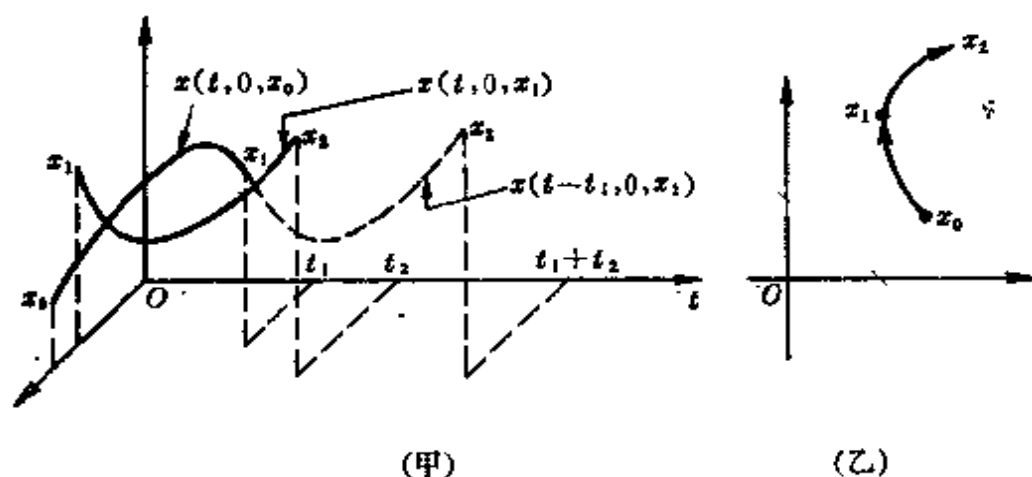


图 4-3

$$x = x(t, 0, x_0). \quad (4.7)$$

由假设, 此解当  $t = t_1$  时  $x = x_1$ , 故

$$x_1 = x(t_1, 0, x_0). \quad (4.8)$$

满足条件  $t = 0$  时  $x = x_1$  的解为  $x = x(t, 0, x_1)$ . 将它作时间平移, 沿  $t$  轴平移  $t_1$ , 得到

$$x = x(t - t_1, 0, x_1). \quad (4.9)$$

由性质 1 知, 它也是 (4.1) 的解. 此解当  $t = t_1$  时  $x = x_1$ . 由解的唯一性知, (4.9) 应与 (4.7) 恒等, 即

$$x(t, 0, x_0) \equiv x(t - t_1, 0, x_1).$$

令  $t = t_1 + t_2$  代入上式, 得

$$x(t_1 + t_2, 0, x_0) = x(t_2, 0, x_1).$$

再由 (4.8), 得 (4.6). 几何解释如图 4-3.

## § 2 平面自治系统的奇点

本节研究平面自治系统, 用分量来写, 即研究系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y). \end{cases} \quad (4.10)$$

其中  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  是  $x, y$  的已知函数.

**定义 4.2** 相平面  $(x, y)$  中使

$$X(x, y) = 0, \quad Y(x, y) = 0$$

同时成立的点  $(x_0, y_0)$ , 称为系统 (4.10) 的奇点.<sup>1)</sup>

从力学观点来看, 奇点对应于速度为零的点, 故奇点又称静止点, 也称平衡点.

如果点  $(x_0, y_0)$  是 (4.10) 的奇点, 则显然  $x = x_0, y = y_0$  是

1) 对  $n$  维自治系统 (4.1) 也可类似地定义奇点.

(4.10)的解,这种解称为**常数解**.反之,设(4.10)有常数解  $x=x_0, y=y_0$ ,则点 $(x_0, y_0)$ 显然是该系统的奇点.奇点也是一条轨线,它是常数解  $x=x_0, y=y_0$  所对应的轨线.

本节研究(4.10)在相平面上奇点附近的轨线的性态.设 $(x_0, y_0)$ 是(4.10)的奇点.令  $\bar{x}=x-x_0, \bar{y}=y-y_0$  引入新变量  $\bar{x}, \bar{y}$ , 于是(4.10)成为

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= X(\bar{x}+x_0, \bar{y}+y_0) \triangleq \bar{X}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= Y(\bar{x}+x_0, \bar{y}+y_0) \triangleq \bar{Y}(\bar{x}, \bar{y}).\end{aligned}\quad (4.11)$$

显然有  $\bar{X}(0,0)=0, \bar{Y}(0,0)=0$ . 以下我们不妨认为对(4.10)已作过上述处理, 即在(4.10)中设

$$X(0,0)=0, Y(0,0)=0, \quad (4.12)$$

并研究(4.10)在奇点 $(0,0)$ 附近的性态. 我们进一步假设函数  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  在原点  $O$  附近可以用泰勒公式展开至二次幂项, 即

$$\begin{aligned}X(x, y) &= ax + by + X_2(x, y), \\ Y(x, y) &= cx + dy + Y_2(x, y).\end{aligned}\quad (4.13)$$

其中  $X_2(x, y)$  和  $Y_2(x, y)$  分别是  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  的展开式中  $x, y$  不低于二次幂项的全体. 于是(4.10)可写成

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + X_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Y_2(x, y).\end{aligned}\quad (4.14)$$

先研究由右端的线性部分所构成的系统

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (4.15)$$

称它为(4.14)的一次近似系统. 首先注意, 点  $O(0,0)$  也是(4.15)的奇点. 以下我们讨论(4.15)的轨线.



(4.15)是线性系统，它的解是可以用初等的办法求得的。为此，写出(4.15)的特征方程

$$D(\lambda) \triangleq \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (4.16)$$

其中  $p = -(a+d), \quad q = ad-bc. \quad (4.17)$

特征根  $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}. \quad (4.18)$

我们仅讨论联立方程  $ax+by=0, cx+dy=0$  仅有唯一零解  $x=0, y=0$  的情形。这相当于原点是(4.15)的唯一奇点，也即(4.16)中  $q \neq 0$ 。下面分几种情形来讨论。

1° 特征根是不相等的实数。此时(4.15)的通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (4.19)$$

其中  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  分别是  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  所对应的特征向量。再分下列三种情形讨论。

i) 设两特征根都是负数， $\lambda_{1,2} < 0$ 。在这种情况下，当  $t \rightarrow +\infty$  时所有轨线(4.19)都趋于原点。以下讨论轨线是否以确定的方向趋于原点。对于  $c_1=c_2=0$  对应的轨线是奇点(0,0)。对于  $c_2=0, c_1 \neq 0$  对应的轨线是

$$x = c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t}. \quad (4.20)$$

消去  $t$ ，得到

$$\beta_1 x - \alpha_1 y = 0. \quad (4.21)$$

故知轨线位于直线(4.21)上。但是无论  $t$  等于什么值，(4.20)的  $(x, y) \neq (0, 0)$ 。当  $t$  连续变动时， $(x, y)$  连续变动。故知对于  $c_2=0, c_1 \neq 0$  对应的轨线(4.19)是位于直线(4.21)上的以原点为端点但不包含原点的射线。当  $t \rightarrow +\infty$  时，轨线趋于原点。同理可知，对于  $c_2 \neq 0, c_1=0$  对应的轨线(4.19)也是一条以原点为端

点但不包含原点的射线，它位于直线

$$\beta_2 x - \alpha_2 y = 0 \quad (4.22)$$

上。当  $t \rightarrow +\infty$  时轨线趋于原点。最后考察当  $c_1 c_2 \neq 0$  所对应的  
那些轨线。为确定起见，不妨设  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ，由(4.19)，

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)-0}{x(t)-0} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1 \beta_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \beta_2}{c_1 \alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \alpha_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \end{aligned}$$

( $\alpha_2 = 0$  时， $\beta_2/\alpha_2$  理解为  $\infty$ )。这表明， $c_1 c_2 \neq 0$  时所对应的一切  
轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时都趋于原点，且与直线(4.22)在原点相切。相  
图如图 4-4。我们把这种奇点称为**稳定结点**。

ii) 设两特征根都是正数， $\lambda_{1,2} > 0$ 。只要用  $-t$  代替  $t$ ，就可  
把这种情形化成 i)，只是表示轨线正向的箭头正好相反， $t \rightarrow -\infty$   
时轨线上的点趋于原点。我们把这种情形的奇点称为**不稳定结  
点**。如图 4-5，图中画的是  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  的情形。

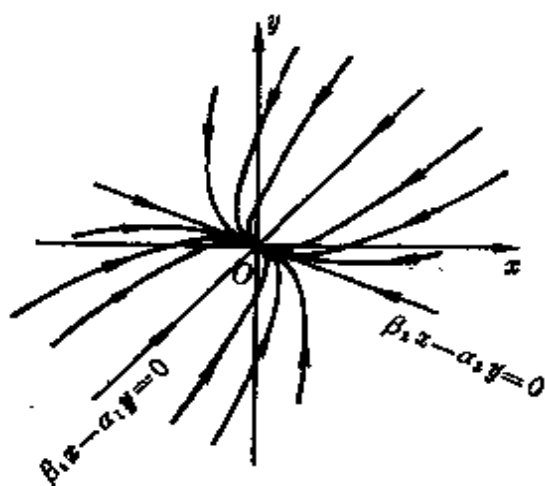


图 4-4

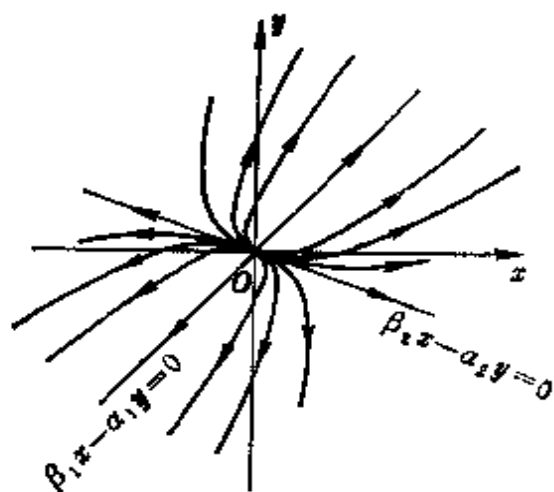


图 4-5

稳定(不稳定)结点的特征是，奇点是孤立的，存在奇点的一个  
邻域，邻域内所有的轨线(除奇点本身外)都在  $t \rightarrow +\infty$  (都在  
 $t \rightarrow -\infty$ ) 时沿着确定的方向趋于奇点。其中有两条轨线趋于奇点  
是分别沿着某一直线所确定的两个相反的射线方向，其余轨线趋

于奇点是分别沿着另一直线所确定的两个相反射线方向”。

这里稳定(不稳定)一词的确切含义,将在第五章中介绍。

iii) 设两特征根一正一负。为确定起见,不妨设  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 。与 i) 同样的讨论可以知道,对于  $c_2 = 0, c_1 \neq 0$  对应的轨线(4.19)是位于直线(4.21)上的以原点为端点但不包含原点的射线。当  $t \rightarrow -\infty$  时轨线趋于原点。 $c_2 \neq 0, c_1 = 0$  对应的轨线(4.19)是位于直线(4.22)上的以原点为端点但不包含原点的射线。当  $t \rightarrow -\infty$  时轨线趋于原点。再考察其他  $c_1 c_2 \neq 0$  对应的轨线(4.19)。容易证明,当  $t \rightarrow +\infty$  时轨线(4.19)以直线(4.22)为渐近线;当  $t \rightarrow -\infty$  时,轨线(4.19)以直线(4.21)为渐近线。事实上,如果  $\alpha_2 \neq 0$ ,则由(4.19)有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta_2}{\alpha_2},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ y(t) - \frac{\beta_2}{\alpha_2} x(t) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1}{\alpha_2} (\alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \alpha_1) e^{\lambda_1 t} = 0.$$

于是推知(4.22)是(4.19)当  $t \rightarrow +\infty$  时的渐近线。如果  $\alpha_2 = 0$ ,那么由  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)/x(t) = \infty$ 。立刻可以推知当  $t \rightarrow +\infty$  时轨线(4.19)以直线(4.21)为渐近线。同理可证当  $t \rightarrow -\infty$  时的情形。我们把这种情形的奇点称为鞍点(图 4-6)。

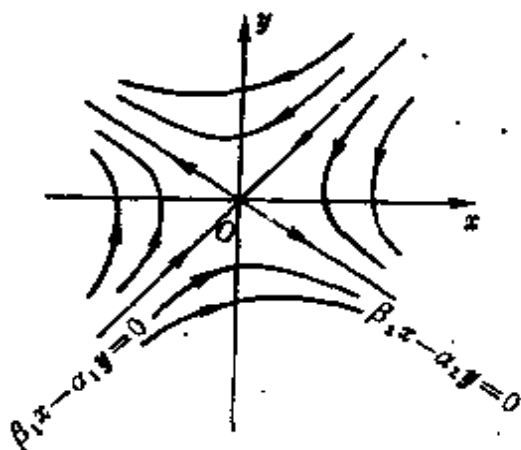


图 4-6

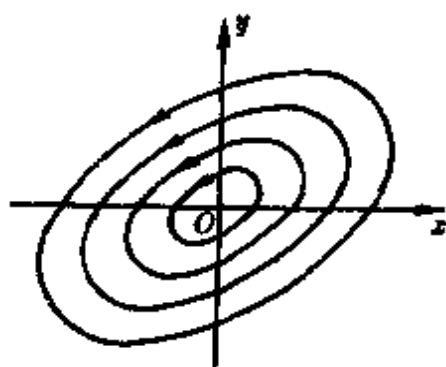


图 4-7

鞍点的特征是, 奇点是孤立的, 存在一个邻域, 使得其中恰有两条轨线在  $t \rightarrow +\infty$  时趋于奇点, 并且在奇点与某一条直线相切; 也恰有两条轨线在  $t \rightarrow -\infty$  时趋于奇点, 并且与另一条直线在奇点相切, 而其余轨线(除奇点本身外)当  $t$  增加或减少时, 都将离开此邻域。

2° 特征根是一对共轭复根。记特征根  $\lambda_1 = \mu + \nu i$ , 则另一特征根  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \mu - \nu i$ . 其中  $\mu = -\frac{p}{2}, \nu = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} > 0$ . 设  $\lambda_1$  所对应的特征向量是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i \\ b_1 + b_2 i \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i \\ b_1 + b_2 i \end{pmatrix} e^{(\mu + \nu i)t}.$$

是(4.15)的一个复值解, 于是得到(4.15)的通解

$$\begin{aligned} x &= c_1(a_1 \cos \nu t - a_2 \sin \nu t)e^{\mu t} + \\ &\quad + c_2(a_2 \cos \nu t + a_1 \sin \nu t)e^{\mu t}, \\ y &= c_1(b_1 \cos \nu t - b_2 \sin \nu t)e^{\mu t} + \\ &\quad + c_2(b_2 \cos \nu t + b_1 \sin \nu t)e^{\mu t}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

因为

$$p^2 - 4q = (a - d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc < 0,$$

所以  $bc \neq 0$ . 又因  $\alpha_1, \beta_1$  满足方程  $(a - \lambda_1)\alpha_1 + b\beta_1 = 0$ , 如果  $\beta_1 = 0$ , 则由  $a - \lambda_1 \neq 0$  推知  $\alpha_1 = 0$ . 于是  $(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0)$ . 这与  $(\alpha_1, \beta_1)^T$  是特征向量不符, 由此推知  $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{b}{\lambda_1 - a}$  不是实数. 但

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2},$$

故

$$\delta \triangleq a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0. \quad (4.24)$$

为了在相平面上研究轨线(4.23)的性态,作线性变换

$$\xi = -b_2 x + a_2 y, \quad \eta = -b_1 x + a_1 y. \quad (4.25)$$

由(4.24),故线性变换(4.25)是非奇异的. 经简单的计算,可得

$$\xi = \delta k e^{\mu t} \cos(\nu t - \varphi_0), \quad \eta = \delta k e^{\mu t} \sin(\nu t - \varphi_0). \quad (4.26)$$

其中  $k$  和  $\varphi_0$  是两个新的任意常数. 下面分三种情形来讨论.

i) 设特征根是一对纯虚根,即设  $\mu = 0$ . 这时(4.26)成为  $\xi = \delta k \cos(\nu t - \varphi_0)$ ,  $\eta = \delta k \sin(\nu t - \varphi_0)$ . 消去  $t$ , 得  $\xi^2 + \eta^2 = \delta^2 k^2$ . 于是  $(x, y)$  平面上的轨线是一族环绕原点的椭圆:

$$(-b_2 x + a_2 y)^2 + (-b_1 x + a_1 y)^2 = \delta^2 k^2.$$

其中  $k$  是任意常数. 这种奇点称为**中心**(图 4-7).

中心的特征是,奇点是孤立的,它存在一个邻域,经过该邻域内每一点的轨线,除该奇点外,都是环绕该奇点的封闭曲线.

当  $t$  增加时,这些封闭轨线旋转的方向是按逆时针还是顺时针,可以很简单地由原方程的系数确定. 例如在正  $x$  轴上任取一点,计算该点处的  $\frac{dy}{dt}$ . 如果  $c > 0$ , 则有  $\frac{dy}{dt} = cx > 0$ . 从而推知当  $t$  增加时  $y$  增加,即轨线旋转的方向按逆时针方向.

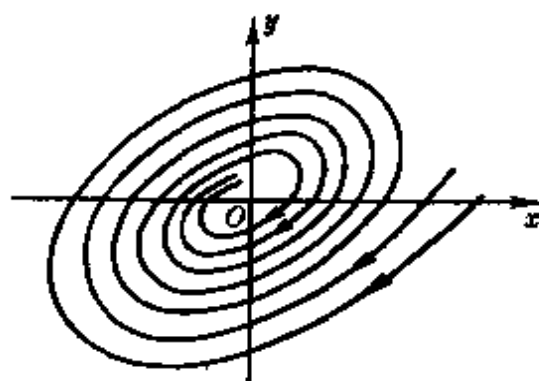


图 4-8

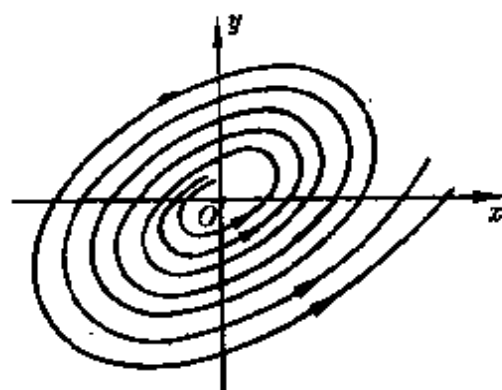


图 4-9

ii) 设特征根的实部是负数,即设  $\mu < 0$ . 考察在  $(\xi, \eta)$  平面上由(4.26)确定的曲线. 一方面, 由于因子  $e^{\mu t}$ , 当  $t \rightarrow +\infty$  时曲线(4.26)趋于原点; 另一方面, 由于因子  $\delta k \cos(\nu t - \varphi_0)$  和

$\delta k \sin(\nu t - \varphi_0)$ , 当  $t \rightarrow +\infty$  时曲线(4.26)环绕原点作无限旋转. 因此在  $(\xi, \eta)$  平面上曲线(4.26)是一族当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于原点的螺线. 由于(4.25)是非奇异线性变换, 因此在相平面  $(x, y)$  上, 轨线也是一族当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于原点的螺线. 我们把这种奇点称为**稳定焦点**(图4-8).

iii) 设特征根的实部是正数, 即设  $\mu > 0$ . 用  $-t$  代替  $t$ , 就可把这种情形化成上述 ii), 只是表示轨线正向的箭头正好相反. 当  $t \rightarrow -\infty$  时轨线上的点趋于原点. 我们把这种奇点称为**不稳定焦点**(图4-9).

稳定(不稳定)焦点的特征是, 奇点是孤立的, 它存在一个邻域, 邻域内所有轨线, 除该奇点本身外, 都在  $t \rightarrow +\infty$  (都在  $t \rightarrow -\infty$ ) 时环绕原点作无限旋转而趋于该奇点.

当  $t$  增加时螺线的旋转方向, 可按 i) 段所讲的方法来确定.

3° 特征根是一对相等实根,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , 即设  $p^2 - 4q = 0$ . 又可分两种情形.

i)  $b = c = 0$ . 这时, 由于  $0 = p^2 - 4q = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2$ , 故  $a = d$ , 于是系统(4.15)成为

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = ay.$$

$a$  就是特征根. 上述方程的通解是

$$x = c_1 e^{at}, \quad y = c_2 e^{at}.$$

其中  $c_1, c_2$  是任意常数. 由此推知当  $c_1, c_2$  不同时为零时, 轨线是一族以原点为端点(但不包含原点)的射线.

如果  $a < 0$ , 则当  $t \rightarrow +\infty$  时  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ . 我们把这种奇点称为**稳定临界结点**(图4-10). 如果  $a > 0$ , 则当  $t \rightarrow -\infty$  时  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ . 这种奇点称为**不稳定临界结点**(图4-11).

稳定(不稳定)临界结点的特征是, 奇点是孤立的, 它存在一个邻域, 邻域内的所有轨线, 除该奇点本身外, 都在  $t \rightarrow +\infty$  (都在

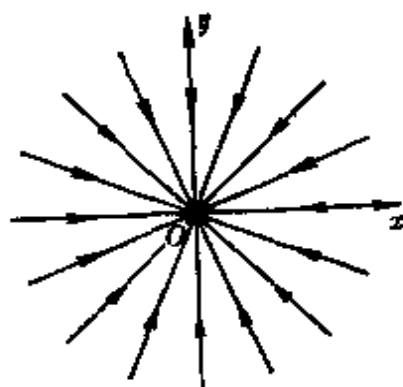


图 4-10

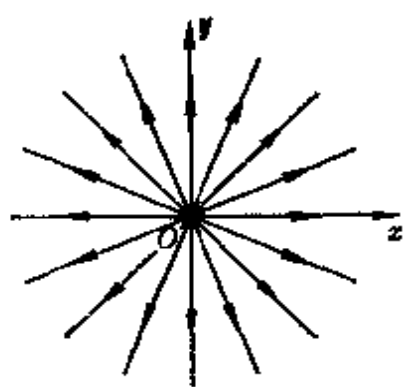


图 4-11

$t \rightarrow -\infty$ ) 时趋于奇点, 每一轨线趋于奇点时, 分别沿着一定的方向; 且每一方向仅有一条轨线沿着它趋于奇点.

ii)  $b^2 + c^2 \neq 0$ . 特征根  $\lambda_1$  所对应的特征向量  $(\alpha_1, \beta_1)^T$  的  $\alpha_1, \beta_1$  应满足下述二元齐次线性代数方程

$$\begin{aligned} (a - \lambda_1)\alpha_1 + b\beta_1 &= 0, \\ c\alpha_1 + (d - \lambda_1)\beta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

从中可求得特征向量  $(\alpha_1, \beta_1)^T$ . 由于(4.27)的四个系数中至少有一个系数不是零(因  $b^2 + c^2 \neq 0$ ), 因此, 从(4.27)不能求得两个线性无关的特征向量. 于是相应地得到(4.15)的一个解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t}.$$

由第三章的方法可求得(4.15)的与此解线性无关的一个解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \left[ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_1 t},$$

其中  $(\alpha_2, \beta_2)^T$  可由该章的方法求得. 于是(4.15)的通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_1 t}. \quad (4.28)$$

如果  $\lambda_1 < 0$ , 则由(4.28)确定的任意一条轨线当  $t \rightarrow +\infty$  时都趋于原点. 现在来考察轨线是否以确定的方向趋于原点. 由于对一切  $c_1, c_2$  (只要  $c_1, c_2$  不同时为零),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)-0}{x(t)-0} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c_1 \beta_1 + c_2 (\beta_1 t + \beta_2)}{c_1 \alpha_1 + c_2 (\alpha_1 t + \alpha_2)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

(如果  $\alpha_1=0$ , 上式右端理解为  $\infty$ )。于是推知, 除原点外的所有轨线(4.28)与直线

$$\beta_1 x - \alpha_1 y = 0 \quad (4.21)$$

相切于原点。这种奇点称为**稳定退化结点**(图 4-12)。

如果  $\lambda_1 > 0$ , 则只需将上面所讨论的  $t$  换成  $-t$  即得相图, 如图 4-13。这种奇点称为**不稳定退化结点**。

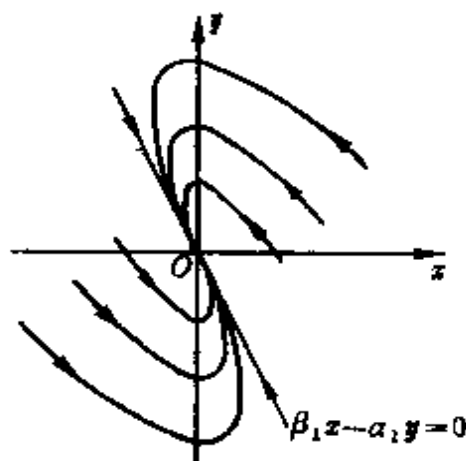


图 4-12

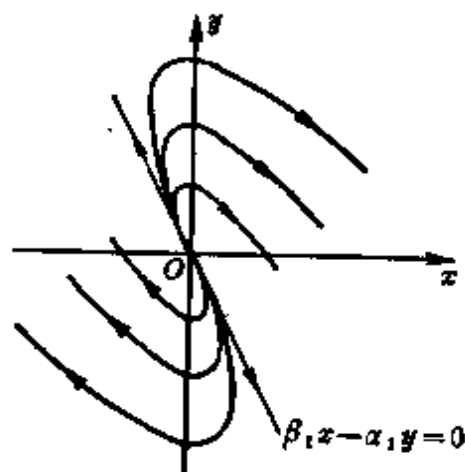


图 4-13

稳定(不稳定)退化结点的特征是, 奇点是孤立的, 它存在一个邻域, 邻域内所有轨线, 除该奇点外, 都在  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) 时趋于奇点, 且在奇点与同一条直线相切。

总结以上, 当  $q \neq 0$  时, 可以由特征方程的根或特征方程的系数  $p$  和  $q$  确定奇点的类型。有下述定理。

**定理 4.1** 设线性系统(4.15)的奇点  $O(0,0)$  对应的特征方程、特征根和  $p, q$  分别为(4.16)、(4.18)和(4.17), 且  $q \neq 0$ 。则由  $p, q, p^2 - 4q$  或特征根  $\lambda_1, \lambda_2$  的符号判别奇点  $O$  的类型如下页的表。

在参数  $(p, q)$  平面上, 对于不同的参数值对应的奇点类型, 可形象化示意如图 4-14。



$p$	$q$	$p^2 - 4q$	$\lambda_1, \lambda_2$	奇点类型
	$< 0$		$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ,	鞍点
$> 0$	$> 0$	$> 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ,	稳定结点
$> 0$	$> 0$	$= 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	稳定临界结点或稳定退化结点
$> 0$	$> 0$	$< 0$	$\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu i, \mu < 0, \nu \neq 0$ ,	稳定焦点
$= 0$	$> 0$	$< 0$	$\lambda_{1,2} = \pm \nu i, \nu \neq 0$	中心
$< 0$	$> 0$	$< 0$	$\lambda_{1,2} = \mu \pm \nu i, \mu > 0, \nu \neq 0$ ,	不稳定焦点
$< 0$	$> 0$	$= 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ,	不稳定临界结点或不稳定退化结点
$< 0$	$> 0$	$> 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ,	不稳定结点

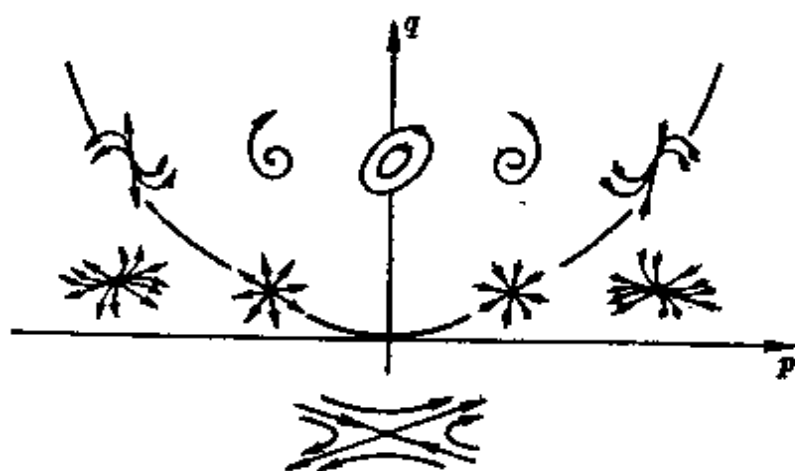


图 4-14

例 1 指出系统

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 4y$$

的奇点的类型,并画出奇点邻域内的相图。

解 奇点是  $O(0,0)$ , 对应的特征方程是

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

$$p = -7 < 0, \quad q = 10 > 0, \quad p^2 - 4q = 9 > 0.$$

所以奇点是不稳定结点,为了画出相图,求出特征根  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$ .

它们对应的特征向量分别是

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

它们对应的两条直线分别是

$$x - y = 0 \quad \text{和} \quad x + 2y = 0.$$

于是画得相图如图 4-15.

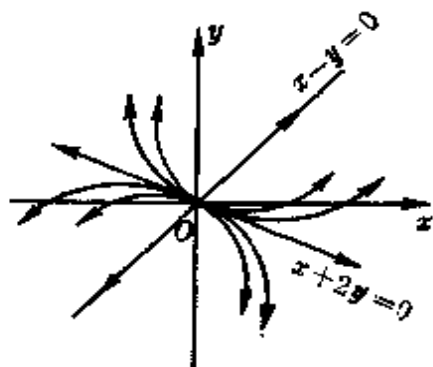


图 4-15

**例 2** 指出系统

$$\frac{dx}{dt} = x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -5x - 3y$$

的奇点的类型,并画出奇点邻域内的相图.

**解** 奇点  $O(0,0)$  对应的特征方程是  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ .  $p = -2 > 0$ ,  $q = 2 > 0$ ,  $p^2 - 4q = -4 < 0$ . 所以奇点  $O$  是稳定焦点,轨线是一族螺线,环绕原点作无限旋转. 为了明确旋转的方向,考察正  $y$  轴上的点  $(0, y)$ . 有  $\frac{dx}{dt} = 0 + y > 0$ . 由此推知轨线是按顺时针旋转的. 相图如图 4-16.

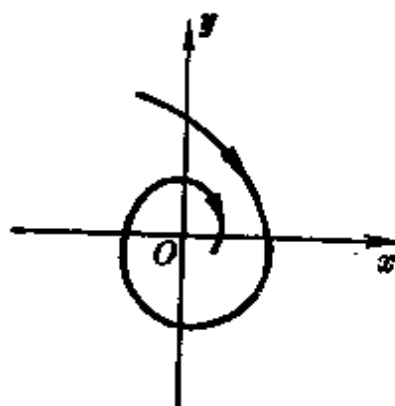


图 4-16

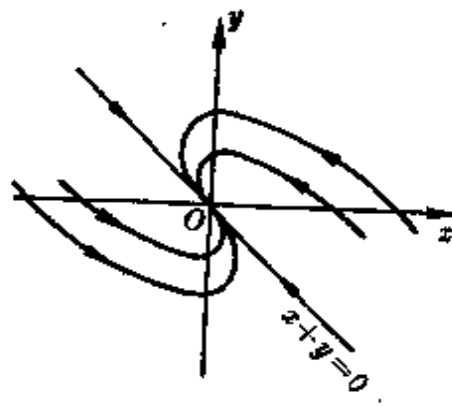


图 4-17

**例 3** 指出系统

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

的奇点类型,并画出奇点邻域内的相图.

**解** 特征方程是  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ . 特征根是二重根  $\lambda_1 = -1$ .

与(4.15)对照, 相当于其中的系数  $b = -1 \neq 0$ . 因此奇点是稳定退化结点.  $\lambda_1 = -1$  对应的一个特征向量是  $(\alpha_1, \beta_1)^T = (1, -1)^T$ . 对应的直线是  $x + y = 0$ . 考察正  $x$  轴上的点  $(0, x)$ , 有  $\frac{dy}{dt} = x > 0$ . 因此轨线指向上. 相图如图 4-17.

现在反过来讨论非线性系统(4.10)或即(4.14)的奇点  $O(0, 0)$  附近的轨线的结构. 有下述定理, 证明从略.

**定理 4.2** 设(4.14)中的  $X_2(x, y)$  和  $Y_2(x, y)$  满足条件:

- i) 在点  $O$  的某邻域内具有连续的一阶偏导数;
- ii) 存在常数  $\delta > 0$ , 使得

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{X_2(x, y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{1+\delta}} = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow 0} \frac{Y_2(x, y)}{(\sqrt{x^2+y^2})^{1+\delta}} = 0. \quad (4.29)$$

又设(4.14)的一次近似系统(4.15)的特征方程的根没有零实部. 则(4.14)与(4.15)在原点的奇点类型相同, 且具有相同的稳定性或不稳定性.

注意, (4.15)的特征方程的根没有零实部的充分必要条件是下述两条件之一成立: (a)  $q < 0$ ; (b)  $q > 0, p \neq 0$ .

**例 4** 求系统

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + x \cos y, \quad \frac{dy}{dt} = -y - \sin y$$

的奇点类型, 并画出在奇点邻域内的相图.

**解** 令

$$\begin{cases} x + 2y + x \cos y = 0 \\ -y - \sin y = 0. \end{cases}$$

易知第二式只有解  $y = 0$ . 将它代入第一式得  $x = 0$ . 故有唯一奇点  $O(0, 0)$ . 将  $\cos y$  和  $\sin y$  在  $y = 0$  展开成幂级数, 得

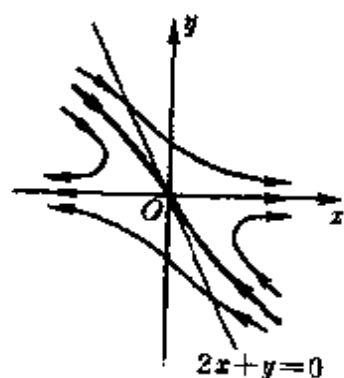


图 4-18

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + 2y + x\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \dots\right) = \\ &= 2x + 2y - \frac{1}{2}xy^2 + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -y - \left(y - \frac{1}{3!}y^3 + \dots\right) = \\ &= -2y + \frac{1}{3!}y^3 + \dots.\end{aligned}$$

上述系统的一次近似方程组是

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -2y.$$

它的特征方程、特征根和特征向量分别是

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

奇点  $O$  是鞍点。由定理 4.1 知, 原系统的奇点  $O$  也是鞍点。两特征向量对应的直线分别是  $2x - y = 0$  和  $y = 0$ 。从而可画出原系统在奇点  $O$  的邻域内的相图如图 4-18。

### § 3 极 限 环

如果轨线是一条封闭曲线, 则称这种轨线为**封闭轨线**, 简称**闭轨**。

封闭轨线是一种十分重要的轨线, 它对应于系统的周期解。事实上, 有下述定理。

**定理 4.3** 自治系统(4.1)的轨线为闭轨的充分必要条件是  
该轨线对应的解为非常数的周期解。

**证明** 先证充分性. 设  $x = x(t)$  是 (4.1) 的任意一个非常数的周期解. 则存在常数  $T > 0$ , 对任意  $t$ , 有

$$x(t+T) = x(t).$$

即在相空间中对任何时刻  $t$  对应的  $x$ , 时间经过  $T$  之后, 又回到原来的位置. 从而知  $x = x(t)$  所对应的轨线是闭轨.

再证必要性. 设  $L$  是 (4.1) 的闭轨. 在  $L$  上任取一点  $A_0$ , 坐标为  $x_0$ , 设它对应于  $t=0$ . 这样所对应的解为  $x = x(t, 0, x_0)$ . 让点沿  $L$  按  $t$  的增加方向连续运动, 至第二次到达  $A_0$  时, 设对应于  $t=T$ . 于是  $x_0 = x(T, 0, x_0)$ . 由轨线的性质 3, 对任意  $t$ , 有

$$\begin{aligned} x(t+T, 0, x_0) &= x(t, 0, x(T, 0, x_0)) = \\ &= x(t, 0, x_0). \end{aligned}$$

这就证明了  $x = x(t, 0, x_0)$  是周期解, 周期为  $T$ . 又由轨线的性质 2 后面的注 1 知,  $L$  所对应的任意一个解可写成  $x = x(t-t_0, 0, x_0)$ , 其中  $t_0$  为相应的某常数. 显然, 它也是周期为  $T$  的周期解.

### 例 1 系统

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

的解是

$$\begin{cases} x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \\ y = x_0 \sin t + y_0 \cos t. \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x = r_0 \cos(t + \varphi_0), \\ y = r_0 \sin(t + \varphi_0). \end{cases}$$

其中  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $r_0 \cos \varphi_0 = x_0$ ,  $r_0 \sin \varphi_0 = y_0$ . 对任何  $r_0 \neq 0$  和  $\varphi_0$ , 解是周期解. 对应的轨线是闭轨  $x^2 + y^2 = r_0^2$  (图 4-1).

### 例 2 现在研究系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

将它化成极坐标, 得

$$\frac{d\theta}{dt} = 1, \quad \frac{dr}{dt} = r(1-r^2).$$

解得

$$\begin{cases} \theta = t + \theta_0, \\ r = r_0 [(1-r_0^2)e^{-2t} + r_0^2]^{-\frac{1}{2}}, (r \neq 1). \end{cases} \quad (4.30)$$

其中  $r_0 = r(0)$ ,  $\theta_0 = \theta(0)$ . 当初值  $r_0 = 1$  时, 得到解  $r = r_0 = 1$ , 它是闭轨. 此闭轨对应于周期解

$$x = \cos(t + \theta_0), \quad y = \sin(t + \theta_0).$$

当  $r_0 \neq 1$  时, 不论  $r_0 > 1$  还是  $0 < r_0 < 1$ , 对应的(4.30)不是闭轨, 而是环绕  $r=1$  盘旋的螺线. 当  $t$  增加时, 它按逆时针方向旋转, 当  $t \rightarrow +\infty$  时  $r \rightarrow 1$ . 如图 4-19.

上面两个例子的闭轨有不同的性质. 像例 1 那样的闭轨, 存在一个邻域, 在此邻域内每一点, 都有一条闭轨经过. 而象例 2 那样, 对于闭轨  $r=1$ , 存在一个邻域, 在此邻域内每一点(除  $r=1$  上的点外) 却只有非闭轨通过. 这些非闭轨形如螺线, 绕闭轨  $r=1$  而盘旋. 除  $r=1$  外, 该邻域内没有其他闭轨. 例 2 这种孤立闭轨, 无论在理论上还是在应用上, 都有重大的意义. 我们有如下的定义.

**定义 4.3(极限环)** 对于系统(4.10)的闭轨  $L$ , 如果存在  $L$

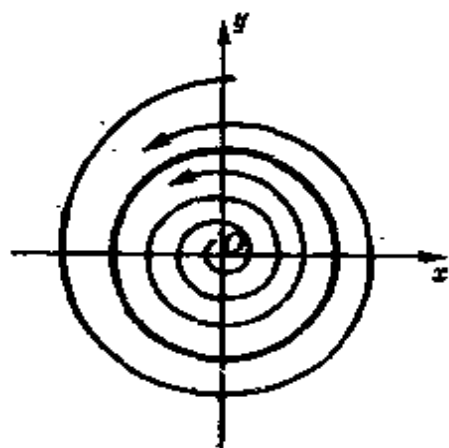


图 4-19



图 4-20

的某一外(内)侧邻域,该邻域内每一点都只有非闭轨通过,这些非闭轨形如螺线,当  $t \rightarrow +\infty$  时环绕闭轨  $L$  盘旋而接近  $L$ , 则称  $L$  为外(内)侧稳定极限环。

如果将上述  $t \rightarrow +\infty$  改为  $t \rightarrow -\infty$ , 则该闭轨称为外(内)侧不稳定极限环。

外侧稳定(不稳定)极限环,内侧稳定(不稳定)极限环,都称为极限环。双侧都稳定(都不稳定)的极限环,称为稳定(不稳定)极限环。一侧稳定,另一侧不稳定的极限环,称为半稳定极限环。图4-20中画的是稳定极限环。

稳定极限环在实际上有重要的意义。(4.10)存在极限环  $L$ , 相当于(4.10)存在周期解。如果这个极限环是稳定的,那么当初值取在  $L$  的内、外侧的某一个环形域内时,(4.10)的解  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ , 当  $t$  充分大时,它所对应的轨线逼近于  $L$ 。即当  $t$  充分大时,  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  实际上表现为( $L$ 所对应的)周期振荡。如果极限环  $L$  是不稳定的,那么,此极限环所对应的周期振荡,在实际上是不会产生的。因为只要初值略为侧离极限环  $L$  (在实际上这总是可能的),那么相应的轨线就永远远离此极限环,从而对应的解不表现为周期振荡。

给定一个系统(4.10),如何来判定它是否存在极限环? 首先,我们给出判定不存在闭轨(当然也就不存在极限环)的一个定理。

**定理 4.4** 设系统(4.10)中的函数  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  在单连通区域  $G$  内一阶连续可微,且存在一阶连续可微函数  $B(x, y)$ , 使在  $G$  内恒有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) \geq 0, (\text{或} \leq 0), \quad (4.31)$$

但在  $G$  的任一子区域内,  $\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) \neq 0$ , 则系统(4.10)不存在整个位于  $G$  内的闭轨。

**证明** 用反证法. 设(4.10)存在整个位于 $G$ 内的闭轨 $L$ . 设当 $t$ 增加时 $L$ 是按逆时针方向旋转, $L$ 所围的区域是 $G'$ . 由于 $G$ 是单连通区域,故 $G' \subset G$ . 在 $G'$ 上使用格林公式,有

$$\oint_L BXdy - BYdx = \iint_{G'} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) \right] d\sigma. \quad (4.32)$$

由条件(4.31)及条件 $\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) \neq 0$  (在 $G'$ 上), 故(4.32)右边大于零(或小于零), 而另一方面,(4.32)左边

$$\oint_L BXdy - BYdx = \oint_L (BXY - BYX)dt = 0.$$

这是一个矛盾. 故知(4.10)不存在整个位于 $G$ 内的正向闭轨. 同样可证(4.10)也不存在整个位于 $G$ 内的负向闭轨.

此定理是1923年由法国数学家H. Dulac所建立的. 后人称满足定理4.4条件的 $B(x, y)$ 为Dulac函数. 寻找适当的Dulac函数用来证明系统不存在闭轨,需要一定的技巧,而且也是较为困难的事. 目前还有人在从事这方面的研究.

**例3** 试证明当 $a(b+2l) \neq 0$ 时,系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + lx^2 + ny^2,$$

$$\frac{dy}{dt} = x(1 + ax + by)$$

不存在闭轨.

**证明** 先考虑 $b \neq 0$ 的情形. 在直线 $1 + by = 0$ 上,  $\frac{dy}{dt} = ax^2$ 为常号. 因此系统的轨线按同一方向穿过直线 $1 + by = 0$ . 故知闭轨线一定不会与此直线相交. 先在半平面 $1 + by > 0$ 内考虑. 作Dulac函数

$$B(x, y) = (1 + by)^{-\frac{2l}{b}-1},$$

有



$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) = -ax^2(b+2l)(1+by)^{-\frac{2l}{b}-2}.$$

它是定号函数(其中  $X$  和  $Y$  分别表示所给的系统中的函数)。由定理 4.4 知,在半平面  $1+by>0$  内不存在闭轨。类似地可证在半平面  $1+by<0$  内也不存在闭轨,又因为闭轨不会与直线  $1+by=0$  相交,故可知在  $b\neq 0$  时系统不存在闭轨。

再考虑  $b=0$  的情形,作 Dulac 函数

$$B(x, y) = e^{-2ly},$$

有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) = -2alx^2e^{-2ly}.$$

在所给条件下,  $al\neq 0$ 。于是由定理 4.4 知,在这种情形下系统也不存在闭轨。

在定理 4.4 中,若取  $B(x, y)\equiv 1$ ,就得到下述推论。这一推论早在 1901 年就为 Bendixson 所建立,用起来比定理 4.4 方便。

**推论** 设系统(4.10)右端函数  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$  在单连通区域  $G$  内一阶连续可微,且在  $G$  内

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \geq 0, (\text{或} \leq 0), \quad (4.31')$$

但在  $G$  内的任一子区域内,  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \neq 0$ , 则系统(4.10)不存在整个位于  $G$  内的闭轨。

**例 4** 设有系统

$$\frac{dx}{dt} = x + 2xy + x^3,$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + x^2y.$$

将方程右端函数分别记为  $X(x, y)$  和  $Y(x, y)$ , 即有

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 1 + 4x^2 > 0.$$

故在全平面不存在闭轨。

我们不加证明地介绍存在极限环的一个充分条件，这是一个十分重要的基本定理。

**定理 4.5 (Poincaré-Bendixson)** 设  $G$  为两条封闭曲线所围成的环形区域(如图 4-21)，在其中不含(4.10)的奇点。若 (4.10) 的凡是与  $G$  的边界相遇的轨线，当  $t$  增大时都从  $G$  外进入  $G$  内(或都从  $G$  内走出  $G$  外)，则  $G$  内至少有(4.10)的一条外侧稳定极限环和一条内侧稳定极限环(或一条外侧不稳定极限环和一条内侧不稳定极限环)，且  $G$  的内边界整个位于这两条极限环的内部。



图 4-21

这两条单侧稳定(不稳定)极限环也可能重合成一条稳定(不稳定)极限环。

图 4-21 画的是满足定理 4.5 括号外条件的情形的示意图。环形区域  $G$  简称环域。

**例 5** 试证明系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y + 4x - x(x^2 + 4y^2), \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y - y(x^2 + 4y^2) \end{cases}$$

存在极限环。

**证明** 考虑环域

$$G: \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4.$$

取函数  $V(x, y) = x^2 + y^2$ 。于是  $G$  的内、外边界分别为  $V(x, y)$

$\frac{1}{4}$  和  $V(x, y) = 4$ 。沿着所给系统的轨线  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,

$V = V(x(t), y(t))$  是  $t$  的函数。现在求函数  $V$  对  $t$  的导数，得

$$\begin{aligned}\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= 2x(-2y + 4x - x(x^2 + 4y^2)) + \\ &\quad + 2y(2x + 4y - y(x^2 + 4y^2)) = \\ &= (x^2 + y^2)(8 - 2x^2 - 8y^2).\end{aligned}$$

在  $G$  的外边界  $x^2 + y^2 = 4$  上,

$$\frac{dV}{dt} = 4[8 - 2(4 - y^2) - 8y^2] = -24y^2 \leq 0,$$

这说明在  $G$  的外边界  $V(x, y) = 4$  上, 当  $t$  增加时, 轨线指向  $V$  减少方向, 即指向  $G$  内. 在  $G$  的内边界  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  上,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{4} \left[ 8 - 2\left(\frac{1}{4} - y^2\right) - 8y^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{15}{2} - 6y^2 \right) \geq \frac{1}{4} \left( \frac{15}{2} - \frac{6}{4} \right) = \frac{3}{2} > 0.\end{aligned}$$

这说明在  $G$  的内边界  $V(x, y) = \frac{1}{4}$  上, 当  $t$  增加时, 轨线指向  $V$  增加方向, 即也指向  $G$  内. 于是由定理 4.5 知, 该系统在  $G$  内至少存在一个极限环. 故知该系统至少存在一个极限环.

最后, 我们指出, 具体使用定理 4.5, 即找出满足定理 4.5 条件的环域  $G$ , 是十分困难的事, 需要高度技巧, 下一节中我们将再举一个作环域的例子.

## § 4 单摆运动 · 范德坡方程

本节举两个实例来说明本章理论的应用.

### (一) 单摆运动

单摆是由一质量为  $m$  的摆锤, 用一长度为  $l$  的细棒悬于固定点  $O$  所组成(图 4-22). 它可以在一铅直面上摆动. 设系统没有摩擦, 则运动方程为

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} + mg \sin \theta = 0.$$

其中  $\theta$  是摆对于向下铅直线的倾角. 令  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  引入第二个变量  $\omega$ , 单摆运动方程化为方程组

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega, \\ \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{cases} \quad (4.33)$$

这是一个非线性自治微分方程组. 可以证明它的通解不能用初等函数表示. 但是, 在相平面  $(\theta, \omega)$  上, 可以求出它的轨线方程, 从而得到它的相图, 从中可以十分清楚地看出由 (4.33) 所描述的单摆运动的情况.

为此, 将 (4.33) 的两式相除消去  $t$ , 得

$$\frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g \sin \theta}{l \omega}.$$

分离变量并积分, 得

$$\frac{1}{2} l \omega^2 - g \cos \theta = c_1,$$

或

$$\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 + m g l (1 - \cos \theta) = c. \quad (4.34)$$

其中  $c$  是任意常数. 从物理上来讲, (4.34) 左边两项依次表示系统的动能和势能 (摆锤位于最低点处的势能作为零). 方程 (4.34) 表示能量守恒这一性质. 显然, 只有对应于  $c \geq 0$ , (4.34) 才有意义. 对于特定的运动,  $c$  的值可以用初值条件

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0$$

来确定. 于是, 对应于给定初值条件的运动的轨线, 由方程 (4.34) 给出. 从而, 由 (4.34) 得到相平面上的全部轨线. 现在我们来分析轨线族 (4.34) 的性质.

由于(4.34)右端对 $\theta$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数,因此只需考虑 $\theta$ 的一个周期即可.又因以 $-\theta$ 代 $\theta$ 时(4.34)不变,因此只需研究 $0 \leq \theta \leq \pi$ 范围内的情形.经过计算可知,点 $(\pi, 0)$ 是鞍点,点 $O(0,0)$ 所对应的一次近似系统的特征根是一对共轭纯虚根.仅凭这一点,我们还不能知道点 $O$ 是什么类型的奇点.由(4.34)解出 $\omega$ ,由于对称性,以下我们只研究 $\omega \geq 0$ 的一支:

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{2}{m} [c - mgl(1 - \cos \theta)]}. \quad (4.35)$$

(i) 若 $c = 0$ , (4.35)只对应一点 $\theta = 0, \omega = 0$ .

(ii) 若 $0 < c < 2mgl$ , 则当 $\theta$ 从0增大到使

$$\cos \theta = 1 - \frac{c}{mgl}$$

时, 对应的 $\omega$ 从 $\frac{1}{l} \sqrt{\frac{2c}{m}}$ 减少到0. 从而知, 在这种情形下, (4.34)

对应了一族对称于 $\theta$ 轴的封闭轨线. 故点 $O$ 是中心.

(iii) 若 $c = 2mgl$ , 与(ii)类似讨论可知, 当 $\theta$ 从0增大到 $\pi$ 时,  $\omega$ 从 $\frac{1}{l} \sqrt{\frac{2c}{m}}$ 减少到0, 即轨线趋于鞍点 $(\pi, 0)$ . 对于(4.34), 相应地就有两条进入鞍点的轨线和两条出自鞍点的轨线.

(iv) 若 $c > 2mgl$ , 则当 $\theta$ 从0增大时,  $\omega$ 先是从 $\frac{1}{l} \sqrt{\frac{2c}{m}}$ 减少, 当 $\theta$ 经过 $\pi$ 时,  $\omega$ 达到极小(但不为零). 然后 $\omega$ 又增大, 直至 $\theta = 2\pi$ 时 $\omega$ 达到极大.

(4.34)描述的轨线如图4-23所示. 至于轨线的方向, 可以由(4.33)直接决定. 事实上, 在正 $\omega$ 轴上,  $\theta = 0, \omega > 0$ , 从而 $\frac{d\theta}{dt} > 0$ . 于是即得轨线方向如图4-23.

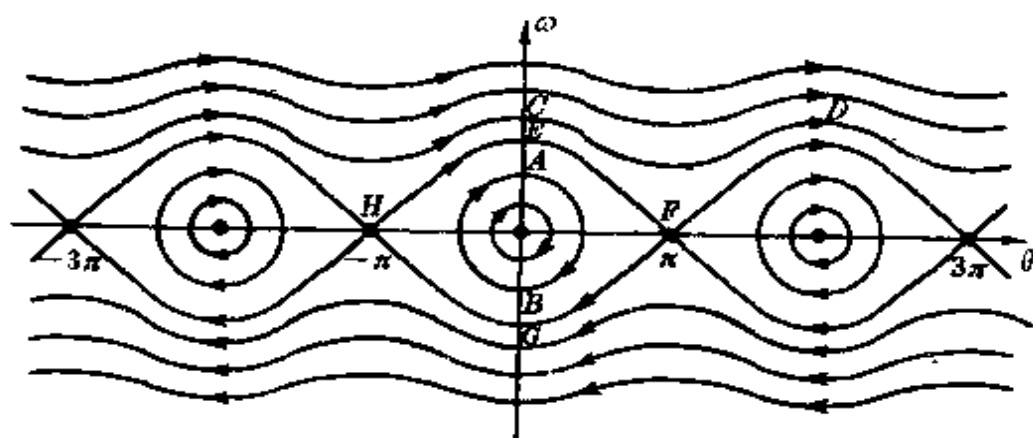


图 4-23

我们看到, 尽管时间变量不出现在相平面上, 但从图中仍可得出单摆运动的一些物理特性. 首先, 研究单摆的平衡状态, 明显的一种平衡状态是, 单摆悬挂着没有摆动时, 这时候初值是  $\theta_0 = 0$ ,  $\omega_0 = 0$ , 对应的解是  $\theta = 0$ ,  $\omega = 0$ . 它相当于图 4-23 中的原点, 这是中心. 另一种平衡状态是以始值  $\theta_0 = \pi$ ,  $\omega_0 = 0$  决定的解  $\theta = \pi$ ,  $\omega = 0$ . 这就是摆锤倒立的平衡状态, 它相当于图 4-23 中的点  $(\pi, 0)$ , 这是鞍点. 当初值  $\theta = \theta_0$ ,  $\omega = \omega_0$  所对应的点在原点附近时, 对应的轨线是闭轨, 相应的运动是周期运动. 在这种情况下, 单摆在铅直线左右 (在铅直面上) 作振幅不大的摆动, 即运动总在平衡点  $\theta = 0$ ,  $\omega = 0$  附近. 当初值  $\theta = \theta_0$ ,  $\omega = \omega_0$  所对应的点在鞍点  $(0, \pi)$  附近时, 又可分两种情况. 如果初值位于  $\overline{EFGHE}$  之内时, 对应的轨线为  $\overline{AB A}$ , 对应的运动是单摆在铅直面上作振幅很大的振动, 即来回大幅度地摆动. 如果初值位于  $\overline{EFGHE}$  之外时, 对应的轨线为  $\overline{CD}$ , 呈波浪形, 对应的运动是单摆在铅直面上绕固定点作迴转运动, 即总是打转不停. 从相图说明, 当单摆作迴转运动时, 角速度  $\omega$  不是常数而是有波动的. 这种波动是由重力的影响所致. 当转速  $\omega$  很大时, 这种波动就不明显, 轨线近似于水平直线,  $\omega \approx \text{常数}$ .

由上分析可见, 虽然解  $\theta = \theta(t)$  未曾求出, 但单摆的运动情况

却都能分析清楚了。

对于一般的自治保守系统

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0,$$

令  $\frac{dx}{dt} = y$  之后,化成

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -f(x),$$

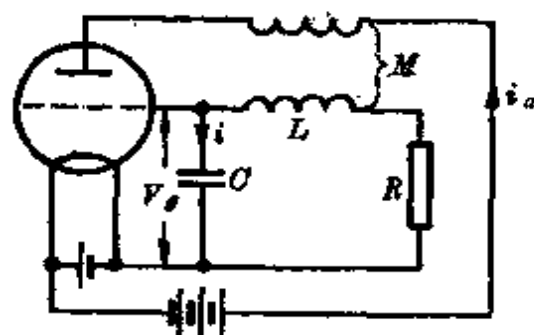


图 4-24

可以与上面作同样的分析。

## (二) 范德坡(Van der Pol)方程

电子管振荡器是由电子管、电阻、电容、自感线圈、互感线圈和直流电源所组成,它能产生周期振荡。这种周期振荡的频率和振幅只依赖于元件的参数值,不依赖于初始相位。现在来分析这种振荡器的工作原理,它是二维非线性自治系统极限环理论的应用。

电子管振荡器的振荡回路如图 4-24。在  $RLC$  回路中,应用基尔霍夫定律,得

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt - M \frac{di_a}{dt} = 0. \quad (4.36)$$

设电子管的板极电流  $i_a$  与栅压  $V_g$  之间有函数关系

$$i_a = \varphi(V_g),$$

(这个函数称为电子管的特性函数)。又由  $V_g = \frac{1}{C} \int i dt$ , 得  $\frac{dV_g}{dt} = \frac{i}{C}$ 。将以上这些关系代入(4.36),得

$$LC \frac{d^2V_g}{dt^2} + (RC - M\varphi'(V_g)) \frac{dV_g}{dt} + V_g = 0.$$

作变换,令

$$V_g = x, \quad t = \sqrt{LC} \tau,$$

并且在得到的式子中, 仍将  $\tau$  记成  $t$ , 再记  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times (RC - M\varphi'(V_s))$ , 于是得到一个二阶非线性方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (4.37)$$

这是振荡回路中  $V_s \equiv x$  应满足的微分方程. 一般, 我们称方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (4.38)$$

为里那(Liénard)方程, 在工程技术中经常遇到这一类方程. 在

(4.38)中令  $\frac{dx}{dt} = y$ , 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y. \end{cases} \quad (4.38')$$

它是里那方程的另一种形式. 在(4.38)中如果令  $y = \frac{dx}{dt} + F(x)$

引入新变量  $y$ , 其中  $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$ . 由(4.38), 有

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} = -g(x).$$

这就将里那方程(4.38)化成另一种形式的方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - F(x), \\ \frac{dy}{dt} = -g(x). \end{cases} \quad (4.38'')$$

现在回到振荡回路的微分方程(4.37). 如果从电子管的特性函数所得到的  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ , 其中  $\mu$  是常数, 则有

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (4.37')$$

或它的另一种形式



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right), \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases} \quad (4.37'')$$

下面我们来研究(4.37')是否存在周期振荡.

在研究单质点的弹簧振动时,遇到过方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0, \quad (4.39)$$

其中  $b$  和  $c$  是常数,  $b \frac{dx}{dt}$  是摩擦阻力,  $cx$  是弹簧恢复力. 如果  $b > 0$ , 系统有正摩擦, 消耗能量. 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 所有轨线均趋于  $O$ ; 如果  $b < 0$  (实际的弹簧振动是不应有  $b < 0$  的), 系统有负摩擦, 相当于供给能量, 轨线远离原点.

今将(4.37')与(4.39)对比, 将  $\mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt}$  看作  $b \frac{dx}{dt}$ . 在  $|x| > 1$  处, 系统有正摩擦, 消耗能量, 轨线向内收缩. 但当收缩到  $|x| < 1$ , 系统有负摩擦, 供给能量, 轨线又远离原点. 一收一逸, 从直观上看, 有周期振荡存在. 这个周期振荡就是极限环.

范德坡研究电子管自激振荡时, 首先建立并研究方程(4.37'), 后人就把这个方程命名为范德坡方程. 下面我们利用 Poincaré-Bendixson 定理, 证明(4.37'')(即(4.37'))存在一个稳定极限环, 即存在周期振荡.

**定理 4.6** 当  $\mu > 0$ , 系统(4.37'')存在稳定极限环.

**证明** 为方便起见, 设  $\mu = 1$ . 对于一般的  $\mu > 0$ , 同样可证.

先作适合定理 4.5 的环域  $G$  的内边界线. 作圆周

$$L_1: V(x, y) \triangleq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = l,$$

其中  $l > 0$  是常数, 它的数值待定. 沿着(4.37'')的解  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $V$  是  $t$  的函数. 将它对  $t$  求导数, 得

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right) = \\
&= x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = \\
&= x \left[ y - \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) \right] + y(-x) = \\
&= -x^2 \left( \frac{x^2}{3} - 1 \right).
\end{aligned}$$

取  $l$  足够小, 例如取  $l=1$ , 则在  $L_1$  上  $x^2 \leq 2$ . 于是

$$\frac{dV}{dt} \geq 0.$$

且仅在  $x=0$  处才等于零. 这说明在圆周  $V(x, y)=1$  上, 当  $t$  增加时, 轨线指向  $V$  增加方向, 即指向圆外. 内边界线作成.

下面来作外边界线  $L_2$ . 在  $x \geq 3$  范围内作圆弧  $\widehat{AD}$  如下 (图4-25),

$$\widehat{AD}: V_1(x, y) \triangleq \frac{x^2}{2} + \frac{(y-5)^2}{2} = l_1.$$

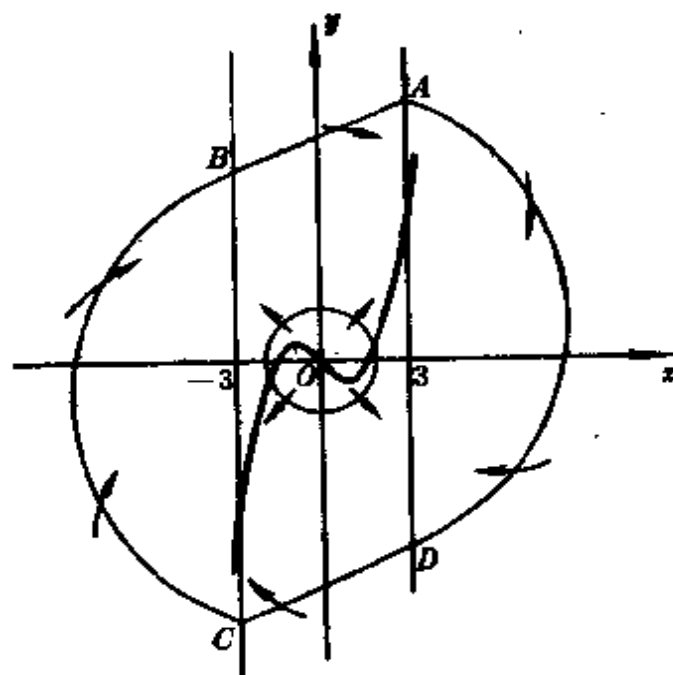


图 4-25

这里  $l_1$  是正的常数, 下面需要时再来确定它. 点  $A$  和点  $D$  分别是圆弧  $V_1(x, y) = l_1$  与直线  $x = 3$  的上、下两个交点. 仿照上面那样, 沿着 (4.37'') 的解  $x(t), y(t)$  将函数  $V_1$  对  $t$  求导数, 得

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dt} &= x \left[ y - \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \right] + (y - 5)(-x) = \\ &= x \left[ 5 - \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \right].\end{aligned}$$

当  $x \geq 3$  时,  $\left[ 5 - \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \right]' = 1 - x^2 < 0$ . 所以函数  $\left[ 5 - \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \right]$  在  $x = 3$  取最大值  $-1$ . 因此, 当  $x \geq 3$  时  $\frac{dV_1}{dt} < 0$ . 这说明在  $\widehat{AD}$  上当  $t$  增加时轨线指向  $V_1$  减少的方向, 即指向圆内.

在  $x \leq -3$  范围内, 作圆弧

$$\widehat{BC}: V_2(x, y) \triangleq \frac{x^2}{2} + \frac{(y+5)^2}{2} = l_1,$$

其中  $B$  和  $C$  分别是圆弧  $V_2(x, y) = l_1$  与直线  $x = -3$  的上、下两个交点. 与上面同样地可以证明, 在  $\widehat{BC}$  上, 当  $t$  增加时, 轨线也指向圆内.

最后, 联结直线段  $AB$  和  $CD$ . 我们将证明, 由  $AB, \widehat{BC}, CD, \widehat{DA}$  所构成的封闭曲线  $L_2$  可以作为定理 4.5 的环域的外边界线.

经简单计算可知  $A$  和  $B$  的坐标分别是  $A(3, 5 + \sqrt{2l_1 - 9})$ ,  $B(-3, -5 + \sqrt{2l_1 - 9})$ . 直线  $AB$  的斜率  $k_{AB} = \frac{5}{3}$ . 在线段  $AB$  上,

$$\begin{aligned}y &\geq -5 + \sqrt{2l_1 - 9}, \\ \frac{x^3}{3} - x &\leq \frac{3^3}{3} - 3 = 6.\end{aligned}$$

因此

$$y - \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \geq -11 + \sqrt{2l_1 - 9}.$$

选取  $l_1$  使上式右边大于零, 于是在线段  $AB$  上, 轨线的斜率

$$k = \frac{x}{y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right)} \leq \frac{3}{-11 + \sqrt{2l_1 - 9}}.$$

再取  $l_1$  使上式右边小于  $k_{AB} = \frac{5}{3}$ . 为满足上述两点要求, 取  $l_1 = 89$  就行了. 取定  $l_1$  之后, 于是有  $k < k_{AB}$ . 又因在线段  $AB$  上轨线的  $\frac{dy}{dt} = y - \left(\frac{x^3}{3} - x\right) > 0$ , 指向右. 因此轨线与  $AB$  相交后, 从  $L_2$  外部指向  $L_2$  内部. 同理可证轨线与线段  $CD$  相交后, 也从  $L_2$  外部指向  $L_2$  内部. 外边界线  $L_2$  作成.

由定理 4.5 证得  $L_1$  与  $L_2$  之间的环域内至少存在一个稳定极限环.

还可证明极限环是唯一的, 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 所有轨线 (除奇点  $O$  外) 都绕极限环盘旋而接近于它. 因此, 从物理上来讲, 不论初值是什么 ( $x_0 = 0, y_0 = 0$  除外), 当时间充分大之后, 对应的解都表现为周期振荡, 即该系统总产生周期振荡, 它的振幅和周期, 仅依赖于系统元件的参数而不随初值而改变.

最后我们指出一件很有意义也是很有趣的事. 当  $\mu = 0$  时, 系统 (4.37'') 成为

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

它的轨线是一系列环绕原点的圆周:

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

没有极限环. 而当  $\mu$  一旦从等于零变为大于零, 这一系列闭轨消失, 而突然跳出一个极限环来. 从  $\mu = 0$  到  $\mu > 0$ , 系统 (4.37'') 的结构发生了变化. 这个  $\mu = 0$  称为系统 (4.37'') 的一个分支值.

一般, 设系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, \mu) \quad (4.40)$$

含有参数  $\mu$ 。如果在  $\mu = \mu_0$  存在一个邻域  $U_\mu$ ，当  $\mu \in U_\mu$  时，(4.40) 的相图的结构与  $\mu = \mu_0$  时 (4.40) 的相图结构一致，则称  $\mu = \mu_0$  是 (4.40) 的一个普通值；如果不论邻域  $U_\mu$  多么小，总可取到  $\mu^* \in U_\mu$ ，当  $\mu = \mu^*$  时 (4.40) 的相图的结构与  $\mu = \mu_0$  时 (4.40) 的相图结构不同，则称  $\mu = \mu_0$  是 (4.40) 的一个分支值，研究一个系统的分支值，是很有意义的，实际上也是很有用的。

## 第五章 稳定性理论基础

运动稳定性理论产生于十九世纪八十年代。最近四十年来,运动稳定性理论在自动控制、宇宙航行、电子技术、生物化学等自然科学和工程技术各个部门都获得广泛的应用,其概念和理论都有很大的发展。本章介绍李雅普诺夫稳定性概念,李雅普诺夫关于自治系统和非自治系统的第二方法,全局稳定性。在本章最后介绍两个应用实例。

### § 1 李雅普诺夫稳定性概念 · 用一次 近似判定稳定性

考虑微分方程组

$$\frac{dy}{dt} = \psi(t, y). \quad (5.1)$$

其中  $y$  是  $n$  维向量,  $\psi(t, y)$  是定义在  $D \triangleq I^1 \times G$  上的  $n$  维连续的向量函数,  $I^1 \triangleq [0, +\infty)$ ,  $G$  是  $R^n$  中的某一区域, 并设  $\psi(t, y)$  在  $D$  的任一有界闭子域上对  $y$  满足李普希兹条件。

设某个过程由微分方程组(5.1)的某个解来描述,这个解满足一定的初值条件。初值条件通常不可避免地会有误差,那么自然会产生如下的问题: 初值的微小变化,对所求的解影响如何? 如果不论初值的变化多么小,对应的解总要产生明显的变化,那么这种解就没有任何实用价值。因此,寻求这样的条件,在这些条件下,只要初值的变化足够小,解的变化就可以小于事先指定的程度,这是很重要的。

这里有两种在本质上完全不同的情形。一种是在有限区间上来考虑。设  $y = \phi(t)$  是(5.1)的一个解,在区间  $0 \leq t \leq T$  上存在。

那么在上述关于  $\psi(t, y)$  连续及满足李普希兹条件的一般假定下, 也满足解对初值的连续依赖性定理的条件(见附录三). 于是, 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$  和  $t_0 \in [0, T]$ , 存在  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , 只要初值  $y(t_0) = y_0$  满足

$$\|y_0 - \phi(t_0)\| < \delta,$$

(5.1) 对应的解  $y(t, t_0, y_0)$  就有

$$\|y(t, t_0, y_0) - \phi(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [0, T].$$

即在有限区间  $[0, T]$  上, 只要初值的变化足够小, 解的变化可以小于事先指定的程度. 用极限记号表示, 就是对  $t \in [0, T]$  一致地有

$$\lim_{y_0 \rightarrow \phi(t_0)} y(t, t_0, y_0) = \phi(t).$$

另一种在本质上与此不同的情形是在无限区间  $0 \leq t < +\infty$  上来考虑. 先看以下的例子.

**例 1** 设  $\lambda$  是常数,  $x$  是标量. 考虑方程

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x.$$

的零解  $x = \varphi(t) \equiv 0$ . 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$  和  $t_0 \in [0, +\infty)$ , 是否存在  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , 只要初值  $x(t_0) = x_0$  满足

$$|x_0 - \varphi(t_0)| < \delta$$

(即初值偏差小于  $\delta$ ), 对应的解  $x = x(t, t_0, x_0)$  在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上就有

$$\Delta(t) \triangleq |x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

成立(即解的偏差  $\Delta(t)$  小于任给的  $\varepsilon$ )? 现在我们来进行分析. 易知  $x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$ , 于是

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= |x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)| = \\ &= |x_0 e^{\lambda(t-t_0)} - 0| = |x_0| e^{\lambda(t-t_0)}. \end{aligned}$$

如果  $\lambda \leq 0$ , 则对一切  $t \geq t_0$ ,  $\Delta(t) \leq |x_0|$ . 因而对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 可以取  $\delta = \varepsilon$ , 只要  $|x_0| < \delta$ , 就有  $\Delta(t) < \varepsilon$ . 即对应的解的偏差  $\Delta(t)$  在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上一致地可以小于任意给定的正数, 只

要初值的偏差  $|x_0 - \phi(t_0)| = |x_0|$  足够小. 如果进一步限制  $\lambda < 0$ , 则不仅有上述性质, 且对于满足  $|x_0| < \delta$  的  $x_0$  对应的解  $x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

如果  $\lambda > 0$ , 则将是另一种情况. 此时, 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 不论  $|x_0|$  取得多么小, 不可能对一切  $t \geq t_0$ , 使不等式  $\Delta(t) = |x_0| e^{\lambda(t-t_0)} < \varepsilon$  都成立.

由上述例子可以看出, 对于  $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$  三种不同情形, 在无限区间上初值的变化对解的影响是不一样的.

下面我们考虑(5.1)的解  $y = \phi(t)$ , 并总假设它在区间  $0 \leq t < +\infty$  上存在. 我们引入下列重要概念.

**定义 5.1** 如果对于任意给定的  $\varepsilon > 0$  和  $t_0 \geq 0$ , 存在对应的  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , 使得系统(5.1)的初值  $y(t_0) = y_0$  满足

$$\|y_0 - \phi(t_0)\| < \delta \quad (5.2)$$

的解  $y = y(t, t_0, y_0)$  都在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上存在, 且在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上成立不等式

$$\|y(t, t_0, y_0) - \phi(t)\| < \varepsilon, \quad (5.3)$$

则称(5.1)的解  $y = \phi(t)$  在李雅普诺夫意义下是稳定的.

如果解  $\phi(t)$  不仅稳定, 而且对于任给的  $t_0 \geq 0$ , 存在  $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ , 使得(5.1)的初值  $y(t_0) = y_0$  满足

$$\|y_0 - \phi(t_0)\| < \delta_1$$

的解  $y = y(t, t_0, y_0)$ , 成立等式

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [y(t, t_0, y_0) - \phi(t)] = 0, \quad (5.4)$$

则称解  $y = \phi(t)$  是渐近稳定的.

如果存在  $\varepsilon_0 > 0$  和  $t_0 \geq 0$ , 不论  $\delta > 0$  多么小, 存在  $y_0$  和  $t_1 \geq t_0$ ,  $\|y_0 - \phi(t_0)\| < \delta$ , 使(5.1)的以  $y(t_0) = y_0$  为初值的解  $y = y(t, t_0, y_0)$  在  $t = t_1$  时有

$$\|y(t_1, t_0, y_0) - \phi(t_1)\| \geq \varepsilon_0,$$



即不满足稳定性定义,则称解  $y = \phi(t)$  是不稳定的.

根据前面的分析,对照定义 5.1 可知,在例 1 中,当  $\lambda < 0$  时,零解  $x = \varphi(t) \equiv 0$  是渐近稳定的. 当  $\lambda > 0$  时,零解是不稳定的. 当  $\lambda = 0$  时,零解是稳定的. 但因  $x(t, t_0, x_0) - \varphi(t) = x_0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)] = x_0 \neq 0,$$

故零解不是渐近稳定的.

通常,我们都是将系统(5.1)的解  $y = \phi(t)$  的稳定性的研究,化为零解的稳定性的研究,为此,令

$$x = y - \phi(t),$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{d\phi(t)}{dt} \\ &= \psi(t, y) - \psi(t, \phi(t)) = \\ &= \psi(t, x + \phi(t)) - \psi(t, \phi(t)) = \\ &\triangleq f(t, x). \end{aligned} \quad (5.5)$$

显然,

$$f(t, 0) = \psi(t, \phi(t)) - \psi(t, \phi(t)) \equiv 0. \quad (5.6)$$

因此,方程组(5.5)有零解  $x = 0$ . 此零解  $x = 0$  对应于(5.1)的解  $y = \phi(t)$ . 这样一来,就把研究方程组(5.1)的解  $y = \phi(t)$  的稳定性问题,化为研究方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.5)$$

的零解  $x = 0$  的稳定性问题了.

只要把定义 5.1 中的  $y - \phi(t)$  换成  $x$ , 就可将定义 5.1 改写为

**定义 5.1'** 如果对于任意给定的  $\varepsilon > 0$  和  $t_0 \geq 0$ , 存在对应的  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ , 使得系统(5.5)的初值  $x(t_0) = x_0$  满足

$$\|x_0\| < \delta \quad (5.7)$$

的解  $x = x(t, t_0, x_0)$  都在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上存在, 且在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上成立不等式

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad (5.8)$$

则称(5.5)的零解  $x = 0$  在李雅普诺夫意义下是稳定的.

如果零解  $x = 0$  不仅稳定, 而且对于任给的  $t_0 \geq 0$ , 存在  $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ , 使得(5.1)的初值  $x(t_0) = x_0$  满足

$$\|x_0\| < \delta_1$$

的解  $x = x(t, t_0, x_0)$  成立等式

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \quad (5.9)$$

则称零解  $x = 0$  是渐近稳定的.

如果存在  $\varepsilon_0$  和  $t_0 \geq 0$ , 不论  $\delta > 0$  多么小, 存在  $x_0$  和  $t_1 \geq t_0$ ,  $\|x_0\| < \delta$ , 使(5.1)的以  $x(t_0) = x_0$  为初值的解  $x = x(t, t_0, x_0)$  在  $t = t_1$  时有

$$\|x(t_1, t_0, x_0)\| \geq \varepsilon_0,$$

则称零解  $x = 0$  是不稳定的.

注意, (5.1)的零解  $x = 0$  稳定是指对任给的  $t_0 \geq 0$ , 在  $t_0 \leq t < +\infty$  上一致地成立

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} x(t, t_0, x_0) = 0. \quad (5.8')$$

显然, 它与等式(5.9)不是一回事. 可以举例说明, 它们之间不互相包含(见习题第3题). 零解  $x = 0$  渐近稳定性定义中要求(5.8')和(5.9)同时成立.

如果(5.5)右边不明显含  $t$ , 我们将这种系统表示为

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (5.10)$$

前面已经讲过, 称它为自治系统. 此时, 相应的(5.6)式成为

$$f(0) = 0. \quad (5.11)$$

以下我们研究满足(5.11)的自治系统(5.10)的零解的稳定性问题. 我们总假设  $f(x)$  在  $x = 0$  的某邻域  $G$  内连续, 且对  $x$  满足

李普希兹条件.

首先,研究常系数线性齐次系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5.12)$$

的零解  $x=0$  的稳定性问题. 其中  $A$  是  $n$  阶常数矩阵. 由第三章(3.14)式知, (5.12)的通解是

$$x(t) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}^{(s)} p_{ij}^{(s)}(t) e^{\lambda_i t}, \quad (5.13)$$

其中  $\lambda_i$  是  $A$  的特征根, 重数是  $n_i$ ,  $\sum_{i=1}^s n_i = n$ ;  $p_{ij}^{(s)}(t)$  是向量函数, 它的每一分量是  $t$  的次数不超过  $n_i - 1$  的某确定的多项式;  $c_{ij}^{(s)}$  是任意常数 ( $i=1, \dots, s; j=1, \dots, n_i$ ), 由上述通解形状可知, 有下述定理.

**定理 5.1** (i) 方程组(5.12)的零解是渐近稳定的充分必要条件是  $A$  的特征根的实部都是负的;

(ii) 若矩阵  $A$  的特征根中至少有一个根的实部为正, 则(5.12)的零解是不稳定的;

(iii) 若矩阵  $A$  的特征根的实部都不为正, 但有零实部, 则(5.12)的零解可能是不稳定的, 也可能是稳定的, 但总不会是渐近稳定的.

对于情形(iii), 我们举两个例子.

**例 2** 系统

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + 2z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y,$$

的特征方程是

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda+2) = 0.$$

一个特征根是 $-2$ , 另两个特征根都是零, 易知系统的通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1+2t \\ -1+2t \\ 1+2t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

由于含有 $t$ 的多项式, 可见系统的零解是不稳定的.

### 例 3 系统

$$\frac{dx}{dt} = -5x - 5y + z + w,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x + 3y - z - w,$$

$$\frac{dz}{dt} = -4x - 4y - 2z - 2w,$$

$$\frac{dw}{dt} = 3x + 3y + z + w.$$

的特征方程是 $\lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ . 四个特征根分别是 $-1, -2, 0, 0$ . 易知通解是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

于是推知零解是稳定的, 但不渐近稳定.

在上一章§2中已研究过二维线性系统

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (4.15)$$

当 $q = ad - bc \neq 0$ 时奇点 $O(0,0)$ 附近轨线的性态, 但当时没有交

待“稳定结点”，“不稳定结点”等有关奇点的稳定性的确切含义，现在我们来说明它的意义。系统(4.15)的特征方程是  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ ，其中  $p = -(a+d)$ ， $q = ad - bc$ 。当  $p > 0, q > 0$  时，两个特征根都有负实部。于是所给的系统的零解在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的。正因为如此，所以在上一章 §2 中我们把这种情形下的零解在相平面上对应的奇点  $O$  分不同情形称为稳定结点、稳定临界结点、稳定退化结点、稳定焦点。同样，当  $p < 0, q > 0$  时，两特征根都有正实部，所给系统的零解在李雅普诺夫意义下是不稳定的。当初我们也就把对应的奇点称为不稳定奇点。可见那时讲的稳定(不稳定)奇点就是指对应的常值解在李雅普诺夫意义下是渐近稳定(不稳定)的。当  $q < 0$  时，两个特征根一正一负，按定理 5.1，零解是不稳定的。这类奇点是鞍点。所以我们也说，鞍点是不稳定奇点。当  $p = 0, q > 0$  时，特征根是一对纯虚根。由解的表达式容易看出，对应的零解是稳定的但不断近稳定。这类奇点是中心。因此，我们也说，中心是稳定而不断近稳定的奇点。

现在回到满足条件 (5.11) 的一般非线性自治系统 (5.10) 上来。设  $f(x)$  在  $x=0$  的某邻域内有二阶连续偏导数，则由多元函数的泰勒公式，可将  $f(x)$  展开成

$$f(x) = Ax + R(x).$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0}$$

是一个  $n$  阶常数矩阵， $f = (f_1, \cdots, f_n)^T$ ， $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ ， $R(x)$  是向量函数，且

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (5.14)$$

由此, (5.10)可写成

$$\frac{dx}{dt} = Ax + R(x). \quad (5.15)$$

它的一次近似系统是

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \quad (5.16)$$

人们自然会想到, 是否能用 (5.15) 的一次近似系统 (5.16) 代替 (5.15), 研究它的零解的稳定性呢? 我们介绍下述定理, 它说明在一定条件下这两个系统的零解或同为渐近稳定, 或同为不稳定.

**定理 5.2** 设  $R(x)$  满足条件 (5.14). (i) 若矩阵  $A$  的特征根的实部都是负的, 则 (5.15) 的零解是渐近稳定的;

(ii) 若矩阵  $A$  的特征根中至少有一个根的实部为正, 则 (5.15) 的零解是不稳定的.

在下一节中, 我们将用“李雅普诺夫第二方法”, 对  $n=2$  的情况证明本定理. 对于一般情况的证明, 可参阅其他书籍, 例如马尔金著《运动稳定性理论》第三章.

对于矩阵  $A$  没有实部为正的 eigenvalue, 但有零实部的 eigenvalue 的情形, 定理 5.2 中没有提到. 这种情形称为**临界情形**. 此时情况相当复杂. 稳定、渐近稳定、不稳定三种情形都可能发生 (参见习题第 11 题和第 15 题). 确定临界情形的稳定性, 现在仍为一个研究课题.

由定理 5.2 可见, 在研究零解的稳定性问题中, 判定一次近似系统的系数矩阵  $A$  的所有特征根的实部是否都是负数, 显得十分重要. 求出特征根之后再来判断, 实际上不太行得通, 一般说来也无此必要. 霍尔维茨 (Hurwitz) 证明了下述定理, 解决了如何判定一个  $n$  次代数方程所有的根的实部是否都是负数.

**定理 5.3** 实系数的  $n$  次代数方程

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

的所有的根的实部都是负数的充分必要条件是下列霍尔维茨行列式

$$\Delta_1 \triangleq p_1, \quad \Delta_2 \triangleq \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 \triangleq \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & p_5 \\ p_0 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix},$$

$$\dots, \Delta_n \triangleq \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \dots & p_{2n-1} \\ p_0 & p_2 & \dots & p_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{vmatrix} = p_n \Delta_{n-1}$$

都大于零。其中  $p_0=1, p_k=0$  当  $k>n$  时。

证略。有兴趣的读者可参阅尤秉礼编《常微分方程补充教程》，第 372 页，人民教育出版社，1982 年。

#### 例 4 研究方程组

$$\frac{dx}{dt} = y - z - 2 \sin x,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + (\sin y + z^2)e^x,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y + \frac{z}{1-z}$$

的零解的稳定性。

**解** 为了写出上述方程组的一次近似方程组，将  $\sin x, \sin y, e^x, \frac{z}{1-z}$  展开成泰勒级数，得

$$\frac{dx}{dt} = y - z - 2 \left( x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right),$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + \left[ \left( y - \frac{y^3}{3!} + \dots \right) + z^2 \right] (1 + x + \dots),$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y - z(1 + z + z^2 + \dots),$$

取一次近似，得

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y - z,$$

它的特征方程是

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0.$$

它的霍尔维茨行列式是

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 17, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 51.$$

有  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ . 由定理 5.3 知, 所有特征根的实部都是负数. 由定理 5.2 知, 原方程组的零解是渐近稳定的.

**例 5** 判定方程组

$$\frac{dx}{dt} = e^{x+y} + z - 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y - \sin z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -8x - 5y - 3z + xy^2$$

的零解的稳定性.

**解** 一次近似方程组是

$$\frac{dx}{dt} = x + y + z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -8x - 5y - 3z,$$

它的特征方程是



$$\lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = 0.$$

计算它的霍尔维茨行列式, 有  $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 0, \dots$ . 由此知特征根的实部不都是负的. 为了研究稳定性, 需要求出特征根, 它们分别是  $-1, -2, +2$ . 其中有实部为正的根, 由定理 5.2 知, 原方程组的零解是不稳定的.

## § 2 李雅普诺夫第二方法(直接方法)

除了上述用一次近似系统判定零解的稳定性外, 李雅普诺夫还创建了判定稳定性的所谓第二方法, 或称直接法. 它不需要寻求运动方程的解. 这个方法在科学技术的许多领域中已经得到广泛的应用, 它引起学者们的很大兴趣, 发展甚为迅速. 现在我们介绍这个方法. 为此, 先介绍一些有关的概念.

以下我们总假定  $x$  的某些标量函数  $V(x)$  在原点  $x=0$  的某邻域内连续, 并有连续的一阶偏导数.

**定义 5.2** 如果存在  $h > 0$ , 当  $0 < \|x\| \leq h$  时  $V(x) > 0 (< 0)$ ; 且  $V(0) = 0$ . 则称函数  $V(x)$  为定正(定负)函数.

定正函数与定负函数统称为定号函数.

**定义 5.3** 如果存在  $h > 0$ , 当  $0 < \|x\| \leq h$  时  $V(x) \geq 0 (\leq 0)$ ; 且  $V(0) = 0$ . 则称函数  $V(x)$  为常正(常负)函数.

常正函数与常负函数统称为常号函数.

**定义 5.4** 如果不论  $h > 0$  多么小, 当  $\|x\| \leq h$  时,  $V(x)$  既可取到正值, 又可取到负值, 则称  $V(x)$  为变号函数.

显然, 如果  $V(x)$  是变号函数, 则  $V(0) = 0$ .

我们举几个例子. 在三维空间  $R^3$  中,

- a) 函数  $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  是定正函数;
- b) 函数  $V(x, y, z) = 2x^2 + y^4$  是常正函数;
- c) 函数  $V(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - z^2$  是变号函数.

注意, 若限于在二维空间  $R^2$  中考虑, 则  $V(x, y) = 2x^2 + y^4$  是

定正的, 而在三维空间  $R^3$  中考虑,  $V(x, y, z) = 2x^2 + y^4$  却只是常正的.

下面对定正函数作一几何解释. 为方便起见, 限于  $n=3$  的情形来说明.

设  $V(x)$  是定义在  $\|x\| \leq h$  上的定正函数, 考虑曲面

$$V(x) = c,$$

当  $c=0$  时, 由定正函数的定义知, 只有  $x=0$  适合  $V(x)=0$ . 即曲面  $V(x)=c$  退化为原点一点.

下面证明, 当  $c>0$  适当小时, 曲面族  $V(x)=c$  是一族包围原点的封闭曲面族, 且彼此互不相交. 记

$$l = \min_{\|x\|=h} V(x),$$

由于  $V(x)$  是定正函数, 故  $l>0$ . 对于  $\|x\|=h$  上任意一点  $x_0$ , 用任意一条完全在  $\|x\| \leq h$  内的连续曲线  $\Gamma$ , 将点  $x_0$  与原点  $O$  联结起来. 在  $\Gamma$  上,  $V(x)$  是  $\Gamma$  上点的坐标的连续函数. 但因  $V(0)=0$ ,  $V(x_0) \geq l$ , 故对于满足  $0 < c < l$  的任意固定的  $c$ , 在  $x=0$  到  $x=x_0$  的弧段  $\Gamma$  上, 至少有一点  $x^*$  使  $V(x^*)=c$ , 即  $\Gamma$  总与  $V(x)=c$  相交. 可见  $V(x)=c$  必定是封闭曲面, 且包围原点. 如果把  $c$  的值由零变化到某一足够小的正数, 则得到一族封闭曲面. 由于  $V(x)$  是单值函数, 故在任一点  $x_0^*$  处,  $V(x_0^*)$  只能取一个值, 譬如取值为  $c_0^*$ . 故点  $x_0^*$  只能位于一个曲面  $V(x)=c_0^*$  上. 由此说明曲面族  $V(x)=c$  中各曲面彼此不相交.

若  $V(x)$  是定负函数, 亦有同样的几何解释.

沿着(5.10)的轨线  $x=x(t)$ , 函数  $V(x)$  是  $t$  的函数  $V(x(t))$ , 它对  $t$  的全导数是

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

以后除了经常要用到函数  $V(\mathbf{x})$  外,还要用到  $\mathbf{x}$  的下述函数

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}),$$

它在形式上与(5.17)右端类似,我们也称它为函数  $V(\mathbf{x})$  关于系统(5.10)对于  $t$  的全导数,并记成  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  或简记成  $\frac{dV}{dt}$ :

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}). \quad (5.18)$$

李雅普诺夫用函数  $V(\mathbf{x})$  和  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ ,建立了关于零解的稳定性、渐近稳定性和不稳定性的下列定理.

**定理 5.4** 设系统(5.10)满足(5.11). 如果存在  $h>0$ , 在  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  上存在定正函数  $V(\mathbf{x})$ , 它关于系统(5.10)对于  $t$  的全导数(5.18)是常负函数, 则(5.10)的零解是稳定的.

**证明** 不妨认为  $h>0$  足够小,  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  包含在使  $f(\mathbf{x})$  连续并对  $\mathbf{x}$  满足李普希兹条件的区域  $G$  内. 以下各定理的证明中也都认为如此, 不再一一声明.

任给  $\varepsilon, 0 < \varepsilon < h$ . 记

$$l = \min_{\|\mathbf{x}\| = \varepsilon} V(\mathbf{x}).$$

由于  $V(\mathbf{x})$  是定正函数, 故  $l > 0$ . 又因  $V(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  连续, 且  $V(\mathbf{0}) = 0$ , 故对于这个  $l > 0$ , 存在  $\delta > 0$  (不妨取  $\delta < \varepsilon$ ), 当  $\|\mathbf{x}\| < \delta$  时,  $V(\mathbf{x}) < l$ .

今证对于任给的  $t_0$  和满足  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$  的  $\mathbf{x}_0$ , 初值问题

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

的解  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  在区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上存在, 且满足

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon. \quad (5.19)$$

从而证明了零解的稳定性.

首先,  $\|x(t_0)\| = \|x_0\| < \delta < \varepsilon$ , 即(5.19)在  $t = t_0$  时成立. 因此, 存在一个以  $t_0$  为左端点的区间, 在此区间上  $x(t)$  存在, 且(5.19)成立. 一般, 设在  $t_1$  时  $\|x(t_1)\| < \varepsilon$ , 则闭长方体  $\|x - x(t_1)\| \leq h - \varepsilon$  必包含在  $\|x\| < h$  内 (因为  $\|x\| \leq \|x - x(t_1)\| + \|x(t_1)\| < h - \varepsilon + \varepsilon = h$ ). 在  $\|x - x(t_1)\| \leq h - \varepsilon$  上使用初值问题解的存在唯一性定理 (第一章定理 1.1), 推知解  $x(t)$  在区间  $[t_1, t_1 + h_0]$  上存在,  $h_0 = \frac{h - \varepsilon}{M}$  为定值且与  $t_1$  无关,  $M = \max_{\|x\| < h} \|f(x)\|$ . 因此, 只要  $\|x(t_1)\| < \varepsilon$ ,

则解  $x(t)$  至少在区间  $[t_1, t_1 + h_0]$  上存在. 于是推知, 如果  $x(t)$  不是在区间  $[t_0, +\infty)$  上存在, 则必存在某  $T > t_0$ , 当  $t_0 \leq t < T$  时  $x(t)$  存在且(5.19)成立, 而  $\|x(T)\| = \varepsilon$ . 如果  $x(t)$  在整个区间  $[t_0, +\infty)$  上存在, 但(5.19)不是在整个区间  $[t_0, +\infty)$  上成立, 则显然也必存在某  $T > t_0$ , 当  $t_0 \leq t < T$  时(5.19)成立, 而  $\|x(T)\| = \varepsilon$ . 以下证明这种  $T$  不存在.

事实上, 如果上述这种  $T$  存在, 那末由  $\|x(T)\| = \varepsilon$  及  $l$  的定义, 有

$$V(x(T)) \geq l.$$

另一方面, 由于当  $\|x\| < h$  时  $\frac{dV(x)}{dt}$  是常负函数, 故当  $t_0 \leq t \leq T$  时, 由  $\|x(t)\| \leq \varepsilon < h$  推得

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq 0.$$

即  $V(x(t))$  是  $t$  的单调不增函数. 从而

$$V(x(T)) \leq V(x(t_0)) = V(x_0) < l.$$

这是一个矛盾. 这就证明了这种  $T$  不存在, 即证明了  $x(t)$  在整个区间  $t_0 \leq t < +\infty$  上存在, 且(5.19)成立.

现在对定理 5.4 作一几何解释. 考虑初值为  $x(t_0) = x_0$  的解  $x(t)$  对应的轨线. 记  $V(x_0) = V_c$ , 定理表明, 当  $t > t_0$  时  $V(x(t)) \leq$

$V(\mathbf{x}(t_0)) \leq V_0$ , 轨线  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  总停留在闭区域  $V(\mathbf{x}) \leq V_0$  之内. 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 只要  $\|\mathbf{x}_0\|$  充分小,  $V_0$  就很小, 闭区域  $V(\mathbf{x}) \leq V_0$  可以包含在闭区域  $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$  之内, 因而零解是稳定的. 由此可见, 从几何观点来看, 用李雅普诺夫第二方法证明零解稳定, 归结为建立一族封闭曲面  $V(\mathbf{x}) = c$ , 这族封闭曲面具有性质: 它包围坐标原点, 且当  $c \rightarrow 0$  时  $V(\mathbf{x}) = c$  缩为原点一点; 对于充分小的  $c$ , 当轨线与  $V(\mathbf{x}) = c$  相遇后, 就永远停留在  $V(\mathbf{x}) \leq c$  之内.

**定理 5.5** 设系统 (5.10) 满足 (5.11). 如果存在  $h > 0$ , 在  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  上存在定正函数  $V(\mathbf{x})$ , 它关于系统 (5.10) 对于  $t$  的全导数 (5.18) 是定负函数, 则 (5.10) 的零解是渐近稳定的.

**证明** 由定理 5.4 知, 零解是稳定的. 因此只需进一步证明, 对任给的  $t_0 \geq 0$ , 存在  $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$ , 当初值满足  $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$  时, 对应的解  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  必满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

取定理 5.4 中的  $\delta$  作为  $\delta_1$ , 今证

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

事实上, 由条件可推知, 当  $t \geq t_0$  时  $V(\mathbf{x}(t))$  单调减少, 且  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ . 从而当  $t \rightarrow +\infty$  时  $V(\mathbf{x}(t))$  存在极限. 记

$$l = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)),$$

则  $l \geq 0$ . 今证  $l = 0$ . 用反证法. 设  $l > 0$ , 则当  $t \geq t_0$  时  $V(\mathbf{x}(t)) \geq l > 0$ . 由  $V(\mathbf{x})$  的连续性及  $V(\mathbf{0}) = 0$ , 故存在  $\beta > 0$ , 当  $V(\mathbf{x}) \geq l$  时有  $\|\mathbf{x}\| \geq \beta$ . 于是当  $t \geq t_0$  时, 由  $V(\mathbf{x}(t)) \geq l$  推知

$$\beta \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq h. \quad (5.20)$$

其中右边那个不等式是由 (5.19) 得到的.

又由于  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$  是定负函数, 因此, 存在  $b > 0$ , 在闭区域

$\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq h$  上  $\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq -b$ . 再结合 (5.20) 可推知, 当  $t \geq t_0$  时

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq -b.$$

将上式两边从  $t_0$  到  $t$  积分, 得

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) - b(t - t_0).$$

令  $t \rightarrow +\infty$ , 左边始终不小于  $l$ , 右边趋于  $-\infty$ , 导致矛盾. 于是证得  $l=0$ , 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$ . 从而可知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ . 事实上, 若不然, 则由于  $\|\mathbf{x}(t)\|$  有界, 故必存在序列  $\{t_k\}$ , 当  $k \rightarrow +\infty$  时  $t_k \rightarrow +\infty$ , 使存在  $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}^*$ , 且  $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$ . 从而  $\lim_{t_k \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t_k)) = V(\mathbf{x}^*) \neq 0$ , 导致矛盾.

减弱定理 5.5 的条件, 巴尔巴辛 (Е. А. Барбашин) 与克拉索夫斯基 (П. Н. Красовский) 在 1952 年证明了下述定理.

**定理 5.6** 设系统 (5.10) 满足 (5.11). 如果存在  $h > 0$ , 在  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  上存在定正函数  $V(\mathbf{x})$ , 它关于系统 (5.10) 对于  $t$  的全导数 (5.18) 是常负函数. 但使  $\frac{dV}{dt} = 0$  的  $\mathbf{x}$  集合中, 不包含 (5.10) 的整条轨线 (轨线  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  除外), 则 (5.10) 的零解是渐近稳定的.

这一定理的证明要用到较多的定性理论知识, 在此从略. 定理 5.5 与定理 5.6 的几何意义, 留在 §3 中介绍.

最后, 介绍关于不稳定性的一-个定理, 它是切塔耶夫 (Н. П. Четаев) 于 1934 年证明的.

**定理 5.7** 设系统 (5.10) 满足条件 (5.11). 如果存在  $h > 0$ , 在  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  上存在函数  $V(\mathbf{x})$ , 满足下列条件:

- (i) 在  $\|\mathbf{x}\| < h$  内存在  $V > 0$  的区域  $\psi$ ;
- (ii) 在  $\psi$  内, 函数  $V(\mathbf{x})$  关于系统 (5.10) 对于  $t$  的全导数 (5.18) 取正值;
- (iii)  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  在  $\psi$  的边界  $\partial\psi$  上;
- (iv) 在  $\|\mathbf{x}\| < h$  内部的  $\partial\psi$  上,  $V = 0$ .

则 (5.10) 的零解是不稳定的.

**证明** 取  $\varepsilon_0 = h/2$ . 由条件(iii)  $0 \in \partial\psi$ , 故不论  $\delta > 0$  多么小, 总可取  $x_0 \in \psi$ , 且使  $0 < \|x_0\| < \delta$ . 再任取  $t_0 \geq 0$ , 考虑(5.10)的以  $x(t_0) = x_0$  为初值的解  $x = x(t)$ . 今证存在  $t_1 > t_0$ , 有  $\|x(t_1)\| > \varepsilon_0$ , 从而证明了(5.10)的零解是不稳定的.

记  $G_0 = \{x \mid \|x\| < \varepsilon_0\}$ . 如果对一切  $t \geq t_0$  都有  $x(t) \in \psi \cap G_0$ , 那么  $\frac{dV(x(t))}{dt} > 0$ . 故  $V(x(t))$  是  $t$  的单调增函数. 于是有

$$V(x(t)) \geq V(x_0) > 0, \text{ 当 } t \geq t_0.$$

从而存在  $l_0 > 0$ , 当  $t \geq t_0$  时

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \geq l_0.$$

两边从  $t_0$  到  $t$  积分, 得到

$$V(x(t)) \geq V(x_0) + l_0(t - t_0).$$

但  $V$  在  $\psi \cap G_0$  内有界, 而上式右边当  $t \rightarrow +\infty$  时是无界的. 这是一个矛盾. 这就证明了当  $t$  增加时  $x(t)$  必然要越出  $\psi \cap G_0$ . 设当  $t_0 \leq t < t_1$  时  $x(t) \in \psi \cap G_0$ , 而  $x(t_1)$  到达  $\|x\| < h$  内部的  $\partial\psi$  上, 则由  $V(x(t_1)) = 0$  及

$$V(x(t_1)) - V(x(t_0)) = \frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{t=t_1} (t_1 - t_0) > 0,$$

与  $V(x(t_0)) > 0$  矛盾. 故  $x(t)$  不可能从  $\|x\| < h$  内部的  $\partial\psi$  上越出  $\psi \cap G_0$ . 这样  $x(t)$  只能越出  $G_0$ , 故必存在  $t_1 > t_0$  使  $\|x(t_1)\| > \varepsilon_0$ .

上述定理的几何意义是明显的, 以 2 维情形且设  $V(x, y)$  是闭正方形  $G = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq h\}$  上的变号函数为例说明之. 在  $G$  内存在  $V(x, y) > 0$  的区域  $\psi$ ,  $\psi$  在  $G$  内部的边界是通过坐标原点  $(0, 0)$  的曲线  $V(x, y) = 0$ , 如  $\widehat{OA}$ ,  $\widehat{OB}$  等 (图 5-1). 考虑从原点任意小邻域内且在  $\psi$  内的点  $M$  出发的轨线. 因为  $\frac{dV}{dt} > 0$ , 所以这条轨线在  $t$  增加时, 必然对应于  $c$  增加的方向与  $V(x, y) = c (c > 0)$  相交. 因此不可能从  $G$  内部曲线  $V(x, y) = 0$  上越出  $\psi$ .

但因当  $t$  增加时,  $V(x(t), y(t))$  在  $\psi \cap G_0$  内以不小于  $l_0 > 0$  的正速率增大着, 因此过了一段时间之后, 该轨线必然要越出  $G_0$ . 示意图如图 5-1, 图中没有画出  $G$ .

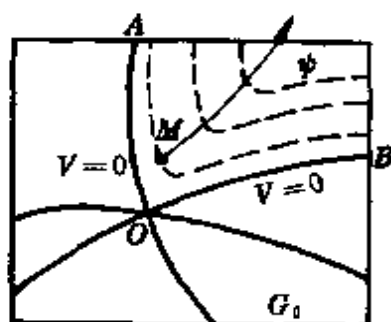


图 5-1

下述定理 5.8 是李雅普诺夫证明的, 它在定理 5.7 建立之前四十二年就建立了. 显然, 它可以看作定理 5.7 的推论.

**定理 5.8** 设系统(5.10)满足条件(5.11). 如果存在  $h > 0$ , 在  $\|x\| \leq h$  上存在函数  $V(x)$  它关于这个系统对于  $t$  的全导数(5.18)是定正(定负)函数, 而在原点的任意一个邻域内  $V(x)$  总可取到正值(负值), 且  $V(0) = 0$ . 则系统 (5.10) 的零解是不稳定的.

满足定理 5.4—5.8 的条件的函数  $V(x)$  称为**李雅普诺夫函数**或称**V 函数**. 用李雅普诺夫函数来研究给定的系统的零解的稳定性的方法, 称**李雅普诺夫第二方法**, 也称**V 函数法**. 作 V 函数需要一定的技巧, 也是困难的.

现在我们来研究有关常系数线性系统

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (5.16)$$

的 V 函数问题. 形状最为简单的 V 函数是二次型函数. 下面我们证明, 如果  $A$  的特征根都有负实部(相当于(5.16)的零解是渐近稳定的), 那么存在正定二次型(定正函数)

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q = (q_{ij}),$$

它关于(5.16)对于  $t$  的全导数  $\frac{dV}{dt}$  是负定二次型(定负函数). 这种 V 函数可以具体作出来.

**定理 5.9** 设  $A$  的特征根都有负实部, 则对于给定的正定二次型  $x^T W x$ , 必存在唯一的正定二次型  $V(x) = x^T Q x$ , 它关于系统(5.16)对于  $t$  的全导数



$$\frac{dV}{dt} = -x^T W x.$$

**证明** 如果满足定理结论的二次型  $V(x) = x^T Q x$  存在, 即

$$\frac{d}{dt}(x^T Q x) = -x^T W x,$$

则由

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x^T Q x) &= \left(\frac{dx^T}{dt}\right) Q x + x^T Q \frac{dx}{dt} = \\ &= x^T A^T Q x + x^T Q A x = \\ &= x^T (A^T Q + Q A) x,\end{aligned}$$

推得

$$x^T (A^T Q + Q A) x = -x^T W x.$$

于是推知正定实对称矩阵  $Q$  满足

$$A^T Q + Q A = -W. \quad (5.21)$$

反之, 如果对于给定的正定实对称矩阵  $W$ , 存在正定实对称矩阵  $Q$  满足 (5.21), 则显然  $V(x) = x^T Q x$  是满足定理结论的正定二次型.

所以, 为了证明定理, 等价于证明: 在定理条件下, 对于给定的正定实对称矩阵  $W$ , 存在唯一的正定实对称矩阵  $Q$  满足方程 (5.21). 我们下面分三步来证. (i) 证明存在唯一的矩阵  $Q$  满足 (5.21); (ii)  $Q$  是实对称矩阵; (iii)  $Q$  是正定矩阵.

(i) 根据线性代数中的许尔(Schur)定理, 存在非奇异矩阵  $B$ , 可将  $A$  化成上三角阵, 即

$$B^{-1} A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ & \lambda_2 & & d_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq D.$$

这里  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的  $n$  个特征根, 它们之中可能有等根, 也可能有复根. 将 (5.21) 两边同时左乘  $B^T$ , 右乘  $B$ , 得

$$B^T (A^T Q + Q A) B = -B^T W B.$$

又

$$B^T (A^T Q + Q A) B = B^T A^T (B^{-1})^T B^T Q B + B^T Q B B^{-1} A B =$$

$$= (B^{-1}AB)^T (B^TQB) + (B^TQB)(B^{-1}AB).$$

记

$$B^TWB = C \triangleq (c_{ij}),$$

及

$$B^TQB = P = (p_{ij}). \quad (5.22)$$

于是(5.21)化成

$$D^T P + PD = -C, \quad (5.23)$$

即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ d_{12} & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ d_{1n} & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.23')$$

将左端展开,使其每一元素与右端对应的每一元素相等,得到关于  $n^2$  个未知量  $p_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \cdots, n$ ) 的线性代数方程组

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_1)p_{11} &= -c_{11}, \\ d_{12}p_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2)p_{12} &= -c_{12}, \\ d_{13}p_{11} + d_{23}p_{12} + (\lambda_1 + \lambda_3)p_{13} &= -c_{13}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_{1n}p_{11} + d_{2n}p_{12} + \cdots + d_{n-1,n}p_{1,n-1} + (\lambda_1 + \lambda_n)p_{1n} &= -c_{1n}, \\ d_{12}p_{11} + (\lambda_2 + \lambda_1)p_{21} &= -c_{21}, \\ d_{12}p_{12} + d_{22}p_{21} + (\lambda_2 + \lambda_2)p_{22} &= -c_{22}, \\ d_{12}p_{13} + d_{13}p_{21} + d_{23}p_{22} + (\lambda_2 + \lambda_3)p_{23} &= -c_{23}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_{12}p_{1n} + d_{1n}p_{21} + d_{2n}p_{22} + \cdots + (\lambda_2 + \lambda_n)p_{2n} &= -c_{2n}, \\ &\dots\dots\dots \\ d_{1n}p_{1n} + d_{2n}p_{2n} + \cdots + d_{1n}p_{n1} + d_{2n}p_{n2} + \cdots + (\lambda_n + \lambda_n)p_{nn} &= -c_{nn}. \end{aligned}$$

它的系数行列式  $\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \lambda_j) \neq 0$ . 因此可唯一地求得  $p_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \cdots,$

$n$ ). 即可唯一地求得  $P$  满足(5.23). 由(5.22)得到唯一的

$$Q = (B^T)^{-1}PB^{-1},$$

它是满足(5.21)的唯一解。

(ii) 因为  $C^T = (B^T W B)^T = B^T W B = C$ , 故  $C$  是对称矩阵。将(5.23)式两边转置, 于是有

$$P^T D + D^T P^T = -C^T = -C,$$

即

$$D^T P^T + P^T D = -C.$$

于是推知  $P^T$  也是(5.23)的解。由(5.23)解的唯一性, 推知  $P^T = P$ , 即  $P$  是对称矩阵。于是  $Q^T = ((B^T)^{-1} P B^{-1})^T = (B^T)^{-1} P B^{-1} = Q$ , 故  $Q$  是对称矩阵。

再将  $A^T Q + Q A = -W$  两边元素取它们的共轭复数。由于  $A$  和  $W$  都是实矩阵, 故  $\overline{A} = A$ ,  $\overline{W} = W$ , 因此  $A^T \overline{Q} + \overline{Q} A = -W$ 。由于(5.21)只有唯一解, 故  $\overline{Q} = Q$ , 即  $Q$  是实矩阵。

(iii) 最后证明  $Q$  是正定矩阵, 即  $V(x) = x^T Q x$  是正定二次型。用反证法。设不然, 如果  $V(x)$  可以取到负值。由于  $\frac{dV}{dt} = -x^T W x$  是负定二次型, 那么由定理 5.8, 系统(5.16)的零解是不稳定的。这与  $A$  的特征根都有负实部的假定相矛盾。如果再者, 存在  $x_0 \neq 0$ , 使  $V(x_0) = 0$ 。取  $t_0 \geq 0$ , 以  $x(t_0) = x_0$  作为初值。由于  $\frac{dV(x(t))}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{dV(x)}{dt} \Big|_{x=x_0} = -x_0^T W x_0 < 0$ 。因此存在充分小的  $\varepsilon > 0$ , 使  $V(x(t_0 + \varepsilon)) < V(x_0) = 0$ 。即  $V(x)$  仍可取到负值, 仍是矛盾。于是证得  $V(x) = x^T Q x$  是正定二次型。

定理 5.9 证明了满足定理条件的  $V$  函数的存在性。但是, 按照定理 5.9 证明的思路去求  $V(x)$ , 必须先求出  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , 这是十分困难的。本书作者之一, 在 1959 年给出了满足  $\frac{dV}{dt} = -x^T I x$  的正定二次型李雅普诺夫函数  $V(x)$  的公式。有兴趣的读者请参阅《数学学报》vol. 9, no. 4 (1959)。在 1968 年, 苏联学者巴尔巴辛给出了满足  $\frac{dV}{dt} = -x^T W x$  的正定二次型李雅普诺夫函数  $V(x)$  的公式, 其中  $W$  是给定的正定实对称矩阵。请参阅他的专著《Функции Ляпунов», 1970。这两个公式都不需要先求特征根, 而是直接通过系统(5.16)的系数来表达。

**例 1** 试用  $V$  函数研究系统

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

的零解的稳定性, 其中  $ad - bc \neq 0$ .

解 作函数

$$V(x, y) = ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2,$$

使得它关于所给系统对于  $t$  的全导数为

$$\frac{dV}{dt} = k(x^2 + y^2),$$

其中  $k$  是常数. 由于

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= 2(ax + \beta y)(ax + by) + 2(\beta x + \gamma y)(cx + dy), \end{aligned}$$

于是, 从恒等式

$$2(ax + \beta y)(ax + by) + 2(\beta x + \gamma y)(cx + dy) \equiv k(x^2 + y^2),$$

可以唯一地确定  $\alpha, \beta, \gamma$ . 为了避免出现分式, 取  $k = 2(a + d)(ad - bc)$ . 于是求得  $\alpha, \beta, \gamma$ . 再经过整理配方, 得到

$$V(x, y) = (ad - bc)(x^2 + y^2) + (cx - ay)^2 + (dx - by)^2.$$

$$\frac{dV}{dt} = 2(a + d)(ad - bc)(x^2 + y^2).$$

(i) 如果  $ad - bc > 0, a + d < 0$ , 则  $V$  是定正函数, 而  $\frac{dV}{dt}$  是定负函数, 由定理 5.5 知, 零解是渐近稳定的.

(ii) 如果  $ad - bc > 0, a + d > 0$ , 则  $V$  是定正函数,  $\frac{dV}{dt}$  也是定正函数, 由定理 5.8 知, 零解是不稳定的.

(iii) 如果  $ad - bc > 0, a + d = 0$ , 则  $V$  是定正函数,  $\frac{dV}{dt} \equiv 0$  可以看成是常负函数. 由定理 5.4 知, 零解是稳定的. 又因为  $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \equiv 0$ , 所以在轨线  $x = x(t), y = y(t)$  上,

$V(x(t), y(t)) = c_0 \triangleq V(x(t_0), y(t_0))$ ,  $V(x, y)$  是定正函数,  $V(x, y) = c_0$  是一环绕原点的封闭曲线. 于是推知轨线  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  是封闭曲线. 当  $t \rightarrow -\infty$  时, 不可能有  $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ , 故零解仅是稳定而不是渐近稳定的.

(iv) 如果  $ad - bc < 0, a + d = 0$ , 则  $V$  是变号函数, 在原点的任意一个邻域内它既可取到正值, 又可取到负值. 而  $\frac{dV}{dt}$  是定号函数. 由定理 5.8 知, 零解是不稳定的.

(v) 如果  $ad - bc < 0, a + d = 0$ , 此时上述  $V$  函数不适用. 取

$$V_1(x, y) = ax^2 + (b + c)xy - ay^2,$$

有

$$\frac{dV_1}{dt} = (ax - by)^2 - (cx - ay)^2 - (a^2 + bc)(x^2 + y^2).$$

因为  $0 > ad - bc = -(a^2 + bc)$ , 所以  $\frac{dV_1}{dt}$  是定正函数. 又因为  $(b + c)^2 - 4a(-a) = (b + c)^2 + 4a^2 > (b + c)^2 - 4bc = (b - c)^2 \geq 0$ . 因此  $V_1(x, y)$  是变号函数. 由定理 5.8 知, 在这种情形, 零解是不稳定的.

对于  $q \neq 0$  的各种情形讨论完毕. 以上关于稳定性的结论与第84页的结论一致.

## 例 2 判定系统

$$\frac{dx}{dt} = -x - y + y(x + y), \quad \frac{dy}{dt} = x - x(x - y)$$

的零解的稳定性.

解 取它的一次近似系统, 再依照例 1 作定正函数

$$V(x, y) = x^2 + 2y^2 + (x - y)^2.$$

以这个函数作为原系统的李雅普诺夫函数, 它关于原系统对  $t$  的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -2(x^2 + y^2) + 2(x + y)(y^2 - xy - x^2).$$

当 $|x|, |y|$ 充分小时,  $\frac{dV}{dt}$ 是定负函数, 故零解是渐近稳定的.

### 例 3 判定系统

$$\frac{dx}{dt} = -x^5 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -3x^3 + y^3$$

的零解的稳定性.

**解** 试取  $V(x, y) = Ax^4 + Cy^4$ , 有

$$\frac{dV}{dt} = -4Ax^3 - 4(A + 3C)x^3y^3 + 4Cy^5.$$

令  $A - 3C = 0$ , 取  $A = 3, C = -1$ , 我们得  $V(x, y) = 3x^4 - y^4$ . 它是变号函数;  $\frac{dV}{dt} = -12x^3 - 4y^6$  是定负函数. 由定理 5.8 知, 该系统的零解是不稳定的.

### 例 4 判定系统

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2)$$

的零解的稳定性.

**解** 作函数  $V(x, y) = x^2 + y^2$ , 于是  $\frac{dV}{dt} = 2(x^2 + y^2)^2$ . 函数  $V$  和  $\frac{dV}{dt}$  都是定正函数, 故零解是不稳定的.

上述例 3 和例 4 都是临界情形, 不能使用定理 5.2. 我们现在用  $V$  函数的方法, 判定了它们的零解的稳定性.

现在我们回过头来, 用李雅普诺夫第二方法证明定理 5.2 当  $n=2$  的情形.  $n=2$  时, (5.15) 可以写成

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + R_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + R_2(x, y). \end{aligned} \quad (5.24)$$

其中

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_2(x, y)}{r} = 0, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

对于定理 5.2 的情形(i), 矩阵  $A$  的所有特征根的实部都是负数, 这个条件相当于  $ad - bc > 0, a + d < 0$ . 依照例 1, 作

$$V(x, y) = (ad - bc)(x^2 + y^2) - (cx - ay)^2 + (dx - by)^2.$$

它关于系统(5.24)对于  $t$  的全导数是

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} (ax + by) + \frac{\partial V}{\partial y} (cx + dy) + \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial x} R_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} R_2(x, y) = \\ &= 2(a + d)(ad - bc)(x^2 + y^2) + \frac{\partial V}{\partial x} R_1(x, y) + \\ &\quad + \frac{\partial V}{\partial y} R_2(x, y). \end{aligned}$$

由定理条件, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial V}{\partial x} R_1(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} R_2(x, y)}{r^2} = 0.$$

因此, 当  $r$  充分小时,  $\frac{dV}{dt}$  是定负函数,  $V$  是定正函数. 由定理 5.5 知, (5.24) 的零解是渐近稳定的. 即证明了(i).

对于情形(ii), 矩阵  $A$  的特征根中至少有一个根的实部是正数. 这个条件相当于  $ad - bc > 0, a + d > 0$ ; 或  $ad - bc < 0$ . 依照例 1 中所对应的情形(ii)或(iv)、(v), 作函数  $V(x, y)$  或  $V_1(x, y)$ . 再经过与上面类似的讨论, 由定理 5.8 知, 在这种情形下, (5.24) 的零解是不稳定的. 即证明了(ii).

### § 3 全局稳定性

在§1中所建立的在李雅普诺夫意义下的零解的稳定性概念,是局部性概念. 定义 1.1' 是在初值  $x_0$  的范数  $\|x_0\|$  充分小的情况下来建立零解的稳定性概念以及关于稳定和渐近稳定两个基本定理的. 但是在实际问题中,要研究对于任意初值  $x_0$  的情况下,是否还存在着零解的某种稳定性呢? 这个问题李雅普诺夫本人并未提出,而是 1952 年由他的后继者们在发展他的工作中提出的.

我们仍考虑自治系统(5.10)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (5.10)$$

设  $f(x)$  在整个相空间  $R^n$  内连续,在  $R^n$  内的任意一个闭区域上对  $x$  满足李普希兹条件. 并设当且仅当  $x=0$  时  $f(0)=0$ . 本节都作如上的假定.

**定义 5.5** 对于系统(5.10), 如果(i) 它的零解  $x=0$  在李雅普诺夫意义下是稳定的; 而且(ii) 系统(5.10) 的所有解  $x(t)$  都具有性质:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0,$$

则称(5.10)的零解  $x=0$  为全局稳定的.

采用李雅普诺夫解决问题的思想方法, 引入满足一定条件的函数  $V(x)$ , 完全可以用来解决(5.10)的零解的全局稳定性问题. 为此, 引入无限大定正函数的概念.

**定义 5.6** 如果(i) 函数  $V(x)$  在整个相空间是定正函数; (ii)  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ . 则称函数  $V(x)$  为无限大定正函数.

**例 1** 设  $Q$  是正定的实对称矩阵, 则  $V(x) = x^T Q x$  是无限大定正函数.

**证明** 存在非奇异线性变换  $x = By$ , 使



$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = (\mathbf{B} \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{B} \mathbf{y}) = \\
 &= \mathbf{y}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}) \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{I} \mathbf{y} = \\
 &= \sum_{i=1}^n y_i^2.
 \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{I}$  是单位矩阵,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ . 对于任意  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 对应的  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . 于是推知  $V(\mathbf{x}) > 0$ . 故  $V(\mathbf{x})$  在整个相空间是定正的. 又因  $\mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{x}$ , 故当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时  $\|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty$ , 此时  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ . 故  $V(\mathbf{x})$  是无限大定正函数.

**例 2** 函数  $V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$  在整个相平面  $(x, y)$  上是定正函数. 但因当  $y = 0, x \rightarrow \infty$  时  $V(x, y) \rightarrow 1$ , 所以  $V(x, y)$  不是无限大定正函数.

现在我们来解释无限大定正函数的几何意义. 设  $V(\mathbf{x})$  是无限大定正函数, 则对于任意固定的常数  $c > 0$ , 曲面  $V(\mathbf{x}) = c$  必定有界, 并且是个封闭曲面. 事实上, 由无限大定正函数的性质 (ii)  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$ , 故对于任意固定的常数  $c > 0$ , 必存在  $R > 0$ , 当  $\|\mathbf{x}\| > R$  时  $V(\mathbf{x}) > c$ . 因此, 曲面  $V(\mathbf{x}) = c$  必在闭区域  $\|\mathbf{x}\| \leq R$  内, 推知  $V(\mathbf{x}) = c$  有界. 至于它的封闭性, 可仿照 § 2 中阐述定正函数  $V(\mathbf{x})$  的几何意义的办法来证明之.

判定零解的全局稳定性, 我们有下述定理.

**定理 5.10** 设系统 (5.10) 满足 (5.11). 如果存在无限大定正函数  $V(\mathbf{x})$ , 它关于系统 (5.10) 对于  $t$  的全导数在整个相空间是定负函数, 则 (5.10) 的零解是全局稳定的.

**证明** 由定理条件, 显然可知 (5.10) 的零解在李雅普诺夫意义下是稳定的. 为证零解的全局稳定性, 只需证明对于任给的  $t_0 \geq 0$  和  $\mathbf{x}_0$ , (5.10) 的满足  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  的解  $\mathbf{x}(t)$  都有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

记  $V_0 = V(\mathbf{x}_0)$ . 由于  $\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} < 0$ , 故当  $t \geq t_0$  时  $V(\mathbf{x}(t))$  是  $t$

的单调减少函数,且  $V(\mathbf{x}(t)) \geq 0$ . 因此,存在  $l \geq 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = l$ . 今证  $l = 0$ . 我们用反证法. 设  $l > 0$ , 则对一切  $t \geq t_0$ , 有

$$0 < l \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq V_0.$$

与定理 5.5 的证明一样, 由  $l \leq V(\mathbf{x}(t))$ , 推得存在  $\beta > 0$ , 对一切  $t \geq t_0$ , 有  $\|\mathbf{x}(t)\| \geq \beta$ . 另一方面, 由于  $V(\mathbf{x})$  是无限大定正函数, 对于  $V_0 > 0$ , 存在  $\nu > 0$ , 当  $V(\mathbf{x}) \leq V_0$  时, 就有  $\|\mathbf{x}\| \leq \nu$ . 因此, 对一切  $t \geq t_0$ , 由  $0 < l \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq V_0$ , 推得

$$0 < \beta \leq \|\mathbf{x}(t)\| \leq \nu.$$

再由于  $\frac{dV}{dt}$  在整个相空间是定负函数. 因此, 存在  $b > 0$ , 在闭区域  $\beta \leq \|\mathbf{x}\| \leq \nu$  上:  $\frac{dV}{dt} \leq -b$ . 结合以上的讨论可知, 对一切  $t \geq t_0$ , 有

$$\frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} \leq -b.$$

两边从  $t_0$  到  $t$  积分, 得

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}_0) - b(t - t_0).$$

令  $t \rightarrow +\infty$ , 左边始终不小于  $l$ , 右边趋于  $-\infty$ , 导致矛盾. 于是证得  $l = 0$ . 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

与定理 5.5 的证明一样, 推知  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ .

上述定理与定理 5.5 不同之处仅在于, 后者只假定  $V(\mathbf{x})$  在  $\|\mathbf{x}\| \leq h$  内是定正函数, 前者要求  $V(\mathbf{x})$  在整个相空间内是定正函数. 从几何上看, 后者只在局部存在一族包围原点的封闭曲面, 与这些封闭曲面相遇的轨线  $\mathbf{x}(t)$ , 都按  $V$  减少的方向穿过封闭曲面, 而当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于原点; 前者在整个相空间存在一族包围原点的封闭曲面, 与这些封闭曲面相遇的轨线  $\mathbf{x}(t)$ , 都按  $V$  减少的方向穿过封闭曲面, 而当  $t \rightarrow -\infty$  时趋于原点. 即所有的解  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  当  $t \rightarrow +\infty$  时都趋于  $\mathbf{0}$ .

定理中条件“ $\frac{dV}{dt}$ 在整个相空间内是定负函数”用来保证“与封闭曲面  $V(\mathbf{x})=c$  相遇的轨线  $\mathbf{x}(t)$  都按  $V$  减少的方向穿过  $V(\mathbf{x})=c$ , 而当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于原点”。实际上, 如同定理 5.6 一样, 不需要那么强的条件. 减弱上述定理的条件, 可得

**定理 5.11** 设系统(5.10) 满足 (5.11). 如果存在无限大定正函数  $V(\mathbf{x})$ , 它关于系统(5.10)对于  $t$  的全导数  $\frac{dV}{dt}$  是常负函数, 但使  $\frac{dV}{dt}=0$  的  $\mathbf{x}$  集合中, 不包含(5.10)的整条轨线(轨线  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$  除外), 则(5.10)的零解是全局稳定的.

这个定理的几何意义是十分明显的. 定理的条件并不保证“与封闭曲面  $V(\mathbf{x})=c$  相遇的轨线  $\mathbf{x}(t)$ ”立即“都按  $V$  减少的方向穿过  $V(\mathbf{x})=c$ ”, 但能保证“即使在某个  $V(\mathbf{x})=c$  上走上一段, 但不能一直停留在这个  $V(\mathbf{x})=c$  上. 而经过一定时间,  $\mathbf{x}(t)$  仍以  $V$  减少的方向穿过  $V(\mathbf{x})=c$ , 且当  $t \rightarrow +\infty$  时趋于原点.”严格的证明要用到较多的定性理论知识, 在此从略.

### 例 3 研究线性系统

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

的零解的全局稳定性, 其中  $ad-bc > 0, a+d < 0$ .

**解** 在所述条件下, §2 例 1 所作的函数  $V(x, y)$  在整个相平面是无限大定正函数,  $\frac{dV}{dt}$  在整个相平面是定负函数, 由定理 5.10 知, 所述系统的零解是全局稳定的.

### 例 4 研究系统

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2y}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad (5.25)$$

的零解的稳定性.

### 解 作函数

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2.$$

它是定正函数, 它关于系统(5.25)对于  $t$  的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -4 \left[ \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{y^2}{(1+x^2)^2} \right]$$

是定负函数. 因此, 由定理 5.5 知, (5.25) 的零解在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的. 容易看出,  $V$  和  $\frac{dV}{dt}$  在整个相平面  $(x, y)$  上分别是定正函数和定负函数. 但是, 由于  $V(x, y)$  不是无限大定正函数(见本节例 2), 因此不能引用定理 5.10 或定理 5.11, 我们不知道(5.25)的零解是否全局稳定. 实际上, 我们下面将证明, (5.25)的零解不是全局稳定的.

为此, 研究(5.25)在曲线

$$\Gamma: y = 2 + \frac{1}{1-x^2}$$

上的向量场. 将  $\Gamma$  的方程代入(5.25)的右边, 得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 - \frac{2}{1-x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{1}{(1+x^2)^2} \left( 4 + \frac{2}{1-x^2} \right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

消去  $t$ , 得到(5.25)在  $\Gamma$  上所确定的向量场的斜率

$$k_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + 2x^2 + x + 3}{2(1+x^2)^3 + (1-x^2)^2 - x(1+x^2)}.$$

另一方面,  $\Gamma$  的切线斜率

$$k_2 = \left( 2 + \frac{1}{1-x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $k_2/k_1 \rightarrow 4$ . 又因  $k_1$  与  $k_2$  都小于零, 故当  $x > 0$  足够大时(记为  $x \geq \xi_1$ ), 有  $k_1 > k_2$ . 又由(5.26)第一式可知, 当  $x > 0$

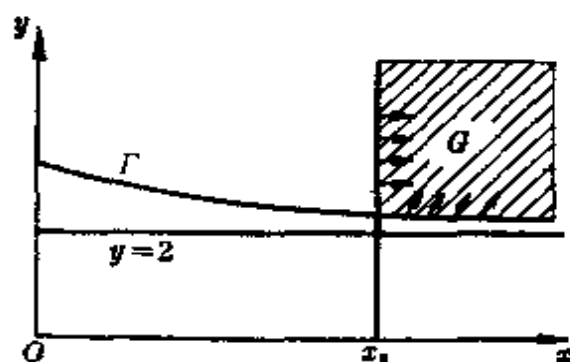


图 5-2

足够大时 (记为  $x \geq \xi_2$ ),  $\frac{dx}{dt} > 0$ . 令  $x_0 = \max(\xi_1, \xi_2)$ , 作区域

$$G = \left\{ (x, y) \mid x \geq x_0, y \geq 2 + \frac{1}{1+x^2} \right\}.$$

由以上讨论可知, 系统 (5.25) 在  $G$  的一条边界  $y = 2 + \frac{1}{1+x^2}$  ( $x \geq x_0$ ) 上的向量场指向  $G$  内 (图 5-2). 再注意到  $x_0$  的定义, 在  $x = x_0$  ( $y \geq 2 + \frac{1}{1+x^2}$ ) 上, 有

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x_0}{(1+x_0^2)^2} + 2y \geq -\frac{2x_0}{(1+x_0^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x_0^2} > 0.$$

这表示在  $G$  的另一条边界  $x = x_0$  ( $y \geq 2 + \frac{1}{1+x^2}$ ) 上, (5.25) 的方向场也指向  $G$  内. 这就证明了 (5.25) 进入  $G$  内的轨线不会趋向原点, 即证得 (5.25) 的零解不是全局稳定的.

例 4 后半部分所用的定性理论方法, 值得读者注意.

例 5 第四章 § 4 已经讲过, 下述方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (5.27)$$

或其等价方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y \quad (5.27')$$

称为里那方程. 设

- (i)  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $-\infty < x < +\infty$  内连续可微;
- (ii)  $g(0) = 0$ ; 当  $x \neq 0$  时  $xg(x) > 0$  且  $f(x) > 0$ ;
- (iii) 当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $G(x) \triangleq \int_0^x g(\xi) d\xi \rightarrow +\infty$ .

则(5.27')的零解  $x=0, y=0$  是全局稳定的.

**证明** 若  $f(x) \equiv 0$ , 则(5.27)存在一个通积分

$$V(x, y) \triangleq \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(\xi) d\xi = c,$$

函数  $V(x, y)$  象物理学中的能量函数, 现在我们用它来研究(5.27')的解的性质. 根据条件(ii)知, 当  $x \neq 0$  时  $G(x) > 0$ . 由条件(iii)知,  $V(x, y)$  是无限大正函数.  $V$  关于系统(5.27')对于  $t$  的全导数

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= g(x)y + y(-g(x) - f(x)y) = \\ &= -f(x)y^2 \leq 0. \end{aligned}$$

如果  $f(0) \neq 0$ , 那么仅当  $y=0$  时  $\frac{dV}{dt} = 0$ ; 如果  $f(0) = 0$ , 那么当  $x=0$  或  $y=0$  时  $\frac{dV}{dt} = 0$ . 但是不论  $y=0$  还是  $x=0$ , 都不是(5.27')的轨线. 因此, 由定理 5.11, 系统(5.27')的零解  $x=0, y=0$  是全局稳定的.

## § 4 非自治系统的稳定性

设系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (5.5)$$

的右端明显含  $t$ , 我们称它为非自治系统. 设  $f(t, x)$  在  $D = I^+ \times G$  上连续, 在  $D$  的任意一个闭子域上对  $x$  满足李普希兹条件. 其中  $I^+ = [0, +\infty)$ ,  $G$  是  $\mathbf{R}^n$  中包含  $x=0$  在内的某一区域. 如同 § 1

中所讲的那样，我们还假定

$$f(t, 0) = 0. \quad (5.6)$$

本节我们都作如上的假定，现在来研究(5.5) 的零解的稳定性。

首先我们指出，非自治系统与自治系统有着本质上的差异。例如对于常系数线性系统(自治系统)

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

写出它的特征方程

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

如果特征方程所有的根的实部都小于零，那么该系统的零解是渐近稳定的。对于变系数线性系统(非自治系统)

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

如果也仿照常系数那样，写出

$$\det(A(t) - \lambda I) = 0,$$

上述方程的根  $\lambda$ ，一般说来是  $t$  的函数。对于一切  $t \geq t_0$ ，如果上述方程所有的根的实部都小于零，是否能说该系统的零解是渐近稳定的或者稳定的呢？下述例子说明这种猜想是不成立的。

考察 1952 年维诺格拉特 (Виноград) 所举的例子，即第二章 §3 中研究过的例 3。对于该系统，写出方程  $\det(A(t) - \lambda I) = 0$ ，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) - \lambda & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 10) = 0,$$

其中  $a_{11}(t) = -1 - 9\cos^2 6t + 12 \sin 6t \cos 6t$ ,

$$a_{12}(t) = 12 \cos^2 6t + 9 \sin 6t \cos 6t,$$

$$a_{21}(t) = -12 \sin^2 6t + 9 \sin 6t \cos 6t,$$

$$a_{22}(t) = -1 - 9 \sin^2 6t - 12 \sin 6t \cos 6t.$$

对于一切  $t \geq t_0$ ， $\lambda_1 = -1$ ， $\lambda_2 = -10$ ，它们都有负实部。但所述系统的通解表达式中，含有正指数  $e^{2t}$  项，故零解是不稳定的。此例

说明,不能随便将关于自治系统的方法和结论,搬到非自治系统上去.

本节只简要地介绍非自治系统中的李雅普诺夫第二方法,但略去基本定理的证明.

首先引进一些不同于自治系统情形的概念. 下面我们考虑的函数  $V(t, x)$  在区域

$$\{(t, x) \mid t \geq T, \|x\| \leq h\} \quad (5.28)$$

上有定义,且对所有变量具有连续的一阶偏导数. 对一切  $t \geq T$ ,  $V(t, 0) = 0$ . 其中  $T \geq 0$  和  $h > 0$  都是常数.

**定义 5.7** 如果存在  $T \geq 0$  和  $h > 0$ , 在区域(5.28)上  $V(t, x) \geq 0$  ( $V(t, x) \leq 0$ ), 则称  $V(t, x)$  是常正(常负)函数. 常正函数与常负函数统称常号函数.

**定义 5.8** 如果不论  $T$  多么大和  $h > 0$  多么小, 在区域(5.28)上函数  $V(t, x)$  可取到正值, 也可取到负值, 则称  $V(t, x)$  是变号函数.

**定义 5.9** 如果存在  $T \geq 0$  和  $h > 0$ , 函数  $V(t, x)$  在区域(5.28)上满足不等式

$$V(t, x) \geq W(x), \quad (V(t, x) \leq -W(x)),$$

其中  $W(x)$  在  $\|x\| \leq h$  上是定正函数, 则称  $V(t, x)$  是定正(定负)函数. 定正函数与定负函数统称定号函数.

为了研究非自治系统的零解的渐近稳定性, 还要引入

**定义 5.10** 设  $T \geq 0$  是某一常数. 如果对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 存在与  $t$  无关的常数  $\delta > 0$ , 使得当  $\|x\| < \delta$  时, 对一切  $t \geq T$  都有  $|V(t, x)| < \varepsilon$ , 则称函数  $V(t, x)$  具有无限小上界.

换句话说讲, 函数  $V(t, x)$  具有无限小上界, 就是对一切  $t \geq T$  一致地成立

$$\lim_{x \rightarrow 0} V(t, x) = 0.$$

显然, 如果  $V(x)$  与  $t$  无关, 则由于  $V(x)$  的连续性以及  $V(0) = 0$ ,



易知  $V(\mathbf{x})$  具有无限小上界.

**例 1** (i)  $V_1(t, x_1, x_2) = t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2\cos t$  是定正函数. 这是因为当  $t \geq 2$  时,  $V_1(t, x_1, x_2) \geq x_1^2 + x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos t) \geq x_1^2 + x_2^2 + (|x_1| - |x_2|)^2 \triangleq W(x_1, x_2)$ , 其中  $W(x_1, x_2)$  是定正函数. 它不具有无限小上界. 这是因为, 对于给定的  $\varepsilon > 0$ , 不论  $\delta > 0$  多么小, 取  $x_1 = 0, x_2 = \frac{\delta}{2}$ , (满足  $|x_1| + |x_2| < \delta$ ), 则

$$V_1 = \frac{t\delta^2}{4}. \quad \text{当 } t > \frac{4\varepsilon}{\delta^2} \text{ 时, } V_1 > \varepsilon. \text{ 即不存在满足定义 5.10 的}$$

正数  $\delta$ , 故  $V_1(t, x_1, x_2)$  不具有无限小上界.

(ii)  $V_2(t, x_1, x_2) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$  是常正函数但不是定正函数. 事实上, 设  $V_2(t, x_1, x_2)$  是定正函数, 则存在  $T \geq 0$  和  $h > 0$ , 当  $t \geq T$  和  $|x_1| + |x_2| \leq h$  时,

$$e^{-t}(x_1^2 + x_2^2) \geq W(x_1, x_2).$$

其中  $W(x_1, x_2)$  在  $|x_1| + |x_2| \leq h$  上是定正函数. 固定  $x_1$  和  $x_2$ , 使  $0 < |x_1| + |x_2| \leq h$ , 在  $e^{-t}(x_1^2 + x_2^2) \geq W(x_1, x_2)$  中令  $t \rightarrow +\infty$ , 左边趋于零而右边是正数, 这是一个矛盾. 故  $V_2(t, x_1, x_2)$  不是定正函数. 由此例可见, 即使对任何  $(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 函数  $V(t, \mathbf{x})$  恒取正值, 也不能保证它是定正函数.

(iii)  $V_3(t, \mathbf{x}) = (x_1 + \cdots + x_n)\sin t$  具有无限小上界. 这是因为,  $|V_3(t, \mathbf{x})| \leq \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|$ . 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ . 当  $\|\mathbf{x}\| < \delta$  时, 对一切  $t \geq T$  都有  $|V_3(t, \mathbf{x})| < \varepsilon$ . 其中  $T \geq 0$  是常数.

下面我们介绍非自治系统(5.5)的李雅普诺夫第二方法的几个定理, 它们的证明基本上与自治系统相应的定理类似, 只是细节上略有差别. 因此证明从略, 有兴趣的读者可参阅马尔金著《运动稳定性理论》第五章.

**定理 5.12** 设系统(5.5)满足(5.6). 如果存在  $h > 0$  和  $T \geq 0$ , 在区域(5.28)上存在定正函数  $V(t, \mathbf{x})$ , 它关于(5.5)对于  $t$  的全导数

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (5.29)$$

是常负函数, 则(5.5)的零解是稳定的.

**定理 5.13** 设系统(5.5)满足(5.6). 如果存在  $h > 0$  和  $T \geq 0$ , 在区域(5.28)上存在具有无限小上界的定正函数  $V(t, \mathbf{x})$ , 它关于(5.5)对于  $t$  的全导数(5.29)是定负函数, 则(5.5)的零解是渐近稳定的.

关于不稳定性, 有下述切塔耶夫定理.

**定理 5.14** 设系统(5.5)满足(5.6). 如果存在  $h > 0$  和  $T \geq 0$ , 在区域(5.28)上存在函数  $V(t, \mathbf{x})$ , 具有下述性质:

(i) 在  $\{\mathbf{x}\}$  空间的  $\|\mathbf{x}\| < h$  内, 存在区域  $\psi$ , 在  $[T, +\infty) \times \psi$  内,  $0 < V(t, \mathbf{x}) \leq K < +\infty$  ( $K$  是某常数);

(ii) 在  $[T, +\infty) \times \psi$  内, 函数  $V$  关于(5.5)对于  $t$  的全导数(5.29)取正值, 且对于任给  $\alpha > 0$ , 必存在  $l > 0$ , 当  $V(t, \mathbf{x}) \geq \alpha$  时必有  $\frac{dV}{dt} \geq l$ ;

(iii)  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  在区域  $\psi$  的边界  $\partial\psi$  上.

(iv) 在  $\|\mathbf{x}\| < h$  内部的  $\partial\psi$  上, 对一切  $t \geq T$ , 都有  $V(t, \mathbf{x}) = 0$ .

则(5.5)的零解是不稳定的.

显然, 如果考虑的是自治系统, 且  $V(\mathbf{x})$  与  $t$  无关, 则定理 5.12—5.14 所叙述的条件分别与定理 5.4, 定理 5.5 和定理 5.7

的一致.

## 例 2 研究系统

$$\frac{dx}{dt} = -x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x \cos t - y$$

的零解的稳定性.

解 取定正李雅普诺夫函数

$$V = x^2 + y^2.$$

它关于这个方程组对  $t$  的全导数是

$$\frac{dV}{dt} = -2 \left( x^2 + y^2 - 2xy \cos^2 \frac{t}{2} \right).$$

因为  $x^2 + y^2 - 2xy \cos^2 \frac{t}{2} \geq x^2 + y^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0$ ,

故  $\frac{dV}{dt}$  是常负函数, 因此零解是稳定的.

## 例 3 研究系统

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ay - b(t)x$$

的零解的稳定性. 其中常数  $a > 0$ ,  $b(t) = b_0(1 + \varepsilon f(t))$ , 常数  $b_0 \geq 0$ , 函数  $f(t)$  有界, 常数  $\varepsilon > 0$  足够小.

解 取定正李雅普诺夫函数

$$V(x, y) = \left( y + \frac{ax}{2} \right)^2 + \left( b_0 + \frac{a^2}{4} \right) x^2.$$

它对  $t$  的全导数

$$\frac{dV}{dt} = -ay^2 - 2(b(t) - b_0)xy - ab(t)x^2.$$

上式右端二次式的判别式

$$\Delta = (b(t) - b_0)^2 - a^2 b(t) = b_0 \varepsilon^2 f^2(t) - a^2(1 + \varepsilon f(t))$$

由于  $f(t)$  有界, 故存在  $M > 0$ ,  $|f(t)| < M$ . 因此, 只要取  $\varepsilon > 0$  足够小, 可使  $\Delta \leq -\alpha < 0$ , 其中  $\alpha$  是某正常数. 于是  $\frac{dV}{dt}$  是定负函

数, 又因  $V$  中不含  $t$ , 故它具有无限小上界. 由定理 5.13, 所给系统的零解是渐近稳定的.

#### 例 4 研究系统

$$\frac{dx}{dt} = tx + e^t y + ax^2 y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+2}{t+1}x - ty + bxy^2$$

的零解的稳定性.

解 取变号函数  $V = xy$ . 它在  $x = y = 0$  的小邻域内有界. 它对  $t$  的全导数

$$\frac{dV}{dt} = \frac{t+2}{t+1}x^2 + e^t y^2 + (a+b)x^3 y^2 > x^2 + y^2 + (a+b)x^2 y^2.$$

在  $x = y = 0$  的足够小的邻域内, 上式右端是定正函数. 由定理 5.14 知, 所给系统的零解不稳定.

与自治系统的情形一样, 对于一个给定的系统, 要具体作出李雅普诺夫函数来研究零解的稳定性, 要有相当的技巧, 在此不多介绍了.

## § 5 艾瑞尔曼问题 · 柯尔莫哥洛夫模型

本节介绍两个应用实例.

### (一) 艾瑞尔曼(Айзерман)问题

艾瑞尔曼于 1949 年从自动调整理论的角度提出一个全局稳定性问题, 在非线性系统的稳定性研究中, 这个问题也是一个重要的理论问题. 艾瑞尔曼问题如下: 给定系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + f(x_k), \\ \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, (i=2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (5.30)$$

其中  $k$  为 1 到  $n$  间的某一下标,  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) 都是常数. 设存在常数  $\alpha$  和  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$  (也可以是  $\alpha = -\infty$ ,  $\beta = +\infty$ ), 当  $f(x_k) = Fx_k$ , 其中常数

$F$  满足  $\alpha < F < \beta$  时, 常系数线性系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + F x_k, \\ \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, (i=2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (5.31)$$

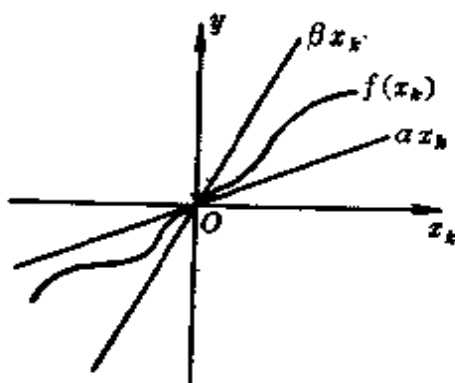


图 5-3

的特征方程的根都具有负实部, 问对任意连续函数  $f(x_k)$ , 满足条件

$$(a) f(0) = 0; \quad (b) \alpha < \frac{f(x_k)}{x_k} < \beta, x_k \neq 0 \quad (5.32)$$

时, 系统(5.30)的零解是否全局稳定?

条件(5.32)称为**艾瑞尔曼条件**。

艾瑞尔曼问题用形象化的说法是, 当  $f(x_k)$  的图象是一条位于如图 5-3 的角域内通过原点的直线时, (5.30) 的零解是(全局)稳定的, 那么当  $f(x_k)$  的图象是一条位于同一角域内通过原点的曲线时, (5.30) 的零解是否全局稳定? 如果这个问题的答案是肯定的, 那么显然, 能够大大地推进非线性系统的稳定性的研究工作。同时, 对一些自动控制系统, 也能够方便地用满足一定性质的非线性元件代替某些线性元件而保持系统原来的稳定性不变。

限于篇幅, 我们不可能对艾瑞尔曼问题解决的现状作详细的介绍, 而讲一种十分简单的情形。

考虑二维系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \quad (5.33)$$

若  $f(x) = Fx$ , 其中  $F$  是常数, 则系统(5.33)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} F - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (d + F)\lambda + Fd - bc = 0.$$

由定理 5.3, 上述特征方程的所有的根都具有负实部的充分必要条件是下述霍尔维茨行列式都大于零:

$$-(d + F) > 0, \quad -(d + F)(Fd - bc) > 0,$$

即

$$d + F < 0, \quad Fd - bc > 0. \quad (5.34)$$

系统(5.33)的艾瑞尔曼问题的提法是, 当  $f(x)$  是非线性连续函数, 且满足条件

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & f(0)=0; \\ (b) \quad & d+\frac{f(x)}{x}<0, \quad \frac{f(x)}{x}d-bc>0, (x\neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

时, (5.33) 的零解是否全局稳定?

条件(5.35)的(b) 是由霍尔维茨条件(5.34)中以  $\frac{f(x)}{x}$  代替  $F$  转化来的, 所以人们将它称为广义霍尔维茨条件. 下面我们介绍定理.

**定理 5.15** 设系统(5.33)满足下述条件:

(i) (5.35);

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x [f(x)d-bcx]dx = \infty$ ;

(iii)  $f(x)$  连续且保证(5.33)的初值问题解的唯一性.

则(5.33)的零解是全局稳定的.

**证明** 首先设  $b \neq 0$ , 作

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (dx - by)^2 + \int_0^x [f(x)d - bcx]dx.$$

由条件(ii)和(i)中的  $\frac{f(x)}{x}d - bc > 0$ , 易见  $V$  是无限大定正函数. 通过简单计算, 可得

$$\frac{dV}{dt} = \left( \frac{f(x)}{x}d - bc \right) \left( \frac{f(x)}{x} + d \right) x^2 \leq 0,$$

$\frac{dV}{dt}$  是常负函数, 当且仅当  $x=0$  时  $\frac{dV}{dt}=0$ . 但  $x=0$  不是(5.33)的轨线. 由定理 5.11, 系统(5.33)的零解全局稳定.

现在考虑  $b=0$  的情形. 此时, 从(5.35)的(b)可推得  $d < 0$ ,  $\frac{f(x)}{x} < 0$ .

(5.33)的第一个方程成为  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ . 取  $V_1 = x^2$ , 从而  $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2xf(x) \leq 0$ , 且仅当  $x=0$  时  $\frac{dV_1}{dt}$  为零. 由定理 5.10, 方程  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  的零解  $x=0$  全局稳定. 从而对任给的  $t_0 \geq 0$  和  $x_0$ , 满足  $x(t_0) = x_0$  的解  $x = x(t)$  有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0. \quad (5.36)$$

又由于  $\frac{dx^2}{dt} \leq 0$ , 因此有

$$|x(t)| \leq |x_0|, \quad \text{当 } t \geq t_0 \text{ 时.} \quad (5.37)$$

把这个解  $x = x(t)$  代入(5.33)的第二个方程, 得

$$\frac{dy}{dt} = dy + cx(t).$$

由一阶线性微分方程解的公式,

$$y(t) = e^{d(t-t_0)} \left[ \int_{t_0}^t cx(\tau) e^{-d(\tau-t_0)} d\tau + y_0 \right]$$

其中  $y_0 = y(t_0)$  是初值. 于是当  $t \geq t_0$  时有

$$|y(t)| \leq e^{d(t-t_0)} \left[ \int_{t_0}^t |cx(\tau)| e^{-d(\tau-t_0)} d\tau + |y_0| \right] \quad (5.38)$$

上述积分号内的函数是正的, 因此, 当  $t \rightarrow +\infty$  时上述积分或者趋于某一极限, 或者趋于无穷. 如果是存在某一极限, 则由于  $d < 0$ , 因此当  $t \rightarrow +\infty$  时 (5.38) 右端趋于零; 若是趋于无穷, 则由洛必达法则并注意到(5.36), 故(5.38)右端也趋于零. 总之, 对任意初值  $y(t_0) = y_0$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0.$$

此外, 再由(5.38)有

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq e^{d(t-t_0)} \left[ \int_{t_0}^t |cx_0| e^{-d(\tau-t_0)} d\tau + |y_0| \right] = \\ &= \frac{|cx_0|}{-d} [1 - e^{d(t-t_0)}] + |y_0| e^{d(t-t_0)} \\ &< \frac{|cx_0|}{-d} + |y_0|. \end{aligned} \quad (5.39)$$

因此, 取  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{-d}{|c|} \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , 则当  $|x_0| < \delta$ ,  $|y_0| < \delta$  时, 由(5.37)推得  $|x(t)| < \varepsilon$ ; 由(5.39)推得  $|y(t)| < \varepsilon$ , 对一切  $t \geq t_0$  成立. 于是证得当  $b = 0$  时系统(5.33)的零解是全局稳定的.

在数学上, 可以举例说明, 当仅满足定理 5.15 的条件(i)和(iii)时, 艾瑞尔曼问题可作否定的回答. 由此可知, 仅用广义霍尔维茨条件并不能保证非线性系统的零解的全局稳定性. 不过, 实际问题中的非线性函数  $f(x)$ , 多数能满足定理 5.15 中的条件(ii). 所以我们可以认为, 艾瑞尔曼问题大体上可作肯定的回答.

## (二) 柯尔莫哥洛夫模型

在 § 3 中介绍的全局稳定性, 要求对于空间  $R^n$  中任意  $x_0$  所对应的解  $x(t) \rightarrow 0$  (当  $t \rightarrow +\infty$  时). 但是在一些实际问题中, 并不要求考虑整个空间, 而只要研究空间  $R^n$  中的某一包含 0 的区域  $G$ . 如果零解在李雅普诺夫意义下是稳定的, 并且当  $t \rightarrow +\infty$  时, 对任意  $x_0 \in G$  所对应的解  $x(t) \rightarrow 0$ , 则称零解  $x=0$  在区域  $G$  内是全局稳定的, 也称在区域  $G$  内是大范围稳定的. § 3 中所介绍的判定全局稳定性的定理, 可以毫不费力地经改写用到区域  $G$  内全局稳定性上来, 只需将无限大正函数定义中的 “ $\|x\| \rightarrow \infty$ ” 改为 “ $\xi(x) \rightarrow \infty$ ”, 其中

$$\xi(x) = \max\left(\rho(0, x), \frac{1}{\rho(x, \partial G)}\right),$$

$\rho(0, x)$  表示  $x$  与 0 的距离,  $\rho(x, \partial G)$  表示  $x$  与  $G$  的边界  $\partial G$  的距离.  $\xi(x) \rightarrow \infty$  所表示的几何意义, 读者是很容易理解的.

现在介绍生态学的一个例子. 设有两个群体, 一个群体是捕食者, 另一个是食饵. 它们生活于同一环境之中, 它们相互竞争又互惠共存. 设  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  分别表示时间  $t$  时它们的数量, 那么这两个群体相互作用的最一般的模型是

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 F_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 F_2(x_1, x_2). \quad (5.40)$$

它称为柯尔莫哥洛夫(Kolomogorov)模型.

设(5.40)有一个而且仅有一个正奇点  $(x_1^*, x_2^*)$  (即常值解  $x_1 = x_1^* > 0$ ,  $x_2 = x_2^* > 0$ ). 它是

$$F_1(x_1, x_2) = 0 \text{ 与 } F_2(x_1, x_2) = 0$$

在第一象限内的交点. 由泰勒公式, (5.40)可写成

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) \right], \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \left[ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} (x_2 - x_2^*) \right]. \end{aligned}$$

或写成

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 [a_{11}(x_1, x_2)(x_1 - x_1^*) + a_{12}(x_1, x_2)(x_2 - x_2^*)], \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 [a_{21}(x_1, x_2)(x_1 - x_1^*) + a_{22}(x_1, x_2)(x_2 - x_2^*)]. \end{aligned} \quad (5.41)$$



其中  $a_{ij}$  为  $\partial F_i / \partial x_j$  在点  $(x_1^* + \theta_1(x_1 - x_1^*), x_2^* + \theta_2(x_2 - x_2^*))$  取值, 它们是  $x_1$  和  $x_2$  的已知函数. 一般说来, 它们是非线性的.

**定理 5.16** 对于系统(5.41), 如果满足条件:

(i) 它只有一个正的常值解  $x_1 = x_1^* > 0, x_2 = x_2^* > 0$ ;

(ii) 存在常数  $h_{11} > 0, h_{22} > 0, h_{12} \geq 0, h_{21} \geq 0$ , 对一切  $x_1 > 0$  和  $x_2 > 0$ , 有

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1, x_2) &\leq -h_{11}, & a_{22}(x_1, x_2) &\leq -h_{22}, \\ |a_{12}(x_1, x_2)| &\leq h_{12}, & |a_{21}(x_1, x_2)| &\leq h_{21}; \end{aligned}$$

(iii)  $h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0$ .

则(5.41)的正的常值解  $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ , 在第一象限  $x_1 > 0, x_2 > 0$  内是全局稳定的.

**证明** 作变换

$$y_1 = x_1 - x_1^*, \quad y_2 = x_2 - x_2^*.$$

于是(5.41)化为

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= (y_1 + x_1^*)[b_{11}(y_1, y_2)y_1 + b_{12}(y_1, y_2)y_2], \\ \frac{dy_2}{dt} &= (y_2 + x_2^*)[b_{21}(y_1, y_2)y_1 + b_{22}(y_1, y_2)y_2]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

其中  $b_{ij}(y_1, y_2) = a_{ij}(x_1, x_2)$ . 于是将(5.41)的正的常值解  $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$  化成(5.42)的零解  $y_1 = 0, y_2 = 0$ . 作李雅普诺夫函数

$$V(y_1, y_2) = c_1 \left[ y_1 - x_1^* \ln \left( 1 + \frac{y_1}{x_1^*} \right) \right] + c_2 \left[ y_2 - x_2^* \ln \left( 1 + \frac{y_2}{x_2^*} \right) \right].$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是待定的正常数.  $V$  关于(5.42)对于  $t$  的全导数是

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= c_1 y_1 [b_{11}(y_1, y_2)y_1 + b_{12}(y_1, y_2)y_2] + \\ &\quad + c_2 y_2 [b_{21}(y_1, y_2)y_1 + b_{22}(y_1, y_2)y_2] \leq \\ &\leq -c_1 h_{11} y_1^2 + (c_1 h_{12} + c_2 h_{21}) y_1 y_2 - c_2 h_{22} y_2^2. \end{aligned}$$

以下证明  $V(y_1, y_2)$  在区域

$$G = \{(y_1, y_2) | y_1 > -x_1^*, y_2 > -x_2^*\}$$

内是无限大正函数, 且可选取  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , 使  $\frac{dV}{dt}$  是定负函数, 从而就证了定理.

**考察函数**

$$\varphi(y) = y - x^* \ln\left(1 + \frac{y}{x^*}\right), \quad y > -x^*.$$

其中  $x^*$  是正常数, 易知  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(y) = \frac{y}{y+x^*}$ ,  $\varphi''(y) = \frac{x^*}{(y+x^*)^2} > 0$ ,  $\varphi'(0) = 0$ . 因此对一切  $y > -x^*$  有  $\varphi(y) \geq 0$ , 且仅在  $y = 0$  处  $\varphi(y) = 0$ . 另一方面, 容易看出, 当  $y \rightarrow -x^*$  或  $y \rightarrow +\infty$  时,  $\varphi(y) \rightarrow +\infty$ . 这就证得一元函数  $\varphi(y)$  在区间  $-x^* < y < +\infty$  内是无限大定正函数. 由此可见, 二元函数  $V(y_1, y_2)$  在区域  $G$  内是无限大定正函数.

为证  $\frac{dV}{dt}$  是定负函数, 即证存在  $c_1 > 0$  和  $c_2 > 0$ , 使

$$(c_1 h_{12} + c_2 h_{21})^2 - 4c_1 h_{11} c_2 h_{22} < 0$$

上式即

$$(c_1 h_{12} - c_2 h_{21})^2 - 4c_1 c_2 (h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21}) < 0. \quad (5.43)$$

如果  $h_{12} = h_{21} = 0$ , 则任取  $c_1 > 0$  和  $c_2 > 0$ , 就可使 (5.43) 成立. 如果  $h_{12} h_{21} \neq 0$ , 则取  $c_1 = h_{21}$  和  $c_2 = h_{12}$ , 就可使 (5.43) 成立. 如果  $h_{12}$  与  $h_{21}$  中一个是零另一个不是零, 例如  $h_{12} = 0, h_{21} \neq 0$ , 则任取  $c_1 > 0$ , 并取  $c_2$  满足  $0 < c_2 < \frac{4c_1 h_{11} h_{22}}{h_{21}^2}$  就可使 (5.43) 成立.

定理表明, 两个群体在定理所述的条件下, 它们的数量分别趋于常数值.

## 附录一 向量级数

**定义 1** 设  $\alpha_m = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(m)} \\ \alpha_2^{(m)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(m)} \end{pmatrix}$  是  $n$  维向量,  $\{\alpha_m\}$  是向量序列,

如果有  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_i^{(m)} = \alpha_i, (i=1, 2, \dots, n)$ , 则称向量序列  $\{\alpha_m\}$  收

敛于向量  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ , 记为

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \alpha.$$

**定义 2** 设有向量级数

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \dots \quad (1)$$

记  $s_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i$  若向量序列  $\{s_m\}$  收敛, 其极限为  $s$ , 即  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s$ ,

则称级数(1)收敛, 并有和  $s$ , 记为

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \dots.$$

显然,  $s = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \dots$  的意义是指

$$\alpha_i^{(1)} + \alpha_i^{(2)} + \dots + \alpha_i^{(m)} + \dots = s_i, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

其中  $s_i$  是  $s$  的元素, 即  $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ .

**定义 3** 任意向量  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$  的范数(或模)定义为  $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , 记

为  $\|a\|$ , 即

$$\|a\| = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

范数具有下列性质

1°  $\|a\| \geq 0$ , 当且仅当  $a=0$  时  $\|a\|=0$ ;

2° 对于任意常数  $\alpha$ ,  $\|\alpha a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$ ;

3°  $\|a_1 + a_2\| \leq \|a_1\| + \|a_2\|$ .

**定义 4** 如果  $n$  个级数

$a_i^{(1)}(t) + \cdots + a_i^{(m)}(t) + \cdots$ , ( $i=1, 2, \cdots, n$ ), 在区

间  $a \leq t \leq b$  上都一致收敛, 则称向量级数

$$a_1(t) + \cdots + a_m(t) + \cdots$$

在区间  $a \leq t \leq b$  上一致收敛. 其中  $a_m^{(i)} = \begin{pmatrix} a_1^{(m)}(t) \\ \vdots \\ a_n^{(m)}(t) \end{pmatrix}$ .

易知, 若级数  $\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m(t)\|$  在区间  $a \leq t \leq b$  上一致收敛, 则级

数  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(t)$  在区间  $a \leq t \leq b$  上也一致收敛. 事实上, 若  $\sum_{m=1}^{\infty} \|a_m(t)\|$

在区间  $a \leq t \leq b$  上一致收敛, 则由  $|a_i^{(m)}(t)| \leq \|a_m(t)\|$ , ( $a \leq t \leq b$ ,

$i=1, 2, \cdots, n$ ), 知  $n$  个级数  $\sum_{m=1}^{\infty} a_i^{(m)}(t)$ , ( $i=1, 2, \cdots, n$ )

在区间  $a \leq t \leq b$  上都一致收敛, 由定义 4 知级数  $\sum_{m=1}^{\infty} a_m(t)$  在区

间  $a \leq t \leq b$  上一致收敛.

## 附录二 矩阵指数 $e^A$

**定义 1** 设  $A_m = (a_{ij}^{(m)})$  是  $n$  阶矩阵<sup>1)</sup>,  $\{A_m\}$  是矩阵序列. 如果有  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), 则称序列  $\{A_m\}$  收敛于矩阵  $A = (a_{ij})$ , 记为

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A.$$

换言之, 所谓  $\{A_m\}$  收敛于矩阵  $A$  是指  $A_m$  的元素  $a_{ij}^{(m)}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) 当  $m \rightarrow \infty$  时, 以  $A$  的对应元素  $a_{ij}$  为其极限.

**定义 2** 设有矩阵级数

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m + \dots \quad (1)$$

记  $S_m = \sum_{k=1}^m A_k$ , 若矩阵序列  $\{S_m\}$  收敛, 其极限为  $S$ , 即  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S$ , 则称级数(1)收敛, 并有和  $S$ , 记为

$$S = A_1 + A_2 + \dots + A_m + \dots$$

显然  $S = A_1 + A_2 + \dots + A_m + \dots$  的意义是指

$$a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(m)} + \dots = s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

其中  $s_{ij}$  是  $S$  的元素, 即  $S = (s_{ij})$ .

**定义 3** 如果(2)式左边  $n^2$  个数项级数是绝对收敛的, 则称矩阵级数(1)是绝对收敛的.

由数项级数的知识知, 若级数(1)绝对收敛, 则级数(1)本身也是收敛的.

**定义 4** 任意  $n$  阶矩阵  $A = (a_{ij})$  的范数定义为  $\max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ ,

1) 本附录中所遇到的矩阵都是  $n$  阶矩阵.

记为  $\|A\|$ , 即

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

范数具有下列性质:

1°  $\|A\| \geq 0$ , 当且仅当  $A=0$  时  $\|A\|=0$ ;

2° 对于任意常数  $\alpha$ ,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ ;

3°  $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$ ;

4°  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

下面的准则可用来判别级数(1)的绝对收敛性.

**准则** 级数  $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$  绝对收敛的充要条件是数项级数  $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$

收敛.

**证明** 先设  $\sum_{m=1}^{\infty} A_m$  绝对收敛. 于是, 存在正数  $K$ , 它与  $N, i,$

$j$  无关, 使得

$$\sum_{m=1}^N |a_{ij}^{(m)}| < K, \quad (N \geq 1; i, j = 1, 2, \dots, n).$$

因此

$$\sum_{m=1}^N \|A_m\| \leq \sum_{m=1}^N \sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(m)}| < n^2 K.$$

故  $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$  是收敛的.

反之, 若  $\sum_{m=1}^{\infty} \|A_m\|$  收敛, 则由  $|a_{ij}^{(m)}| \leq \|A_m\|$ , ( $i, j = 1, 2,$

$\dots, n$ ), 知(2)式左边  $n^2$  个级数中的每一个级数都是绝对收敛的. 由定义 3 知级数(1)绝对收敛.

现在来证明, 对于任意矩阵  $A$ , 级数

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots \quad (3)$$

绝对收敛. 事实上,

$$\|I\| + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \cdots + \frac{\|A\|^k}{k!} + \cdots = e^{\|A\|} \quad (\text{因 } \|I\| = 1)$$

由上述准则知道级数(3)绝对收敛.

级数(3)的和记为  $e^A$ , 即

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots, \quad (4)$$

称它为**矩阵指数**.

下面引入矩阵的微分和积分的概念, 然后介绍矩阵指数的性质.

**定义 5** 如果矩阵  $A(t) = (a_{ij}(t))$  的每一个元素  $a_{ij}(t)$  是变量  $t$  的可微函数, 则称  $A(t)$  是可微的. 它关于  $t$  的导数定义为  $\left(\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right)$ , 记为

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left(\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right).$$

如果  $a_{ij}(t) (i, j = 1, 2, \cdots, n)$  是可积函数, 则称  $A(t)$  是可积的. 它关于  $t$  的积分定义为  $\left(\int_a^b a_{ij}(t) dt\right)$ , 记为  $\int_a^b A(t) dt$ , 即

$$\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt\right)$$

矩阵  $A(t)$  称为是连续的或是有界的, 是指  $A(t)$  的每个元素  $a_{ij}(t)$  都是连续的或都是有界的.

矩阵指数

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k t^k}{k!} + \cdots, \quad |t| < \infty$$

具有下列性质(证明略):

1° 当  $t=0$  时,  $e^{At}=I$ . 又对于任意  $t$  有  $e^{t''}=e^t I$ .

2° 对任何矩阵  $A$ , 有

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A.$$

3° 如果  $AB=BA$ , 则

$$(e^{At})(e^{Bt})=(e^{Bt})(e^{At})=e^{(A+B)t}.$$

4° 对任何矩阵  $A$ ,  $e^{At}$  总是满秩的, 且有

$$(e^{At})^{-1}=e^{-At}.$$

### 附录三 微分方程组的解对初值的 连续依赖性定理

考虑微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=\psi(t, y) \quad (1)$$

其中  $y$  和  $\psi$  是  $n$  维向量函数, 区域  $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(t, y) \in D$ .

**定理** 设  $\psi(t, y)$  在区域  $D$  内连续, 在  $D$  的任一有界闭子域上关于  $y$  满足李普希兹条件. 又设  $y=\phi(t)$  在闭区间  $T_0 \leq t \leq T$  上是 (1) 的解, 则存在  $\eta > 0$ , 使得当  $T_0 \leq t_0 \leq T$ ,  $\|y_0 - \phi(t_0)\| \leq \eta$  时, (1) 的满足  $y(t_0)=y_0$  的解  $y=y(t, t_0, y_0)$  在闭区间  $T_0 \leq t \leq T$  上存在, 并且它关于  $t, t_0, y_0$  是闭区域

$$U=\{(t, t_0, y_0) | T_0 \leq t \leq T, T_0 \leq t_0 \leq T, \|y_0 - \phi(t_0)\| \leq \eta\}$$

上的连续函数.



# 习 题

## 第 一 章

求下列方程的解。

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{y}. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y}. \end{cases}$$

$$4. \frac{dx}{0} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}.$$

$$5. \frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

$$6. \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y+x^2} = \frac{dz}{z}.$$

$$7. \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

$$8. \frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}.$$

## 第 二 章

1. 试用逐次逼近法证明定理 2.1.

2. 试证明,在一定条件下(读者在证明过程中给出),可以从一阶线性微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), (i=1,2,\dots,n)$$

及微分它们而得到的方程中,消去  $n-1$  个变量而化为含一个未知函数的一个  $n$  阶线性微分方程. 而由这个  $n$  阶线性微分方程的解不需要再积分就可求得其他  $n-1$  个未知函数.

3. 证明:若两方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dx}{dt} = B(t)x$$

有相同的基本解矩阵, 则  $A(t) \equiv B(t)$ . 这里  $A(t)$  和  $B(t)$  是两个  $n$  阶连续矩阵.

4. 证明: 如果  $\Phi(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  的基本解矩阵, 则  $(\Phi^T(t))^{-1}$  是共轭方程组  $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$  的基本解矩阵.

5. 证明: 如果  $\Phi(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  的基本解矩阵, 则  $\Psi(t)$  是其共轭方程组  $\frac{dx}{dt} = -A^T(t)x$  的基本解矩阵的充分必要条件是  $\Psi^T(t)\Phi(t) = C$  ( $C$  是非奇异常数矩阵).

6. 设  $A(t)$  为实矩阵,  $x = \varphi(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  的复值解, 试证明  $\varphi(t)$  的实部和虚部分别都是此方程组的解.

7. 设  $A(t)$  为实矩阵,  $f(t)$  为实向量,  $x = \varphi(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$  的复值解. 试证明  $x = \varphi(t)$  的实部是原方程组的解, 虚部是对应的齐次方程组的解.

8. 设  $A(t)$  是矩阵,  $f_i(t)$  是向量,  $x = \varphi_i(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_i(t)$  的解 ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

试证明  $x = \sum_{i=1}^m \varphi_i(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^m f_i(t)$  的解.

9. 设  $A(t)$  为  $n$  阶矩阵,  $f(t)$  为  $n$  维向量,  $x^{(i)}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) 是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$  的  $n+1$  个线性无关的解. (i) 试求对应齐次方程组的基本解组; (ii) 试求该非齐次方程组的通解.

10. (刘维尔公式) 设  $A(t)$  是区间  $a \leq t \leq b$  上的  $n$  阶连续矩阵,  $\Phi(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  在区间  $a \leq t \leq b$  上的基本解矩阵. 试证明

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds}, \quad t_0 \in [a, b].$$

其中  $\text{tr } A(t)$  表示  $A(t)$  的主对角线元素之和, 即  $\text{tr } A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$ ,  $A(t) = (a_{ij}(t))$ .

11. 设矩阵  $A(t)$  中元素  $a_{ij}(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) 是  $t$  的连续周期函数, 周期为  $\omega$ .  $X(t)$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  的基本解矩阵. 求证存在非奇异常数矩阵  $B$ , 使  $X(t + \omega) = X(t)B$ .

12. 试作出以矩阵

$$\begin{pmatrix} e^{2t}(\cos 6t + 2 \sin 6t) & e^{-13t}(\sin 6t - 2 \cos 6t) \\ e^{2t}(-\sin 6t + 2 \cos 6t) & e^{-13t}(\cos 6t + 2 \sin 6t) \end{pmatrix}$$

为基本解矩阵的线性齐次微分方程组.

13. 已知  $x = -\sin t$ ,  $y = \cos t$  是方程组

$$\frac{dx}{dt} = (-2 \cos^2 t)x - (1 + 2 \sin t + \cos t)y$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - 2 \sin t \cos t)x - (2 \sin^2 t)y$$

的解, 试求其通解.

14. 设  $A(t)$  为实矩阵,  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  是  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$  的基本解矩阵. 设  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  是一对共轭复值解. 记

$$\varphi_1(t) \triangleq \text{Re } x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)),$$

$$\varphi_2(t) \triangleq \text{Im } x_1(t) = \frac{1}{2i}(x_1(t) - x_2(t)).$$

试证明, 用向量  $\varphi_1(t)$  和  $\varphi_2(t)$  代替  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  后所得的矩阵  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))$  也是一个基本解矩阵.

### 第 三 章

用特征根法求方程组  $\frac{dx}{dt} = Ax$  的通解(1—8 题), 其中  $A$  为

$$1. A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

先求  $e^{At}$ , 然后写出方程组  $\frac{dx}{dt} = Ax$  的通解(9—14 题), 其中  $A$  为

$$9. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. 用拉普拉斯变换求 9, 11, 12, 13 各题的  $e^{At}$ .

求下列初值问题的解(16—18 题).

$$16. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$17. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

$$18. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

用常数变易法求方程组的通解(19—20 题).

$$19. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

$$20. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, t > 0.$$

用拉普拉斯变换求初值问题的解(21—24 题)

$$21. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$22. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t-\pi) \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$23. \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - x + 5 \frac{dy}{dt} = t, & x(0) = 0, \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 4y - 2 \frac{dx}{dt} = -2, & y(0) = 0, \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + F(t), \\ \frac{dy}{dt} = x + G(t), \end{cases} \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0.$$

化为高阶方程后求解初值问题(25—27 题)

$$25. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x, x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$26. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} e^t, x(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$27. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} x, x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解下列方程组(28—32 题).

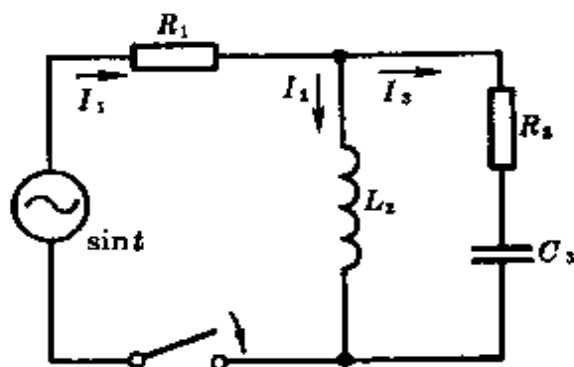
$$28. \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

$$29. \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = 2x_1 + \frac{dx_1}{dt} + x_2, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = 4x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

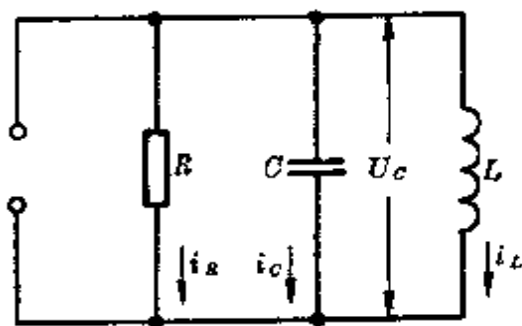
$$30. \begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dv}{dt} - v = 0, \\ 2 \frac{dy}{dt} - y + \frac{dw}{dt} - w = 0, \\ \frac{dy}{dt} + 3y + \frac{dv}{dt} - 4v + 3w = 0. \end{cases}$$

$$31. \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 15 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

32. 一电路如图所示, 输入电压为  $\sin t$ , 电路参数  $L_2 = 1$  亨,  $C_3 = 1$  法,  $R_1 = 2$  欧,  $R_2 = 3$  欧, 当  $t = 0$  时接通电路, 其时  $I_1 = 0, I_3 = 0$ . 试求电流  $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$ .



(第 32 题)



(第 33 题)

33. 一电路如图所示, 输入电压为零, 电路参数  $C = 1$  法,  $L = 1$  亨,  $R = 1$  欧. 试写出以电容上的电压  $U_C$  和电感上的电流  $i_L$  为因变量, 以时间  $t$  为自变量的微分方程组. 并在初值条件  $U_C|_{t=0} = U_C^0, i_L|_{t=0} = i_L^0$  下求方程组的解.

34. 一机械系统如图所示. 设轮子的摩擦力可忽略不计, 弹簧服从虎克定律. 试写出轮子的运动微分方程, 并在下述条件下, 求出它的解.

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1, \quad y_1|_{t=0} = y_2|_{t=0} = \frac{dy_1}{dt}\bigg|_{t=0} = 0,$$

$$m_1 = m_2 = 1, \quad \frac{dy_2}{dt}\bigg|_{t=0} = 6,$$

其中  $k_1, k_2, k_3$  为弹簧的弹性系数,  $m_1, m_2$  为物体的质量.



(第34题)

35. 设有两种共同生存的生物群体, 在时刻  $t$  时它们的个数分别为  $x(t)$ ,  $y(t)$ . 已知  $x(t)$ ,  $y(t)$  满足方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

且  $x|_{t=0} = 1000$ ,  $y|_{t=0} = 2000$ . 求出  $x(t)$ ,  $y(t)$ , 并画出它们的图形.

36. 设  $n$  阶矩阵  $B = (b_{ij})$  具有  $r$  重特征根  $\lambda = 0$ , 又设向量  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 1)^T$  满足  $B\alpha = 0$ , 证明  $n-1$  阶矩阵  $C = (c_{ij}) = (b_{ij} - \alpha_i b_{n,j})$ ,  $(i, j = 1, 2, \dots, n-1)$ , 具有  $r-1$  重特征根  $\lambda = 0$ , 并证明  $\det(B - \lambda I) = -\lambda \det(C - \lambda I)$ .

(提示: 在行列式  $\det(B - \lambda I)$  中以  $\alpha_i$  乘第 1 列, 以  $\alpha_2$  乘第 2 列,  $\dots$ , 以  $\alpha_{n-1}$  乘第  $n-1$  列都加到第  $n$  列中去. 然后分别以  $(-\alpha_k)$  乘第  $n$  行加到第  $k$  行  $(k = 1, 2, \dots, n-1)$  中去.)

## 第 四 章

判定下列系统(1—11题)的奇点的类型. 并画出奇点附近的相图.

$$1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 6y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y - x, \\ \frac{dy}{dt} = -9x + y. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

$$6. \frac{dx}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y.$$

$$7. \frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

$$8. \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \quad \frac{dy}{dt} = 7x - 3y.$$

$$9. \frac{dx}{dt} = -x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y.$$

$$10. \frac{dx}{dt} = 3x - 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + y.$$

$$11. \frac{dx}{dt} = -2x - 5y + 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 2y.$$

12. 引入变量  $y = \frac{dx}{dt}$ , 将方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$  化为方程组, 就常数  $b, c$  的各种情况, 讨论该系统的奇点的类型 (设  $c \neq 0$ ).

判定下列系统 (13—17 题) 的奇点的类型.

$$13. \frac{dx}{dt} = x + 2y - 3, \quad \frac{dy}{dt} = xy + x - 2y - 2.$$

$$14. \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\lambda x + x^3, (\lambda \neq 0).$$

$$15. \frac{dx}{dt} = 16x^2 + 9y^2 - 25, \quad \frac{dy}{dt} = 9x^2 + 16y^2 - 25.$$

$$16. \frac{dx}{dt} = 3x - 4y + x^2, \quad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 2xy.$$

$$17. \frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - 5y - e^x.$$

18. 设函数  $F(x)$  二阶连续可微,  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) < 0$ . 试研究系统  $\frac{dx}{dt} = y - F(x)$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x$  的奇点类型.

19. 设常数  $a$  和  $\sigma$  都是正常数,  $f(u)$  连续可微; 当  $u > 0$  且增加时,  $f(u)$  单调减少且恒为正; 当  $u \rightarrow +\infty$  时  $f(u) \rightarrow l$ . 试研究系统

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + f(a - y), \quad \frac{dy}{dt} = -\sigma y + f(a - x)$$

的奇点的类型.



20. 确定系统  $\frac{dx}{dt} = |3x| + y$ ,  $\frac{dy}{dt} = 4x$  的奇点, 并画出相图.

21. 求系统  $\frac{dx}{dt} = -xy$ ,  $\frac{dy}{dt} = -y^2 + x^4$  的轨线, 并画出相图.

22. 画出系统  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -2x + f(y)$  的相图, 其中

$$f(y) = \begin{cases} -3y, & \text{当 } y > 0, \\ 3y, & \text{当 } -1 < y \leq 0, \\ -2y - 5, & \text{当 } y \leq -1. \end{cases}$$

试证明下列系统(23—27 题)不存在极限环.

23.  $\frac{dx}{dt} = y + x^3$ ,  $\frac{dy}{dt} = x + y + y^3$ .

24.  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -(1 + x^2 + y^4)y - x$ .

25.  $\frac{dx}{dt} = 2xy + x^3$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x^2 + y - y^2 + y^3$ .

26.  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x - y + x^2 + y^2$ .

27.  $\frac{dx}{dt} = x(y - 1)$ ,  $\frac{dy}{dt} = x + y - 2y^2$ .

28. 设  $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$ , 其中  $f(x)$  和  $g(x)$  连续, 且在  $\alpha < x < \beta$

内  $f(x) \neq 0$ . 试证明: 除常数外, 全在带域  $\alpha < x < \beta$  内的解必不是周期解.

求下列系统(29—31 题)的极限环, 并说明它们的稳定性. 其中  $(r, \theta)$  是极坐标.

29.  $\frac{dr}{dt} = r(4 - r^2)$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 1$ .

30.  $\frac{dr}{dt} = r(1 - r)^2$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = -1$ .

31.  $\frac{dx}{dt} = -x + (x - y)\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{dy}{dt} = -y + (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$ .

32. 对于方程组

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 \neq 0$$

设当  $x=y=0$  时右端为零.

(i) 验证  $x = \frac{1}{2} \cos t, y = \frac{1}{2} \sin t$  是它的解;

(ii) 证明极限环  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  是稳定的.

试证明下列系统(33—37 题)存在极限环(周期解).

$$33. \quad \frac{dx}{dt} = y - x + x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y + y^3.$$

$$34. \quad \frac{dx}{dt} = -2y + 4x - x(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 4y - y(x^2 + y^2).$$

$$35. \quad \frac{dx}{dt} = x + 3y - x(x^2 + 9y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + 2y - y(x^2 + 9y^2).$$

$$36. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + (x^4 - 1) \frac{dx}{dt} + x^3 = 0.$$

$$37. \quad \frac{d^2x}{dt^2} - (4 + 9x^2 - 5x^4) \frac{dx}{dt} - x + x^3 = 0.$$

38. 将具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

化成方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x - by,$$

试画出它的相图.

## 第 五 章

1. 设  $g(t)$  和  $f(t)$  在区间  $0 \leq t < +\infty$  上连续, 并设  $y = \varphi_0(t)$  是

$$\frac{dx}{dt} = g(t)x + f(t)$$

的任意一个解. 试证明: 若  $\int_0^{+\infty} g(t)dt < +\infty$ , 则解  $y = \varphi_0(t)$  是稳定的; 若

$\int_0^{+\infty} g(t)dt = -\infty$ , 则解  $y = \varphi_0(t)$  是渐近稳定的; 若  $\int_0^{+\infty} g(t)dt = +\infty$ , 则解

$y = \varphi_0(t)$  是不稳定的。

2. 设  $A(t)$  是  $n$  阶矩阵, 在  $0 \leq t < +\infty$  上连续, 考虑线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (*)$$

试证明: 若  $(*)$  的每一解在  $0 \leq t < +\infty$  上有界, 则  $(*)$  的零解是稳定的; 若  $(*)$  的每一解满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , 则  $(*)$  的零解是渐近稳定的。

3. 试证明第四章习题第 22 题的零解是不稳定的。

研究下列系统(4—7 题)的零解的稳定性。

$$4. \quad \frac{dx}{dt} = x + 2y + 3 \sin y, \quad \frac{dy}{dt} = -3y - xe^x.$$

$$5. \quad \frac{dx}{dt} = x - y + x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + y - xy^2.$$

$$6. \quad \frac{dx}{dt} = y - 3z - x(y - 2z)^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y - y(x + z)^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x - y - z.$$

$$7. \quad \frac{dx}{dt} = -x - y + z + xyz, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2z + z^2,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + 2y + z + xz^3.$$

下列系统(8—9 题)中  $\alpha$  和  $\beta$  为参数, 当参数满足什么条件时, 系统按(2.3)式化成方程组后的零解是渐近稳定的。

$$8. \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 2 \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + 3x = 0,$$

$$9. \quad \frac{d^4x}{dt^4} + 3 \frac{d^3x}{dt^3} + \alpha \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + \beta x = 0.$$

用李雅普诺夫第二方法研究下列系统(10—17 题)零解的稳定性。

$$10. \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3.$$

$$11. \quad \frac{dx}{dt} = -y + \alpha x^3 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = x + \alpha y^3 + xy^4.$$

$$12. \quad \frac{dx}{dt} = 2y^3 - x^5, \quad \frac{dy}{dt} = -x - y^3 + x^3.$$

$$13. \frac{dx}{dt} = 2x^2 - 2y^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy.$$

$$14. \frac{dx}{dt} = x^3 - 2y^3, \quad \frac{dy}{dt} = xy^3 + x^2y + \frac{1}{3}y^3.$$

$$15. \frac{dx}{dt} = y - x^3, \quad \frac{dy}{dt} = -2(x^3 + y^3).$$

$$16. \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \operatorname{sgn}\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0.$$

$$17. \frac{d^2x}{dt^2} + |x| \left(\frac{dx}{dt} + x\right) = 0.$$

18. 设  $\frac{dx}{dt} = y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -f(x)$ , 其中  $f(x)$  是连续函数, 且当  $0 < |x| < \delta$  时  $xf(x) > 0$ ,  $\delta$  是某常数. 试证明该系统的零解是稳定的.

19. 设  $\frac{dx}{dt} = f(x) + \beta y$ ,  $\frac{dy}{dt} = vx + \delta y$ , 其中  $f(x)$  连续,  $f(0) = 0$ . 如果当  $x \neq 0$  时  $(\delta f(x) - \beta vx)x > 0$ ,  $xf(x) + \delta x^2 < 0$ , 则该系统的零解是渐近稳定的.

20. 将 19 题中的  $vx$  换为函数  $g(x)$ . 试问对  $g(x)$  应添加什么条件以保证相应系统的零解的渐近稳定性?

21. 设在点  $O(0,0)$  的某邻域内  $P(x,y) < 0$ ,  $Q(x,y) < 0$ , 且连续, 试证明,  $\frac{dx}{dt} = xP(x,y)$ ,  $\frac{dy}{dt} = yQ(x,y)$  的零解是渐近稳定的.

22. 设  $\frac{d^2x}{dt^2} + h\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \frac{dx}{dt} + x = 0$ , 其中函数  $h(x,y) \geq 0$ . 试证明该系统的零解是稳定的.

23. 利用定理 5.9 证明定理 5.2 中(i)的一般情况.

24. §3 例 2 中的函数  $V(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2} + y^2$  在整个平面  $(x,y)$  上是定正函数, 但不是无限大定正函数. 试画出曲线族  $V(x,y) = c$ .

25. 试证明系统  $\frac{dx}{dt} = -3x + xy^4 - x^3y^3$ ,  $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{4}y^3$  的零解是全局稳定的.

试证明下列系统(26—27 题)的零解在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的, 但不是全局稳定的.

$$26. \frac{dx}{dt} = -x + 2x^2y, \quad \frac{dy}{dt} = -y.$$

$$27. \frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

28. 设  $n$  和  $m$  是常数,  $n \geq m > 0$ . 方程  $\frac{dx}{dt} = -mx + e^{n^2}x^n$  的一次近似方程的零解显然是渐近稳定的. 试通过直接求解, 验证方程本身的零解却是不稳定的.

29. 试证明方程  $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1} + bx^2$  的一次近似方程的零解是渐近稳定的, 但方程本身的零解是不稳定的. 其中常数  $b \neq 0$ .

30. 试证明方程  $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} - x^3$  的一次近似方程的零解是不稳定的, 但方程本身的零解是渐近稳定的.

研究下列系统(31—35 题)的零解的稳定性.

$$31. \frac{dx}{dt} = -x \cos t + y(1 + \sin t \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = x(\sin t \cos t - 1) - y \sin^2 t.$$

$$32. \frac{dx}{dt} = -x + y, \quad \frac{dy}{dt} = x \cos t - y.$$

$$33. \frac{dx}{dt} = ty + tx + \frac{t+1}{t+2}xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = tx - 2y - \frac{1}{t+2}x^2y.$$

$$34. \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{t+1} - 10y.$$

$$35. \frac{dx}{dt} = 2(y+z),$$

$$\frac{dy}{dt} = 8(x+w^4)w^3,$$

$$\frac{dz}{dt} = -2[1 + e^{-\beta t}(2 - \sin \Omega t)]x - 2(x+w^4),$$

$$\frac{dw}{dt} = -2[1 + e^{-\beta t}(2 - \sin \Omega t)]y - 2(y+z).$$

当  $\Omega^2 < 3\beta^2, \beta > 0$ .

36. 试研究系统  $\frac{dx}{dt} = ax + f(y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$  的艾瑞尔曼问题(需要的条件请读者在研究过程中自行添上).

37. 试研究第四章单摆方程(4.33)的平衡点(即奇点)的稳定性,并说明它的物理意义.

38. 试证明系统

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_1}{k_1} x(k_1 - x - \alpha y), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha_2}{k_2} y(k_2 - \beta x - y)$$

的正常值解在第一象限是全局稳定的. 其中参数  $\alpha, \beta, k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2$  都是正常数, 且  $k_1 - \alpha k_2 > 0, k_2 - \beta k_1 > 0$ .

## 习 题 答 案

### 第 一 章

1.  $x = c_1 t, \sin y = c_2 t$ . 2.  $x^2 - y^2 = c_1, xy - z = c_2$ . 3.  $x^2 + y^2 + z^2 = c_1, x + y + z = c_2$ . 4.  $x = c_1, y = c_1 \ln z + c_2$ . 5.  $y^2 - z^2 = c_1, 2x + (y - z)^2 = c_2$ . 6.  $x = c_1 z, y = c_2 x + x^2$ . 7.  $y = c_1 z, x^2 + y^2 + z^2 = c_2 y$ . 8.  $x + z = c_1, y + u = c_2, (x - z)^2 + (y - u)^2 = c_3$ .

### 第 二 章

9. (i)  $x^{(i)}(t) - x^{(n+1)}(t), (i=1, \dots, n)$ ;

(ii)  $x^{(n+1)}(t) + \sum_{i=1}^n c_i (x^{(i)}(t) - x^{(n+1)}(t))$ .

12.  $\frac{dx}{dt} = -(\sin^2 6t - 12 \sin 6t \cos 6t + 10 \cos^2 6t)x + 3 \cos 6t (4 \cos 6t + 3 \sin 6t)y,$

$\frac{dy}{dt} = -3 \sin 6t (4 \sin 6t - 3 \cos 6t)x -$

$-(\cos^2 6t + 10 \sin^2 6t + 12 \sin 6t \cos 6t)y.$

13.  $x = -c_1 \sin t + c_2 e^{-2t} \cos t, \quad y = c_1 \cos t + c_2 e^{-2t} \sin t.$

### 第 三 章

1.  $x = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-4t}.$  2.  $x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$

$$3. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

$$4. \mathbf{x} = c_1 e^{-t} \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right] + c_2 e^{-t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t \right].$$

$$5. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + e^t \left[ c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right\} + c_3 \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right\} \right]$$

$$6. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right].$$

$$7. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t}.$$

$$8. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right] e^{2t} + c_3 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 \right] e^{2t}.$$

$$9. e^{At} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{pmatrix}.$$

$$10. e^{At} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{5t} + 2e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 2e^{5t} + 4e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$11. e^{At} = \begin{pmatrix} \cos 2t + 2 \sin 2t & \frac{5}{2} \sin 2t \\ -2 \sin 2t & \cos 2t - 2 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

$$12. e^{At} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} e^{-2t} + 5e^{2t} - e^{3t} & 5e^{2t} - 5e^{3t} & e^{-2t} - e^{3t} \\ -e^{-2t} + e^{3t} & 5e^{2t} & -e^{-2t} + e^{3t} \\ 4e^{-2t} - 5e^{2t} + e^{3t} & -5e^{2t} + 5e^{3t} & 4e^{-2t} + e^{3t} \end{pmatrix}.$$

$$13. e^{At} =$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6e^{2t} - \cos t - 2 \sin t & -2e^{2t} + 2 \cos t + 2 \sin t & 2e^{2t} - 2 \cos t + \sin t \\ 3e^{2t} - 3 \cos t - \sin t & -e^{2t} + 6 \cos t + 2 \sin t & e^{2t} - \cos t + 3 \sin t \\ 5 \sin t & -10 \sin t & 5 \cos t \end{pmatrix}.$$

$$14. e^{At} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 16. x(t) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-t} \\ -1 + 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

$$17. x(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix} e^t + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} t e^t + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

$$18. x(t) = \begin{pmatrix} \cos t - 3 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$19. x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$20. x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t^{-2}.$$

$$21. x = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t.$$

$$22. x = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, & t < \pi, \\ \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}, & t > \pi. \end{cases}$$

$$23. x = -t + 5 \sin t - 2 \sin 2t, y = 1 - 2 \cos t + \cos 2t.$$

$$24. x = x_0 \operatorname{ch} t + y_0 \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t * F(t) + \operatorname{sh} t * G(t),$$

$$y = x_0 \operatorname{sh} t + y_0 \operatorname{ch} t + \operatorname{ch} t * G(t) + \operatorname{sh} t * F(t).$$

$$25. x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$



$$26. \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3t \\ -3t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} e^t.$$

$$27. \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \\ 1+2t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

$$28. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 e^t \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t \right] + \\ + c_3 e^t \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right].$$

$$29. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ -1-2t \end{pmatrix}.$$

$$30. \begin{pmatrix} v \\ w \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \right] + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ + c_4 \begin{pmatrix} -16 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} e^t.$$

$$31. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cos 5t + \\ + c_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \sin 5t.$$

$$32. I_1 = -\frac{1}{87} e^{-\frac{2}{3}t} + \frac{1}{6} e^{-t} - \frac{9}{58} \cos t + \frac{21}{58} \sin t,$$

$$I_2 = -\frac{5}{81} e^{-\frac{3}{5}t} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{16}{58} \cos t + \frac{18}{58} \sin t.$$

$$33. \begin{pmatrix} \frac{dU_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_c \\ i_L \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} i_c \\ i_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2} U_{c0} e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] - \frac{2 i_{L0} + U_{c0}}{2 \sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right],$$

$$34. \begin{pmatrix} \frac{d^2 y_1}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \sin \sqrt{3} t.$$

$$35. x = 2500 - 1500 e^{-t}, \quad y = 1250 + 750 e^{-t}.$$

## 第 四 章

1. 不稳定焦点. 2. 稳定焦点. 3. 不稳定退化结点. 4. 中心. 5. 鞍点. 6. 不稳定结点. 7. 稳定临界结点. 8. 稳定结点. 9. 稳定退化结点. 10. 不稳定临界结点  $(1, -2)$ . 11. 中心  $(-1, 1)$ . 12.  $c < 0$  鞍点;  $b > 0, b^2 > 4c > 0$ , 稳定结点;  $b > 0, b^2 = 4c$ , 稳定退化结点;  $b > 0, 4c > b^2$ , 稳定焦点;  $4c > b^2 = 0$ , 中心;  $b < 0, 4c > b^2$ , 不稳定焦点;  $b < 0, b^2 = 4c$ , 不稳定退化结点;  $b < 0, b^2 > 4c > 0$ , 不稳定结点. 13. 鞍点  $(2, \frac{1}{2})$ , 不稳定结点  $(5, -1)$ . 14. 当  $\lambda < 0$ , 唯一鞍点  $(0, 0)$ ; 当  $\lambda > 0$ , 中心  $(0, 0)$ , 鞍点  $(\pm \sqrt{\lambda}, 0)$ . 15. 不稳定结点  $(1, 1)$ ; 稳定结点  $(-1, -1)$ ; 鞍点  $(1, -1)$  和  $(-1, 1)$ . 16. 不稳定焦点  $(0, 0)$ . 17. 鞍点  $(0, 0)$ . 18. 当  $F'(0) > -2$ , 不稳定焦点; 当  $F'(0) = -2$ , 不稳定退化结点; 当  $F'(0) < -2$ , 不稳定结点. 19. 稳定结点. 20. 奇点  $(0, 0)$ . 21. 奇点  $(0, 0)$ , 轨线族  $x^2 + y^2 = cx^2$ . 22. 奇点  $(0, 0)$ . 26. 提示: 取  $B(x, y) = e^{ax}$ , 确定  $a$ . 27. 提示: 取  $B(x, y) = x^a$ , 确定  $a$ . 29.  $r = 2$  稳定极限环. 30.  $r = 1$  半稳定极限环. 31.  $r = 1$  不稳定极限环.

## 第 五 章

4. 渐近稳定. 5. 不稳定. 6. 渐近稳定. 7. 不稳定. 8.  $\alpha > \frac{3}{2}$ . 9.

$\alpha < \frac{2}{3}, \beta > 0, 9\beta - 6\alpha + 4 < 0$ . 10. 渐近稳定. 11.  $\alpha = 0$  时稳定,  $\alpha < 0$  时  
 渐近稳定,  $\alpha > 0$  时不稳定. 12. 渐近稳定. 13. 不稳定. 14. 不稳定. 15.  
 渐近稳定. 16. 不稳定. 17. 渐近稳定. 20.  $g(x)$  连续, 保证初值问题解的  
 唯一性,  $g(0) = 0$ , 当  $x \neq 0$  时  $[\delta f(x) - \beta g(x)]x > 0, xf(x) + \delta x^2 < 0$ . 24. 分  
 三种情况讨论:  $0 < c < 1, c = 1, c > 1$ . 31. 作  $V = x^2 + y^2$ , 稳定. 32. 作  $V =$   
 $x^2 + y^2$ , 稳定. 33. 作  $V = xy$ , 不稳定. 34.  $V = \frac{1}{2}[x^2 + (t+1)y^2]$ , 稳定.  
<sup>3</sup>5.  $V = (x^2 + y^2)[1 + e^{-\beta t}(2 - \sin \Omega t)] + (x + w^4)^2 + (y + z)^2$ , 稳定.

