微分形式导论

[美] M. Schreiber 著

白正国 译

人民教育出版社

微分形式导论

[美] M. Schreiber 著
白正国 译

人民教育出版社

本书力求有启发性地介绍微分形式. 内容包括偏微分、微分形式、高维积分、外微分、在 R^3 的向量运算、极值、积分几何等七章，还有三个附录，内容包括在一流形上的体积元素，形式的代数学以及关于 Curl^2 的一个注意.

本书可供综合大学和师范院校数学系师生作教学参考用书.

微分形式导论

［美］M. Schreiber 著

白正国 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 3.5 字数 83,000

1980 年 8 月第 1 版 1981 年 2 月第 1 次印刷

印数 00,001—10,500

书号 13012·0510 定价 0.33 元

序

微分形式的一些实用知识深刻地影响着微积分学及其发展，应不迟延地把它列入课程中．另一方面，关于微分形式的系统论证需要拓扑学和代数的工具，这对于低年级的大学生来说是困难的．近年来有关高等微积分的一些教科书用到微分形式．其中我们指出 **Fleming**[2]，**Nickerson-Spencer-Steenrod** [3]和**Spivak** [6]的书作为代表①．这些书虽然照顾到读者的程度，却不能减轻他们在这方面的负担，因为它们对此所提供的恰恰是全面地、一般性地、正规的论述．因此，在这类书和传统的高等微积分之间有着一道鸿沟．最近，我们借提供高等微积分的入门课程的机会，尝试用最少的工具和非常少的预备知识来表达微分形式的技巧．这本书就是这个试验的结果．

我们要使该书的叙述成为有启发性的和具体化的．概言之，我们把一个微分形式看作一个多维的被积式，如此它将自动地服从变数变换的运算规律．它的积分区域(流形)是欧氏空间内明确给定的"曲面"．形式的微分（外微分）是函数的微分明显的推广，依赖这种运算完善了我们的论证．为了避免在一般 Stokes 公式的正确证明中用到几何学方面的和一些不太简单的技巧起见，我们替代以简短的说得通的论证，希望它会具有吸引力和说服力．这是我们为了把该书内容保持在一个初等水平所作的若干简略化中的一个项目．

该书的预备知识限于标准的微积分学初级教程稍稍加上一点其它知识．这些知识并不是很专门的，例如 k 维的欧氏空间，k-k

①括弧内的数字指的是书末的参考书目．

阶矩阵和它们相乘法则，关于 k-k 阶行列式的简单知识等．在目前对正规的大学低年级学生，看来一般都具有这些知识。线性代数除了第六章一个地方外，一般是不需要的，在那里我们要把一个实的对称矩阵对角线化．关于这个定理和关于代数方面的其它若干知识（如上面所说的），我们指定 Schreier-Sperner 的教科书[5]作为参考书．本书在这些问题上的论述都不需要预备知识．在解析方面，我们指定 Courant[1]作为参考书．在设计本书时，我们力求除了这两本书外不需要参考其它的书，勤奋的读者在此基础上将可以顺利地自学．但本书较合适的用途是作为大学二年级学生或现代高等微积分的入门课程的一部分．

各章的内容从目录表便可一目了然，只有两个例外：在 6.2 我们给出关于几何平均和算术平均的定理和在 7.3 我们证明了等周不等式．我们用的记号都是标准的，列在记号页上．记号 $n.m(k)$ 是指 $n.m$ 节的公式(k)．

我愉快地感谢：对 P. A. Griffiths，他鼓励了这个计划并建议本书包含积分几何的若干内容；对 Mary Ellen O'Brien，她给手稿打字；对学生们，他们自愿参加了这一试验．

M. Schreiber

1977 年 6 月 21 日

记　号

$a \in A$　　a 是集 A 的一个元素

$\boldsymbol{x}$　　一个向量

$\|\boldsymbol{x}\|$　　$\boldsymbol{x}$ 的长度

$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的数量积

$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$　　$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的向量积

$\binom{n}{k}$　　二项式系数 $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$

R　　实数集

R^k　　k 维的欧氏空间

$f: R^n \to R^m$　　以 n 向量为变量的 m 向量值的函数

$Z(\phi)$　　$\phi: R^k \to R^1$ 的在 R^k 中满足 $\phi=0$ 的集

$f \circ g$　　函数 f 和 g 的复合 $f \circ g(x)=f(g(x))$.

$\omega \wedge \tau$　　微分形式 ω 和 τ 的楔积

A^r　　r 次形式的空间

W　　向量场的集合

S　　数量场的集合

$|T|$　　矩阵 T 的行列式

${}^tT$　　矩阵 T 的转置

$\mathrm{tr}T$　　矩阵 T 的迹

目　录

第一章 偏 微 分

1.1 偏导数

我们记实的有序 k-组 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 为 R^k. 这样的一个 k-组叫做一个 k 向量, 数 x_1, x_2, $\cdots$, x_k 是它的分量. k 向量的相加和向量与数量的乘积运算是按逐个分量函数进行的, 这事实在平面和三维空间已为大家所熟知. 在我们的记号下, 平面和三维空间分别记为 R^2 和 R^3.

k 向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积(数量积) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\Sigma x_i y_i$ 决定了 R^k 中的长度和交角, 叙述如下. $\boldsymbol{x}$ 的长度 $\|\boldsymbol{x}\|$ 是 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 间的交角 θ 由式子(余弦定律) $\cos\theta=\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{y}/\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$ 所定义. 这些是在 R^2 和 R^3 中的对应结构对于 R^k 的恰当的类似. 特别, $\boldsymbol{x}\in R^k$ 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称为单位向量, 并且 k 向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 当 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$ 时是正交的.

一个 n 变量的函数可以看做以一个 n 向量作为变量的函数. 我们也将涉及取向量值的函数. 记号 f: $R^n\to R^m$ 表示 f 是以一个 n 向量作为变量而取 m 向量值的函数. 由于 1 向量是一个数, 函数 f: $R^n\to R^1$ 是 n 变量的一个数量值的函数.

取在 R^k 的单位向量 $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_k=(0, 0, \cdots, 1)$ 作为正交参考标架. 这些向量所在的直线是 R^k 中一个笛氏坐标系的轴. 每点 $\boldsymbol{x}\in R^k$ 关于这个参考标架有唯一的表达式 $\boldsymbol{x}=\Sigma x_i\boldsymbol{e}_i$, 它关于标架的笛氏坐标是 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$. 对每一坐标方向附上一个偏微分运算 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 它对一个向量变量的数量值函数 f: $R^k\to R^1$ 起这样的作用:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f\right](\boldsymbol{x})=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{\delta} \tag{1}$$

容易看到，对一函数 f: $R^k\to R^1$ 施行运算$\frac{\partial}{\partial x_i}$的结果是另一同类型的函数$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f\right]$: $R^k\to R^1$. 在不会混淆的情况下，我们把这新函数简记为 f_i. 即

$$f_i(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f\right](\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

f_i 称为 f 的第 i 偏导数. 它的几何意义如下. 对已给 f: $R^k\to R^1$, 我们可以把方程

$$z=f(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

定义为 R^{k+1} 中的一个 k 维曲面. 如果对点 $\boldsymbol{x}\in R^k$, 除第 i 坐标外固定其余所有坐标，而令第 i 坐标 x_i 任意变动，这些点画成 R^k 的一直线，它通过 $\boldsymbol{x}$ 且和 $\boldsymbol{e}_i$ 平行. 这些点的坐标是$(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_k)$, $-\infty<t<+\infty$. 它们在 f 下的象是在曲面 (3)上的 1 维曲线(具有一个自由度，即 t 的变动). 作为 t 的函数的这条曲线的斜率是 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_k)$.

由于函数 f: $R^k\to R^1$ 的偏导数 f_i 仍然是同一类型的函数，它们也可以偏微分. f_i 关于第 j 变量的微分结果可以记为 f_{ij}. 按照标准记号是

$$f_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}f=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}f\right] \tag{4}$$

必须注意下指标的次序是可以交换的. 由于 f_{ij} 又是同一类型的函数，它们可以偏微分，记为 f_{ijk}. 按此进行，f_i 称为一阶偏导数，f_{ij} 为二阶偏导数，如此等等. 我们已经假定在讨论中所涉及的所有极限(它们都具有(1)的一般形状)都是存在的. 这就是说，在原则上有 k 个一阶偏导数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$; k^2 个二阶偏导数 $f_{11}, f_{12}, \cdots,$

$f_{1k}, f_{21}, f_{22}, \cdots, f_{kk}$; k^3 个三阶偏导数；如此等等. 另一方面，应用平均值定理不难指出，当所有的偏导数都是所含变量的连续函数时，则微分的次序是无关紧要的①. 例如，如果 f_{12} 和 f_{21} 都是连续函数，则 $f_{12}=f_{21}$；同样 $f_{112}=f_{121}=f_{211}$，如果三者都是连续的. 因此，如果高阶偏导数都是连续函数，则它们不相同的个数便显著地减少了. 混合高阶偏导数相等的规律可以叙述如次：如果两个高阶偏导数（都是连续函数）含有相同的指标且有相同的重复数，则二者是相等的.

1.2 可微分性，链的法则

由定义，一个实变量的实函数 f: $R^1 \to R^1$ 在 x 是可微分的，如果

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon(h) \tag{1}$$

$$\varepsilon(h) \to 0 \quad \text{当 } h \to 0 \tag{2}$$

这就是说，当误差 $\eta(h)=h\cdot\varepsilon(h)$ 消失得比 h 要快时，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta(h)}{h}=0$，增量

$$(\Delta f)(x, h)=f(x+h)-f(x)$$

可以随心所欲地趋近于微分

$$(df)(x, h)=f'(x)\cdot h \tag{3}$$

注意，微分是增量 h 的一个线性函数.

设对一已给函数 f: $R^1 \to R^1$ 和一已给 $x \in R^1$，存在一常数 A 和一函数 α: $R^1 \to R^1$ 使得

$$\begin{gathered}(\Delta f)(x, h)=Ah+\alpha(h)\\ \lim_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{h}=0\end{gathered} \tag{4}$$

①参看 Courant [1], vol. II, *pp.* 55—58.

这就是说，增量$(\Delta f)(x, h)$可以用h的一个线性函数逼近到所要的精确性．函数f的这种性质蕴涵着f在x是可微分的，并且

$$f'(x)=A$$

把前面两段放在一起，便可看出，对单变量函数来说，可微分性和线性逼近是一样的．对多变量函数可微分性的推广可由推广线性逼近的概念到多变量来做出，叙述如下．

一函数$f: R^k \to R^1$在$\boldsymbol{x}\in R^k$称为是（定义）可微分的，如果存在常数$A_1, A_2, \cdots, A_k$和一函数$\alpha: R^k \to R^1$使得

$$(\Delta f)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})=\sum A_i h_i+\alpha(\boldsymbol{h}) \tag{5}$$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{\alpha(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}=0 \tag{6}$$

其中$\boldsymbol{h}=(h_1, h_2, \cdots, h_k)$是增量向量，而$(\Delta f)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})$是$f$的对应增量．

我们把(4)的线性函数Ah用增量向量$\boldsymbol{h}$的分量$h_1, \cdots, h_k$的一个线性函数来替代，而“$h\to 0$”成为“$\boldsymbol{h}\to \boldsymbol{0}$”．这是(4)的恰当的类似．注意对任何$\boldsymbol{x}\in R^k$有

$$|x_j|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\sqrt{k}\cdot\max\{|x_1|, \cdots, |x_k|\} \tag{7}$$

这是由于$x_j^2\leqslant\sum x_i^2\leqslant k\cdot\max\{x_1^2, \cdots, x_k^2\}$的缘故．因此，$\boldsymbol{x}$的所有分量是小的当且只当$\|\boldsymbol{x}\|$是小的，并且$\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$当且只当$\|\boldsymbol{h}\|\to 0$，当且只当，对每个$j$，$h_j\to 0$．

设f在这意义下是可微分的，在(5)式置$\boldsymbol{h}=\delta\boldsymbol{e}_i$，使得

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})}{\delta}=A_i+\frac{\alpha(\boldsymbol{h})}{\delta}$$

由此当$\delta\to 0$（即$\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$）极限是存在的，并且$A_i=f_i(\boldsymbol{x})$．这就是说，上面所定义的可微分性蕴涵着一阶偏导数的存在性．其逆，如f在一点$\boldsymbol{x}$的近傍有连续的一阶偏导数，我们现在即将证明，f在$\boldsymbol{x}$是可微分的．这证明在记号上看来似乎是麻烦的，不过它的概念非常简单：我们把从$\boldsymbol{x}$到$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}$的变化分成若干步骤而每一步只

包含着一个变量的变化，这样，定义1.1(1)和微分的基本性质(1)、(2)便可使用了．以下是证明．为了建立(5)、(6)，置 $\boldsymbol{h}=\sum_{i=1}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i$，并且把$(\Delta f)(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{h})$分解为$(\Delta f)(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}+\Sigma h_i\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{k}\left\{f(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j+1}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)\right\}$，其中最后一项$(j=k)$应解释为$\{f(\boldsymbol{x}+h_k\boldsymbol{e}_k)-f(\boldsymbol{x})\}$．现在应有$f(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j+1}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)=h_jf_j(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j+1}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)+\alpha_j$，而由1.1(1)和(1)，(2)当$h\to0$时，$\alpha_j/h_j\to0$．由一阶偏导数的连续性的假定，我们有$h_jf_j(\boldsymbol{x}+\sum_{i=j+1}^{k}h_i\boldsymbol{e}_i)=h_jf_j(\boldsymbol{x})+h_j\varepsilon_j$，而当$h_j\to0$时$\varepsilon_j\to0$．因此$(\Delta f)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})=\sum_{j=1}^{k}h_jf_j(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{k}\{\alpha_j+h_j\varepsilon_j\}$．利用(7)的第一部分，我们看到误差项$\sum_{j=1}^{k}\{\alpha_j+h_j\varepsilon_j\}$满足(6)，证毕．

下面的记号是醒目的．置增量向量 $\boldsymbol{h}$ 为 $d\boldsymbol{x}=(dx_1,\ dx_2,\ \cdots,\ dx_k)$，且写(5)中的线性项为

$$(df)(\boldsymbol{x},d\boldsymbol{x})=\Sigma f_i(\boldsymbol{x})dx_i \tag{8}$$

我们要强调地指出，这个量是 $\boldsymbol{x}$ 和 $d\boldsymbol{x}$ 的函数，称为函数 f: $R^k\to R^1$ 的微分，并且注意到它是对一个单变量函数的相应公式(3)的类似式子．关于单变量或多变量函数的可微分性的定义，现在实质上可以用相同的格式给出：设单变量函数或多变量函数 f 在一点近傍的增量 Δf 分别在指定的精确度(4)或(6)的范围内逼近于对应的微分，则 f 在这点是可微分的．对单变量函数来说，为达到这个精确度，导数的存在是充分条件，而对多变量函数我们已经证明

了一阶偏导数的存在和连续是充分条件.

设函数 $\boldsymbol{g}$: $R^1 \to R^k$ 具有分量 g^i: $R^1 \to R^1$, $i=1, 2, \cdots, k$, 即 $\boldsymbol{g}(t)=(g^1(t), g^2(t), \cdots, g^k(t))$, $t \in R^1$. 设每一 g^i 是可微分的, $(\Delta g^i)(t,h)=h\cdot\frac{dg^i}{dt}+\alpha_i(h)$, 当 $h\to 0$ 时 $(\alpha_i(h)/h)\to 0$, 则 $(\Delta \boldsymbol{g})(t, h)=h\cdot\frac{d\boldsymbol{g}}{dt}+\boldsymbol{\alpha}(h)$, 式中 $\frac{d\boldsymbol{g}}{dt}=\left(\frac{dg^1}{dt}, \cdots, \frac{dg^k}{dt}\right)$, 且 $\boldsymbol{\alpha}(h)=(\alpha_1(h), \cdots, \alpha_k(h))$, 当 $h\to 0$ 显然有 $(\|\boldsymbol{\alpha}(h)\|/h)\to 0$. 在这情况下(即每一 g^i 是可微分的)说 $\boldsymbol{g}$ 是可微分的, 这是这个术语一个自然的推广.

设 $\boldsymbol{g}$: $R^1 \to R^k$ 和 f: $R^k \to R^1$ 都是可微分的, 则其复合函数 $f\circ \boldsymbol{g}$: $R^1\to R^1$ 是可微分的, 并且

$$\frac{d}{dt}(f\circ \boldsymbol{g})(t)=\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\frac{d}{dt}g^i(t) \tag{9}$$

这公式可以从 (8) 猜出, 述之如次. 在(8)中置 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(t)$, 得出 $df(\boldsymbol{g}(t), d\boldsymbol{g})=\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))dg^i$, 再除以 dt 便仿佛得到(9)了. 现在给出(9)的证明. 由 $\boldsymbol{g}$ 的可微分性应有 $\boldsymbol{g}(t+h)=\boldsymbol{g}(t)+h\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{\alpha}(h)$. 而 $(f\circ \boldsymbol{g})(t+h)=f(\boldsymbol{g}(t+h))$, 因此由 f 的可微分性我们有 $(f\circ \boldsymbol{g})(t+h)=(f\circ \boldsymbol{g})(t)+\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\left\{h\frac{d}{dt}g^i(t)+\alpha_i(h)\right\}+\beta(\Delta \boldsymbol{g}(t))=(f\circ \boldsymbol{g})(t)+h\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\frac{d}{dt}g^i(t)+\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\alpha_i(h)+\beta(\Delta \boldsymbol{g}(t))$. 从此看到, $\Delta(f\circ \boldsymbol{g})(t,h)$ 以误差 $\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\alpha_i(h)+\beta(\Delta \boldsymbol{g}(t))$ 逼近于 $h\left\{\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\frac{d}{dt}g^i(t)\right\}$. 但由于当 $h\to 0$ 时, $\frac{1}{h}\alpha_i(h)\to 0$, 因而当 $h\to 0$ 成立 $\frac{1}{h}\Sigma f_i(\boldsymbol{g}(t))\cdot\alpha_i(h)\to 0$; 同时当 $h\to 0$ 有 $\frac{1}{h}\beta(\Delta \boldsymbol{g}(t))=\frac{\beta(\Delta \boldsymbol{g}(t))}{\|\Delta \boldsymbol{g}(t)\|}\,\frac{\|\Delta \boldsymbol{g}(t)\|}{h}\to 0$, 这是因为从 f 的可微

分性得出第一因子应消失，而第二因子等于 $\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{g}(t)+\frac{\boldsymbol{\alpha}(h)}{h}\right\|$，当 $h\to 0$ 它趋近于 $\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{g}(x)\right\|$. 因此在要求的比率(4)下总误差消失了；这是说 $f\circ\boldsymbol{g}$ 是可微分的并且 (9) 成立. 这公式是链的法则对多变量的推广，我们在后面还要用到它.

1.3 泰乐定理

对已给 f: $R^k\to R^1$, 定义 F: $R^1\to R^1$ 为

$$F(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}) \tag{1}$$

式内 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{h}\in R^k$ 是任意的固定值. 把可微分性和收敛性暂置不论，F 的泰乐级数是

$$F(t)=\Sigma\frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) \tag{2}$$

由 1.2(9)的链的法则有

$$F'(t)=\Sigma_i f_i(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})\cdot h_i$$
$$F''(t)=\Sigma_{i,j}f_{ij}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})h_ih_j$$

一般

$$F^{(n)}(t)=\sum_{i_1,\cdots,i_n}f_{i_1,\cdots,i_n}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}$$

因此

$$F^{(n)}(0)=\sum_{i_1,\cdots,i_n}f_{i_1,\cdots,i_n}(\boldsymbol{x})h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n} \tag{3}$$

把(3)代入(2)然后置 $t=1$ 便得

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\Sigma_i f_i(\boldsymbol{x})h_i+\Sigma_{i,j}f_{ij}(\boldsymbol{x})h_ih_j+\cdots \tag{4}$$

在这情形，链的法则指出若 f 有直到 n 阶的连续偏导数，则 F 有直到 n 阶的连续导数. 因此，若 f 有直到 n 阶的连续偏导数，则 f 有直到 n 阶的形(4)的展开式带一个误差项，写为 $R_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})$. 为完成(4)的讨论，我们需要对 $R_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})$ 当 $\boldsymbol{h}$ 接近于 $\boldsymbol{0}$ 时的估值. 对我们

的大部分工作而言我们只需对 R_1 估值，即估计线性(或一阶)逼近的误差；至于对 R_n 的估值方法可按照对 R_1 的情况便不难明白，后者在记号上更为简单而已．对余项用积分形式表示，F 的第一阶泰乐展开为①

$$F(t)=F(0)+tF'(t)+\int_0^t(t-s)F''(s)ds \tag{5}$$

置 $t=1$，对 f 展开式为

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x})+\Sigma_i f_i(\boldsymbol{x})h_i+\int_0^1(1-s)F''(s)ds \tag{6}$$

因此 $R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})=\int_0^1(1-s)F''(s)ds$. 因为 $F''(s)=\sum_{i,j}f_{ij}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{h})\cdot h_i h_j$，我们有

$$|R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})|\leqslant\{\max|f_{ij}|\}\cdot[\sum_{i,j}|h_i h_j|]\cdot\frac{1}{2} \tag{7}$$

式内因子 $\frac{1}{2}$ 是从 $(1-s)$ 的积分而来．应用不等式 1.2(7) 到 $\boldsymbol{h}$ 得 $\sum_{i,j}|h_i h_j|\leqslant k^2\|\boldsymbol{h}\|^2$；再写 $M=\max|f_{ij}|$，便有

$$|R_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})|\leqslant\frac{1}{2}M\cdot k^2\cdot\|\boldsymbol{h}\|^2 \tag{8}$$

这蕴涵着所要求的

$$\frac{R_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}\to 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{h}\to 0 \tag{9}$$

因此，对一具有直到 2 阶连续偏导数的多变量函数 f，在线性逼近后的误差项，在(9)的意义下，当 $\boldsymbol{h}\to 0$ 时，比增量向量 $\boldsymbol{h}$ 的长度 $\|\boldsymbol{h}\|$ 消失得更快．一般，当 f 有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数时，误差 $R_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})$ 在下面意义下比 $\|\boldsymbol{h}\|^n$ 消失得更快

$$\frac{R_n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^n}\to 0 \qquad \text{当 } \boldsymbol{h}\to 0 \tag{10}$$

---

①参看 Courant [1], vol. I, p. 323.

这事实可由导出(9)的同样方法得到. 带有满足(10)的误差项 R_n 的直到 n 阶的展开式(4)的存在构成一个 k 变量函数 f: $R^k \to R^1$ 的泰乐定理.

现在考察一个 k 向量变量的 k 向量值函数 $\boldsymbol{f}$: $R^k \to R^k$. 设 f^ν: $R^k \to R^1$, $\nu = 1, 2, \cdots, k$ 是 $\boldsymbol{f}$ 的分量. 即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f^1(\boldsymbol{x}), f^2(\boldsymbol{x}), \cdots, f^k(\boldsymbol{x}))$$

对 $\boldsymbol{f}$ 的泰乐展开可由对分量 f^ν 的泰乐展开式集合组成. 高阶的项是复杂的, 但是我们只需要一阶的项, 它是很简洁的. 我们对每一 f^ν 写出(4), 得知 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})$ 的一阶逼近是一向量它的第 ν 分量是 $\sum_i f^\nu_i(\boldsymbol{x}) h_i$. 这事提醒我们做一个矩阵, 它的元素是向量函数 f^ν 的一阶偏导数. 记这矩阵为 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 且如所知, 它是 $\boldsymbol{f}$ 的**微分**. 按定义有

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = ((f^\nu_i(\boldsymbol{x}))) \tag{11}$$

式内上(分量)指标是行(横行)指标, 而下(导数)指标是列指标. 因此

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \cdots \tag{12}$$

式中第二项是应用矩阵 $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 到向量 $\boldsymbol{h}$ 的结果. 这样, 对函数 $\boldsymbol{f}$: $R^k \to R^k$ 有了直到第一阶的通常形状的单变量线性逼近公式.

下面的名词是标准的. 一个函数 f: $R^k \to R^1$ 称为一个**数量场**, 并且可以把它设想为对 R^k 的每点 $\boldsymbol{x}$ 附上一个数量 $f(\boldsymbol{x})$. 一个函数 $\boldsymbol{f}$: $R^k \to R^k$ 称为一个**向量场**, 并且可以把它设想为对 R^k 的每点 $\boldsymbol{x}$ 附上一个向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 利用这些名词, (4)是一个数量场 f 的泰乐展开, 而(12), 我们已经看到是一个向量场 $\boldsymbol{f}$ 到第一阶的展开.

关于向量场微分(11)有一个重要事实, 即两个向量场的复合的微分是它们各自微分的矩阵乘积. 详言之这结论就是说, 设向量场 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 都是可微分的, 则 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 也是可微分的并且

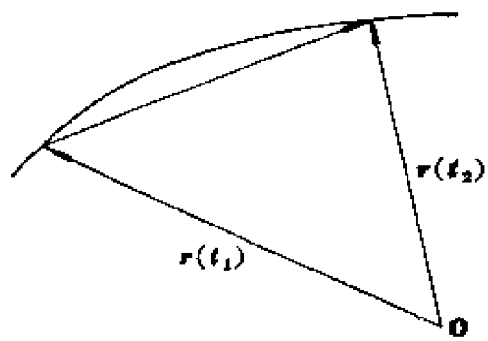
$$d(f\circ g)(x)=df(g(x))\cdot dg(x) \tag{13}$$

为证明起见，我们首先看到 $(f\circ g)^{\nu}(x)=f^{\nu}(g(x))$，因而 $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}(f\circ g)^{\nu}(x)=\sum_{i}f_{i}^{\nu}(g(x))g_{\mu}^{i}(x)$. 从向量场的微分定义(11)，以及矩阵的乘积定义(行-列规律)，可知最后方程就是(13)。

第二章 微分形式

2.1 线积分

在 R^k 的一曲线是由一已给函数 $\boldsymbol{r}$: $R^1 \to R^k$ 所表出. $\boldsymbol{r}(t)$ 是曲线上对应于参数值 t 的点.



设 $\boldsymbol{r}$: $R^1 \to R^k$ 是定义在 $a \leqslant t \leqslant b$. 把$[a,b]$分割为

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

且令 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为曲线的对应弦(见图). 则

$$\begin{aligned}\|l_i\|^2 &= \sum_j [r^j(t_i)-r^j(t_{i-1})]^2 \\ &= \sum_j \left\{\frac{r^j(t_i)-r^j(t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})}\right\}^2 (t_i-t_{i-1})^2 \\ &= \sum_j \{\dot{r}^j(t_{i-1})+\eta_j\}^2 (t_i-t_{i-1})^2\end{aligned}$$

当 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\to 0$ 时, $\eta_j \to 0$, 且 $\dot{r}^j=\dfrac{d}{dt}r^j$. 曲线的长度 L 定义为 $L=\lim\limits_{\Delta t_i\to 0}\sum_i \|l_i\|$, 因而

$$\begin{aligned}L &= \lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_i\left[\sqrt{\sum_j(\dot{r}^j+\eta_j)^2}\right]\cdot\Delta t_i \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_j(\dot{r}^j)^2}\,dt\end{aligned}$$

并且曲线从 $\boldsymbol{r}(a)$到 $\boldsymbol{r}(t)$的长度 $s(t)$为

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{\sum_j(\dot{r}^j(u))^2}\,du \tag{1}$$

因此

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\sum_j(\dot{r}^j(t))^2} \tag{2}$$

向量$(\dot{r}^1(t),\dot{r}^2(t),\cdots,\dot{r}^k(t))$和曲线在点$\boldsymbol{r}(t)$相切. 我们定义这向量为$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$. 则(2)变成$\frac{ds}{dt}=\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right\|$, 或

$$ds=\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right\|dt \tag{3}$$

这表达式叫做**弧长元素**, 或**线素**.

设变换到新变数 u, 且记 $t=\phi(u)$, $u=\phi^{-1}(t)$为这二变数间的函数关系. 我们有

$$ds=\sqrt{\sum_j(\dot{r}^j(t))^2\phi'(u)^2}\frac{dt}{\phi'(u)} \tag{4}$$

但由链的法则 $\dot{r}^j(t)\phi'(u)=\frac{d}{du}r^j(\phi(u))$, 且 $dt=\phi'(u)du$,

$du=\frac{dt}{\phi'(u)}=\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)dt$; 于是(4)成为

$$ds=\left\|\frac{d}{du}(\boldsymbol{r}\circ\phi)(u)\right\|du \tag{5}$$

这是说, 线素在变数变换下保留它的形状.

我们可以把这一做法应用到曲线的弧长上去. 这就是把已给变数 t 变为由(1)所定义的新变数 s 去. 此时

$$\phi^{-1}(t)=\int_a^t\left\|\frac{d}{du}\boldsymbol{r}(u)\right\|du=s$$

从此在原则上可决定 ϕ, 然后$\left\|\frac{d}{ds}(\boldsymbol{r}\circ\phi)(s)\right\|ds=ds$. 这说明如曲线以它的弧长表示, 则在每点切线向量的长度(可以说是通过曲线的速度)等于 1. 逆的结论从(3)可以立刻得到. 即如果切线向量的长度到处等于 1, 则已给的变量和 s 只相差一个常数.

一个数量场 f: $R^k\to R^1$ 沿一曲线C的线积分$\int_C f$的意义是f

在C上各点的值乘以在该点的线素的和的极限. 这不过是一个函数f: $R^1\to R^1$沿x轴的普通积分在以沿曲线的观点来看的情况. 若曲线是以变量t给出, 如 $\boldsymbol{r}$: $R^1\to R^k$, 则

$$\int_C f=\int_{t_0}^{t_1}(f\circ\boldsymbol{r})(t)\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right\|dt \tag{6}$$

而$\boldsymbol{r}(t_0)$, $\boldsymbol{r}(t_1)$是C的端点.

关于一向量场$\boldsymbol{f}$: $R^k\to R^k$沿一曲线C的线积分$\int_C\boldsymbol{f}$意义稍有不同; 此时我们指的是在C的每点作$\boldsymbol{f}$切于C的分量乘以在该点的线素, 这些量的和的极限值是线积分$\int_C\boldsymbol{f}$. 在物理学上所熟知的功的积分是一个例子, 并且带来这样的概念: 设$\boldsymbol{f}$是一个力场, 在它的作用下一个质点沿曲线运动所作的功的元素是$\boldsymbol{f}$沿曲线的分量乘以它沿曲线所作用的距离(线素). 若C是用变量t由$\boldsymbol{r}$: $R^1\to R^k$所给出, 则有

$$\int_C\boldsymbol{f}=\int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r})(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right)dt \tag{7}$$

式中看起来并不出现线素$\left\|\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)\right\|dt$, 但实际上是这样的: 写$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$为$\dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{f}$沿C的分量是$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r})\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}/\|\dot{\boldsymbol{r}}\|)$, 因此在(7)中应出现的是$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r})\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}/\|\dot{\boldsymbol{r}}\|)\|\dot{\boldsymbol{r}}\|dt$, 而这和所写出的是一样的.

把(7)式内的向量以分量表示且由此计算点积, 得到

$$\int_C\boldsymbol{f}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_i(f^i\circ\boldsymbol{r})(t)\frac{d}{dt}r^i(t)dt \tag{8}$$

(因为$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r})^i=f^i\circ\boldsymbol{r}$). 这式暗示了对$\int_C\boldsymbol{f}$的下面的抽象记号:

$$\int_C\boldsymbol{f}=\int_C\left\{\sum_i f^i dx_i\right\} \tag{9}$$

在此使用了 1.2(8) 的记号. (9)的右边也可写成$\int_C\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{x}$. 抽象记

号(9)的好处在于可以不为C的特殊表示法所累. 当然,如对C已给一个参数表示$\boldsymbol{r}$: $R^1 \to R^k$,则(9)便立刻变回到(7).

注意$\int_C \boldsymbol{f}$是一**有向物**: 设曲线的取向(变量增加的方向)倒过来,则$\int_C \boldsymbol{f}$将改变符号,因为此时切线向量在C上将处处改变符号的缘故.

2.2 一次形式

在初等微积分,物dx被称为独立变量x的微分并且有两重意义: 它是x的一般增量并且由公式$df = f'(x)dx$产生出一个函数f对应增量的一阶逼近; 第二,它在积分中表示哑变量. 这个物的向量推广将是在1.2(8)所导入的一般增向量$d\boldsymbol{x} = (dx_1, dx_2, \cdots, dx_k)$. 它通过公式$df = \sum_i f_i dx_i$决定了一个数量场$f$的对应增量的一阶逼近(参看1.2(8), 1.3(4)); 并且它指出了一个向量场$\boldsymbol{g}$的线积分在抽象形式$\int_C \boldsymbol{g} = \int_C \{\sum g^i dx_i\}$的积分变量. 注意形式$\sum_i f_i dx_i$和$\sum_i g^i dx_i$是类似的并且是它的一个特殊化: 前者向量场的分量实际上是一个已给数量场的偏导数. 我们称一般形如$\sum_i g^i dx_i$的一个表达式, 其中$\boldsymbol{g} = (g^1, \cdots, g^k)$是一任意向量场, $d\boldsymbol{x} = (dx_1, \cdots, dx_k)$是一般增向量, 为一个$k$变量的次数等于1的微分形式, 或简称**一次形式**.

我们关于一次形式的定义是在R^k的标准笛氏坐标系下表达的. 在后面我们将指出(2.4节), 这是一个任意的选择. 我们在形式的集合中正在导出一个代数结构, 特别地, 这结构将产生出关于高次形式的一个一般概念, 所有这些都是在笛氏坐标下做的; 然后

我们将探讨这个论述怎样才可过渡到任何类型的新坐标去；最后我们将会看到关于这个论述所要求的实质的东西在坐标变换下是保留不变的。

作为计划的第一步我们指出，在 R^k 的笛氏坐标下，一次形式的集合如何可以看作一个线性空间(即，一个物的集合，这些物可以如向量一样的相加并且容许一个可分配的"数量"乘积)．为此目的，把 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_k$ 设想为抽象的物，这些物被作为一个线性空间的基，这空间的数量是所有数量场的集合．为此则这空间的一般元素是基元素 dx_i 具有数量场系数 g^i: $R^k \to R^1$ 的一个线性组合．设

$$\sigma = \sum_i f^i dx_i, \qquad \tau = \sum_i g^i dx_i$$

是这样的两个"向量"．定义和 $\sigma + \tau$ 为

$$\sigma + \tau = \sum_i (f^i + g^i)\, dx_i \tag{1}$$

这加法和普通向量的是相似的：它是可交换的，$\sigma + \tau = \tau + \sigma$；它是可结合的，$(\sigma + \tau) + \theta = \sigma + (\tau + \theta)$，而 θ 形如 $\theta = \sum_i h^i dx_i$；并且有零"向量" $0 = \sum_i 0\, dx_i$．若 h 是一数量场，我们定义数量乘积 $h\sigma$ 为

$$h\sigma = \sum_i (hf^i)\, dx_i \tag{2}$$

就是说，$h\sigma$ 的第 i 分量是 h 乘上 σ 的第 i 分量．注意 hf^i 是函数的数值乘积而不是一个函数的复合．就是说，已给 f^i: $R^k \to R^1$ 和 h: $R^k \to R^1$，$hf^i(x) = h(x) f^i(x)$，由此 hf^i: $R^k \to R^1$ 仍是一个数量场，如(2)所要求的．容易看到数量乘积(2)对"向量"加法(1)是可分配的，

$$h(\sigma+\tau)=h\sigma+h\tau \tag{3}$$

这正是这样的事实，即数量-场的乘积可越过数量-场的加法来实现分配律．同样知道，由于数量-场的乘积可以越过数量-场的加法实现分配律，所以$(f+g)\sigma=f\sigma+g\sigma$，其实就是普通的数量（实数）和普通向量时的情况．

记所有数量场的集合为S，记R^k中在笛氏坐标下所有一次形式的空间为A^1．这样我们建立了A^1是一个以S为数量的线性空间，或简单的说，A^1是一个运算(1)和(2)下在S上的线性空间．

以R记实数的集合．在下面的自然的意义下我们可以把R看作S的一个子集：每一$t\in R$决定常数数量场$f_t\in S$，而

$$f_t(x)\equiv t$$

在这个约定下，$t\in R$和$\sigma\in A^1$的积是由(2)：$t\sigma=f_t\sigma=\sum_i(f_t g^i)dx_i=\sum_i(tg^i)dx_i$所定义．例如

$$-\sigma=\sum_i(-g^i)dx_i \tag{4}$$

2.3 楔积

现在构造S上第二个线性空间．它的基是以一次形式的基$dx_1,\cdots,dx_k$所有配对的集合．我们把一般的对写如$dx_i\wedge dx_j$，读作dx_i楔dx_j．新空间的一般元素具有形状$\sum_{ij}g^{ij}dx_i\wedge dx_j$，而$g^{ij}$：$R^k\to R^1$是双指标的共$k^2$个数量场的一个集合．在这空间的加法和$S$乘积和在$A^1$一样的定义：设$\sigma=\sum_{ij}f^{ij}dx_i\wedge dx_j$并且$\tau=\sum_{ij}g^{ij}dx_i\wedge dx_j$，则$\sigma+\tau=\sum_{ij}(f^{ij}+g^{ij})dx_i\wedge dx_j$，又如$h\in S$，

则 $h\sigma=\sum_{ij}(hf^{ij})dx_i\wedge dx_j$. 为了我们的目的，这个空间显得太大了，为此加上下面的**公理**把它压缩：对所有 i,j，

$$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i \tag{1}$$

从此可知对所有 i

$$dx_i\wedge dx_i=0 \tag{2}$$

这是由于$dx_i\wedge dx_i=-dx_i\wedge dx_i$，而$2dx_i\wedge dx_i=0$，这便应有(2). 这压缩空间记为 A^2，它的元素称为 R^k 中在笛氏坐标下的**二次形式**. A^2的基包含所有线性无关的对$dx_i\wedge dx_j$. 由(1)，$dx_i\wedge dx_j$和 $dx_j\wedge dx_i$ 是相关的，并且由(2)，"平方"$dx_i\wedge dx_i$ 是除外的. 因此基二次形式的数目是从 k 个基一次形式的集合$\{dx_1,\cdots,dx_k\}$中可以选出配对的数目. 这数目是$\binom{k}{2}$，即从 k 个东西中一次取 2 个的组合数①. 一个方便而惯用方法是把这些基列如

$$dx_i\wedge dx_j,\quad i<j,\quad i,j=1,2,\cdots,k \tag{3}$$

$i<j$ 的限制防止了重复的和多余的，那些是被(1)和(2)所排除在外的. 例如，在 R^3 有$\binom{3}{2}=3$ 个基元素 $dx_1\wedge dx_2$，$dx_1\wedge dx_3$，和 $dx_2\wedge dx_3$. 在 R^k 的一般二次形式是

$$\sum_{i<j}g^{ij}dx_i\wedge dx_j \tag{4}$$

式内 g^{ij}: $R^k\to R^1$，$i<j$ 是$\binom{k}{2}$个数量场，且和式是关于所有的对 $i,j=1,2,\cdots,k$，$i<j$ 作的. 我们即将看到二次形式之于曲面积分有如一次形式之于线积分.

---

①参看记号页对$\binom{k}{j}$的公式，即 k 个东西一次取 j 个的组合数，$0\leqslant j\leqslant k$.

我们现在要把楔解释为一个二元运算，叫做在一次形式上的**楔积**．为了看看这是怎样做的，我们考察在 R^2 的一个纯理论的"计算"．设 $\sigma=f^1dx_1+f^2dx_2$, $\tau=g^1dx_1+g^2dx_2$ 是 R^2 的一次形式．"乘积"

$$\sigma\wedge\tau=(f^1dx_1+f^2dx_2)\wedge(g^1dx_1+g^2dx_2)$$

是什么意义呢？设楔作为一个二元运算关于在 A^1 的加法是可分配的并且关于它的 S 乘积是齐性的，则 $\sigma\wedge\tau$ 将是二次形式 $(f^1g^2-f^2g^1)dx_1\wedge dx_2$，利用(1)和(2)此地只剩下一项替代了原来的四项．因此我们对(1)加上两个关于楔的附加**公理**如下：

$$dx_i\wedge(fdx_j)=(fdx_i)\wedge dx_j=f(dx_i\wedge dx_j) \tag{5}$$

$$dx_i\wedge\left(\sum_j g^jdx_j\right)=\sum_j dx_i\wedge(g^jdx_j) \tag{6}$$

第一式关于 S 乘积是齐性的，而第二式关于 A^1 加法是可分配的．注意把(5)应用到(6)便导出

$$dx_i\wedge\left(\sum_j g^jdx_j\right)=\sum_j g^j(dx^i\wedge dx_j) \tag{7}$$

其"积"是一二次形式．我们现在定义一次形式的楔积是由楔所给出的服从三个公理(1)，(5)，(6)的二元关系式．显然这个积对于每一对一次形式决定了一个二次形式，以记号 $A^1\wedge A^1\subset A^2$ 表示；它关于 A^1 加法是可结合的，可分配的，并且关于 S 乘积是齐性的；但由(1)可知它是**不可交换的**．在(5)和(6)中我们把因子 dx_i 放在左侧．把因子放在右侧的对应式子从(1)容易得到．

此地是在 R^3 中楔积的少数几个实例．

(i) $(f^1dx_1+f^2dx_2+f^3dx_3)\wedge dx_3=f^1dx_1\wedge dx_3+f^2dx_2\wedge dx_3$

由(2)看到第三项消失了．

(ii) $dx_2\wedge(f^1dx_1+f^2dx_2+f^3dx_3)=-f^1dx_1\wedge dx_2+f^3dx_2\wedge dx_3$

注意到符号的变更，如(1)所要求的．

当然我们必须指出公理(1)，(5)，(6)是相容的．我们把这个工作放在后面一点，在那里做起来比较方便①．我们将会看到楔积是在 R^3 中所熟知的向量积的一个可注意的推广．

在 R^k 中一次形式的楔积公式可表达如下，它是我们上面纯理论计算的一般形式：

$$\left(\sum_i f^i dx_i\right)\wedge\left(\sum_j g^j dx_j\right)=\sum_{i<j}(f^i g^j-f^j g^i)\,dx_i\wedge dx_j \qquad (8)$$

式内记号 $\sum\limits_{i<j}$ 已在(4)中导出过：在限制 $i<j$ 下做关于所有对 i, $j=1, 2, \cdots, k$ 的和式．(8) 式右边的负号是当我们把基一次形式 dx_i 的楔积置于基二次形式(3)的顺序时由(1)所引起的．关于(8)式的运算是没有什么困难的，就是要仔细不可马虎，因为它包含着微分形式的基本算术．以下是在 R^3 中(8)的相应式子：

$$\begin{aligned}&(f^1dx_1+f^2dx_2+f^3dx_3)\wedge(g^1dx_1+g^2dx_2+g^3dx_3)\\&=(f^1g^2-f^2g^1)\,dx_1\wedge dx_2+(f^1g^3-f^3g^1)\,dx_1\wedge dx_3\\&\quad+(f^2g^3-f^3g^2)\,dx_2\wedge dx_3\end{aligned} \qquad (9)$$

这式子将使读者回想起在 R^3 中关于 $\boldsymbol{f}=(f^1, f^2, f^3)$ 和 $\boldsymbol{g}=(g^1, g^2, g^3)$ 的向量积 $\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$.

上面所述关于 A^2 的构造可以推广如下．已给 R^k，在 R^k 中数量场的集合 S，和一般的增量向量 $d\boldsymbol{x}=(dx_1, \cdots, dx_k)$，对每一整数 r 我们做在 S 上的线性空间，它的基是基一次形式 $dx_1, \cdots, dx_k$ 所有 r-组的集合．我们写一般的 r-组为 $dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 是从集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 选取的任意 r 个整数的一组．在这空间中加法和 S 乘积都是按分量逐次进行的，完全类似于 2.2(1)和 2.2(2)．我们对 r-组加上类似于(1)的条件以压缩这个空间：在 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$ 邻接项的交换要变号；一般，m 次这样的交

①参看附录，p. 103.

换要引起这个 r-组乘以$(-1)^m$. 例如,

$$dx_{i_2}\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_3}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}=-dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

$$dx_{i_3}\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}=+dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

和从(1)得出(2)一样, 可知包含有重复项的r-组是消失的. 这是因为通过陆续交换可把重复的两项带到相邻的位置; 再由上述的(1)的一般形式, 这乘积将和它的负值相等而必须消失. 特别, r-组 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$, $r>k$ 时必须消失, 因为它必须含有重复项. 因此独立的 r-组对应于从 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 中选取的 $r\leqslant k$ 的子集, 且可像(3)式一样地列出如下

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r},\quad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant k \tag{10}$$

记以(10)为基的压缩的 S 上的空间为 Λ^r, 它的元素是 R^k 中在笛氏坐标下的 **r 次形式**. 一般的 r 次形式是

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r} f^{i_1,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \tag{11}$$

其中 $f^{i_1,\cdots,i_r}$: $R^k\to R^1$ 是数量场, 并且和式是由满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant k$ 的所有 $i_1, \cdots, i_r$ 做的. 显然, 独立的基 r 次形式(10)的数目是$\binom{k}{r}$, 根据这一理由我们说 Λ^r 是$\binom{k}{r}$维的. 形式空间 Λ^r 的系统在$r=k$ 截止了, 或可以说当 $r>k$, $\Lambda^r=0$. 因为, 如我们上面已经注意到的, $r>k$ 的一个 r-组 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$ 是消失的. Λ^k 的维数是$\binom{k}{k}=1$, 且实际上只有一个 k-组 $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$(不谈只变更正负号的交换). 因此在 R^k 中一般的 k 次形式是$fdx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$, 而 f: $R^k\to R^1$ 是任何数量场. 形式空间的结构在系统的底是开的, $r=0$. 为了使这个系统完满, 我们把数量场作为 0 次形式, 且置 $\Lambda^0=S$. 注意到$\binom{k}{0}=1$, 我们把常数数量场 $f_1(x)\equiv 1$ 作为 Λ^0 的基.

楔作为一对形式的二元运算(积)的解释也可以推广．设 r，s 是满足 $1\leqslant r\leqslant k$，$1\leqslant s\leqslant k$ 的整数．我们要求对基 s 次形式和 Λ^r 的元素的楔组合有(5)和(6)的类似：即，它关于 S 乘积是齐性的，并且关于 Λ^r 中的加法是可分配的．重要的事实是一个 r 次形式和一个 s 次形式的楔积是一个$(r+s)$次形式；或以记号表示为 $\Lambda^r\wedge\Lambda^s\subset\Lambda^{r+s}$．作为一个例子，设 $\sigma=\Sigma_i f^i dx_i$，$\tau=\Sigma_j g^j dx_j$ 是 R^k 的一次形式，则有

$$\sigma\wedge\tau=\sum_{i<j}(f^i g^j-f^j g^i)dx_i\wedge dx_j$$

这就是(8)．我们看到 $\sigma\wedge\tau=-\tau\wedge\sigma$．其次，设已给

$$\sigma=\sum\nolimits_i f^i dx_i\in\Lambda^1$$

$$\tau=\sum_{i<j}g^{ij}dx_i\wedge dx_j\in\Lambda^2$$

则

$$\sigma\wedge\tau=\sum_{i<j<k}(f^i g^{jk}-f^j g^{ik}+f^k g^{ij})dx_i\wedge dx_j\wedge dx_k \tag{12}$$

是一个三次形式．和(8)一样，符号来自交换规律(1)的一般式子．例如，$f^2g^{13}dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3=-f^2g^{13}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$，因为要把在 $dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3$ 中的指标变为增加的顺序需要一个交换．注意此时 $\sigma\wedge\tau=\tau\wedge\sigma$．

(8) 的反交换 $\sigma\wedge\tau=-\tau\wedge\sigma$ 和(12)的交换 $\sigma\wedge\tau=\tau\wedge\sigma$ 都是以下对于楔积的一般交换规律的例子．

定理 设 $\sigma\in\Lambda^r$ 和 $\tau\in\Lambda^s$，则

$$\sigma\wedge\tau=(-1)^{rs}\tau\wedge\sigma \tag{13}$$

证明 设 $\sigma=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_r}f^{i_1,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$

$$\tau=\sum_{j_1<\cdots<j_s}g^{j_1,\cdots,j_s}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}$$

由于楔积是可以越过加法实现分配律的，我们只要在 $\sigma\wedge\tau$ 中对一个一般的单项乘积来证明(13)就够了

$$(f^{i_1,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})\wedge(g^{j_1,\cdots,j_s}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}) \tag{14}$$

设记这些单项(单项式)顺次为 α, β. 则乘积(14)为 $\alpha\wedge\beta$. 设指标集合 $\{i_1,\cdots,i_r\}$ 和 $\{j_1,\cdots,j_s\}$ 是重叠的，则 $\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha=0$ 因为在乘积 $dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}$ 中将有一个重复. 因此这些项在(13)的两侧都给出 0. 在相反的情形(即指标集合是不相交的) $\alpha\wedge\beta$ 和 $\beta\wedge\alpha$ 是 $(r+s)$ 次形式的单项式,

$$\alpha\wedge\beta=f^{i_1,\cdots,i_r}g^{j_1,\cdots,j_s}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}$$

$$\beta\wedge\alpha=f^{i_1,\cdots,i_r}g^{j_1,\cdots,j_s}dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_s}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

要使在 $\beta\wedge\alpha$ 中的微分带到在 $\alpha\wedge\beta$ 中的顺序要求把 r 个 dx_i 通过 s 个 dx_j，或者总共要 rs 个交换，如此由(1)的一般形式可知

$$\beta\wedge\alpha=(-1)^{rs}\alpha\wedge\beta$$

我们已经证明了(13)对于 $\sigma\wedge\tau$ 中每一个非零项是成立的，因此(13)成立，证毕.

系 设 $\sigma\in\Lambda^r$，r 是奇数，则 $\sigma\wedge\sigma=0$.

证明 $\sigma\wedge\sigma=(-1)^{r^2}\sigma\wedge\sigma$，而当 r 是奇数时，$(-1)^{r^2}=-1$，所以

$$\sigma\wedge\sigma=-\sigma\wedge\sigma=0, \text{证毕}.$$

习题 举例证明对于偶次的形式 σ，$\sigma\wedge\sigma$ 可以消失但不一定.

2.4 坐标变换

一个向量场 $\boldsymbol{f}$: $R^k\to R^k$ 可以解释为 R^k 的一个坐标变换或者解释为 R^k 的一个点变换(运动). 按习惯记 $\boldsymbol{f}$ 在固定笛氏坐标系中的分量为 f^i:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\sum\nolimits_i f^i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

此地 e_1, e_2, …, e_k 是笛氏坐标系的互相正交的单位向量(参看 p.1). 若 f 看作一个变换, $f(x)$ 解释为 x 经 f 的变后点, 则(1)给出象点的笛氏坐标$(f^1(x), \cdots, f^k(x))$. 若 f 看作一个坐标变换, 我们设想 R^k 的点是内在的和不动的, 但能有各种描述; 这样, 则(1)导入一个新的描述, 在此 x 标以$(f^1(x), \cdots, f^k(x))$. 习惯上这新的标记缩写为 $y_i=f^i(x)$, 且写 $y=(y_1, \cdots, y_k)$. 这在记号上是一个混淆, 因为在坐标变换的解释下, $(y_1, \cdots, y_k)$并不是一点 y 在 R^k 的笛氏坐标, 但这记号在表面上看来是这样的.

在坐标变换的解释下新的坐标"线", 即除一个 y_i 外其它的都等于常数的点的轨迹, 是典型的曲线, 而这新坐标如所周知是曲线坐标.

作为一个例子我们考察在 R^2 的极坐标. 设(x_1, x_2)是笛氏坐标, (y_1, y_2)是极坐标, $0\leqslant y_1<\infty$, $0\leqslant y_2<2\pi$, 且 $f: R^2\to R^2$ 是笛氏坐标到极坐标的变换. 则

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ y_2 &= f^2(x)=\arctan\frac{x_2}{x_1} \end{aligned} \tag{2}$$

在笛氏坐标下 f^1, f^2 的微分(一次形式)是

$$\begin{aligned} df^1 &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_1+\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_2 \\ df^2 &= \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}dx_1+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}dx_2 \end{aligned} \tag{3}$$

这从偏微分$(df^1=f_1^1dx_1+f_2^1dx_2, df^2=f_1^2dx_1+f_2^2dx_2)$可以看到. 如令 y_2 为一常数如 $y_2=c$, 则 R^2 的点的轨迹是一直线, 它的笛氏方程是(由(2))

$$x_2=(\tan c)x_1 \tag{4}$$

这直线的斜率随 c 而变化, 这样便得到周知的从原点出发的极射线束. 如置 y_1 为常数, 如 $y_1=d$, 则所得轨迹是一个圆, 它的笛氏

方程(由(2))是

$$x_1^2+x_2^2=d^2 \tag{5}$$

当 d 变动得到一族极圆. 直线(4)和圆(5)是极坐标系的坐标"线", 它们替代了在笛氏坐标系下的水平的和直立的两族直线. 把(2)作为点变换看待时, 微分(3)是在笛氏坐标轴方向的增量; 把(2)作为坐标变换看待时, 则(3)是当点 $\boldsymbol{x}$ 的笛氏坐标受到变更 dx_1, dx_2 时, 它的极坐标 y_1 和 y_2 所引起变更的一阶逼近.

应当坚持任何新的坐标对空间的点所提供的描述要和笛氏系的有同样的正确性. 这就是对不同的点不能给出相同的坐标; 并且对任何点不能够指定不出完全确定的坐标. 但事实上这些要求执行起来是太严格了, 因为有一些有用的曲线系在有的点这些要求是不满足的. 这种点称为**蜕化点**. 例如, 在 R^2 的极坐标系, 我们不能指出原点的完全确定的坐标, 因为在这点 $y_1=0$ 但 y_2 可取任意值, 所以原点是极坐标系的一个蜕化点. 可以实施的习惯上的限制是一个坐标系至多只能有有限个蜕化点. 我们说一个坐标系 $(y_1, \cdots, y_k)$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 R^k 的一个区域 E 是**有资格的**, 如果对这 y 系在 E 至多只有有限个蜕化点. 显然, 如能从方程 $y_i=f^i(\boldsymbol{x})$ 唯一地解出 $x_1, \cdots, x_k$ 以 $y_1, \cdots, y_k$ 来表达, 且在 E 中除了有限个点外的所有点都能做到的话, 那么这个系在 E 是有资格的, 把这解表示为 $x_i=g^i(\boldsymbol{y})$, $i=1, 2, \cdots, k$, 或

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

为简单起见设(6)在 E 的每点成立. 则以 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 代入(6)得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 E 的所有 $\boldsymbol{x}$ 成立, 再对(6)的两侧施行 $\boldsymbol{f}$ 得到 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$, 它和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 一起得出 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$. 总之, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 E 的每点是不蜕化的, 如果在整个 E 都有(6)的一个解使得对 E 的所有点的笛氏坐标和新坐标各成立

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y} \tag{7}$$

如果把 f 看作一个变换，并且把 E 在变换下的象写为 $F=f(E)$，则 g 把 F 带回到 E，且(7)表明复合 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 分别是 E 和 F 的恒等变换：$g\circ f(x)=x$ 对 E 的所有 x，且 $f\circ g(y)=y$ 对 F 的所有 y 成立. 无论在那种解释下(作为坐标变换或作为点变换)，我们说 f 作为一个函数在 E 是**可逆的**，且 g 是它的逆函数[①]. 利用这些术语我们可以叙述下面有用的判别法：一个坐标变换 $y=f(x)$ 在任何区域是有资格的，如果 f 在此区域是一个可逆函数.

习题 证明极坐标系在 R^2 不包含原点的任一区域内是有资格的.

设一已给 $f: R^k\to R^k$ 在一区域 E 是可微分的和可逆的，且设它的逆函数 g 也是可微分的. 则从 1.3(13)有

$$d(g\circ f)(x)=dg(f(x))\cdot df(x),$$

又因为对 E 的所有 x 有 $g\circ f(x)=x$，所以 $d(g\circ f)(x)$ 是 k-k 的恒等矩阵，而 $dg(f(x))$ 和 $df(x)$ 是互逆矩阵.

习题 继续上面的习题，对于(2)的函数 f 及其逆函数证明以上所述的事实.

现在把 f 解释为导入新坐标 $y_i=f^i(x)$，或(以有混淆的记号)表为 $y=f(x)$. 则 $x=g(y)$ 表示以新坐标表出的笛氏坐标. 设 dx 是在笛氏坐标下的一般增量，则由 1.3(12)可得在新坐标的对应增量

$$dy=df(x)\cdot dx \tag{8}$$

又因 $dg(y)$ 是 $df(x)$ 的逆，所以上式蕴涵着

$$dx=dg(y)\cdot dy \tag{9}$$

---

①在 3.1，我们对可逆性将有一个判别，即所谓逆函数定理.

因此如果把 y 作为老系的坐标，x 作为新系的坐标，当老系坐标有增量 dy 时，在新系坐标所引起的增量就是原来的增量 dx. 在这意义下这两个坐标系是处在同等地位的. 此外，如果我们要在 $(dy_1, \cdots, dy_k)$ 的基础上造出形式空间的系统，显然只需在 y 系定下一次形式

$$\alpha=\sum_j b^j(y)dy_j \tag{10}$$

形式(10)和在笛氏坐标下的一次形式 Λ^1 间立刻有一个一一对应：即以 $y=f(x)$ 和 $dy_j=\sum_k f^j_k(x)dx_k$ 代入(10)便得 α 在笛氏系的表达式 $\sum_k a^k(x)dx_k$，而 $a^k(x)=\sum_j f^j_k(x)b^j(f(x))$；由于 f 的可逆性这运算显然是可逆的. 同样易知这个对应保留形式的加法和它们的 S 乘积. 现在要问这个对应是否保留形式的楔积. 为此只需验证一下基本性质 2.3(1) 是否保留的便足够了. 这就是，设

$$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_i,$$

那么是否得出 $dy_i\wedge dy_j=-dy_j\wedge dy_i$? 这是对的，证明如次.

$$dy_i\wedge dy_j=\left(\sum_k f^i_k dx_k\right)\wedge\left(\sum_l f^j_l dx_l\right)=\sum_{k<l}(f^i_k f^j_l-f^i_l f^j_k)dx_k\wedge dx_l,$$

从此显然可见 i 和 j 的交换将引起右侧的变号.

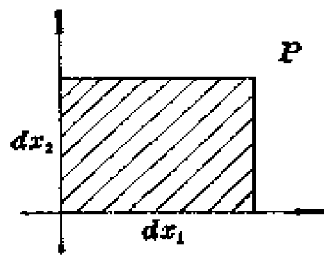
现在已经明白，关于微分形式至今所述的代数性质和所取的坐标系是无关的，这事实的成立只要对于笛氏系有一个可逆的可微分函数，并且其逆函数也是可微分的便可以了①. 利用同样的一般论述我们可以作更多的断言；即任何两个坐标系如以一个可逆的可微分函数并且其逆函数也是可微分的相关联着的话，则它们产生出代数等价的微分形式空间. 因此我们原来选择笛氏系统完全是为了方便起见，并不是被迫非这样不可的.

---

①一个可微分函数的逆函数是可微分的这个初等微积分的定理推广到了现在这个程度的情况下，上面最后一句话是多余的. 参看 Courant[1], vol. II, p. 152.

第三章　高维积分

3.1　函数行列式



设 P 是 R^k 的正平行多面体，它的棱沿着笛氏坐标轴．我们称这样一个图形为一个笛氏长方体．右图所示为 R^2 的一个笛氏长方形．设 P 的棱具有长度 $dx_1, dx_2, \cdots, dx_k$．则它的 k 维体积，记为 $\mathrm{Vol}(P)$，由定义为

$$\mathrm{Vol}(P)=dx_1dx_2\cdots dx_k \tag{1}$$

即它的棱的长的积．设 T 为一 k-k 矩阵．我们可以把 T 作用到在 P 上的每一向量并且把 P 变换为另一图形 $T(P)$，它一般不再是一个笛氏长方体，甚至不是一个长方体．为了计算 $T(P)$ 的体积 $\mathrm{Vol}(T(P))$，我们应用关于行列式的几何意义的定理，它在现在的记号下可表为

$$\frac{\mathrm{Vol}(T(P))}{\mathrm{Vol}(P)}=|T| \tag{2}$$

式内 $|T|$ 是 T 的行列式的标准记号①．把这式和(1)结合在一起便得

$$\mathrm{Vol}(T(P))=|T|\,dx_1dx_2\cdots dx_k \tag{3}$$

设已给一可微分函数 $f: R^k\to R^k$，且取 f 在某固定点 x_0 的微分 $df(x_0)$ 作为 T，把 f 看作一个变换，则由(3)我们有

①对于 2 维和 3 维的定理可参看 Courant[1], vol. II, p. 33；对一般的情形可参看 Schreier-Sperner[5], p. 63.

$$\mathrm{Vol}(d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(P)) = |d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|dx_1dx_2\cdots dx_k \tag{4}$$

若P是一充分小的长方体，则由泰乐展开1.3(12)，对P的每点$\boldsymbol{x}$的象$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$除一常量外可用$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}$很好地逼近，而$\boldsymbol{x}_0$是$P$的中点。因此我们可以期望，若$P$充分小，则$P$在$\boldsymbol{f}$下的象的体积$\mathrm{Vol}\boldsymbol{f}(P)$可用$\mathrm{Vol}d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(P)$很好地逼近，这在某种适当的意义下是可以的，我们在此不加深究。假定这个合理的期望是对的，则对充分小的P我们可以写，

$$\mathrm{Vol}\boldsymbol{f}(P) \simeq |d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|dx_1dx_2\cdots dx_k \tag{5}$$

假定$\boldsymbol{f}$在包含P的一个集合E上是可逆的，令$\boldsymbol{g}$是$\boldsymbol{f}$在E的逆函数，且写$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$。则(5)可改写为

$$dx_1\cdots dx_k \simeq |d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)|\mathrm{Vol}\boldsymbol{f}(P) \tag{6}$$

设$F: R^k\to R^1$定义在E，则$F\circ\boldsymbol{g}$定义在$\boldsymbol{f}(E)$：$F\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=F(\boldsymbol{x})$，而$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}$，这就是说$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$。这样

$$F(\boldsymbol{x}_0)dx_1\cdots dx_k \simeq F\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)|d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)|\mathrm{Vol}\boldsymbol{f}(P) \tag{7}$$

如果把E分割为小的笛氏长方体，对每一长方体写出关系式(7)，然后在两侧相加，左侧将有一个逼近$\int\underset{E}{\cdots}\int F(x_1,\cdots,x_k)dx_1dx_2\cdots dx_k$，而右侧逼近于在$\boldsymbol{f}(E)$上的$F\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\cdot|d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|$的积分，它用数学记号表出为$\int\underset{\boldsymbol{f}(E)}{\cdots}\int F\circ\boldsymbol{g}(y_1,\cdots,y_k)|d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|dy_1dy_2\cdots dy_k$。如果所包含的这些逼近的个数随着$E$所分割的长方体的个数无限增加，便得到下面公式：

$$\int\underset{E}{\cdots}\int F(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_k=\int\underset{\boldsymbol{f}(E)}{\cdots}\int F\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|dy_1\cdots dy_k \tag{8}$$

式内$\boldsymbol{g}$是$\boldsymbol{f}$的逆函数。我们没有证明这个公式；只在启发式的基础上讨论了它。不过在我们面前有了它表明这是积分对于变量变换的公式。就是，把$\boldsymbol{f}$作为一个坐标变换解释，把E和$\boldsymbol{f}(E)$各看做在笛氏坐标和新坐标下定的积分界限，并且把表达式$|d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|$.

$dy_1\cdots dy_k$ 看作是用新坐标表示的笛氏体积元素 $dx_1\cdots dx_k$①. 这提醒我们可以把 $dy_1\cdots dy_k$ 看作 y 坐标的体积元素，即

$$\begin{aligned} dx_1\cdots dx_k &= |d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\,dy_1\cdots dy_k \\ dy_1\cdots dy_k &= |d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|\,dx_1\cdots dx_k \end{aligned} \tag{9}$$

式内的 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是互为逆函数且 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. 到现在为止表达式 $dy_1\cdots dy_k$ 和关系式(9)仅是启发性的，它是由(5)和(6)以及对积分的惯用记号如(8)一起所暗示的. 我们立刻看出微分形式提供了一个工具，有了它类型如(9)的关系式的成立获得了一个意义，有了它类型如(8)的公式被无误地自动地计算. 让我们首先对(8)给出一个例子.

例 设 $\iint\limits_E e^{-x^2-y^2}dxdy$ 为所求者，其中 E 是 R^2 的单位圆盘（有界的和内部的）. 置

$$r=f^1(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=f^2(x,\ y)=\arctan\frac{y}{x}$$

这是 2.4(2) 以更为熟悉的记号表达的式子. 则 $\boldsymbol{f}(E)$ 指定的范围为 $0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi$; 对于面积元素 $dxdy$ 我们用惯用的(和正确的)表达式 $rdrd\theta$; 而对 $F(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ 我们置 $F\circ\boldsymbol{g}(r,\theta)$，其中

$$x=g^1(r,\theta)=r\cos\theta$$

$$y=g^2(r,\theta)=r\sin\theta$$

从此得出 $F\circ\boldsymbol{g}(r,\theta)=e^{-r^2}$. 从 $|d\boldsymbol{g}|=r$，可知在 $rdrd\theta$ 中的项 r 是(8)的右侧的项 $|d\boldsymbol{g}|$. 我们有

$$\iint\limits_E e^{-x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{\boldsymbol{f}(E)}e^{-r^2}\,rdrd\theta=2\pi\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\pi(1-1/e)$$

已给一个可微分函数 $\boldsymbol{f}$，把它看作导入新坐标 $y_i=f^i(\boldsymbol{x})$，要计算在笛氏坐标下的 k 次形式 $dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k$ 的表达式. 我们有

①参看 Courant[1], vol. II, p. 247.

$$dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k$$
$$=\left(\sum_{i_1} f^1_{i_1}dx_{i_1}\right)\wedge\left(\sum_{i_2} f^2_{i_2}dx_{i_2}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_k} f^k_{i_k}dx_{i_k}\right)$$

其中每一指标 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是在 1, 2, ⋯, k 中取值. 由系统地(和不苟且地)应用一般形式的法则 2.3(1)到这表达式的相乘中去,最后可得

$$dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k=\left\{\sum_{i_1,\cdots,i_k} \varepsilon(i_1,\cdots,i_k)f^1_{i_1}f^2_{i_2}\cdots f^k_{i_k}\right\}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k \tag{10}$$

其中 $\varepsilon(i_1,\cdots,i_k)=\pm 1$ 按照把$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$变到顺序$(1,2,\cdots,k)$去所需要的交换次数是偶数或奇数而定. 这计算骤看起来似乎不可思议. 在两个变量的情况它变得很简单,述之如次. 已给 $f: R^2\to R^2$, 则$dy_1\wedge dy_2=df^1\wedge df^2=(f^1_1dx_1+f^1_2dx_2)\wedge(f^2_1dx_1+f^2_2dx_2)$ $=f^1_1f^2_1dx_1\wedge dx_1+f^1_1f^2_2dx_1\wedge dx_2+f^1_2f^2_1dx_2\wedge dx_1+f^1_2f^2_2dx_2\wedge dx_2$.
因为 $dx_1\wedge dx_1=dx_2\wedge dx_2=0$, 第一项和最后一项是消失的.
得到

$$dy_1\wedge dy_2=(f^1_1f^2_2-f^1_2f^2_1)dx_1\wedge dx_2 \tag{11}$$

这正是(10)的形状. (10)的计算和建立 2.3(8)时所遇到的是一样的,不过现在扩充到 k 个因子就是了. 在(11)看到 f 的微分的行列式$|df|=f^1_1f^2_2-f^1_2f^2_1$. 在(10)中出现的这个表达式的推广,事实上也是一个行列式,它是 k-k 的类似表达式

$$|df|=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\varepsilon(i_1,\cdots,i_k)f^1_{i_1}f^2_{i_2}\cdots f^k_{i_k} \tag{12}$$

其中 ε 和(10)的一样. 对于任何量 f^i_j, $|((f^i_j))|$具有形如(12)的事实,对于 3-3 和 4-4 行列式很容易验证,这利用子行列式的展开重新加以组合就可以了. 至于一般情况的证明,虽然不很困难,不

过此地不去证它①. 把(12)和(10)结合在一起便有

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k = |df|\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \tag{13}$$

例 对关于平面上笛氏坐标和极坐标的 2.4(2)的函数 $f: R^2 \to R^2$ 计算(13), 我们得出

$$dy_1 \wedge dy_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dx_1 \wedge dx_2$$

如使用极坐标的惯用记号 $y_1 = r, y_2 = \theta$, 则此式为

$$dr \wedge d\theta = \frac{1}{r} dx_1 \wedge dx_2 \tag{14}$$

如(13)的函数 f 是可逆的, 则由 2.4 末的讨论, (13)将伴有下式

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = |dg|\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k \tag{15}$$

而 g 是 f 的逆函数. 更有进者, 任何两个坐标系, 如以一个可逆的可微分函数其逆函数也是可微分相关联着的, 则对它们将有(13), (15)的类似公式.

比较(9)和(13),(15)使我们立刻得到下面的决断. 所谓在坐标$(y_1, \cdots, y_k)$下的体积元素我们今后指的是 k 次形式$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k$. 在这个定义下启发性的关系式(9)变成真实的公式(13), (15), 并且变量变换公式(8)现在变成自动的了: 为了在新坐标$(y_1, \cdots, y_k)$下计算$\int \cdots \int F(x) dx_1 \cdots dx_k$, 我们首先以$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$替代$dx_1 \cdots dx_k$, 然后以在新变量下的表达式(15)代之, 当然对 $F(x)$ 应置为

$$F \circ g(y).$$

例 继续前面的例子, 从(14)我们有 $dx_1 \wedge dx_2 = r\,dr\,d\theta$. 这样, 我们今后还要作几何学讨论的公式 $dx_1 dx_2 = r\,dr\,d\theta$ 现在变成在形式理论中的常规代数了. 这一理论的妙处在于对一些几何直观还

①在 Schreier-Sperner[5], *pp.* 87—89 有证明.

不清楚的东西仍可用常规的代数方法来处理它.

行列式$|df|$称为 f 的**函数行列式**或**耶可比**. 对它有另外两个普通记号：设 $y=f(x)$则

$$|df|=J(f)=\frac{\partial(y_1,\cdots,y_k)}{\partial(x_1,\cdots,x_k)} \tag{16}$$

最后的表达式是很有启发性的. 如果把它应用到(13)上去，则那个公式变成初等微积分中

$$dy=\frac{dy}{dx}dx$$

在 k 变量时的类似公式了.

在下面更一般的情况下仍用这些记号和名词. 设已给 $f: R^r\to R^k$, $r<k$. 置 $y=f(x)$, 我们有

$$y_i=f^i(x_1,\cdots,x_r),\ i=1,2,\cdots,k \tag{17}$$

在此 df 是一个 k-r 矩阵，因此它没有行列式，但有 r-r 形的 $\binom{k}{r}$个子行列式. 这些子行列式称为(且写为)耶可比. 这样，如果 $y_{i_1},\cdots,y_{i_r}$ 是从 i 的 k 个值中任选 r 个所对应的 y_i, 则

$$\frac{\partial(y_{i_1},\cdots,y_{i_r})}{\partial(x_1,\cdots,x_r)}=|((f^{i_l}_m))| \tag{18}$$

$l=1,2,\cdots,r$ 且 $m=1,2,\cdots,r$. 例如，设已给 $f: R^2\to R^3$, 则有 $\binom{3}{2}=3$ 个子行列式

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=f^1_1f^2_2-f^1_2f^2_1$$

$$\frac{\partial(y_1,y_3)}{\partial(x_1,x_2)}=f^1_1f^3_2-f^1_2f^3_1$$

$$\frac{\partial(y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2)}=f^2_1f^3_2-f^2_2f^3_1$$

对应于作为两个 x 的函数 y 的三对中每一对的表达式.

设已给 $f: R^r \to R^k, r>k$，我们有$\binom{r}{k}$个 k-k 形的子行列式，一般如

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_k)}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})} = |((f_{j}^{i_l}))| \tag{19}$$

$i=1,2,\cdots,k$ 且 $l=1,2,\cdots,k$. 这些耶可比量度 k 个 x_j 中各种集合 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_k}$ 对 y 的影响.

回到一个 k 向量变量的 k 向量值函数上，我们有下面两个公式. 第一，已给 f 和 g，都是可微分的，则 $f\circ g$ 如已在 1.3 指出是可微分的，且

$$J(f\circ g) = J(f)\cdot J(g) \tag{20}$$

第二，如 f 是可逆的且以 f^{-1} 表示它的逆函数，则

$$J(f^{-1}) = J(f)^{-1} \tag{21}$$

这二公式都是行列式乘法定理的简单推论. 从(16)的最后记号来看这些公式是有益处的. 设 $u=f(x)$ 和 $v=g(u)$，而因此

$$v = g\circ f(x).$$

则(20)是

$$\frac{\partial(v_1, \cdots, v_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} = \frac{\partial(v_1, \cdots, v_k)}{\partial(u_1, \cdots, u_k)}\cdot\frac{\partial(u_1, \cdots, u_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)} \tag{22}$$

且(21)是

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_k)}{\partial(x_1, \cdots, x_k)}\cdot\frac{\partial(x_1, \cdots, x_k)}{\partial(u_1, \cdots, u_k)} = 1 \tag{23}$$

从(22)和(23)的形状容易看出它们都是初等微积分的对应公式对 k 变数的推广；用这记号表示的变量变换公式(8)也是一样，即：

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_E F(x)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k\\ &= \int\cdots\int_{f(E)} F\circ g(y)\,\frac{\partial(x_1, \cdots, x_k)}{\partial(y_1, \cdots, y_k)}\,dy_1\wedge\cdots\wedge dy_k\end{aligned}$$

微积分的一个最基本定理，即在 2.4 所述的所谓**逆函数定理**，

对函数 $f: R^k \to R^k$ 的可逆性给出一个用它们的耶可比表示的判别法．详言之，这定理是，已给 $f: R^k \to R^k$ 和一点 x_0，在该点 $J(f) \neq 0$，则存在 x_0 的邻域 U 和 $f(x_0)$ 的邻域 V 使得 f 可逆地映照 U 到 V 上．这就是，存在定义在 V 上而在 U 中取值的映照 g 使得 $f \circ g(y) = y$ 对所有 $y \in V$，且 $g \circ f(x) = x$，对所有 $x \in U$．这定理将称为**局部**的可逆性定理．就是说，这定理并不蕴涵着同时也是不正确的事实，即：如耶可比处处不为 0，则存在一个整体的逆函数．

例 设 $f: R^2 \to R^2$ 由下式给出

$$
\begin{aligned}
u &= f^1(x) = e^x \sin y \\
v &= f^2(x) = e^x \cos y
\end{aligned}
\tag{24}
$$

则 $J(f) = -e^x \sin y \cdot e^x \sin y - e^x \cos y \cdot e^x \cos y = -e^{2x} \neq 0$，对所有 x．但由于任何两点当它们的纵坐标间隔为 2π 时有相同的象，所以变换(24)不是一对一的(因此不是可逆的)．然而它是**局部**可逆的．

习题 证明在 $x=0$ 的一个充分小的邻域内(并说明多么小)我们对 x, y 解(24)以 u, v 表达

$$
\begin{aligned}
x &= \ln\sqrt{u^2+v^2} \\
y &= \arctan\frac{u}{v}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

注意 $f(0) = (0, 1)$，因而靠近 $f(0)$ 有 $v \neq 0$ 且(25)是有意义的．

逆函数定理是初等微积分一个周知定理在多变量情况的推广．这定理是说，设对一已给 $f: R^1 \to R^1$ 有 $f'(x_0) \neq 0$，则 f 把 x_0 的一个邻域一对一地带到 $f(x_0)$ 的一个邻域上．在 R^k 的这个定理的

证明是有点难度的，我们不在此地完成它①.让我们满足于下面的从表面上看似乎讲得通的讨论. 泰乐展开 1.3(12)的意义是在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域线性变换 $df(\boldsymbol{x}_0)$ 逼近变换 $\boldsymbol{f}$. 现在 $df(\boldsymbol{x}_0)$ 是可逆的当且只当在 $\boldsymbol{x}_0$, $J(f)\neq 0$②，从此似乎可以说如 $df(\boldsymbol{x}_0)$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{f}$ 本身在靠近 $\boldsymbol{x}_0$ 的地方将也是可逆的. 定理的这个观点着重说明它的局部性质.

3.2 隐函数定理

记 $\phi: R^k\to R^1$ 的零点的集合为 $Z(\phi)$. 即 $Z(\phi)$ 是满足 $\phi(\boldsymbol{x})=0$ 的所有 $\boldsymbol{x}$ 的集合.

例 在 R^3，设 $\phi(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1$，则 $Z(\phi)$ 是单位球面.

隐函数定理是说，设 $\boldsymbol{a}$ 是 $Z(\phi)$ 的一个点，对 ϕ 的一个偏导数，例如 ϕ_i，在这点异于 0，$\phi_i(\boldsymbol{a})\neq 0$，则可解出 $Z(\phi)$ 靠近 $\boldsymbol{a}$ 的所有点的第 i 个坐标用其它的变量 x_j, $j\neq i$，表达出来.

例(续) $\phi_i=2x_i$. 置 $\boldsymbol{a}=(0,\ 0,\ 1)$. 则 $\phi_3(\boldsymbol{a})=2\neq 0$. 在 $\boldsymbol{a}$ 的邻域(实际上在整个北半球)我们有

$$x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}=\psi(x_1, x_2) \tag{1}$$

在球面上 $\boldsymbol{a}$ 的邻近不可能把 x_1 写成 x_2, x_3 的一个函数：从 x_1(或 x_2)轴看过去曲面在 $\boldsymbol{a}$ 变成直立的. 且 $\phi_1(\boldsymbol{a})=\phi_2(\boldsymbol{a})=0$. 注意到 $\phi(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))\equiv 0$，对 ψ 在那里定义的(此地是在赤道平面上(0, 0)的邻域)所有的 x_1, x_2 成立.

这定理所以这样称呼是因为它用 x_i 的一个显函数

$$x_i=\psi(x_1, \cdots)$$

---

①参看 Courant[1], vol. II, p. 152.

②从这样定理，即一个矩阵有它的一个逆矩阵当且只当它的行列式异于 0. 读者无疑的是熟悉这个结果的，在两个变量的情况取名为"Cramer 法则". 参看 Schreier-Sperner[5]，第 8, 9 节.

替代了一个隐函数关系式 $\phi(x_1, x_2, \cdots)=0$. 和例题一样我们一般有

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, \psi, \cdots x_k)\equiv 0 \tag{2}$$

对任何 ψ 有定义的地方成立. 和关于函数行列式的逆函数定理一样, 这定理也是局部性质的. 事实上这定理是逆函数定理的一个推论, 我们现在就来证明.

设已给 $\phi: R^k \to R^1$ 和一点 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\phi(\boldsymbol{a})=0$, 而 $\phi_1(\boldsymbol{a})\neq 0$. 定义 $\boldsymbol{f}: R^k \to R^k$ 为

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) \\ y_2 &= f^2(\boldsymbol{x}) = x_2 \\ &\vdots \\ y_k &= f^k(\boldsymbol{x}) = x_k \end{aligned} \tag{3}$$

则

$$d\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_k \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

从此

$$J(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \phi_1(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

由于 $J(\boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) = \phi_1(\boldsymbol{a}) \neq 0$, 我们可以在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 的邻域解 $x_1, \cdots, x_k$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi^1(y_1, \cdots, y_k) \\ x_2 &= \psi^2(y_1, \cdots, y_k) = y_2 \\ &\vdots \\ x_k &= \psi^k(y_1, \cdots, y_k) = y_k \end{aligned} \tag{6}$$

由(3)此式即为

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi^1(\phi(\boldsymbol{x}), x_2, \cdots, x_k) \\ x_i &= y_i, \ i=2, 3, \cdots, k \end{aligned} \tag{7}$$

但如 $\boldsymbol{x}$ 是 $Z(\phi)$ 的一点, 即 $\phi(\boldsymbol{x})=0$, 便得

$$x_1=\psi^1(0, x_2, \cdots, x_k) \tag{8}$$

在 $Z(\phi)$ 邻近于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 的每一点，上式把 x_1 用 $x_2, \cdots, x_k$ 显式的表示出来(由 ψ^1 置第一个变量为 0)，因此证明了定理，证毕．

例(续)　(3)的 $\boldsymbol{f}$ 此地是

$$\begin{aligned} y_1&=f^1(\boldsymbol{x})=x_1\\ y_2&=f^2(\boldsymbol{x})=x_2\\ y_3&=f^3(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1 \end{aligned} \tag{9}$$

则在(0, 0, 1)，$J(\boldsymbol{f})=2x_3=2$，且逆函数(6)此地是

$$\begin{aligned} x_1&=y_1=\psi^1(\boldsymbol{y})\\ x_2&=y_2=\psi^2(\boldsymbol{y})\\ x_3&=\sqrt{1-y_1^2-y_2^2+y_3}=\psi^3(\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{10}$$

现在设 $\boldsymbol{x}$ 是球面的一点，则 $y_3=0$，按照前面的讨论我们得出

$$x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}=\psi^3(x_1, x_2, 0) \tag{11}$$

并且

$$\phi(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))=x_1^2+x_2^2+(1-x_1^2-x_2^2)-1\equiv 0$$

设以 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$，$s<k$，记为 s 个已给函数 ϕ^i: $R^k\to R^1$，$i=1, 2, \cdots, s$ 公共零点的集合．就是，$Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$是 R^k 中满足 $\phi^1(\boldsymbol{x})=\phi^2(\boldsymbol{x})=\cdots=\phi^s(\boldsymbol{x})=0$ 的所有 $\boldsymbol{x}$ 的集合①．

例　在 R^3，令

$$\begin{aligned} \phi^1(\boldsymbol{x})&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\\ \phi^2(\boldsymbol{x})&=x_1+x_2+x_3-1 \end{aligned} \tag{12}$$

则 $Z(\phi^1, \phi^2)$是球面和一个平面的交；因此是 R^3 的一个圆．

把函数 ϕ^i 看作一个函数 $\boldsymbol{\phi}$: $R^k\to R^s$ 的分量，并写 $y_i=\phi^i(\boldsymbol{x})$，$i=1, 2, \cdots, s$．它的微分矩阵 $d\boldsymbol{\phi}$ 是一个 s-k 矩阵

---

①用集合论的术语表示，$Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$ 是 $Z(\phi^1)$，$Z(\phi^2)$，$\cdots Z(\phi^s)$ 的交 $\cap Z(\phi^i)$．

$$d\phi=\begin{pmatrix}\phi_1^1 & \phi_2^1 & \cdots & \phi_k^1\\ \phi_1^2 & \phi_2^2 & \cdots & \phi_k^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \phi_1^s & \phi_2^s & \cdots & \phi_k^s\end{pmatrix} \tag{13}$$

它有$\begin{pmatrix}k\\s\end{pmatrix}$个函数子行列式，

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_s)}{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_s})}=\det((\phi^j_{i_\nu})),\ i_1<i_2<\cdots<i_s\text{①} \tag{14}$$

例（续） 函数 ϕ: $R^3\to R^2$ 在此地是

$$\begin{aligned} y_1&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\\ y_2&=x_1+x_2+x_3-1\end{aligned} \tag{15}$$

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3$ 个耶可比是

$$\begin{aligned}\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}&=2(x_1-x_2)\\ \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_3)}&=2(x_1-x_3)\\ \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_2,x_3)}&=2(x_2-x_3)\end{aligned} \tag{16}$$

在这个情况下隐函数定理是说，设 $\boldsymbol{a}$ 是 $Z(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^s)$ 的一点，在那里有一个耶可比(14)不消失，则靠近 $\boldsymbol{a}$ 可以解出 $Z(\phi^1,\cdots,\phi^s)$ 一点的 s 个坐标以其余 k-s 个坐标表示出来. 前面所说的结果(在 $p.$ 35 页叙述) 显然是现在这个定理的特殊情况，因此它的证明也是以下所述的证明的特殊情况.

设 $\phi^1(\boldsymbol{a})=\cdots=\phi^s(\boldsymbol{a})=0$，且在 $\boldsymbol{a}$

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_s)}{\partial(x_1,\cdots,x_s)}\neq 0 \tag{17}$$

定义一个函数 $\boldsymbol{F}$: $R^k\to R^k$ 如下

①见 3.1 (19).

$$
\begin{aligned}
u_1 &= F^1(\boldsymbol{x}) = \phi^1(\boldsymbol{x}) \\
u_2 &= F^2(\boldsymbol{x}) = \phi^2(\boldsymbol{x}) \\
&\vdots \\
u_s &= F^s(\boldsymbol{x}) = \phi^s(\boldsymbol{x}) \\
u_{s+1} &= F^{s+1}(\boldsymbol{x}) = x_{s+1} \\
&\vdots \\
u_k &= F^k(\boldsymbol{x}) = x_k
\end{aligned} \tag{18}
$$

则

$$
d\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} & (\quad d\boldsymbol{\phi} \quad) & \\ \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{19}
$$

其内在上面的 s-k 块是(13)，而下面左边的$(k-s)$-s 块内所有元素都是 0. 因此 $J(\boldsymbol{F})$是函数$\dfrac{\partial(y_1, \cdots, y_s)}{\partial(x_1, \cdots, x_s)}$. 因为在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $J(\boldsymbol{F}) \neq 0$, 我们可以在 $\boldsymbol{a}$ 的邻近作出 $\boldsymbol{F}$ 的逆函数：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= G^1(\boldsymbol{u}) \\
&\vdots \\
x_s &= G^s(\boldsymbol{u}) \\
x_{s+1} &= u_{s+1} \\
&\vdots \\
x_k &= u_k
\end{aligned} \tag{20}
$$

由(18)可知(20)的前 s 个方程显然是

$$
\begin{aligned}
x_1 &= G^1(\phi^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \phi^s(\boldsymbol{x}), x_{s+1}, \cdots, x_k) \\
&\vdots \\
x_s &= G^s(\phi^1(\boldsymbol{x}), \cdots, \phi^s(\boldsymbol{x}), x_{s+1}, \cdots, x_k)
\end{aligned} \tag{21}
$$

现在如 $\boldsymbol{x}$ 是 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$ 的一点，即 $\phi^1(\boldsymbol{x}) = \cdots = \phi^s(\boldsymbol{x}) = 0$, 便有

$$x_1=G^1(0,\cdots,0,x_{s+1},\cdots,x_k)$$
$$\vdots \tag{22}$$
$$x_s=G^s(0,\cdots,0,x_{s+1},\cdots,x_k)$$

这就是所要证明的. 证毕.

我们在此附带地得到更多的东西. 在(20)置 $u_1=u_2=\cdots=u_s=0$. 则(20)在 $Z(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^s)$ 的范围内定义一个映照 $R^{k-s}\to R^k$, 它在 $\binom{k}{k-s}$ 个耶可比中至少有一个不为 0①; 即

$$\frac{\partial(x_{s+1},\cdots,x_k)}{\partial(u_{s+1},\cdots,u_k)}=1 \tag{23}$$

例(续) 此地系统(18)是

$$\begin{aligned}u_1&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1\\ u_2&=x_1+x_2+x_3-1\\ u_3&=x_3\end{aligned} \tag{24}$$

在 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$, (16)的第一个耶可比是 $2\neq0$. (24)的逆不大齐整, 包含着较长式子的根号. 但如记住在圆 $Z(\phi^1,\phi^2)$ 上 $u_1=u_2=0$, 并且把这些项去掉, 我们很快得出解((22)的类似)

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{1-x_3+\sqrt{2x_3-3x_3^2+1}}{2}\\ x_2&=\frac{1-x_3-\sqrt{2x_3-3x_3^2+1}}{2}\end{aligned} \tag{25}$$

我们容易验证(25)的 x_1, x_2, x_3 的确满足所定的 $Z(\phi^1,\phi^2)$ 的关系 $x_1+x_2+x_3-1=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1=0$(见(12)). 这是(2)的类似.

隐函数定理有一个相伴的结果, 如所知为**函数相关定理**. 其实在前一定理我们有 s 个函数(隐函数关系)ϕ^i: $R^k\to R^1$ 构成一个映照 $\boldsymbol{\phi}$: $R^k\to R^s$ 的分量, 现在我们假设有 k 个 s 变量的函数 ψ^j: R^s

①见 3.1 (18).

$\to R^1$, 它们可以看作一个映照 $\boldsymbol{\psi}: R^s \to R^k$ 的分量. 写 $x_i = \psi^i(u_1, \cdots, u_s)$, $i=1, 2, \cdots, k$, 且令函数 ψ^i 是定义在 R^s 的一个区域 D 内. 函数相关定理是说在 D 的一点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域有一个耶可比

$$\frac{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_s})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_s)}, \quad i_1 < \cdots < i_s \tag{26}$$

不消失, 函数 ψ^i 是函数相关的: 存在 $k-s$ 个函数(隐函数关系) $\phi^l: R^k \to R^1$ 使得

$$\phi^l(\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^k) \equiv 0, \quad l=1, 2, \cdots, k-s \tag{27}$$

对靠近 $\boldsymbol{a}$ 的所有 $\boldsymbol{u}$ 都成立. 为证明起见, 设在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}$ 有

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_s)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_s)} \neq 0 \tag{28}$$

则我们可以在 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}$ 的邻近求出关系式

$$x_i = \psi^i(\boldsymbol{u}), \quad i=1, 2, \cdots, s \tag{29}$$

的逆函数:

$$u_i = \sigma^i(x_1, x_2, \cdots, x_s), \quad i=1, 2, \cdots, s \tag{30}$$

从此

$$x_{s+j} = \psi^{s+j}(\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_s)), \quad j=1, 2, \cdots, k-s \tag{31}$$

以变量 u 来表示这式是

$$\psi^{s+j}(\boldsymbol{u}) = \psi^{s+j}(\boldsymbol{\sigma}(\psi^1(\boldsymbol{u}), \cdots, \psi^s(\boldsymbol{u}))) \tag{32}$$

这对 $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 是一个恒等式. 它的函数形式是

$$\psi^{s+j} = (\psi^{s+j} \circ \boldsymbol{\sigma})(\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^s) \tag{33}$$

这就是 ψ^{s+j} 是 $\psi^1, \psi^2, \cdots, \psi^s$ 的一个函数(即复合函数 $(\psi^{s+j} \circ \boldsymbol{\sigma})$), 且(33)是 $k-s$ 个函数关系(27)的集合. 证毕.

例 设 $\boldsymbol{\psi}: R^2 \to R^3$ 是

$$\begin{aligned} \psi^1(\boldsymbol{u}) &= \sin u_1 \sin u_2 \\ \psi^2(\boldsymbol{u}) &= \sin u_1 \cos u_2 \\ \psi^3(\boldsymbol{u}) &= \cos u_1 \end{aligned} \tag{34}$$

则

$$u_1 = \mathrm{Arc}\sin\sqrt{(\psi^1)^2+(\psi^2)^2}$$
$$u_2 = \mathrm{Arc}\tan\left(\frac{\psi^1}{\psi^2}\right) \tag{35}$$

从此

$$\psi^3 = \cos \mathrm{Arc}\sin\sqrt{(\psi^1)^2+(\psi^2)^2} \tag{36}$$

在此 $\psi^3\circ\sigma$ 是 $\cos\mathrm{Arc}\sin$.

回到定理的证明，我们在此附带得到更多的东西. 把(30)的函数 σ^i: $R^s\to R^1$ 替代以函数 τ^i: $R^k\to R^1$, 而

$$\tau^i(x_1, \cdots, x_k)=\sigma^i(x_1, \cdots, x_s), \quad i=1, 2, \cdots, s \tag{37}$$

这就是, $\tau^i_l=0$, $l=s+1, \cdots, k$, τ^i 和最后的 $k-s$ 个变量无关. 它们定义一个映照 τ: $R^k\to R^s$ 以 $Z(\tau^1, \cdots, \tau^s)\subset\psi(D)$, 对此在$\binom{k}{s}$个耶可比中至少有一个不等于 0; 即

$$\frac{\partial(u_1, \cdots, u_s)}{\partial(x_1, \cdots, x_s)}=\left\{\frac{\partial(x_1, \cdots, x_s)}{\partial(u_1, \cdots, u_s)}\right\}^{-1}\neq 0 \tag{38}$$

已给 ϕ: $R^k\to R^s$, $s<k$, $d\phi$ 是一个线性映照 $R^k\to R^s$, 并且它的秩数是最大的, $\operatorname{rank}(d\phi)=s$, 当且只当

$$\sum_{i_1<\cdots<i_s}\left\{\frac{\partial(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_s})}\right\}^2\neq 0 \tag{39}$$

已给 ψ: $R^s\to R^k$, $s<k$, $d\psi$ 是一个线性映照 $R^s\to R^k$, 并且它的秩数是最大的, $\operatorname{rank}(d\psi)=s$, 当且只当

$$\sum_{i_1<\cdots<i_s}\left\{\frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \cdots, \psi^{i_s})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_s)}\right\}^2\neq 0 \tag{40}$$

在问题中至少有一个耶可比不消失的条件用和式(39)和(40)来表达，这是方便的也是习惯如此的. 用这些术语我们可以把前面所说的两个定理简明地叙述出来，并且为了容易比较起见把它们排列在一起, 如所知它们都是局部的结果.

隐函数定理 已给 ϕ: $R^k \to R^s$, $s<k$, 设 $d\phi$ 有最大秩，则在 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$ 中有 R^k 的 s 个变量显式相关于其余的 $k-s$ 个变量，并且在 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$ 的范围内存在 ψ: $R^{k-s} \to R^k$ 使 $d\psi$ 有最大秩.

函数相关定理 已给 ψ: $R^s \to R^k$, $s<k$, 设 $d\psi$ 有最大秩，则 ψ 的分量满足 $k-s$ 个函数关系 $\phi^1, \cdots, \phi^{k-s}$, $Z(\phi^1, \cdots, \phi^{k-s})$ 包含在 ψ 的取值范围内，并且由这些函数所定义的线性映照 $d\phi$ 有最大秩.

3.3 流形

维数的意义是指自由度的数目. 在 R^k 一个 j 维($j \leqslant k$)流形的意义是指 R^k 中的一个点集，它的每一点恰恰可用一定规格的 j 个数来决定. 这个叙述不但太含糊而且也太一般了，不过让它作为第一个近似，很快我们就要加以澄清. 结果将是(在澄清以后)一个 j 维流形在它的每一点的邻域看起来很像 R^j 的一小块.

令 ϕ: $R^k \to R^1$ 满足

$$\sum_{i=1}^{k} \{\phi_i\}^2 \neq 0 \tag{1}$$

这是处在隐函数定理的情况：我们有从 R^k 到 R^1 的一个映照，即 ϕ 的自身；且(1)是此时的耶可比条件 3.2(39). 因此我们可以在 $Z(\phi)$ 局部解出一个变量，如

$$x_1 = \sigma(x_2, x_3, \cdots, x_k) \tag{2}$$

这对整个 $Z(\phi)$ 可以不成立：我们可以要求 $k-1$ 个 x 的不同集合作为 $Z(\phi)$ 的不同区域的独立变量.

例 在 R^3, 以 $\phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$, 在北极的邻域我们已有①

---

①参看 3.2 (11).

$$x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$$

但此式对(1, 0, 0)的邻域是不行的. 在那里我们应写

$$x_1=\sqrt{1-x_2^2-x_3^2}$$

但是局部的说, 我们可以用 $k-1$ 个参数来表示 $Z(\phi)$:

$$\begin{aligned} x_1&=\sigma(u_2, u_3, \cdots, u_k)\\ x_2&=u_2\\ &\vdots\\ x_k&=u_k \end{aligned} \tag{3}$$

这就是说, 参数 $u_2, \cdots, u_k$ 恰是 $x_2, \cdots, x_k$. 我们把(3)看作一个映照 ψ: $R^{k-1}\to R^k$. 即

$$\begin{aligned} x_1&=\psi^1(u_2, \cdots, u_k)=\sigma(u_2, \cdots, u_k)\\ x_2&=\psi^2(u_2, \cdots, u_k)=u_2\\ &\vdots\\ x_k&=\psi^k(u_2, \cdots, u_k)=u_k \end{aligned} \tag{4}$$

那么

$$\frac{\partial(\psi^2, \psi^3, \cdots, \psi^k)}{\partial(x_2, x_3, \cdots, x_k)}=1 \tag{5}$$

而特别的, 耶可比条件 3.2(40) 对 ψ 是满足的.

我们已经证明了若 $\phi: R^k\to R^1$ 满足(1), 则按照我们暂时的定义 $Z(\phi)$是一个$(k-1)$维流形; 此外, 我们已经证明当作为一个映照 $R^{k-1}\to R^k$ 看待时, 这个参数表示(它表示了维数)满足耶可比条件 3.2(40). 对特别的流形 $Z(\phi)$常常可能(并且希望)寻找参数(异于 x_i 的子集)使它适合于流形的几何学, 并且提供在全流形成立的参数表示。

例(续) 对于 R^3 的球面我们可以应用纬度角和经度角 u_1, u_2. 则 $Z(\phi)$是由下式给出

$$x_1=\sin u_1\sin u_2$$
$$x_2=\sin u_1\cos u_2 \qquad \left\{\begin{matrix}0\leqslant u_1\leqslant\pi\\0\leqslant u_2\leqslant 2\pi\end{matrix}\right\} \tag{6}$$
$$x_3=\cos u_1$$

把(6)作为一个映照 ψ: $R^2\to R^3$ 看待，我们求出它的三个耶可比

$$\frac{\partial(\psi^1,\psi^2)}{\partial(u_1,u_2)}=-\sin u_1\cos u_1$$
$$\frac{\partial(\psi^1,\psi^3)}{\partial(u_1,u_2)}=\sin^2 u_1\cos u_2 \tag{7}$$
$$\frac{\partial(\psi^2,\psi^3)}{\partial(u_1,u_2)}=-\sin^2 u_1\sin u_2$$

又，注意 3.2(40)，得出

$$\sum_{i<j}\left\{\frac{\partial(\psi^i,\psi^j)}{\partial(u_1,u_2)}\right\}^2=\sin^2 u_1 \tag{8}$$

从此可知除南北极外在所有点耶可比条件都是满足的.

设 ϕ: $R^k\to R^s(s<k)$ 满足耶可比条件 3.2(39). 则把关于一个函数 ϕ: $R^k\to R^1$ 按上面已经采取过的步骤来讨论，便知 $Z(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^s)$ 是一个 $k-s$ 维的流形，并且当把表示维数的参数表示解释作一个映照 $R^{k-s}\to R^k$ 时是满足 3.2(40) 的. 对特别的流形时常可能找到一个参数表示在整个流形成立，并且至多除了有限个点外(如例所述)满足 3.2(40). 现在以此为基础，我们叙述

定义 在 R^k 的一个 j 维流形，$j\leqslant k$, 是 R^j 一个矩形区域 D 在映照 ψ: $R^j\to R^k$ 下的像，至多除了 D 的有限个点外它在 D 的所有点耶可比条件 3.2(40)是满足的. 所谓 R^j 的一个矩形区域，我们是指一个 j 维的长方体它在任何坐标方向可以扩展到无穷.

形如 $Z(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^l)$ 的一个集合，它的相应的微分有最大秩，称为一个**多样形**. 3.2 两个定理的内容是：一个多样形局部地是一个流形，并且一个流形局部地是一个多样形.

设 $M=\boldsymbol{\psi}(D)$, $\boldsymbol{\psi}$: $R^r \to R^k$, $r<k$, 是一个 r 维流形. 分量 ψ^i 由偏微分产生出 R^k 的 r 个向量 $\boldsymbol{\psi}_\nu$:

$$\boldsymbol{\psi}_\nu=(\psi^1_\nu, \psi^2_\nu, \cdots, \psi^k_\nu), \quad \nu=1, 2, \cdots, r \tag{9}$$

对于任何 r 个数量 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_r)$, 我们有

$$(d\boldsymbol{\psi})\boldsymbol{a}=\sum a_\nu \boldsymbol{\psi}_\nu \tag{10}$$

因为 M 是一个流形, 耶可比条件 3.2(40) 对 $\boldsymbol{\psi}$ 是成立的, 就是说 $d\boldsymbol{\psi}$ 有秩 r. 因此如 $\sum a_\nu \boldsymbol{\psi}_\nu=0$, 则由 (10) 得 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, $a_1=a_2=\cdots=a_r=0$. 这是说向量(9)是线性无关的.

M 局部地是一个多样形 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$, ϕ^μ: $R^k \to R^1$, $s+r=k$. 由函数 ϕ^μ 的偏微分给出在 R^k 的 s 个向量:

$$\boldsymbol{\phi}^\mu=(\phi^\mu_1, \phi^\mu_2, \cdots, \phi^\mu_k), \quad \mu=1, 2, \cdots, s \tag{11}$$

对任何 s 个数量 $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_s)$, 我们有①

$${}^t(d\boldsymbol{\phi})\cdot{}^t\boldsymbol{b}=\sum b_\mu \boldsymbol{\phi}^\mu \tag{12}$$

由耶可比条件 3.2(39), ${}^t(d\boldsymbol{\phi})$ 有秩 s. 因此由 (12) 如 $\sum b_\mu \boldsymbol{\phi}^\mu=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$, $b_1=b_2=\cdots=b_s=0$. 就是说向量(11)是线性无关的.

因为 M 局部地是 $Z(\phi^1, \phi^2, \cdots, \phi^s)$, 我们有

$$\phi^\mu(\psi^1, \cdots, \psi^k)\equiv 0 \tag{13}$$

对 $\boldsymbol{\psi}$ 的第 ν 个变量微分(13)式得

$$\sum_{i=1}^{k}\phi^\mu_i \psi^i_\nu=0 \tag{14}$$

这是说

$$\boldsymbol{\phi}^\mu\cdot\boldsymbol{\psi}_\nu=0, \quad \mu=1, \cdots, s; \quad \nu=1, \cdots, r \tag{15}$$

每一向量(9)直交于每一向量(11).

把向量(9)看作切于 M 的一点 $\boldsymbol{x}$. 它们形成一个 r 维空间, 就是说在 $\boldsymbol{x}$ 切于 M 的空间 R^r. 设一向量 $\boldsymbol{\delta}$ 的分量 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r$ 是

---

① ${}^tA$ 是矩阵 A 的转置.

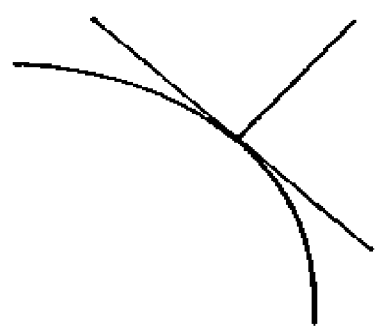
充分的小，则由(10)可得

$$\psi(u+\delta)-\psi(u)\cong\Sigma\delta_v\psi_v \tag{16}$$

此地 $\psi(u)=x$ 且 $\cong$ 表示线性逼近. 这说明所有的向量(9)在 x 切于 M. 具有这性质的一个线性空间(适当地)称为 M 的一个**切空间**. 从(15)可知除了(9)的撑成空间之外不能有其它向量切于 M，而我们证实了 M 的切空间(由切于 M 的**所有**向量所撑成的空间)是 R^r. 在这个意义下一个 r 维流形在它的每一点的邻域非常相似于 R^r 的一小块.

我们自然也已经证明了在 M 的**法空间**(由直交于 M 的所有向量所撑成的空间)是 R^s，$r+s=k$.

例 在 R^2 单位圆 S^1 是 $Z(\phi)$ 而 $\psi=x_1^2+x_2^2-1$. 在 S^1 每一点的切空间是切于圆的直线(即 R^1)；法空间是在这点垂直于它的直线(R^1)(见图). 没有必要去画更高维的图形，不过它和这一情形的类似之处是实在的.



设 M 是 R^3 的一个 2 维流形(曲面)，由 ψ: $R^2\to R^3$ 所给出，切平面是由 ψ_1, ψ_2 所撑成，而法空间，它是 1 维的，纯粹是向量积 $\psi_1\times\psi_2$ 所撑成.

例 对于 R^3 的球面 S^2，以纬度角和经度角表示式(6)给出时，有

$$\begin{aligned}\psi_1&=(\cos u_1\sin u_2,\ \cos u_1\cos u_2,\ -\sin u_1)\\ \psi_2&=(\sin u_1\cos u_2,\ -\sin u_1\sin u_2,\ \ 0)\end{aligned} \tag{17}$$

对 $\psi_1\times\psi_2$ 的计算已在(7)给出. 结果是

$$\psi_1\times\psi_2=(-\sin^2u_1\sin u_2,\ -\sin^2u_1\cos u_2,\ -\sin u_1\cos u_1) \tag{18}$$

并且注意 $\|\psi_1\times\psi_2\|^2$ 正是此时的耶可比条件 3.2(40) 的左侧. 这条

件肯定了在 S^2 的每一点有一个非零的法向量，并且从问题中的向量是 $\psi_1\times\psi_2$，说明了 M 在每点的切空间是 2 维的(或，总之是不蜕化的)．由于 $S^2=Z(\phi)$，$\phi=x_1^2+x_2^2+x_3^2-1$，法空间也是由

$$\boldsymbol{\phi}=(2x_1,2x_2,2x_3) \tag{19}$$

所撑成的；并且按(6)得出

$$\boldsymbol{\psi}_1\times\boldsymbol{\psi}_2=\left(-\frac{1}{2}\sin u_1\right)\boldsymbol{\phi} \tag{20}$$

在 2.1 对 R^k 中的曲线的讨论应属于本节的范围内．在此我们有一映照 $\boldsymbol{r}$: $R^1\to R^k$；切空间是 1 维的，由 $\boldsymbol{T}=\left(\frac{d}{dt}r^1,\cdots,\frac{d}{dt}r^k\right)$所撑成，它是这情况下的(9)式；并且此地的耶可比条件 3.2(40)是要求在曲线的每点 $\|\boldsymbol{T}\|\neq0$(或，切空间处处不蜕化)．

3.4 在流形上的积分

已给 R^k 中一个 r 维的流形 M，$r<k$，我们要找在 M 上的 r 维体积元素．这工作对 R^k 中的曲线已经做过；答案是线素公式 2.1(5)．在 3.1 对耶可比的讨论之后，我们可以期望所要找寻的体积元素将是一个耶可比．它不能直接由 M 的参数表达出来，这是因为 k 个坐标是以 $r<k$ 个参数表示的．借助于切空间的几何学，我们可以把体积元素用参数表达出来．更加明白的说，我们利用基 3.3(9)的切空间内的处理；在此体积元素将由基 3.3(9)所决定的切空间内的 r 维长方体的 r 维体积所决定．对一曲线，这体积仅是切向量的长度，因而 2.1(5)是这个运算程序的一个例子．从 3.3(16) 可以看到这个运算程序是正确的：设参数受到微小的变化，则 M 的对应点在 r 个独立方向的变化是由在基切方向 3.3(9)的变化的第一(线性)逼近所给出；因而在 M 所产生的曲线"长方体"的体积在第一逼近下是切空间的对应长方体的体积．

设 M 是 R^k 的一个 2 维流形(一个曲面)，如，由 ψ: $R^2\to R^k$ 给

出. 两个基切向量是

$$\psi_l=(\psi_l^1,\cdots,\psi_l^k),\quad l=1,2 \tag{1}$$

并且它们在切平面上所产生的平行四边形的面积 A 不难由余弦定理计算. 得

$$\begin{aligned}A^2&=\|\psi_1\|^2\|\psi_2\|^2\left\{1-\frac{(\psi_1\cdot\psi_2)^2}{\|\psi_1\|^2\|\psi_2\|^2}\right\}\\&=\sum_{i=1}^{k}(\psi_1^i)^2\sum_{j=1}^{k}(\psi_2^j)^2-\left(\sum_{l=1}^{k}\psi_1^l\psi_2^l\right)^2\end{aligned} \tag{2}$$

我们只要注意从负号会引起一些项消掉便很快看出

$$A^2=\sum_{i<j}(\psi_1^i\psi_2^j-\psi_1^j\psi_2^i)^2 \tag{3}$$

即,

$$A^2=\sum_{i<j}\left\{\frac{\partial(\psi^i,\psi^j)}{\partial(u_1,u_2)}\right\}^2 \tag{4}$$

它就是对一曲面的耶可比条件 3.2(40) 的左侧. 把一般的体积元素写为 dV(对一曲线是线素,对一曲面是面积元素,等等). 从(4)对 R^k 的一曲面 M 有

$$dV=\left[\sum_{i<j}\left\{\frac{\partial(\psi^i,\psi^j)}{\partial(u_1,u_2)}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}du_1\wedge du_2 \tag{5}$$

这体积元素是有向的: 对基切向量(1)有两个可能的排列,或者同样地,参数 u_1,u_2 有两个可能的排列, 如果次序改变, 则体积元素变号.

设 M 是 R^k 的一个 $r(r<k)$维流形,如,由 $\psi:R^r\to R^k$ 所给出. 按上面计算对 r 维的类似①我们得出

$$dV=\left[\sum_{i_1<\cdots<i_r}\left\{\frac{\partial(\psi^{i_1},\psi^{i_2},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_r)}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}du_1\wedge\cdots\wedge du_r \tag{6}$$

---

①将在附录中讨论.

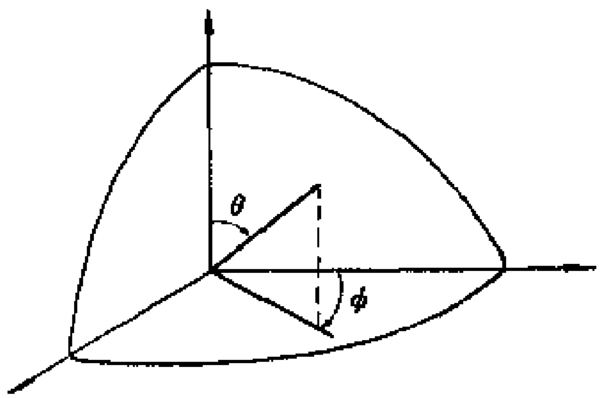
这个体积元素是有向的：参数有 $r!$ 个可能的排列顺序；从一个顺序到另一个顺序要通过 $1, 2, \cdots, r$ 的奇数个排列(即要奇数个交换)，则(6)的符号要改变，如为偶数个则不改变。

习题 记 R^3 中单位球面上的纬度角和经度角为 θ, ϕ 则

$$x_1 = \sin\theta\cos\phi = \psi^1(\theta, \phi)$$
$$x_2 = \sin\theta\sin\phi = \psi^2(\theta, \phi)$$
$$x_3 = \cos\theta = \psi^3(\theta, \phi)$$

画成球面。证明从(6)得出周知的曲面面积元素

$$dV = \sin\theta d\theta d\phi$$



把体积元素看作由一个向量样的物 $\boldsymbol{V}$ 所构成，它有(在一个 r 维流形的情形) $\binom{k}{r}$ 个分量

$$V_{i_1, i_2, \cdots, i_r} = \frac{\partial(\psi^{i_1}, \psi^{i_2}, \cdots, \psi^{i_r})}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_r)}, \quad i_1 < \cdots < i_r \tag{7}$$

则

$$dV = \|\boldsymbol{V}\| du_1 \wedge \cdots \wedge du_r \tag{8}$$

而 $\|\boldsymbol{V}\|$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的 $\binom{k}{r}$ 维长度。对一条曲线，$\boldsymbol{V}$ 有 $\binom{k}{1} = k$ 个分量而

是一普通向量，$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{T}$；在此线素公式 2.1(5)是(8)的一个特殊情况．我们把一个 r 次形式

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_r}a^{i_1,i_2,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

看作一个具有$\binom{k}{r}$个分量

$$\omega_{i_1,i_2,\cdots,i_r}=a^{i_1,i_2,\cdots,i_r},\quad i_1<\cdots<i_r \tag{9}$$

的向量样的物 ω．当 $\boldsymbol{x}$ 在一个 r 维流形变动时，分量(9)是参数 $\boldsymbol{u}$ 的函数，$a^{i_1,\cdots,i_r}(\boldsymbol{x})=a^{i_1,\cdots,i_r}(\psi(\boldsymbol{u}))$．这样，点积 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{V}$(它是一个$\binom{k}{r}$维的点积)是一个定义在 R^r 的区域 D 上的数量值函数，而 D 是通过 ψ 定下了流形 M．这个数量函数在 D 上的积分是一个 r 次形式在一个 r 维流形上的积分的一个定义：

$$\int_M\omega=\int_D\cdots\int\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{V}du_1\wedge\cdots\wedge du_r \tag{10}$$

这是一个一次形式(向量场)在一曲线上的积分 2.1(7) 的 r 维类似．那个公式被解释为向量场沿切线的分量在曲线上的积分．因此在此地也是一样：积分(10)是 ω 的分量沿 $\boldsymbol{V}$ 在 M 上的积分．那个分量是 $\boldsymbol{\omega}\cdot\dfrac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|}$，因此刚才所说的积分将是

$$\int\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|}dV=\int\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\|}\|\boldsymbol{V}\|du_1\wedge\cdots\wedge du_r$$

这就是(10)．用和 2.1(8)类似的更为抽象的记号写为

$$\int_M\omega=\int_M\left\{\sum_{i_1<\cdots<i_r}a^{i_1,i_2,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\right\} \tag{11}$$

当 M 的一个参数表示 ψ 导入时这积分变成(10)；因为此时，

$$dx_i=\sum\psi^i_jdu_j,$$

且

$$dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}=\frac{\partial(\psi^{i_1},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(u_1,\cdots,u_r)}du_1\wedge\cdots\wedge du_r$$

$$=V_{i_1,\cdots,i_r}du_1\wedge\cdots\wedge du_r \tag{12}$$

这个抽象公式是没有意义的(实际上,积分(10)没有很好地定义起来)除非我们能够证明这个积分在坐标变换下是不变的. 为此目的,设M也可用新坐标$\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_r)$表达出来. 假定这个$u$和$v$都是有资格的坐标系,那么就有一个映象$\phi: R^r\to R^r$, $\boldsymbol{u}=\phi(\boldsymbol{v})$, 使得在$(\phi)^{-1}(D)$的每点$J(\phi)\neq 0$. 形式$\omega$的分量可用新坐标以复合函数简单地表达出来:

$$a^{i_1,\cdots,i_r}(\psi(\boldsymbol{u}))=a^{i_1,\cdots,i_r}(\psi\circ\phi(\boldsymbol{v}))$$

从 3.1(13)得出

$$dv_1\wedge\cdots\wedge dv_r=\frac{\partial(v_1,\cdots,v_r)}{\partial(u_1,\cdots,u_r)}du_1\wedge\cdots\wedge du_r$$

对任何固定的指标$i_1<\cdots<i_r$以$\psi^{i_1}\circ\phi$, $\psi^{i_2}\circ\phi,\cdots,\psi^{i_r}\circ\phi$为分量的映照是两个$R^r\to R^r$映照的复合. 因此由行列式乘法定理(见 3.1(20)),

$$\frac{\partial(\psi^{i_1},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(u_1,\cdots,u_r)}\cdot\frac{\partial(u_1,\cdots,u_r)}{\partial(v_1,\cdots,v_r)}=\frac{\partial(\psi^{i_1},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(v_1,\cdots,v_r)}$$

因而

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_D\sum a^{i_1,\cdots,i_r}(\psi(\boldsymbol{u}))\frac{\partial(\psi^{i_1},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(u_1,\cdots,u_r)}du_1\wedge\cdots\wedge du_r\\&=\int\cdots\int_{(\phi)^{-1}(D)}\sum a^{i_1,\cdots,i_r}(\psi\circ\phi(\boldsymbol{v}))\frac{\partial(\psi^{i_1},\cdots,\psi^{i_r})}{\partial(v_1,\cdots,v_r)}\\&\quad\cdot\frac{\partial(v_1,\cdots,v_r)}{\partial(u_1,\cdots,u_r)}\cdot\frac{\partial(u_1,\cdots,u_r)}{\partial(v_1,\cdots,v_r)}\cdot dv_1\wedge\cdots\wedge dv_r\end{aligned}$$

我们看到$J(\phi)=\dfrac{\partial(u_1,\cdots,u_r)}{\partial(v_1,\cdots,v_r)}$和它的逆同时出现,因此相消,而$\int_M\omega$在任何坐标系下是一样的.

一个r次形式在一个r维流形上的积分(11)是一个向量场在一条曲线上的积分 2.1(8)在r维的推广. 在这意义下, r次形式对r维曲面积分有如一次形式对于线积分.

第四章 外 微 分

4.1 外微分

外微分是关于形式的一种运算，它是从一个零次形式(数量场)f 得出一次形式 df 的过程对高次形式的推广；并且引用相同的记号(冠以 d)．它的定义有两部分．

首先，设

$$a(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r},\qquad i_1<\cdots<i_r$$

是 R^k 中一个 r 次形式的一个单独的分量，$r<k$，则由定义

$$d(adx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})=(da)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\tag{1}$$

导入一个新指标 i_0 可以把此式表为

$$\begin{aligned}&d(adx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r})\\&=\sum_{i_0=1,2,\cdots,k;i_\nu<i_0<i_{\nu+1}}(-1)^\nu a_{i_0}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_\nu}\wedge dx_{i_0}\\&\qquad\wedge dx_{i_{\nu+1}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\end{aligned}\tag{2}$$

在上式中我们已经把 a 的普通微分 $da=\sum\limits_i a_i dx_i$ 写为 $\sum\limits_{i_0}a_{i_0}dx_{i_0}$，然后取((1)式右边的)楔积，再按把 $(r+1)$ 个基本一次形式 dx_{i_0}，dx_{i_1}，…，dx_{i_r} 放在正常顺序下所需要的换位数来调整正负号．不等式 $i_\nu<i_0<i_{\nu+1}$ 不出现等号是按照 2.3(2)的规则而来的：有相同指标的项等于 0．注意到(2)是一个 $(r+1)$ 次形式．

外微分的定义是由下面的要求所完成的，即设 ω,τ 是 r 次形式，a,b 是数(常数)，则

$$d(a\omega+b\tau)=ad\omega+bd\tau\tag{3}$$

就是说，d 是那一项在普通意义下的一个线性运算.

从(2)和(3)我们得到一个 r 次形式的外微分的下面公式:

$$d\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_r} a^{i_1,\cdots,i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\Big)$$

$$=\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_r}\left[\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}a_{i_\nu}^{i_0,\cdots,\hat{i}_\nu,\cdots,i_r}\right]dx_{i_0}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \tag{4}$$

记号 $a^{i_0,i_1,\cdots,\hat{i}_\nu,\cdots,i_r}$ 表示上指标 i_ν 删去.

公式(4)是麻烦的. 我们此地写出来只表示有这么一个一般公式. 在 $d\omega$ 的实际运算时可用(1), (3)和法则 2.3(1)与 2.3(2). 现在给出关于低次形式的少数例子.

例 1 $df=\Sigma f_i dx_i$.

例 2 $$d\Big(\sum_j a^j dx_j\Big)=\sum_j (da^j)\wedge dx_j$$

$$=\sum_j\Big(\sum_i a_i^j dx_i\Big)\wedge dx_j=\sum_{i<j}(a_i^j-a_j^i)dx_i\wedge dx_j.$$

例 3 $$d\Big(\sum_{i<j}a^{ij}dx_i\wedge dx_j\Big)=\sum_{i<j}d(a^{ij})\wedge dx_i\wedge dx_j$$

$$=\sum_{i<j}\Big(\sum_l a_l^{ij}dx_l\Big)\wedge dx_i\wedge dx_j$$

$$=\sum_{l<i<j}(a_l^{ij}-a_i^{lj}+a_j^{li})dx_l\wedge dx_i\wedge dx_j$$

最高次形式的外微分为 0:

$$\omega\ 在\ A^k\Rightarrow d\omega=0. \tag{5}$$

因为由(2)或(4)，$d\omega$ 将含有一个以基一次形式 $dx_1, \cdots, dx_k$ 中的 $k+1$ 个所构成的楔积，这必然要出现一个重复.

总之：由(1)和(3)所定义的外微分 d 是一个线性映照 d: $A\to A$ 满足

$$d:\ A^r\to A^{r+1},\quad r=0,1,\cdots,k-1;\quad d:\ A^k=0 \tag{6}$$

作为关于通常微分通常乘积的 Leibniz 法则的一个推论，对于形式楔积的外微分有下面的法则

$$d(\omega \wedge \tau) = (d\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau \tag{7}$$

从(3)，要证明(7)只需考虑一个分量的形式就可以了，例如 r 次和 s 次形式

$$\omega = a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}, \quad \tau = b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \tag{8}$$

如果指标集合$\{i_\mu\}$和$\{i_\nu\}$是重叠的则(7)式的三个项都消失而等式无多大价值．另一方面如果这两个指标集合不重叠，则

$$\omega \wedge \tau = ab dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \tag{9}$$

现在我们不需要把下指标排列成增加的顺序，让它在自然出现的顺序就可以了．对下式也是一样

$$d(\omega \wedge \tau)$$

$$= \sum_i (a_i b + a b_i) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \tag{10}$$

通过加号利用分配律把所有的项分成两群．其一是

$$\sum_i a_i b dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}$$

$$= \left(\sum_i a_i dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \right) \wedge b dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} = (d\omega) \wedge \tau.$$

为了把第二群用已给的形式及其微分记号(即：$\omega, \tau, d\omega$ 或 $d\tau$)表达出来，我们要把 dx_i 移位使其通过 $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$，这样做需要 r 个移位．从此调整正负号，这一群是

$$\sum_i a b_i dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s}$$

$$= (-1)^r (a dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}) \wedge \left(\sum_i b_i dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s} \right)$$

$$= (-1)^r \omega \wedge d\tau$$

而(7)成立，证毕.

以上的讨论使我们明白为什么(7)内的正负号只决定于第一个因子的次数.

例 $d\left(\left(\sum_j a^j dx_j\right)\wedge f\right)=d\left(\sum_j (a^j f)dx_j\right)$

$$=\sum_j\left(\sum_i (a^j f)_i dx_i\right)\wedge dx_j$$

$$=\sum_j\left(\sum_i (a_i^j f+a^j f_i)dx_i\right)\wedge dx_j$$

$$=\sum_{i<j}\left\{(a_i^j f+a^j f_i)-(a_j^i f+a^i f_j)\right\}dx_i\wedge dx_j \tag{11}$$

写 $\omega=\sum_j a^j dx_j$. 等式(11)可以用$(\omega, f, d\omega, df)$以两种方式表示. 一方面，把 a 放在因子的左边，这是 $d\omega\wedge f-\omega\wedge(df)$；另一方面，把 a 放在因子的右边，是$f\wedge d\omega+(df)\wedge\omega$. 由(11)这两种表达式都等于 $d(\omega\wedge f)$. 由交换法则 2.3(13)，$\omega\wedge f=f\wedge\omega$, $(d\omega)\wedge f=f\wedge(d\omega)$, 且$(df)\wedge\omega=-\omega\wedge(df)$. 因此

$$d(\omega\wedge f)=(d\omega)\wedge f-\omega\wedge(df)$$

$$d(f\wedge\omega)=(df)\wedge\omega+f\wedge(d\omega)$$

这和(7)式是一致的.

Leibniz 法则可以这样猜测出来. 由于在楔积和在外微分计算中代数符号出现的样子，我们可以作这样的假定

$$d(\omega\wedge\tau)=(d\omega)\wedge\tau+\varepsilon\omega\wedge(d\tau),\quad \varepsilon=\pm 1$$

利用交换法则，从这个假定得出 $\varepsilon=(-1)^{\deg\omega}$. 细节从略.

一般的 Leibniz 法则是

$$\begin{aligned}&d(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\cdots)\\ &=(d\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\cdots)+(-1)^{d_1}(\omega_1\wedge d\omega_2\wedge\omega_3\wedge\cdots)\\ &\quad+(-1)^{d_1+d_2}(\omega_1\wedge\omega_2\wedge d\omega_3\wedge\cdots)+\cdots\end{aligned}\tag{12}$$

式内 $d_i = \deg\omega_i$. 证明不难，由读者去做.

关于微分形式运算最重要单式无疑地是

$$\boxed{d^2 = 0} \tag{13}$$

它的意义是对任何形式 ω, $d(d\omega)=0$. 由(3)可知，为证明此式只需考虑有一个分量的形式 ω 就足够了，

$$\omega = a\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r} \tag{14}$$

按自然出现的下指标顺序，我们有

$$d\omega = \Big(\sum_j a_j dx_j\Big)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

$$d(d\omega) = \sum_j\Big(\sum_i a_{ji} dx_i\Big)\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

$$= \Big\{\sum_{i<j}(a_{ji}-a_{ij})dx_i\wedge dx_j\Big\}\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$$

由于混合偏导数的相等使得在括弧中的形式消失，因而 $d(d\omega)$ 也消失，证毕.

我们也可以用另一办法来论证，这样做是有好处的. 置 $\tau = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$. 由于系数函数是一个常数(恒等于 1)，所以 $d\tau=0$. (14)式的形式 ω 是 $\omega = a\wedge\tau$. 由 Leibniz 法则，

$$d\omega = da\wedge\tau + a\wedge d\tau = da\wedge\tau$$

$$d^2\omega = (d^2a)\wedge\tau - da\wedge d\tau = (d^2a)\wedge\tau$$

且 $d^2a = d\Big(\sum a_j dx_j\Big) = \sum_{i<j}(a_{ji}-a_{ij})dx_i\wedge dx_j = 0$, 因此 $d^2\omega = 0$.

由 Leibniz 法则和(13)，

$$d(\omega\wedge d\tau) = d\omega\wedge d\tau \tag{15}$$

这是因为 $d(\omega\wedge d\tau) = d\omega\wedge d\tau + (-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d^2\tau$ 的缘故. 下面的特殊情形是值得注意的

$$d(\omega\wedge d\omega) = d\omega\wedge d\omega \tag{16}$$

这个式子和 2.3(13)的系在一起便得出

$$\deg\omega \text{ 是偶数} \Longrightarrow d(\omega \wedge d\omega) = 0 \tag{17}$$

(17)可由另外方法得到．根据交换法则，$d\omega \wedge \omega = (-1)^{r(r+1)}\omega \wedge d\omega$，$r = \deg\omega$．但对任何整数 r，$r(r+1)$是偶数，因而对任何形式 ω

$$d\omega \wedge \omega = \omega \wedge d\omega \tag{18}$$

再从 Leibniz 法则，$d(\omega \wedge \omega) = \{1 + (-1)^{\deg\omega}\}\omega \wedge d\omega$ 因而

$$\deg\omega \text{ 是偶数} \Longrightarrow \omega \wedge d\omega = \frac{1}{2}d(\omega \wedge \omega) \tag{19}$$

根据(13)可知这式是包含(17)的．在(19)中当 $\deg\omega = 0$ 的情形，就是说 $\omega = f \in \Lambda^0$，是周知的公式

$$d(f^2) = 2fdf \tag{20}$$

4.2 微积分的基本定理

在 R^r 中 r 维单位"立方体"B_r 是

$$B_r: 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \cdots, r \tag{1}$$

它的"面"的维是 $r-1$，一个典型的面是

$$F^1: \begin{cases} x_1 = 1 \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 2, 3, \cdots, r \end{cases} \tag{2}$$

F^1 的对面是

$$G^1: \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 2, 3, \cdots, r \end{cases} \tag{3}$$

我们对(2)，(3)各加上标记为 F_1^1，F_0^1 以统一记号．一共有 $2r$ 个面，分为面对面的 r 对

$$F_0^1, F_1^1; F_0^2, F_1^2; \cdots; F_0^r, F_1^r \tag{4}$$

B_r 所有面(4)的集合叫做 B_r 的**边界**，记做∂B_r．我们看到 ∂B_r 把 R^r 分成两个区域，B_r 的内部和外部．

我们已经说过在一个由参数给出的流形M上，体积元素的取

向是由参数的顺序所给定的. 作为一个几何学的结论, 参数的一个微小变动引起切空间和体积“向量”3.4(7)的一个微小变动. 总而言之, 当点在M上移动时在一点的切空间和法空间光滑地转动. 如果R^r的M是$(r-1)$维的, 则法空间是1维的, 在这个情况下所谓一个取向的意义是指在M的每点法向量有相同的“指向”: 如果M有一个外部和一个内部, 则法向量常指向外部或常指向内部.

沿∂B_r的棱不存在切空间. 但如把∂B_r想象做弄成圆滑的, 我们就可以在例如法向量时常指向外部的要求下来定向; 然后把∂B_r看做是圆滑化的∂B_r的极限情形, 就可找到∂B_r一个无矛盾的取向: 在每个面F_0^i, F_1^i的法向量例如都是外向的. 这样就规定了在每个面上体积元素的选择. 利用R^r的笛氏坐标作为∂B_r的参数时我们可以如下进行: 在每个面上取微分的楔积, 它的下指标有增加的顺序, 其中有一个微分从缺, 并且楔积的代数符号未定; 然后令一个一般点沿∂B_r上一条闭曲线光滑地移动, 在点的前进运动下按照每个面上相应变量的增加或减少来选择这楔积的代数符号. 如果把这条道路选做是一条赤道, 则它的切向量是按照这个参数化的切空间中的一个基向量, 我们可以看到这个选择符号的方法促成了在B_r每个面上对于取向的一个无矛盾的选择. 我们在低维的情形阐述这个过程, 为了完整起见包括R^1中的蜕化情形B_1.

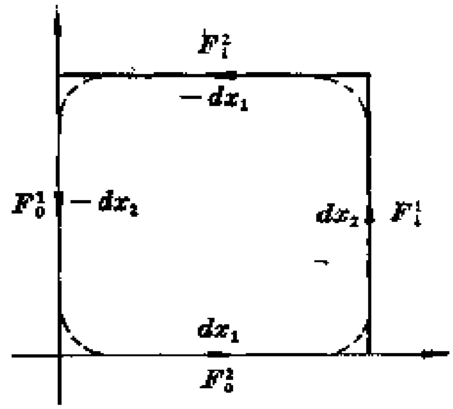
例 1 在R^1单位“立方体”B_1是单位区间, 而∂B_1是两点的集合$\{0, 1\}$. ∂B_1分R^1为B_1的内部和外部. 对B_1没有合理的切空间, 但是我们可以通过在端点选择符号如图来提供一个取向, 并且我们可以无拘束地把这看做给出了“法向量”的向外取向.

例 2 在R^2单位“立方体”B_2是单位正方形. 我们首先把它的角弄圆, 然后令一点沿逆时针方向通过这个立方体, 对面上的体

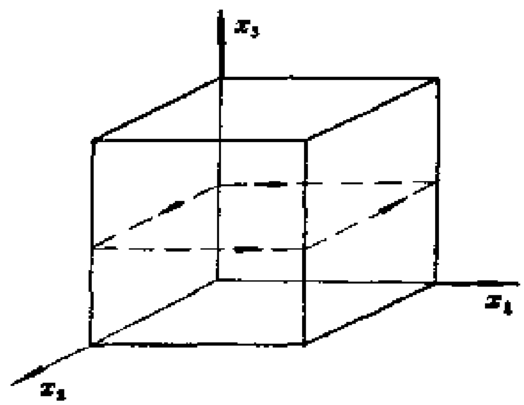
积元素选择$\pm dx_i$, $i=1,2$使和这个运动相容. 其结果如次:

$$\begin{aligned}&\text{在}\quad F_0^1: dV=-dx_2\\&\text{在}\quad F_1^1: dV=dx_2\end{aligned}\tag{5}$$

并且对面的体积元素显然有相反的符号.



例 3 在R^3单位"立方体"B_3是单位立方体. 在图中我们用虚线表示一条标准的赤道道路. 如令动点沿所指的方向通过它, 则在F_1^1上体积元素将为$dx_2\wedge dx_3$, 且因此在它的对面F_0^1上为$-dx_2\wedge dx_3$. 同样的我们得到:



$$\begin{aligned}&\text{在 } F_0^1: && dV=-dx_2\wedge dx_3\\&\text{在 } F_0^2: && dV=dx_1\wedge dx_3\\&\text{在 } F_0^3: && dV=-dx_1\wedge dx_2\end{aligned}\tag{6}$$

在对面有相反的符号.

一般的规律是(6)在高维情况原原本本的推广. 明确的说, 这个规律是:

$$\text{在 } F_0^i,\quad dV=(-1)^i dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_r \qquad i=1,2,\cdots,r \tag{7}$$

式中帽子"∧"表示该项被删去. 在对面F_1^i, 则

$$dV=(-1)^{i-1}dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_r \qquad i=1,2,\cdots,r \tag{8}$$

设ω是R^r的一个$(r-1)$次形式. 由于ω有r个分量我们可以用简化记号

$$\omega=\sum_{i=1}^{r}a^i dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_r \tag{9}$$

那么

$$d\omega=\left(\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}a_i^i\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_r \tag{10}$$

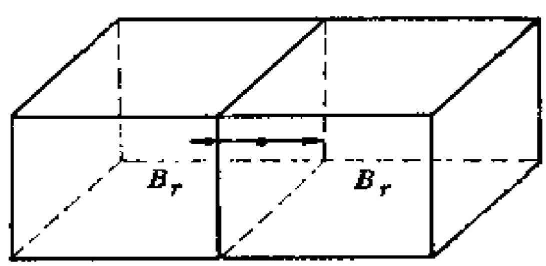
我们来计算$\int_{B_r}d\omega$. 它是 r 重积分的和, 并且在第 i 项中积分在第 i 个坐标可以实现:

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int a_i^i(x_1,\cdots,x_r)\,dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_r\\&=\int\cdots\int(a^i(x_1,\cdots,1,\cdots,x_r)\\&\quad-a^i(x_1,\cdots,0,\cdots,x_r))\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_r\end{aligned} \tag{11}$$

注意在(10)和在(8)中的符号$(-1)^{i-1}$; 注意在(11)中的负号和在(7)中的符号$(-1)^i$. 考虑到这些符号以后我们找到一个值得注意的事实即(11)(有符号$(-1)^{i-1}$)是ω在两个(有向)面F_0^i, F_1^i上的积分; 因而从和式(10)得出公式

$$\int_{B_r}d\omega=\int_{\partial B_r}\omega \tag{12}$$

为了需要, 我们叙述取向相消原理如下. 设有 B_r 的两个复制品, 放在一起使它们有一个公共的面. 这个复合图形叫做 C_r. 设



τ 是一个$(r-1)$次形式, 则$\int_{\partial C_r}\tau=\int_{\partial B_r}\tau+\int_{\partial B_r'}\tau$: 复合流形在边界上的积分是分流形在边界上积分的和. 理由是在公共面上两个体积元素(每个分流形一个)有相反的符号; 因此 τ 在这个面上的

两个积分相抵消.

根据这个原理公式(12)可以扩充到 R^r 中任何 r 维的流形去，只要这流形有一个边界又是可取向的. 因为我们可以把M分割成一族的小立方体，并且如果这个分割的网眼足够的小，则这族立方体便很好地逼近于M. 如果记这些立方体为$B_1, B_2, \cdots$，并且若ω是一个$(r-1)$次形式，则$\int_M d\omega \simeq \sum_i \int_{B_i} d\omega = \sum_i \int_{\partial B_i} \omega$. 由取向相消原理，$\sum_i \int_{\partial B_i} \omega \simeq \int_{\partial M} \omega$. 因此$\int_M d\omega \simeq \int_{\partial M} \omega$，当分割的网眼越来越小趋于极限时便有等式

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \tag{13}$$

虽然(13)这个结果本质上是正确的，而前面对它的论证却是错误的. 在用平行于坐标"平面"的平面来逼近 ∂M 时，其中存在着一个严重的技术上的困难①. 正确的论证需要的工具超出本书的范围；我们只得满足于前面的表面上看起来讲得通的论证.

设M是 R^k 中一个有向 r-流形，$r<k$，有边界 ∂M. 设ω是一个$(r-1)$次形式. M在它每点的邻域的第一逼近是它的切空间 R^r. 在它的每一点看起来好象是(近似地)一个小的 r-立方体. 如果我们限制变量x常在M上，则一个$(r-1)$次形式ω的系数函数 $a^{i_1,\cdots,i_r}(x)$ 只是 r 个变量的函数，这 r 个变量可以局部地取为在局部 r-立方体中的笛氏坐标. 由(12)$d\omega$ 在每一个局部 r-立方体上的积分等于ω在它的边界上的积分. 把这些在M的各处局部 r-立方体上的所有积分结合在一起，我们一方面近似地得到$\int_M d\omega$，

①这个困难在 Courant[1], vol. II 有讨论；看 p.268 和 p.381及其以后. 还有另外的困难就是不是所有流形都有光滑的边界；此外还存在有不能取向的流形. 但是所有这些此地必须置而不论，我们只把(13)作为关于"一般"流形M的论断.

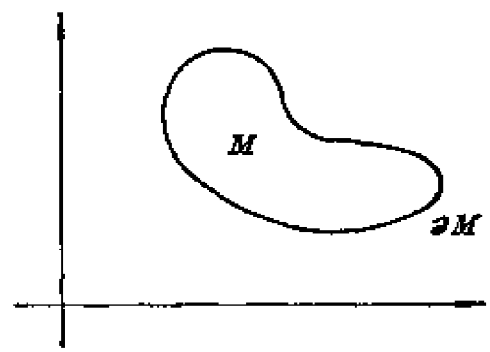
而在另一方面(由取向相消)得到$\int_{\partial M}\omega$. 因此下面定理必须是正确的.

定理 设M是R^k中一个有向r-流形有边界∂M, 且ω是一个$(r-1)$次形式, $r=1, 2, \cdots, k$, 则

$$\boxed{\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega} \tag{14}$$

这是微积分基本定理在高维的推广: 取$k=r=1$; 则M是一个区间$M=(a, b)$, $\partial M=\{a, b\}$, 其取向在上面例1给出; 对一0次形式f, $\int_{\partial M}f=f(b)-f(a)$, 在边界的"积分"正好是$f$在这两点的值, 而正负号按照已给的取向; 并且$\int_M df=\int_a^b f'(x)dx$; 因此在这情况下(14)是

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$



取$k=2, r=1$; 就是说, 考虑R^2的一个一次形式$\omega=a^1dx_1+a^2dx_2$. 设M是由一闭曲线∂M围成的一个平面区域, 则(14)是说

$$\int_{\partial M}a^1dx_1+a^2dx_2=\iint_M(a_1^2-a_2^1)\,dx_1dx_2 \tag{15}$$

这个公式, 如所知是平面上的Gauss定理, 对初等微分方程的学生是熟悉的①. 它的一般形式(即对R^k的一个一次形式)是

$$\int_{\partial M}\left\{\sum a^i dx_i\right\}=\int_M\sum_{i<j}(a_i^j-a_j^i)\,dx_i\wedge dx_j \tag{16}$$

式内M是R^r的一个曲面由一闭曲线∂M所围成.

①传统的证明参看 Courant[1], vol. II, p.359.

当我们讨论在 R^3 中的向量分析时，我们将有其它这样的公式.

4.3 闭形式

一个形式 ω 叫做闭的，如果 $d\omega=0$.

例 1 设 $\omega=d\tau$ 则 $d\omega=d^2\tau=0$(4.1(13)).

例 2 设 ω 和 τ 是闭的，则 $\omega\wedge\tau$ 是闭的(由 Leibniz 法则，$d(\omega\wedge\tau)=d\omega\wedge\tau+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\tau=0$).

例 3 $\omega\wedge d\omega$ 是闭的，如果 ω 有偶数次(见4.1(17)和4.1(19)).

例 4 设 ω 是闭的，则 $\omega\wedge d\tau$ 对任何 τ 都是闭的(4.1(15)).

闭形式的基本性质如下.

定理 R^k 的一个 r 次形式 ω 是闭的当且只当对 R^k 的每一个 $(r+1)$-流形 M 成立

$$\int_{\partial M}\omega=0 \tag{1}$$

证明 设(1)成立. 我们取 M 为任意的 $(r+1)$-平行多面体，可以随意小，并且包含 k 个坐标中任意的 $r+1$ 个，此外这些多面体都含有 R^k 的一已给点 $\boldsymbol{a}$. 根据基本定理 4.2(14)，对所有这些 M，$\int_M d\omega=0$，因而在 $\boldsymbol{a}$ 有 $d\omega=0$. 由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意选的，$d\omega=0$.

其逆，设 ω 是闭的，则 $\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega=\int_M 0=0$，这就是(1). 定理证毕.

一个形式的关闭性可用一个以它的分量函数表示的微分方程表达出来：

$$\sum a^{i_1\cdots i_r}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}\text{ 是闭的}\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^{\nu}a_{i_\nu}^{i_0,\cdots,\hat{i}_\nu,\cdots,i_r}=0,\text{所有的 } i_0<\cdots<i_r \tag{2}$$

这由一个 r 次形式的外微分的一般公式 4.1(4)立刻可以得到．下面是(2)的几个特殊情况．

例 5　一个 0 次形式 f 是闭的当且只当 f 是常数(在此(2)表明 $f_i=0,\ i=1,2,\cdots,k$)．

例 6　一个一次形式 $\omega=\sum a^i dx_i$ 是闭的当且只当

$$a_i^j=a_j^i,\ \text{所有}\ i<j \tag{3}$$

例 7　R^3 的一个二次形式 $\sum\limits_{i<j}a^{i,j}dx_i\wedge dx_j$ 是闭的当且只当

$$a_1^{23}-a_2^{13}+a_3^{12}=0 \tag{4}$$

由于(3)的启示我们称方程(2)的第二行为指标对称条件．

设 R^k 的一条道路由参数表示给出为

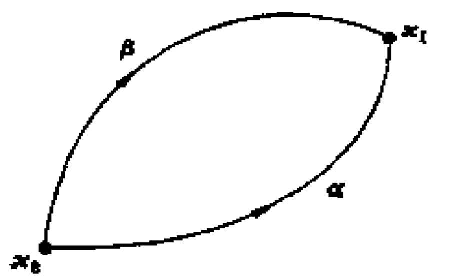
$$\boldsymbol{r}(t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{5}$$

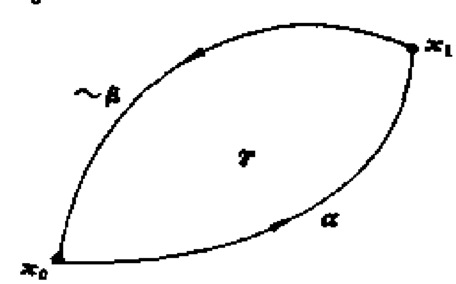
定义一个新的函数 $\sim\boldsymbol{r}:R^1\to R^k$

$$\sim\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(a+b-t),\quad a\leqslant t\leqslant b \tag{6}$$

$\sim\boldsymbol{r}$ 是相反取向的 $\boldsymbol{r}$(或，向后转)．对于任何一次形式 ω 我们有

$$\int_{\sim r}\omega=-\int_r\omega \tag{7}$$



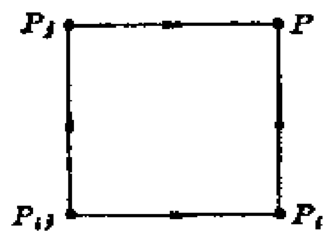


设 α,β 是 R^k 的两条曲线，从一已给起点 x_0 到一已给终点 x_1(见图)．则 α，$\sim\beta$ 共同组成一闭曲线 $\boldsymbol{r}$．设 M 是一 2 维流形，它是把 $\boldsymbol{r}$ 的"内部"用任何光滑的办法充实起来而形成的：例如，可以设想做把 $\boldsymbol{r}$ 用薄橡皮片胶合而成．这样 $\boldsymbol{r}=\partial M$．

设 ω 是一闭一次形式，则 $\int_{\partial M}\omega=\int_r\omega=0$，这就是说 $\int_\alpha\omega+\int_{\sim\beta}\omega=0$，从此由(7)

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega \tag{8}$$

我们已经证明了一个闭一次形式的道路积分的值只和始点与终点有关，与其间可能出现的任何弯曲无关. 称 ω 的这种性质是道路无关的. 把前面的讨论逆转，我们得到，设 ω 是道路无关的，则它在任何闭曲线上的积分是消失的，因而(由定理) ω 是闭的. 这个结果叙述如下



系 一个一次形式是闭的当且只当它有道路无关的性质.

此地是这个系的第二半(道路无关蕴涵着关闭)的一个初等证明. 记 x 为 P，记 x 中 x_i 以 0 代入的点为 P_i 等等. 已给一个道路无关的一次形式 $\omega=\sum a^i dx_i$，如果 ω 沿两条道路(P_{ij}, P_j, P)和(P_{ij}, P_i, P)积分则将得相同的值. 因为只有两个变量 x_i, x_j 参加运算，我们略去其它的不写出来则等式可以写做：

$$\int_0^{x_i} a^i(t,\ 0)\,dt+\int_0^{x_j} a^j(x_i,s)\,ds=\int_0^{x_j} a^j(0,u)\,du+$$

$$+\int_0^{x_i} a^i(v,x_j)\,dv \tag{9}$$

关于 x_j 微分(9)得

$$a^j(x_i,x_j)=a^j(0,x_j)+\int_0^{x_i} a^i_j(v,x_j)\,dv \tag{10}$$

再关于 x_i 微分(10)得

$$a^j_i(x_i,x_j)=a^i_j(x_i,x_j) \tag{11}$$

这就是对 ω 的指标对称(3)，因此蕴涵着它的关闭性，证毕.

4.4 恰当形式

一个形式 ω 称为恰当的如果存在另外形式 τ(低一次)使得

$$\omega=d\tau,$$

例 1　$\sum f_i dx_i$ 是恰当的，等于 df.

例 2　$\sum\limits_{i<j}(a_i^j-a_j^i)\,dx_i\wedge dx_j$ 是恰当的，等于 $d(\sum a^i dx_i)$.

例 3　设 ω 有偶数次，则 $\omega\wedge d\omega$ 是恰当的，

$$\omega\wedge d\omega=d\left(\frac{1}{2}\omega\wedge\omega\right)(4.1(19))$$

例 4　$d\omega\wedge d\tau$ 对任何 ω, τ 都是恰当的；$d\omega\wedge d\tau=d(\omega\wedge d\tau)$ (4.1(15)).

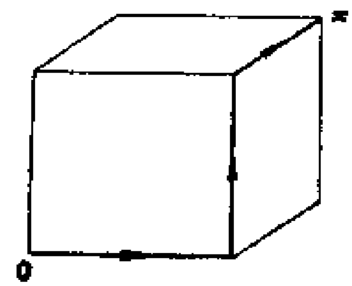
一个恰当形式是闭的：设 $\omega=d\tau$ 则 $d\omega=d^2\tau=0$(4.1(13)). 在例1 可以不依靠 4.1(13)而看到这一事实，即从 $d(\sum f_i dx_i)$有指标对称性质便可；在例 2 也是一样，只要经过一个较长的计算. 这些计算等于是对 $d^2=0$ 一个笨拙证明的片断.

读者在此要回忆一下关于一阶微分方程的如下事实. 方程

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)dy=0 \tag{1}$$

称为一个"恰当方程"如果存在一个函数 $\phi(x,y)$满足$\frac{\partial}{\partial x}\phi=M$, $\frac{\partial}{\partial y}\phi=N$, 而使(1)等价于可积分的方程 $d\phi=0$. 从我们现在的观点，方程(1)是"恰当"的当且只当其左边是一个恰当一次形式. 在初等教科书是这样证明的，即(1)是一个"恰当方程"当且只当$\frac{\partial}{\partial x}N=\frac{\partial}{\partial y}M$. 从现在的观点看来，这就是说(1)的左边是一个恰当一次形式当且只当它是指标对称的；也就是说当且只当它是闭的. 这个结果的一部分(即恰当形式是自动闭的)我们已经注意到. 另一部分(即如(1)的左边是一个闭一次形式则(1)是"恰当"的)是一个重要定理的一个例子, 这定理是说任何闭的形式都是恰当的. 说得更有力些：不但恰当形式是闭的，并且一个闭形式一定是恰当的. 这对一次形式有一个很简单的证明如下.

设 $\omega=\sum a^i dx_i$ 是 R^k 的一个闭一次形式. 设 γ 是从 0 到 x 陆续通过 k-平行多面体的棱的折线道路，而这多面体有一对对角在 0 和 x(对 R^3 的情形见图). 因为 ω 是道路无关的, $\int_\gamma \omega$ 由



方程 $f(x)=\int_\gamma \omega$ 定义一个函数(0 次形式) f. 以坐标表示

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\int_0^{x_i} a^i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, t_i, 0, \cdots, 0)\, dt_i \tag{2}$$

关于 x_k 微分(2), 立即得到 $f_k(x)=a^k(x)$. 关于 x_{k-1} 微分(2)得

$$f_{k-1}(x)=a^{k-1}(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0)+\int_0^{x_k} a^k_{k-1}(x_1, \cdots, x_{k-1}, t_k)\, dt_k \tag{3}$$

根据 ω 的指标对称关系 4.3(3) 我们可以在末项交换 k 和 $(k-1)$; 交换后可以积分; 结果是

$$\int_0^{x_k} a^k_{k-1}(x_1\cdots, x_{k-1}, t_k)\, dt_k=a^{k-1}(x)-a^{k-1}(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0) \tag{4}$$

把(4)代入(3)得到 $f_{k-1}(x)=a^{k-1}(x)$. 以同法继续进行经过 k 步后有

$$f_j(x)=a^j(x), \quad j=1, 2, \cdots, k \tag{5}$$

或 $\omega=df$ 是恰当的, 证毕.

在此我们已经解决了形式微分方程 $df=\omega$, 对已给闭的 $\omega\in\Lambda^1$ 求未知函数 $f\in\Lambda^0$ 的问题. 解(2)除了一个附加的闭 0 次形式外是唯一的, 因为设 g 是第二个解, 则 $d(f-g)=\omega-\omega=0$. 以分量表示方程 $df=\omega$, 则是一个一阶偏微分方程系统 $f_i=a^i$, $i=1, 2, \cdots, k$, 而 $\omega=\sum a^i dx_i$, 并且在解这个系统中用了指标对称 $a^i_j=a^j_i$. 高阶的形式微分方程 $d\tau=\omega$, 对已给 $\omega\in\Lambda^r$ 求未知量 $\tau\in\Lambda^{r-1}$ 的问题

同样地也是解一个一阶偏微分方程系统，虽然和前面情形相比较为复杂. 它的解除了一个附加的闭$(r-1)$次形式外是唯一的，因为若σ和τ都是解，则$d\sigma=\omega=d\tau$，而$d(\sigma-\tau)=0$. 设ω是闭的，则由指标对称 4.3(2) 可以证明这系统有解. 这个解法一般地说较为麻烦，但对低阶的还是行得通的. 对在R^3一个闭二次形式的情况，在向量分析的教科书中以同样方法讨论，在那里以定理表出为一个无源的向量场是一个旋度①. 这个定理和上面关于闭一次形式的论述一起提供了我们在下面一章所需要的：即在R^3的闭一次形式和闭二次形式是恰当的；并且我们此地对一般定理不作讨论.

①这个名词将在第五章说明，或可参考 Courant[1]，vol. II. 也可看 p. 404 在那里有所讨论的这个定理的同一类型的证明.

第五章　在 R^3 的向量运算

5.1　Nabla

在 R^3 的向量分析中我们用了一个形式上的向量运算写为 ∇; 称做"nabla"或"del", 其定义(譬如)为

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i \tag{1}$$

它在一数量场上的作用是

$$\nabla f = \sum f_i \boldsymbol{e}_i \tag{2}$$

即, $\nabla f = \boldsymbol{g}$ 而 $g^i = f_i$. 看到 ∇f 是一个向量场. 它也记作Grad$f$, 读作"f 的梯度". ∇ 在一个向量场上的作用有两种方式:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \sum f_i^i \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{f} = (f_2^3 - f_3^2)\boldsymbol{e}_1 + (f_3^1 - f_1^3)\boldsymbol{e}_2 + (f_1^2 - f_2^1)\boldsymbol{e}_3 \tag{4}$$

$\nabla \cdot \boldsymbol{f}$是一个数量场, 也记作Div$\boldsymbol{f}$, 读作"$\boldsymbol{f}$的散度". $\nabla \times \boldsymbol{f}$是一个向量场也记作Curl$\boldsymbol{f}$, 读作"$\boldsymbol{f}$ 的旋度". (3)和(4)式中的点和叉是在下面意义下的"形式上的"数量积和向量积: $\nabla \cdot \boldsymbol{f} = \frac{\partial}{\partial x_1} f^1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f^2 + \frac{\partial}{\partial x_3} f^3$; 而 $\nabla \times \boldsymbol{f}$ 是下面行列式形式上的展开结果

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f^1 & f^2 & f^3 \end{vmatrix}$$

记住这些, 则对 Div, Curl 的记号(3), (4)便自然记住了, 并且也可

看到 Div$f$ 是一个数量场而 Curl$f$ 是一个向量场.

这个记号将会引起喜欢讲俏皮话的人的共鸣，但是实际上它没有什么不对的地方. 无论如何，它可能也容易把 Nabla 和它的表示统一起来作为一个在微分形式的理论上可以认识的实体，并且从此大大简化了向量分析的许多讨论和计算. 我们现在就转向这一方面.

在 R^3 形式空间 Λ^0, Λ^1, Λ^2, Λ^3 的维数各为 1, 3, 3, 1. 特别, Λ^1 和 Λ^2 的维数都等于外围空间 R^3 的维数. 这是 R^3 特有的一个事实：在 R^k, Λ^1 的维数为 $\binom{k}{1}=k$, 但 Λ^2 的维数 $\binom{k}{2}$ 只有 $k=3$ 时等于 k①. 这个特有的事实使得有可能把 Λ^1 和 Λ^2 统一起来(在其间作一个一一对应). 所有向量场的空间, 我们将把它记作 W, 也是一个具有数量场系数的三维的向量空间: 它的基是 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$; 它的标准元素是 $\boldsymbol{f}=\sum f^i\boldsymbol{e}_i$, 而 f^i 是数量场. 因此我们只有在 R^3 才有可能把一个向量场解释为一个一次形式或者解释为一个二次形式. 由于一次形式的楔积是一个二次形式，并且向量场的向量积是一个向量场, 我们要在 Λ^1, Λ^2 和 W 之间作这样的对应使得楔积和向量积互相对应. 比较这两个乘积的公式我们便马上看到这个对应应该怎么做:

$$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}=(f^2g^3-f^3g^2)\boldsymbol{e}_1+(f^3g^1-f^1g^3)\boldsymbol{e}_2+(f^1g^2-f^2g^1)\boldsymbol{e}_3$$

$$(\sum a^i dx_i)\wedge(\sum b^i dx_i)=(a^2b^3-a^3b^2)dx_2\wedge dx_3$$
$$+(a^1b^3-a^3b^1)dx_1\wedge dx_3+(a^1b^2-a^2b^1)dx_1\wedge dx_2$$

对应由下面的表格给出.

① $\binom{k}{2}=\frac{k(k-1)}{2}=k$ 则 $k-1=2$, $k=3$.

W	Λ^1	Λ^2
$\boldsymbol{e}_1$	dx_1	$dx_2\Lambda dx_3$
$\boldsymbol{e}_2$	dx_2	$-dx_1\Lambda dx_3$
$\boldsymbol{e}_3$	dx_3	$dx_1\Lambda dx_2$

(5)

在第二行的负号是由于这样的事实所引起的，即把一个二次形式的下指标排列成增加的顺序(宁可不用轮换)。

所有数量场的集合，我们将记作 S，是一个具有数量场系数的一维的向量空间：我们取数量 1 作为它的基，而它的标准元素是 $f=f\cdot 1$. 因此我们可以把 S 和 Λ^0 与 Λ^3 统一起来：

S	Λ^0	Λ^3
1	1	$dx_1\Lambda dx_2\Lambda dx_3$

(6)

利用对应(5)，(6)我们可以把 Nabla 运算作如下解释.

梯度：一个数量场 f 由于(6)是一个 0 次形式；一次形式 $df=\sum f_i dx_i$ 由于(5)是向量场 $\nabla f=\sum f_i\boldsymbol{e}_i$. 这就是(2)式.

旋度：一个向量场 $\boldsymbol{f}$ 由于(5)是一个一次形式

$\boldsymbol{f}=\sum f^i dx_i$；二次形式 $d\boldsymbol{f}=\sum\limits_{i<j}(f^j_i-f^i_j)dx_i\wedge dx_j$

由于(5)是向量场 $\nabla\times\boldsymbol{f}$. 这就是(4)式.

散度：一个向量场 $\boldsymbol{f}$ 由于(5)是一个二次形式

$\boldsymbol{f}=f^1dx_2\wedge dx_3-f^2dx_1\wedge dx_3+f^3dx_1\wedge dx_2$；三次形式

$d\boldsymbol{f}=(\sum f^i_i)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$ 由于(6)是数量场 $\nabla\cdot\boldsymbol{f}$.

这就是(3)式.

因此所有这三种运算都是外微分. 注意到按照把 $\boldsymbol{f}$ 看作一个一次形式或一个二次形式而得出一对 Curl$\boldsymbol{f}$, Div$\boldsymbol{f}$. 总之：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Grad}f=df,\ f\text{ 在 }\Lambda^0\text{ 内}\\&\mathrm{Curl}\boldsymbol{f}=d(\boldsymbol{f}),\ \boldsymbol{f}\text{ 在 }\Lambda^1\text{内}\\&\mathrm{Div}\boldsymbol{f}=d(\boldsymbol{f}),\ \boldsymbol{f}\text{ 在}\Lambda^2\text{ 内}\end{aligned}\tag{7}$$

式内我们把"f 按(5), (6)的解释作为 Λ^i 的一个元素"写作"f 在 Λ^i 内"。同样地

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{f}\text{ 和 }\boldsymbol{g}\text{ 在 }\Lambda^1\text{ 内},\\&\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{f}\text{ 在 }\Lambda^1\text{ 内},\ \boldsymbol{g}\text{ 在}\Lambda^2\text{ 内}.\end{aligned}\tag{8}$$

因此外微分包含着三个Nabla 运算, 而楔积表示数量积和向量积.

向量分析许多周知的公式无非是对形式的 Leibniz 法则. 我们来讨论下面的乘积:

$$fg,\ \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g},\ f\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}\text{①}\tag{9}$$

对 0 次形式 f 和 g, $d(fg)=df\wedge g+f\wedge dg$, 因而由(7)

$$\mathrm{Grad}(fg)=(\mathrm{Grad}f)g+f(\mathrm{Grad}g)\tag{10}$$

因为 $\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}$ 是这些乘积的一个和式, $\mathrm{Grad}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$ 是如 (10) 一样的项的和式. 已给 f 和 g, 对 $\boldsymbol{g}$ 的所有解释 $d(f\boldsymbol{g})=(df)\wedge\boldsymbol{g}+f\wedge d\boldsymbol{g}$. 如 $\boldsymbol{g}$ 是在 Λ^1 内, 这公式变成(由(7), (8))

$$\mathrm{Curl}(f\boldsymbol{g})=(\mathrm{Grad}f)\times\boldsymbol{g}+f(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g})\tag{11}$$

并且如 $\boldsymbol{g}$ 是在 Λ^2 内则这式为

$$\mathrm{Div}(f\boldsymbol{g})=(\mathrm{Grad}f)\cdot\boldsymbol{g}+f(\mathrm{Div}\boldsymbol{g})\tag{12}$$

已给 $\boldsymbol{f}$ 和$\boldsymbol{g}$, 则有两种情况: $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 都在 Λ^1 内; 或一个在 Λ^1 内另一个在 Λ^2 内. 在第二种情况, 由 Leibniz 法则 $d(\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g})=d\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\wedge d\boldsymbol{g}$, 或

$$\mathrm{Div}(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=\mathrm{Curl}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}\tag{13}$$

还有一个情况. 把已给的 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 解释为一次形式, 我们可以把二

---

①其它的可能性只有 $f\circ g$, $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$. 这些都应被除去, 因为它们的左边不能通过和式实现分配律: $f\circ(g+h)$ 当 f 非线性时和$(f\circ g)+(f\circ h)$ 是不同的, 这是个典型例子; 同样对 $\boldsymbol{f}\circ(\boldsymbol{g}+\boldsymbol{h})$也然.

次形式 $f\wedge g$ 解释为一次形式

$$\tau=(f^2g^3-f^3g^2)\,dx_1-(f^1g^3-f^3g^1)\,dx_2+(f^1g^2-f^2g^1)\,dx_3 \quad (14)$$

然后作 $d\tau$. 这样将得出 $\mathrm{Curl}(f\times g)$. 缩写 τ 为 $\tau=\sum A^i dx_i$. $d\tau$ 的第一个分量将为 $A_2^3-A_3^2$. 由(14)它是

$$\begin{aligned}A_2^3-A_3^2=&f_2^1g^2+f^1g_2^2-f_2^2g^1-f^2g_2^1\\&+f_3^1g^3+f^1g_3^3-f_3^3g^1-f^3g_3^1\end{aligned} \quad (15)$$

$\mathrm{Curl}(f\times g)$ 的其它分量可以由(15)从轮换指标得出.

设 r 是位置向量场,

$$r^i(x)=x_i,\quad i=1,2,3 \quad (16)$$

设 ω 是一常数向量场, 则

$$\mathrm{Curl}(\omega\times r)=2\omega \quad (17)$$

因为在(15)取 ω 为 f 取 r 为 g, 包含 f 的导数的所有项都消失了, 并且 $g_j^i=\delta_{ij}$, 因而剩下的是 $2f^1=2\omega^1$; 对其它分量也是同样情况. 我们以后将用到(17).

一个数量场在 u 的方向的方向导数 D_uf 也和 Nabla 相关联. 它的定义是

$$D_uf(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu)-f(x)}{t} \quad (18)$$

这也可表示为

$$D_uf(x)=\frac{d}{dt}f(x+tu)\Big|_{t=0} \quad (19)$$

由链的法则这是 $\sum_i f_i(x+tu)u_i\Big|_{t=0}=\sum f_i(x)u_i$, 而

$$D_uf=\mathrm{Grad}f\cdot u \quad (20)$$

注意特殊情况

$$D_{e_i}f=f_i \quad (21)$$

取 u 为一单位向量. 则由(20) $|D_uf|\leqslant\|\mathrm{Grad}f\|$. 因为

$$\sum_i f_i \cdot \frac{f_i}{\sqrt{\sum_j f_j^2}} = \sqrt{\sum_i f_i^2} = \|\mathrm{Grad} f\|$$

我们得出结论$|D_u f|$的极大值是$\|\mathrm{Grad} f\|$，并且当u平行于Grad$f$时达到这个极大值.

5.2 高阶导数

因为梯度，散度和旋度都是微分，我们把这些运算的重复看作高阶导数．一阶导数的作用如下：

$$\begin{aligned} \text{Grad}:&\ S \to W \\ \text{Curl}:&\ W \to W \\ \text{Div}:&\ W \to S \end{aligned} \tag{1}$$

因此二阶导数的可能性为：

$$\begin{aligned} \text{Curl Grad}:&\ S \to W \\ \text{Div Curl}:&\ W \to S \\ \text{Curl Curl}:&\ W \to W \\ \text{Grad Div}:&\ W \to W \\ \text{Div Grad}:&\ S \to S \end{aligned} \tag{2}$$

已给f, Grad$f = df$是一个一次形式，而Curl Grad$f = d^2 f = 0$，或

$$\text{Curl Grad} = 0 \tag{3}$$

已给$\boldsymbol{f}$解释为一个一次形式，Curl$\boldsymbol{f} = d(\boldsymbol{f})$是一个二次形式，而Div Curl$\boldsymbol{f} = d^2(\boldsymbol{f}) = 0$, 或

$$\text{Div Curl} = 0 \tag{4}$$

(3)和(4)式是向量分析的重要定理．这两个式子在(2)式中是头两条．目前姑且不论其次的两条①，而转向最后的．对已给f，为了应用Div, Grad$f$必须解释作为二次形式②.

①在附录中将叙述它们.

②这是为什么 Div Grad 不是d^2的情形的原因.

$$\omega = \mathrm{Grad}f = f_1 dx_2 \wedge dx_3 - f_2 dx_1 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

那么

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}f = d\omega$$

$$\mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}f = \sum f_{ii} \tag{5}$$

如所知这是 Laplace 算子，或简称 Laplacian，记为Δ：

$$\Delta f = \mathrm{Div}\ \mathrm{Grad}f = \sum f_{ii} \tag{6}$$

Laplacian 有广泛的和深远的重要性：特别是在数学物理上，在概率论上，在单复变函数论上是很重要的．这些我们此地一概不讨论．

(3)和(4)的意义是 Curl 和其它两个微分没有非零的组合．因此所有非零的高阶导数必须是或者 Curl 的重复，或者其它二者的组合．按照(1)，后者可由下面图表所读出：

$$\cdots \xrightarrow{\mathrm{Grad}} W \xrightarrow{\mathrm{Div}} S \xrightarrow{\mathrm{Grad}} W \xrightarrow{\mathrm{Div}} S \xrightarrow{\mathrm{Grad}} \cdots$$

在构成这些组合中我们常把 Div Grad 写作 Δ．注意到这些事情以后，我们很容易把所有可能非零的导数搜集在一起以下面的表格列出．

类　　型	公　　　式	阶　　数
$S \to S$	$\Delta^n, n=1, 2, \cdots$	$2n$
$W \to W$	$\mathrm{Curl}^n, n=1, 2, \cdots$	n
$W \to W$	$\mathrm{Grad}\ \Delta^n \mathrm{Div}, n=0, 1, \cdots$	$2n+2$
$S \to W$	$\mathrm{Grad}\ \Delta^n, n=0, 1, \cdots$	$2n+1$
$W \to S$	$\Delta^n\ \mathrm{Div}, n=0, 1, \cdots$	$2n+1$

(7)

对二阶算子 Δ 有乘积法则

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\mathrm{Grad}f)\cdot(\mathrm{Grad}g) + f(\Delta g) \tag{8}$$

这公式类似于单变量微分公式

$$(fg)'' = (f'')g + 2f'g' + f(g'')$$

由 5.1(7)

$$\boldsymbol{f}\text{ 闭的}\Longleftrightarrow\begin{cases}\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{f}=0,\ f\in\Lambda^1\\ \mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}=0,\ f\in\Lambda^2\end{cases}\tag{9}$$

从恰当性的定理(见 4.4)，在第一种情形 $\boldsymbol{f}=dg$, $g\in\Lambda^0$，就是说 $\boldsymbol{f}=\mathrm{Grad}\,g$(见 5.1(7))；而在第二种情形 $\boldsymbol{f}=d\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}\in\Lambda^1$，就是说 $\boldsymbol{f}=\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{g}$. 这些陈述是各和(3)，(4)相伴的. 这就是：不但是对所有 $g\in S$, $\mathrm{Curl\ Grad}\ g=0$，而且 $\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{f}$只有当对某些 $g\in S$, $\boldsymbol{f}=\mathrm{Grad}\,g$ 时才有可能消失；并且不但是对所有 $\boldsymbol{g}$, $\mathrm{DivCurl}\,\boldsymbol{g}=0$，而且 $\mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}$ 只有当对某些 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}=\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{g}$ 时才有可能消失. 用向量分析的语言这些事实可以叙述如下

定理 1 一个无旋度场是一个梯度，而一个无散度场是一个旋度.

设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是梯度，它们是闭的一次形式，而 $\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g}$ 是一个闭的二次形式(4.3 例 2). 由 5.1(8)，$\boldsymbol{f}\wedge\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}$；因而由4.4 我们有

定理 2 梯度的向量积是一个旋度.

例 1 设 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{r}$，是位置向量场 5.1(17). 作为一个一次形式 $\boldsymbol{f}=x_1dx_1+x_2dx_2+x_3dx_3$，而 $d(\boldsymbol{f})=0$，

$$\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{r}=0\tag{10}$$

现在 $\|\boldsymbol{r}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=r$，并且

$$\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\mathrm{Grad}\,r^2\tag{11}$$

作为一个二次形式，$\boldsymbol{f}=x_1dx_2\wedge dx_3-x_2dx_1\wedge dx_3+x_3dx_1\wedge dx_2$，而 $d(\boldsymbol{f})=3dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$，

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{r}=3\tag{12}$$

例 2 设 $\boldsymbol{f}_{\hat{u}}(\boldsymbol{x})=\hat{u}$，$\hat{u}$是一个固定的单位向量. 看作一个流，这个场是一个均匀速度 1 的平行流. 作为一个一次形式 $\boldsymbol{f}_{\hat{u}}=u^1dx_1+u^2dx_2+u^3dx_3$，从而 $d(\boldsymbol{f}_{\hat{u}})=0$，或

$$\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{f}_{\hat{u}}=0\tag{13}$$

因为 $\boldsymbol{r}\cdot\hat{u}=x_1u^1+x_2u^2+x_3u^3$，

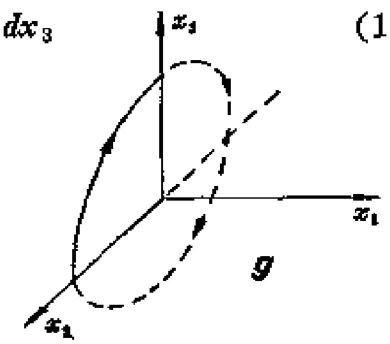
$$f_{\hat{u}}=\mathrm{Grad}\,\boldsymbol{r}\cdot\hat{u} \tag{14}$$

作为一个二次形式 $f_{\hat{u}}=u^1dx_2\wedge dx_3-u^2dx_1\wedge dx_3+u^3dx_1\wedge dx_2$，$d(f_{\hat{u}})=0$，或

$$\mathrm{Div}\,f_{\hat{u}}=0 \tag{15}$$

显然的，只要取 $f_{\hat{u}}$ 作为一个在特殊情况下的旋度就足够了 $\hat{u}=e_1$，或 $u^1=1, u^2=u^3=0$. 然后作为一个二次形式 $f_{\hat{u}}=dx_2\wedge dx_3$，我们可以立刻猜出(由楔积法则)形式微分方程 $d\omega=f_{\hat{u}}$ 的解，ω 是一个一次形式；即 $\omega_1=x_2dx_3$，$\omega_2=-x_3dx_2$ 都是解. 因为这解除了一个闭一次形式外是唯一的，$\omega_1-\omega_2$ 必须是闭的；而实际上 $\omega_1-\omega_2=x_3dx_2+x_2dx_3$，从此 $d(\omega_1-\omega_2)=-dx_2\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_3=0$. ω_1 和 ω_2 的平均 g，

$$g=-\frac{1}{2}x_3dx_2+\frac{1}{2}x_2dx_3 \tag{16}$$



也将是解$\left(\text{并且注意到 } g-\omega_1=-\frac{1}{2}x_3dx_2-\frac{1}{2}x_2dx_3 \text{ 是闭的}\right)$.

作为一个向量场 g 是

$$g(x)=-\frac{1}{2}x_3e_2+\frac{1}{2}x_2e_3$$

它绕着 x_1 轴作圆周转动(看图).

当然我们可以用解析法找出 g：设 $g=\sum a^i dx_i$ 因而 $d(g)=\sum\limits_{i<j}(a^j_i-a^i_j)dx_i\wedge dx_j$，且 $d(g)=f_{\hat{u}}$ 是系统

$$\begin{aligned}&a^3_2-a^2_3=1\\&a^2_1-a^1_2=a^3_1-a^1_3=0\end{aligned} \tag{17}$$

设置 $a^1=a^2=a^3_1=0$，它的一个特解立刻得到. 这个解就是 ω_1.

例 3 因为 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 是梯度，$\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r}$ 必须是一个旋度，即对某些 $\boldsymbol{h}$，$\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r}=\mathrm{Curl}\boldsymbol{h}$. 为了求 $\boldsymbol{h}$ 我们必须解如上的适当的微分方程. 无论如何，在这个情形根据 Leibniz 法则的公式 5.1(11)有一个解：$\mathrm{Curl}(f\boldsymbol{g})=(\mathrm{Grad}f)\times\boldsymbol{g}+f(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g})$. 置 $f=\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{r}$. 则 $\mathrm{Curl}\{(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\}=\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r}+(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{Curl}\boldsymbol{r}$，因为 $\mathrm{Curl}\boldsymbol{r}=0$（由 (10)）我们有

$$\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r}=\mathrm{Curl}\{(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\}\tag{18}$$

再者：如果我们把 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 解释为一个旋转体的角速度，则这体的一点 $\boldsymbol{r}$ 的线速度为

$$\boldsymbol{v}=\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r}\tag{19}$$

由 5.1(17)我们有 $\hat{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}\mathrm{Curl}(\hat{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{r})$. 因此得出在 $\boldsymbol{v}$ 和 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 间的下面关系：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\mathrm{Curl}\{(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\}\\ \hat{\boldsymbol{u}}&=\mathrm{Curl}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\right\}\end{aligned}\tag{20}$$

并且由此得到 Curl^2 的一个例子：

$$\hat{\boldsymbol{u}}=\mathrm{Curl}\ \mathrm{Curl}\left\{\frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\right\}\tag{21}$$

5.3 积分公式

在 4.2，我们肯定了一般公式

$$\int_M d\omega=\int_{\partial M}\omega\tag{1}$$

并且举出在平面上的 Gauss 定理 4.2(15) 作为一个特殊情形. 在 R^3 的向量分析中有一些关于(1)式的值得注意的其它解释. 现在我们对此加以讨论.

设 f 是 R^3 的一个数量场，M 是 R^3 的一条曲线，$M=\{\boldsymbol{r}(t);a\leqslant t\leqslant b\}$. 则 $df=\mathrm{Grad}f$，而(1)变成

$$\int_a^b \mathrm{Grad}f \cdot \boldsymbol{T}\, dt = f(\boldsymbol{r}(b)) - f(\boldsymbol{r}(a)) \tag{2}$$

式内 $\boldsymbol{T}$ 是M的切线. 这个公式有下面的物理解释. 把 Grad$f$ 看作一个力场. 则线积分(2)左边是功的积分，给出这场在一质点沿这曲线运动时所作的功的总量. 令 $\phi(x) = -f(x)$. ϕ 称为场 Grad$f$ 的位能 E_p, 而(2)式断言所作的功等于位能的减少 $\phi(\boldsymbol{r}(a)) - \phi(\boldsymbol{r}(b))$. 一个位势函数的梯度的力场(或, 一个恰当一次形式的力场), 由于下面的理由, 称为**守恒的**. 质点的动能 E_k 是$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}$①, 而 $dE_k = \boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{T}}\, dt$. 因为$\dot{\boldsymbol{T}}$是加速度, 所以由 Newton 定律① $\dot{\boldsymbol{T}}$也是力, $\dot{\boldsymbol{T}} = \mathrm{Grad}f$. 这样便有 $dE_k = \mathrm{Grad}f\cdot\boldsymbol{T}\, dt$. 由(2), $dE_p = -\mathrm{Grad}f\cdot\boldsymbol{T}\, dt$. 因此 $d(E_p + E_k) = 0$, 这说明总能量是守恒的.

由 5.2 定理 1, 每一个无旋度的场是守恒的.

设 $\boldsymbol{f}$ 是 R^3 的一个一次形式, 而M是一个闭曲面. 则 $d(\boldsymbol{f}) =$ Curl$\boldsymbol{f}$, 并且(1)变成

$$\iint_M (\mathrm{Curl}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{N})\, du\, dv = \int_{\partial M} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{T}\, dt \tag{3}$$

式内$\boldsymbol{N}$ 是 M 的法线而$\boldsymbol{T}$ 是 ∂M 的切线.

为了作(3)的物理解释起见, 我们从初等力学回忆起, 设一个物体绕一个轴(取为 z 轴)旋转, 每单位时间有 ω 转, 则它的角速度是指向沿 z 轴有长度 ω 的向量 $\boldsymbol{\omega}$, 而物体上位置 $\boldsymbol{r}$ 的一点的线速度 $\boldsymbol{v}$ 是

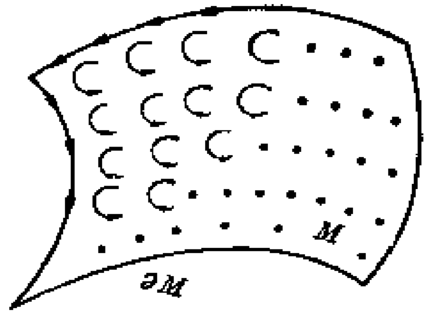
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{4}$$

现在把它倒过来. 设 $\boldsymbol{v}$ 是一个流体的速度场在其内嵌入一个小的蹼轮. 设场绕着蹼轮打漩, 在它边缘一点的线速度将是 $\boldsymbol{v}$, 并且它

①我们假定是单位质量的.

的角速度ω将满足(4). 在这点充分小的近傍，我们可以把ω作为常数看待，并且由5.1(17)对它解出：

$$\omega = \frac{1}{2}\mathrm{Curl}\,\boldsymbol{v}. \qquad (5)$$



这样一来Curl$\boldsymbol{v}$量度了场$\boldsymbol{v}$局部的打漩或旋转，并且由(4)，Curl$\boldsymbol{v}$垂直于$\boldsymbol{v}$①.

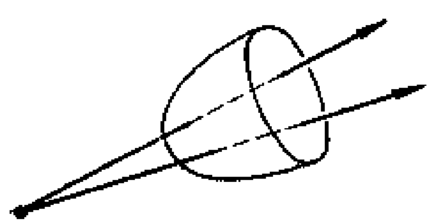
回到(3)式，我们把f看作一个流的速度场. 那么Curl$f$是它的局部角速度向量，并且Curl$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{N}$是这个旋转在$M$的切平面上的分量. 如果我们把这些局部旋转相加，则在M的内部互相邻接的局部旋转抵消掉(看图)，只剩下沿∂M的剩余流. 后者是(3)的右侧. 因此(3)由取向相消原理在物理学上(或几何学上)是显然的.

流体的概念为Curl Grad$f=0$对任何f成立这个结果提供了一个物理学的验证：设水从一个山上流下，在山边的小蹼轮是不转动的. 在此地f是山在基平面上每点的高度，Grad$f$是水流的速度场，而Curl Grad$f=0$因为蹼轮是不转的.

设$\boldsymbol{f}$是R^3的一个二次形式，并且M是一个有关闭边界的立体区域. 则$d(\boldsymbol{f})=$Div$\boldsymbol{f}$，而(1)是

$$\iiint_M \mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}\,dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial M} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{N}\,du\,dv \qquad (6)$$

其中$\boldsymbol{N}$是∂M的法线.



这式的右边是所谓**流量积分**.如果把$\boldsymbol{f}$看作一个力场，当它撞击在"体"M上的时候，这个积分量度了这个场的总强度（带正

①在5.2例2，e_1是场g的角速度. 在平面(x_2, x_3)上中心在0的一个蹼轮将被g以角速度e_1所转动.

负号)．粗言之，总流量是从M出来的力线"数"减去进去的力线"数"，在此也要考虑到通过∂M的场线的角度和$f(x)$在变化中的大小．此外也可以说，如果场线发散，好象从一个源射出(看图)，在一个区域M前面一侧的强度(每单位面积的线数)将大于在背面一侧的，因此如果它们的面积(前面的和背面的)可以比较，在M $\mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}\neq 0$．对于场$\boldsymbol{r}$就是这种情形：$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{r}=3$ (5.2(12))．对于平行均匀场$\boldsymbol{f}_{\hat{u}}\equiv\hat{\boldsymbol{u}}$，每一区域流进和流出是一样的，而处处$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}_{\hat{u}}=0$(5.2 15))．

从前面的例子我们可能以为当场线收敛或发散于一点或数点时$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{f}\neq 0$，但这是错误的．我们必须也考虑到场强．此地是一个例子．设一正的单位电荷置于$\mathbf{0}$．它引起一个电场$\boldsymbol{E}$，而

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}}{r^3} \tag{7}$$

这由Coulomb定律得到$\left(\text{我们写 } r=\|\boldsymbol{x}\|\text{；则}\frac{\boldsymbol{x}}{r}\text{是一个外向的单位向量，而这个力在适当单位下是}\frac{1}{r^2}\text{外向的，因此是}\frac{\boldsymbol{x}}{r^3}\right)$．由Leibniz法则公式5.1(12)，$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{E}=\mathrm{Div}\left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{x}\right)=\mathrm{Grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\cdot\boldsymbol{x}+\frac{1}{r^3}\mathrm{Div}\,\boldsymbol{x}$；因为$\mathrm{Grad}(r^{-3})=-3r^{-4}\mathrm{Grad}\,r=-3r^{-4}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}$，并且$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{x}=3$，从此

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{E}=-\frac{3}{r^5}r^2+\frac{3}{r^3}=0 \tag{8}$$

虽然场线是从$\mathbf{0}$发散的．注意到一个有趣的事，即当且只当$n=3$时$\mathrm{Div}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r^n}\right)=0$：$\mathrm{Grad}(r^{-n})=-nr^{-n-1}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}$，从而$\mathrm{Div}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{r^n}\right)=-nr^{-n-2}r^2+r^{-n}\cdot 3=(3-n)r^{-n}$．这就是说，在场$\boldsymbol{f}_n=r^{-n}\boldsymbol{x}$中只有一个是旋度，它就是Coulomb场(7)．因为实验证明电场是由磁

力场所引起，我们的简单计算指出了电力必须服从一个倒平方的定律，并且由此“预示”了 Coulomb定律.

习题 一个力场f称为**有心的**如果存在一个已给的数量函数ϕ使得$f(x)=\phi(r)x$. 证明对这样的场

$$\mathrm{Div}(\phi(r)x)=r\phi'(r)+3\phi(r)$$

已给数量场 f 和 g，由 5.1(12)我们有

$$\mathrm{Div}(f\mathrm{Grad}g)=(\mathrm{Grad}f)\cdot(\mathrm{Grad}g)+f\Delta g$$

$$\mathrm{Div}(g\mathrm{Grad}f)=(\mathrm{Grad}g)\cdot(\mathrm{Grad}f)+g\Delta f$$

相减得到

$$\mathrm{Div}(f\mathrm{Grad}g-g\mathrm{Grad}f)=f\Delta g-g\Delta f$$

因此由散度积分定理(6)得

$$\iiint\limits_{M}(f\Delta g-g\Delta f)\,dx_1dx_2dx_3$$

$$=\iint\limits_{\partial M}(f\mathrm{Grad}g-g\mathrm{Grad}f)\cdot N\,dudv \tag{9}$$

这个公式在物理学上经常用到.

第六章 极　　值

6.1 一般极值

一个函数的一个**一般极值**是指它的一个点，在此点函数可微分并且取一个极值．端点和其它的点在那里函数不可微分的不在讨论之列．

已给 f: $R^k \to R^1$，一点 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$f_1(\boldsymbol{a}) = f_2(\boldsymbol{a}) = \cdots = f_k(\boldsymbol{a}) = 0 \tag{1}$$

时称为一个**临界点**．显然一个一般极值必须是一个临界点，但反过来不一定成立，如在单变量微积分的情形 $k=1(f: R^1 \to R^1)$一样．在单变量微积分中，如果 $x=a$ 是一个临界点，则靠近 a 我们有

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \tag{2}$$

(没有线性项的泰乐定理，因为 $f'(a)=0$)．设 $f''(a)>0$，则 $f(a)$ 是一个极小；设 $f''(a)<0$，则 $f(a)$ 是一个极大；设 $f''(a)=0$，则不能做出结论，并且需要(2)的其它项来决定．

在 k 变量的情况演算步骤是一样的，除了注意到它的复杂性外，只要加以必要的变更便可．已给 $f: R^k \to R^1$，设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 是一个临界点，则靠近 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 我们有

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \cdots \tag{3}$$

矩阵 H

$$H(\boldsymbol{x}) = ((f_{ij}(\boldsymbol{x}))) \tag{4}$$

称为 f 在 $\boldsymbol{x}$ 的海赛矩阵(Hessian). 置 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{h}$. 则 (3) 式的二次项为

$$H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} \tag{5}$$

并且这个演算步骤将导出一个极大或者一个极小按照对所有充分小的 $\boldsymbol{h}$, $H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}$(各)为负或正而定;又如果对某些 $\boldsymbol{h}$, (5)消失则这个演算步骤是没有结果的. 如果 (5) 对所有充分小的 $\boldsymbol{h}$ 都具有同一符号则这个演算步骤是有结论的. 但是由于 $H(\boldsymbol{a})$是线性的, 对 $\boldsymbol{h}$ 的尺度变更并不影响(5)的符号. 因此如果(5)对所有 $\boldsymbol{h}$ 都有同一符号, 则这步骤是有结果的, 对此我们转向线性代数① 来找一个判断的准则.

由于 f 是实的, 所以它的所有偏导数也然, 再从混合偏导数的相等性, 可知它的 Hessian 是一个(实的)对称矩阵. 因此它可以对角线化. 设 O 是一个直交矩阵使得 $OH(\boldsymbol{a})^{t}O=D(\boldsymbol{a})$ 是对角线化的,

$$D(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k\end{pmatrix} \tag{6}$$

其内 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是 $H(\boldsymbol{a})$ 的特征值. 因为 $H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}=D(\boldsymbol{a})\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}$, 而因为 $\boldsymbol{h}$ 是任意的所以 $\boldsymbol{l}=O\boldsymbol{h}$ 也是任意的, 并且

$$D(\boldsymbol{a})\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}=\Sigma\lambda_i l_i^2 \tag{7}$$

对所有 $\boldsymbol{l}$ 具有同一符号, 当且只当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 都具有同一符号.

这个一般结果在一个 k 变量的已给问题中也可以也不可以实际应用. 无论如何, 对两个变量的情况可以立刻得出标准的办法. 设 $f:R^2\to R^1$ 已经给定, 且设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ 是一个临界点, $f_1(\boldsymbol{a})=f_2(\boldsymbol{a})=0$. f 的 Hessian 是②

---

①必要的资料可参看 Schreier-Sperner [5], 第 24 节.

②此地及今后我们在所有函数中都删去变量 $\boldsymbol{a}$.

$$H=\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$f_{21}=f_{12}$. 特征值的乘积是

$$\det H=f_{11}f_{22}-(f_{12})^2 \tag{9}$$

又特征值的和是

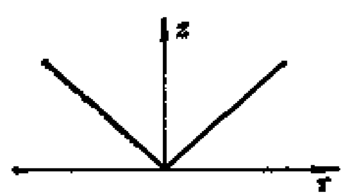
$$\operatorname{tr} H=f_{11}+f_{22}① \tag{10}$$

因此这两个特征值具有相同符号当且只当 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$, 并且这个符号是正（负）各按照 $\operatorname{tr} H=f_{11}+f_{22}>0(<0)$ 而定. 如果 $\det H<0$, 特征值有相反的符号而这点称为一个鞍点: f 在一个方向增加而在它的直交方向减少. 如果 $\det H=0$, 则这演算步骤是无结果的.

例 1 $f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=r$. 则

$$f_1=\frac{x_1}{r}, \qquad f_2=\frac{x_2}{r} \tag{11}$$

这两个函数在 $x=0$ 都是没有定义的, 这点是可疑的极值. 以极坐标 r 表示, f 在 $r=0$ 有一个角点. 这个曲面实际上是一个倒置的锥面, 顶点在 0. 这样 $x=0$ 是一个极值(一个极小), 但不是一个一般极值, 因为 f 在 $x=0$ 是不可微分的.



例 2 $f(x)=x_1^2+x_2^2=r^2$. 在此

$$\begin{gathered} f_1=2x_1,\ \ f_2=2x_2,\ \ f_{12}=f_{21}=0 \\ f_{11}=f_{22}\equiv 2 \end{gathered} \tag{12}$$

唯一的临界点是 $x=0$. 在 $x=0$ 我们有 $\det H>0$, $\operatorname{tr} H=4>0$; 因此 $f(0)$ 是一个极小.

例 3 $f(x)=x_1x_2$. 则

$$\begin{gathered} f_1=x_2,\ \ f_2=x_1,\ \ f_{12}\equiv 1 \\ f_{11}=f_{22}=0 \end{gathered} \tag{13}$$

---

①回忆一下 $\operatorname{tr} A$ 表示矩阵 A 的迹并且等于它的主对角线全体元素的和 Σa_{ii}.

唯一的临界点是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 在 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 我们有 $\det H=-1$, $\mathrm{tr}H=0$. 因此特征值是 $\lambda_{1,2}=\pm 1$, 并且 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是一个鞍点.

例 4　$f(\boldsymbol{x})=x_1^2x_2^3$. 则

$$\begin{gathered} f_1=2x_1x_2^3,\ f_2=3x_1^2x_2^2,\ f_{12}=6x_1x_2^2 \\ f_{11}=2x_2^3,\ f_{22}=6x_1^2x_2 \end{gathered} \tag{14}$$

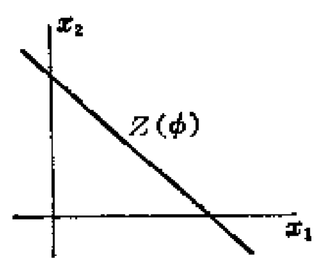
我们有 $\det H=12x_1^2x_2^4-36x_1^2x_2^4=-24x_1^2x_2^4\leqslant 0$; 并且 $\mathrm{tr}H=2x_2^3+6x_1^2x_2=2x_2(x_2^2+3x_1^2)$, 因而 $\mathrm{tr}H$ 的符号和 x_2 的符号相同. x_1 轴和 x_2 轴都是临界点的直线; 在这些直线上 $\det H$ 消失; 在 x_1 轴所有特征值消失; 在 x_2 轴, 一个特征值不为 0, 具有 x_2 的符号. f 的画图是一个有生气的处处可微分的景色, 具有下降的盆地和上升的山脊, 没有极大, 没有极小, 也没有鞍点.

6.2　受约束的极值

在 R^k, 一个约束是在变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 上的一个函数关系; 它可以用一个函数 $\phi: R^k\to R^1$ 表示为

$$\phi(\boldsymbol{x})=0 \tag{1}$$

对于一个已给函数 $f: R^k\to R^1$ 在约束(1) 下的极值问题是这样的: 找出数 $f(\boldsymbol{x})$ 的集合中的极值, 而 $\boldsymbol{x}$ 受到满足(1)式的"约束". 用几何术语它的意义是: 把 f 看作是从集合 $Z(\phi)$ 到 R^1 的一个函数, $f: Z(\phi)\to R^1$, 并且求这个(受限制的, 或受约束的)新函数的极值.



例　两个数的和是 10, 它们的最大乘积是什么? 在此地已给函数是 $f(\boldsymbol{x})=x_1x_2$; 约束条件是 $\phi(\boldsymbol{x})=x_1+x_2-10=0$; $Z(\phi)$ 是平面上一条直线(看图); 而所要解决的问题是在直线上求一点它的坐标有极大的乘积.

解受约束极值的一般问题关键在于正确理解在这种情况下的

"临界点". 在 $Z(\phi)$ 的一点 $\boldsymbol{a}$ 是 f 在约束(1)下的临界点, 如果 f 在流形 $Z(\phi)$ 的方向导数是消失的; 这就是说, 设

$$D_{\boldsymbol{u}}f(\boldsymbol{a})=0, \text{所有 } \boldsymbol{u} \text{ 切于 } Z(\phi) \tag{2}$$

式内 $D_{\boldsymbol{u}}$ 是方向导数 5.1(18). 注意到(2) 并不需要 $f_1(\boldsymbol{a})=\cdots=f_k(\boldsymbol{a})=0$; 一点可以是 f 在约束下的临界点而不是 f 在普通意义 6.1(1)下的临界点. 前面的例子可以说明这一点.

由 5.1(20), 在 $Z(\phi)$ 的一点 $\boldsymbol{a}$ 是 f 在约束(1)下的临界点当且只当对所有 $Z(\phi)$ 的切线 $\boldsymbol{u}$, $\mathrm{Grad}f(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{u}=0$; 这就是说, 当且只当 $\mathrm{Grad}f(\boldsymbol{a})$ 是 $Z(\phi)$ 的法线①, 我们得出结论在 $Z(\phi)$ 中的 $\boldsymbol{a}$ 是 f 在约束(1)下的临界点当且只当 $\mathrm{Grad}f$ 和 $\mathrm{Grad}\phi$ 在 $\boldsymbol{a}$ 是平行的. 以分量表示是对某些常数 λ

$$f_i(\boldsymbol{a})=\lambda\phi_i(\boldsymbol{a}),\quad i=1,2,\cdots,k \tag{3}$$

此事提示了找临界点 $\boldsymbol{a}$ 的下面方法, 由 Lagrange 所导入并称为 Lagrange 的乘数法: 作辅助函数

$$F(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})-\lambda\phi(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

式内 λ, 即"乘数", 纯粹是假设的; 把 F 作为 $k+1$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k, \lambda$ 的一个函数求它在普通意义下的极值; 然后消去 λ. 这方法之所以有效是因为方程 $F_i=0$, $i=1,2,\cdots,k$ 是条件(3)而方程 $F_\lambda=0$ 是约束(1)的缘故.

例(续) 辅助函数是

$$F(\boldsymbol{x},\lambda)=x_1x_2-\lambda(x_1+x_2-10)$$

现在 $F_1=x_2-\lambda$, $F_2=x_1-\lambda$, $F_3=x_1+x_2-10$; 把这些式子等于 0 我们有 $x_1=\lambda=x_2$, 从此消去 λ; 且置 $x_1=x_2$ 于约束方程 $x_1+x_2-10=0$ 中, 我们得到 $x_1=x_2=5$, 所以答案是 25.

这个方法立刻可以推广到有若干个约束的极值问题去. 我们

---

①看 3.3(15). 我们只须把 3.3(9)及其以后的讨论特殊化到一个函数, 并且注意 3.3(11)的向量 ϕ^u 是我们现在所称的 $\mathrm{Grad}\,\phi^u$.

对每个约束导入一个乘数和上面一样的进行，并依赖在3.3给出的关于形状如Z $(\phi^1,\phi^2\cdots)$ 的多样形的切线和法线的讨论. 详细的论证略去.

用Lagrange 的乘数方法可得出关于几何平均和算术平均重要定理的一个漂亮的证明，这定理是说

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\tag{5}$$

对任何 $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$, 和所有 $n=1,2,\cdots$都成立. 对 R^n 的 $\boldsymbol{x},x_i>0$, 置

$$f(\boldsymbol{x})=(\Pi x_i)^{\frac{1}{n}}\tag{6}$$

$$\phi(\boldsymbol{x})=\Sigma x_i-1\tag{7}$$

并且做辅助函数

$$F(\boldsymbol{x},\lambda)=f(\boldsymbol{x})-\lambda\phi(\boldsymbol{x})$$

因为 $f_i=\frac{1}{n}(\Pi x_j)^{\frac{1}{n}-1}\prod\limits_{l\neq i}x_l=\frac{1}{n}\prod\limits_{l\neq i}x_i^{\frac{1}{n}}\cdot x_i^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}f(\boldsymbol{x})\cdot x_i^{-1}$，从此

$$F_i(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n}f(\boldsymbol{x})\cdot x_i^{-1}-\lambda$$

因此从方程 $F_i=0$ 消去 λ 后，可见在一个受约束的极值有 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 事实上约束(7)指出在这些点 $x_1=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$, 所以受约束的极值是 $\left(\Pi\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$. 因此对所有 $\boldsymbol{y}\in Z(\phi),\ f(\boldsymbol{y})\leqslant\frac{1}{n}$. 对每一个满足 $\Sigma x_i\neq0$的 $\boldsymbol{x}$ 都有 $\boldsymbol{y}=\frac{1}{c}\boldsymbol{x}\in Z(\phi)$，式内 $c=\Sigma x_i$. 容易看到 f 是齐性的: $f(t\boldsymbol{x})=(t^n\Pi x_i)^{\frac{1}{n}}=tf(\boldsymbol{x})$. 因此对任何 $\boldsymbol{x},c=\Sigma x_i\neq0,\ \frac{1}{c}f(\boldsymbol{x})=f\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{x}\right)=f(\boldsymbol{y})\leqslant\frac{1}{n}$, 而得 $f(\boldsymbol{x})\leqslant\frac{1}{n}\Sigma x_i$. 因为这定理要求 $x_i>0$, 因而 $c\neq0$, 证毕.

第七章 积分几何学

7.1 R^2 内点和直线的测度

设以$\mathscr{E}$记平面上所有刚体运动的集合①. 一个刚体运动 T 包含着一个转角 α 的旋转 $R(\alpha)$ 接着用一个向量 $\boldsymbol{a}$ 表示的平移. 以记号表示,

$$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+R(\alpha)\boldsymbol{x} \tag{1}$$

和通常一样置 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ 对(1)的分量有

$$\begin{aligned} y_1&=a_1+x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha \\ y_2&=a_2+x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha \end{aligned} \tag{2}$$

设对所有 $\boldsymbol{x}\in R^2, f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 则公式

$$m(E)=\int_E f(\boldsymbol{x})\,dx_1\wedge dx_2 \tag{3}$$

定义一个测度, 或对子集 $E\subset R^2$ 是指定出面积的一个方法. 习惯上的面积是由 (3) 以 $f\equiv 1$ 所给出. 习惯上的面积对于每一$T\in\mathscr{E}$应有

$$m(TE)=m(E) \tag{4}$$

即在$\mathscr{E}$的作用下是不变的. 我们现在寻找具有这一性质的测度(3)的特性. 由变量变换公式 3.1(8)我们有

$$m(TE)=\int_E (f\circ T)\ (\boldsymbol{y})\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}dy_1\wedge dy_2$$

从(2)可得$\dfrac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}=1$ (用 3.1(23)), 从此可写

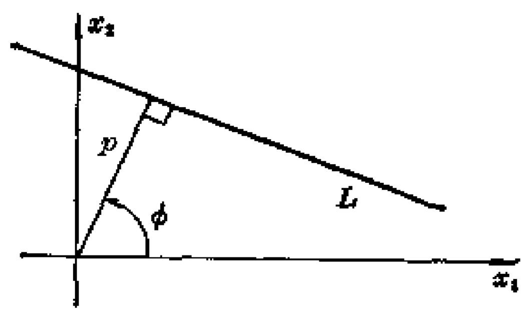
①参看 Schreier-Sperner[5], 12 节, 特别是 pp. 163－168. 在此证明了一个刚体运动是由一个旋转和一个平移所组成.

$$m(TE)=\int_E (f\circ T)(x)\,dx_1\wedge dx_2$$

设 m 在 $\mathscr{E}$ 下不变，则由(4)有 $\int_E (f\circ T)(x)dx_1\wedge dx_2=\int_E f(x)dx_1\wedge dx_2$ 对每个 E 成立；从此 $f\circ T=f$ 对每一个 T 都成立，这样一来 f 必须是常数. 因此在 $\mathscr{E}$ 下面不变的形式为(3)的测度，除了一个常数因子外，只有习惯上的测度. 这个称为**点的测度**，因为它测度了 R^2 中的点集并且关于 $\mathscr{E}$ 是不变的. 记此为 dP. 那么

$$dP=dx_1\wedge dx_2 \tag{5}$$

用一个非常相似的程序我们可以作出对平面上的直线的类似：关于直线集合的一个测度，它在 $\mathscr{E}$ 的作用下是不变的. 我们



把每一直线 L 用它的极坐标形式表示

$$L:\ x_1\cos\phi+x_2\sin\phi=p$$

记号如图所示. 则每一 L 唯一地由一对实数 $(p,\ \phi)$，$0\leqslant p<\infty$，$0\leqslant\phi<2\pi$ 所特定. 每个 $T\in\mathscr{E}$ 当然把直线带到直线去，并且如果 $T(L)$ 的极距和角是 (q,θ)，而 T 由(2)所给出，则得到

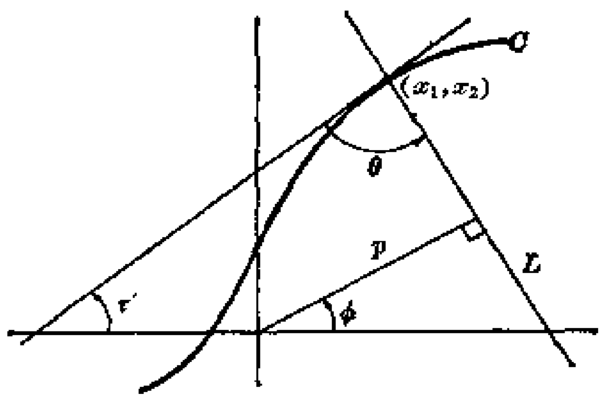
$$\begin{aligned} q&=p-a_1\cos\alpha-a_2\sin\alpha\\ \theta&=\phi-\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

设 $m(E)=\int_E f(p,\phi)\,dp\wedge d\phi$ 是直线任意集合 E 的一个假设测度，则由变量变换公式有 $m(TE)=\int_E (f\circ T)(q,\ \theta)\dfrac{\partial(p,\ \phi)}{\partial(q,\ \theta)}dq\wedge d\theta$；从 (6) 得出 $\dfrac{\partial(p,\phi)}{\partial(q,\theta)}=1$；且设 m 在 $\mathscr{E}$ 的作用 (6) 下是不变的，则

和以前一样可以断定 f 是常数. 我们选择这常数为 1, 并且记直线的测度为 dL,

$$dL = dp \wedge d\phi \tag{7}$$

此地是直线测度的一个应用. 设一光滑曲线 C 用它的弧长 s 参数地给出. 每一和 C 相交的直线 L 是由决定交点 $(x_1(s), x_2(s))$ 的 s 的值与 C 在交点的切线和 L 间的交角 θ 所决定(看图). 我们要把 dL 以 s 和 θ 表示. 由于 (x_1, x_2) 是在 L 上的, 我们有 $p = x_1\cos\phi$



$+ x_2\sin\phi$. 因此

$$dp = (\cos\phi dx_1 + \sin\phi dx_2) + (-x_1\sin\phi + x_2\cos\phi)d\phi$$

但 $dx_1 = \cos\tau ds$, $dx_2 = \sin\tau ds$, τ 是 x_1 轴和 C 的切线间的交角. 因此

$$dp = \cos(\phi - \tau)ds + (-x_1\sin\phi + x_2\cos\phi)d\phi$$

做它和 $d\phi$ 的楔积 $dp \wedge d\phi = \cos(\phi - \tau)ds \wedge d\phi$. 把图中大三角形的角相加得 $\tau + \theta + \frac{\pi}{2} - \phi = \pi$, 或

$$\phi = \tau + \theta - \frac{\pi}{2}$$

因此 $d\phi = \tau' ds + d\theta$, $ds \wedge d\phi = ds \wedge d\theta$, 并且

$$\cos(\phi - \tau) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$$

因为面积(测度)必须是非负的, 我们取绝对值得

$$dL = |\sin\theta| ds \wedge d\theta \tag{8}$$

用dL的这个形式我们容易算出

$$\int_{L \cap C \neq \varnothing} n(L \cap C) dL$$

式内$n(L\cap C)$表示L和C的交点个数. 这个积分给出和C相交的直线集合的线测度，每一直线按照它和C的交点数加权. 根据前面的讨论这个积分等于$\int_0^{l(C)} ds \cdot \int_0^{\pi} |\sin\theta| d\theta = 2l(C)$, $l(C)$是C的长度. 因此

$$\int_{L \cap C \neq \varnothing} n(L \cap C) dL = 2l(C) \tag{9}$$

设C是一条凸闭曲线①，则$n(L\cap C)=2$对所有和C相交而不相切②的直线L成立，从而(以略写记号表示) $\int dL = l(C)$.

7.2 运动学的测度

设K是一平面几何图形，如一直线段或一曲线段，或一具有分段光滑③简单关闭的境界曲线的一个有界区域. 后一类的图形称为**领域**. 无限延伸的图形(就是说，无界的图形)例如直线是除外的. 我们要测度和K合同的图形集合，或同样的，K的各种位置的集合. 这样一种测度将是对线测度的一般图形的一个类似. 为了描述K的可能位置，我们设想K是活动的并且赋予一个参考标架和它刚性结合在一起. K的每个位置可由动原点在固定标架的特定坐标(x_1, x_2)以及固定的x_1轴与活动的x_1轴间的特定交角ϕ所给出. 这样一来，K有三个坐标(x_1, x_2, ϕ). 设对K施加一刚体运动$T\in\mathscr{E}$，它具有角α和向量$\boldsymbol{a}$，如在7.1(2)一样. 设TK的坐标是

---

①一曲线C是凸的如果C的每一对点所决定的直线和C没有其它的交点.

②C的切线集合的线测度为0，因为对这些直线，ϕ和p都只是s的函数，所以$dp\wedge d\phi$将含$ds\wedge ds=0$，就是说，$dL=0$.

③它的意义是除有限个点外在所有它的点都是可微分的(因而有一切线)，在这些除外的点切线作突然的转动. 这些点称为角点.

(y_1, y_2, θ)，则显然

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_1 + x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\
y_2 &= a_2 + x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \\
\theta &= \phi + \alpha
\end{aligned} \tag{1}
$$

为了寻找K的合同图形集合的最一般测度，它在$\mathscr{C}$的作用下不变，我们的做法和对点与直线时完全一样．置$m(E)=\int_E f(x_1, x_2, \phi)dx_1\wedge dx_2\wedge d\phi$，式内$E$是上面所说的集合且$f\geqslant 0$；从此$m(E)=\int_E (f\circ T)(y_1, y_2, \theta)\frac{\partial(x_1, x_2, \phi)}{\partial(y_1, y_2, \theta)}dy_1\wedge dy_2\wedge d\theta$；注意到$\frac{\partial(x_1, x_2, \phi)}{\partial(y_1, y_2, \theta)}=1$；再进行和前面一样的讨论得出$f$是一个常数．选这常数为1，我们得到$K$的合同图形的一个不变测度，把它记为$dK$，

$$dK = dx_1\wedge dx_2\wedge d\phi \tag{2}$$

在明显的理由下，把它作为**运动学的测度**．强调地指出运动学测度立刻可应用到每一个图形K，因而成为直线测度的一个值得注意的推广．

设一图形K在一个位置的集合E内变动，由定义，它的运动学测度是$\int_E dK$．如果我们从活动参考标架上来观察这种情形，就好像地球在小虫下面转动，而问固定参考标架位置的集合的运动学测度是什么，那么答案仍是$\int_E dK$．因为如果(x_1, x_2, ϕ)是活动标架在固定标架的坐标和角度，则固定标架在活动标架的坐标和角度(x_1', x_2', ϕ')是

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -x_1\cos\phi - x_2\sin\phi \\
x_2' &= x_1\sin\phi - x_2\cos\phi \\
\phi' &= -\phi
\end{aligned}
$$

从此$\frac{\partial(x_1', x_2', \phi')}{\partial(x_1, x_2, \phi)}=-1$，由于测度必须是非负的要取它的绝对值，

便知由于参考标架的变更所引起的变数变换并不改变我们所说的测度．运动学测度的这一性质如所知是在运动的倒置下的不变性．这是一个有趣的性质，从下面的简单应用可以看出来．假设我们要求包含一个固定点P的所有合同区域K的运动学测度，这个测度用记号表示为$\int_{P\in K} dK$．用倒置法这个和固定K而让P跑遍它的内部所得的测度是一样的，从此得出$\int_{P\in K} dx_1\wedge dx_2\cdot\int_0^{2\pi} d\phi=2\pi\cdot a(K)$，$a(K)$是$K$的面积．因此

$$\int_{P\in K} dK=2\pi\cdot a(K) \tag{3}$$

7.3 Poincaré 公式和 Blaschke 公式

公式 7.1(9) 当直线以光滑曲线替代时有一个类似公式．设C_0是一条定曲线以它的弧长s参数表示为$(x_1(s), x_2(s))$．记它的长$l(C_0)$为l_0．令C为一动曲线具有长度$l(C)=l$．记动轴为X_1, X_2，设动原点关于固定标架有坐标(y_1, y_2)，且设C关于动标架的参数表示为$(X_1(\sigma), X_2(\sigma))$，$\sigma$是它的弧长．那么关于固定标架，$C$的方程是

$$x_1=y_1+X_1(\sigma)\cos\phi-X_2(\sigma)\sin\phi$$
$$x_2=y_2+X_1(\sigma)\sin\phi+X_2(\sigma)\cos\phi$$

ϕ是x_1轴和X_1轴间的交角．我们要求C的运动学测度$dC=dy_1\wedge dy_2\wedge d\phi$的一个表达式，以$s$，$\sigma$和$C_0$与$C$在一个交点的切线间的交角$\omega$所表出．它们的交点用$s$和$\sigma$给出为

$$x_1(s)=y_1+X_1(\sigma)\cos\phi-X_2(\sigma)\sin\phi$$
$$x_2(s)=y_2+X_1(\sigma)\sin\phi+X_2(\sigma)\cos\phi$$

因此$dx_1=dy_1+dX_1\cos\phi-dX_2\sin\phi-(X_1\sin\phi+X_2\cos\phi)d\phi$，对$dx_2$有类似的式子．注意到关系式

$$dx_1 = \cos\theta_0\, ds,\quad dx_2 = \sin\theta_0\, ds$$
$$dX_1 = \cos\theta d\sigma,\quad dX_2 = \sin\theta d\sigma$$

θ_0是x_1轴和C_0在交点切线的交角，θ是X_1轴和C在同一交点的切线的交角，代入经过简单的整理后得

$$dy_1 = \cos\theta_0 ds - \cos(\theta+\phi)d\sigma + (X_1\sin\phi + X_2\cos\phi)d\phi$$
$$dy_2 = \sin\theta_0 ds - \sin(\theta+\phi)d\sigma - (X_1\cos\phi - X_2\sin\phi)d\phi$$

从此由楔积的代数运算容易得出$dy_1\wedge dy_2\wedge d\phi = -\cos\theta_0\sin(\theta+\phi)\,ds\wedge d\sigma\wedge d\phi + \sin\theta_0\cos(\theta+\phi)\,ds\wedge d\sigma\wedge d\phi$，或

$$dC = |\sin(\theta_0-\theta-\phi)|\,ds\wedge d\sigma\wedge d\phi \tag{1}$$

但$\theta+\phi$是C和x_1轴的交角，因而$\theta_0-(\theta+\phi)$是C和C_0在交点切线的交角．这个角已称为ω；因此$\omega=\theta_0-\theta-\phi$；且由于$\theta_0$，$\theta$仅是$s,\sigma$的函数，从(1)得表达式

$$dC = |\sin\omega|\,ds\wedge d\sigma\wedge d\omega \tag{2}$$

这式把dC以s,σ和ω表出，正是我们的目标．

和对7.1(8)所做的一样，应用(2)易得

$$\int n(C\cap C_0)dC = 4ll_0 \tag{3}$$

式内$n(C\cap C_0)$是C和C_0交点的个数．这式称为Poincaré的公式．它和7.1(9)十分类似．因子4的产生是由于在这种情况下角ω的变化范围应是$0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$的缘故．

置$n(C\cap C_0)=n(C)$且令ω_i，$i=1, 2, \cdots, n(C)$是C和C_0在$n(C)$个交点处的交角．在每一交点计算$\int\omega dC$．利用(2)且置$0\leqslant\omega<\pi$，得出$\int\omega dC = 2\int_0^\pi \omega\sin\omega d\omega\cdot\int_0^{l_0} ds\int_0^l d\sigma = 2\pi ll_0$．把在所有的交点处相加得出(3)式的变形

$$\int\left(\sum_{i=1}^{n(C)}\omega_i\right)dC = 2\pi ll_0 \tag{4}$$

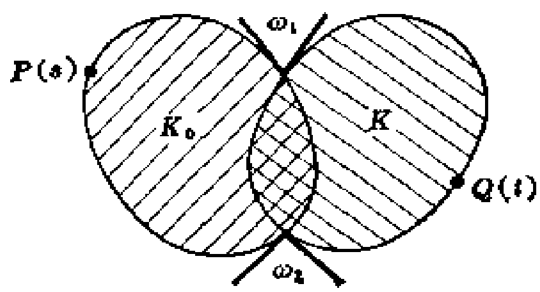
我们很快就要用到它.

设 K_0 是一个具有光滑边界 C_0 的凸域①. 记 K_0 的面积为 $a(K_0)=a$, 且 C_0 的长为 l. 设 τ 是 C_0 的切线和 x_1 轴的交角, 且 s 是 C_0 的弧长, 那么普通线积分 $\int_{C_0}\tau'(s)\,ds$ 有值 2π, 这是因为 C_0 (由假设)是一条简单闭曲线的缘故.

设 K 是和 K_0 合同的一个活动域. 设 C 是它的边界, 且以 t 记在 C 上的弧长. 设 $P(s)$, $Q(t)$ 各是在 C_0, C 上的一般点, 设 $K\cap K_0\neq\varnothing$, 则

$$\int_{P(s)\in K}\tau'(s)\,ds+\int_{Q(t)\in K_0}\tau'(t)\,dt+\sum\omega_i=2\pi \tag{5}$$

ω_i 是 C 和 C_0 在交点处的外角, 因为当一点在 $K\cap K_0$ 的边界跑一遍, 这式左边计算了这些点的切线的总的转角 (包含在角点处的跳动), 同时这边界本身是一条简单闭曲线, 这就肯定了 (5) 式的成立.



现在考虑

$$I=\int_{P(s)\in K}\tau'(s)\,ds\,dK$$

一方面 $I=\int_{K_0}\tau'\,ds\cdot\int_{P(s)\in K}dK$; 第一个因子是 2π (如上所述), 而由 7.2(3) 第二个因子等于 $2\pi a$. 另一方面, $I=\int_{K\cap K_0\neq 0}dK\cdot\int_{P(s)\in K}\tau'(s)\,ds=\int\left\{\int_{P(s)\in K}\tau'(s)\,ds\right\}dK$. 把这些结果结合在一起得

①由定义 K 是凸的当连接 K 的任何两点的线段完全落在 K 的内部.

$$\int\left\{\int_{P(s)\in K}\tau'(s)\,ds\right\}dK=4\pi^2a \tag{6}$$

把K和K_0所扮演的角色对调，然后根据在运动的倒置下运动学测度的不变性置$dK_0=dK$，则又有

$$\int\left\{\int_{Q(t)\in K_0}\tau'(t)\,dt\right\}dK=4\pi^2a \tag{7}$$

把(5)的两侧关于运动学测度dK积分，由(6)和(7)在左侧的头两项都是$4\pi^2a$；对左侧的最后一项我们利用(4)和$l=l_0$（因为C和C_0是合同的），再注意$dC=dK$（因为K和它的边界的位置当然是相互决定的），得到$2\pi l^2$；而右侧是$2\pi\int_{K\cap K_0\neq\varnothing}dK$. 总之最后得到

$$\int_{K\cap K_0\neq\varnothing}dK=4\pi a+l^2 \tag{8}$$

这是所谓Blaschke① 基本公式的一个特殊情况. 它是7.2(3)一个有趣的推广.

Blaschke公式(8)和Poincaré公式(3)在一道提供了所谓等周不等式的一个证明，这个不等式从现在的角度②（即，对一闭域K有面积$a(K)=a$和长度l的光滑边界）可以叙述为

$$l^2-4\pi a\geqslant 0 \tag{9}$$

为证明起见，置$n(C)=n(C\cap C_0)$，并且由于$dC=dK$，从(3)有

$$\int_{K\cap K_0\neq\varnothing}n(C)dK=4l^2 \tag{10}$$

定义序列$M_1, M_2, \cdots$

$$M_n=\int_{n(C)=n}dK,\ n=1, 2, \cdots \tag{11}$$

---

①Blaschke一般结果的叙述给出在Santalo[4], p. 34, 在那里，上述的特殊情况也被列入.

②这结果对凸曲线在更一般的情况下成立（Santalo[4], p. 37）. 有另外的叙述，在那里光滑性替代了凸性（参见例如Courant[1], vol. II, p. 214）.

注意当 n 是奇数时 $M_n=0$，这是因为设 $n(C)=2j+1$ 则 C 和 C_0 必须在一点相切，并且在这种位置的集合内（一个切点和 j 对其它交点）极角 ϕ 将是活动原点的坐标 (x_1, x_2) 的一个函数，从而 dK 将包含消失的形式 $dx_1\wedge dx_1$；这就是说，问题中的这个集合的运动学测度是 0，这就是所要肯定的事实。把 (10) 和 (11) 结合起来并且考虑到刚才已经指出的事实，我们有

$$4l^2=2M_2+4M_4+6M_6+\cdots$$

Blaschke 公式(8)给出

$$4\pi a+l^2=M_2+M_4+M_6+\cdots$$

从这二式有 $2l^2-8\pi a=2M_4+4M_6+\cdots$，或

$$l^2-4\pi a=M_4+2M_6+3M_8+\cdots \tag{12}$$

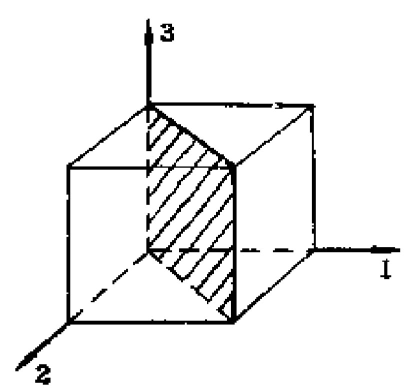
因为(12)右边是非负的，从此便导出 (9)。注意当 K 是一个圆时 $0=M_4=M_6=\cdots$，这时(12)式和对一个圆 $l^2=4\pi a$ 的简单事实是一致的。其逆，设对 $n\neq 2$ 时 $M_n=0$，则 K 是一个圆这样的论断是正确的，但是它的证明不够初等，此地从略。

附　　录

1. 在一流形上的体积元素

和我们已经在 3.4 讨论过的一样，在一个有维数 $r\leqslant k$，由 ψ：$R^r\to R^k$ 所给出的流形 $M\subseteq R^k$ 上的体积元素是由M的切空间内明确给定的基 ψ_j，$j=1, 2, \cdots, r$ 所定义的平行多面体的 r 维体积所决定的．应用余弦定律，我们找到一个曲面($r=2$)的体积元素公式 3.4(5)，并且说出了在 3.4(6)的一般公式．在此地我们将建立这个公式．不巧它的证明是冗长的并且不完全是初等的．但无论如何，由于我们对积分的主要应用（5.3 的积分定理）是在 R^3 内，一般的公式和跟随而来的长篇论证可以作为课外材料加以处理．

显然这个问题可用下面的纯粹几何叙述来给出：寻找由 r 个向量$\boldsymbol{u}_i\in R^k$，$i=1, 2, \cdots, r$，$r\leqslant k$ 所决定的平行多面体的 r 维体积；结论是这个体积的平方是一个以向量 $\boldsymbol{u}_i$ 为列的 r-r 矩阵的$\binom{k}{r}$个子行列式的平方和．这样一来，这个结论有如 Pythagoras 定理的一个推广．对于 $r=1$ 这正是那个定理的 k 维形式：平行多面体是一个单向量，它的“体积”是那个向量的长度，并且这个长度的平方由 Pythagoras 定理是这向量的分量平方和．其次观察在



R^3内由 $\boldsymbol{u}_1=(1, 1, 0)$和 $\boldsymbol{u}_2=(0, 0, 1)$ 所决定的 2 维图形．这是那个

图形的阴影部分．它在三个坐标平面的垂直投影(或影子)是：在$(1,3)$和$(2,3)$上的单位正方形以及在$(1,2)$上的一直线，这些从图中可以看到，这些影子的2维体积(面积)各为：1, 1和0；图形本身的面积是$1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$（因为它的一边是单位正方形的对角线)；并且$1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$．这就是，图形影子面积的平方和是这图形面积的平方．这个例子体现出一般的图式：有$\binom{k}{r}$个“坐标r-平面”，由R^k内r个向量所决定的r维平行多面体在它们上面投影，我们的结论是这些影子的r维体积是这个平行多面体的体积的“Pythagoras 分量”．

为了证明我们需要一些记号．设$[\boldsymbol{u}]=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r)$是$R^k$内所考虑的向量集合，这些向量的分量由上指标表出；设$(i)=(i_1,i_2,\cdots,i_r)$是一集指标，$1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant k$；设

$$M_r^{(i)}[\boldsymbol{u}]=\det((u_m^{i_n}))\tag{1}$$

$m=1,2,\cdots,r$且$i_n\in(i)$，是从$\boldsymbol{u}_i$的r-k矩阵选出$i_1,i_2,\cdots,i_r$行所得到的r-r子行列式；设

$$M_r[\boldsymbol{u}]=\{M_r^{(i)}[\boldsymbol{u}]\}\tag{2}$$

是$\binom{k}{r}$个子行列式(1)经编排好次序的序列；设

$$(M_r[\boldsymbol{u}],M_r[\boldsymbol{v}])=\sum_{(i)}M_r^{(i)}[\boldsymbol{u}]\cdot M_r^{(i)}[\boldsymbol{v}]\tag{3}$$

是在$\binom{k}{r}$-组空间的内积；最后，设$P[\boldsymbol{u}]$是由$\boldsymbol{u}_i$所决定的平行多面体，且$V_r[\boldsymbol{u}]$是它的r维体积．在这些术语下我们的结论是：

$$V_r[\boldsymbol{u}]=\|M_r[\boldsymbol{u}]\|\tag{4}$$

设A是一个直交k-k矩阵，我们可以把它作用于$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_r$，并且记所得的集合$A\boldsymbol{u}_1,A\boldsymbol{u}_2,\cdots,A\boldsymbol{u}_r$为$[A\boldsymbol{u}]$．这样有了一个子行列式的新序列$M_r[A\boldsymbol{u}]$．内积(3)在$A$的这个作用下是保持不变的，

$$(M_r[Au], M_r[Av]) = (M_r[u], M_r[v]) \tag{5}$$

这个表面上看来不错的事实我们今后只引用它而不加以证明.

我们用归纳法来证明(4). (4)对 $r=1$ 和 $r=2$ 是成立的. 设它对所有 $r \leqslant s < k$ 成立. 对已给 $s+1$ 个向量 $u_1, u_2, \cdots, u_s, w$, 用逐次直交化① 的运算我们可以把 w 表示为 $w=a+b$, 而 $b \in P(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 且 a 直交于 u_i, $i=1, 2, \cdots, s$. 我们可以假定 (并且这样假定) $u_1, u_2, \cdots, u_s$ 是线性无关的. 这样, b 是和它们相关的, 所以 $M_{s+1}^{(j)}(u_1, \cdots, u_s, b)=0$ 对每一 $(j)=(j_1, j_2, \cdots, j_{s+1})$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{s+1} \leqslant k$ 成立, 从此根据行列式的多重线性可知

$$M_{s+1}^{(j)}(u_1, u_2, \cdots, u_s, w) = M_{s+1}^{(j)}(u_1, u_2, \cdots, u_s, a) \tag{6}$$

由体积的意义对于它有相应的简化

$$V_{s+1}(u_1, \cdots, u_s, w) = V_{s+1}(u_1, \cdots, u_s, a). \tag{7}$$

因为 a 和 u_i, $i=1, 2, \cdots, s$ 直交, 我们有 $V_{s+1}(u_1, \cdots, u_s, a) = V_s(u_1, \cdots, u_s) \cdot \|a\|_k$, 而 $\|a\|_k$ 是 a 在 R^k 的长度. 从归纳法的假设现在有

$$V_{s+1}(u_1, \cdots, u_s, w) = \|M_s[u]\| \cdot \|a\|_k \tag{8}$$

设 A 是这样一个直交变换使得 $Aa=(\lambda, 0, 0, \cdots, 0)$, 而 $\lambda=\|a\|_k$. 那么因为 A 是直交的, Aa 是和 $Au_1, Au_2, \cdots, Au_s$ 直交的. 但由体积的意义应有 $V_{s+1}(u_1, u_2 \cdots, u_s, w) = V_{s+1}(Au_1, Au_2, \cdots, Au_s, Aw)$. 因为 Au_i, Aw 实际上和 u_i, w 有同样的一般性, 所以从(8)应有

$$V_{s+1}(Au_1, \cdots, Au_s, Aw) = \|M_s[Au]\| \cdot \|Aa\|_k \tag{9}$$

因为所有 Au_i 都有消失的第一个系数(利用它和 $Aa=(\lambda, 0, \cdots, 0)$ 的直交性), 由 Au_i 和 Aa 构成的$(s+1)$-k 矩阵的 (不消失的)子行列式是由 Au_i 的s-k 矩阵的(不消失的)子行列式乘以$\lambda=\|Aa\|_k$

①参看 Schreier-Sperner[5], *pp.* 140—141. 在目前的教科书上这种作法称为 Gram-Schmidt 方法.

所组成. 因此(9)的右边等于$\|M_{s+1}(Au_1, Au_2, \cdots, Au_s, Aa)\|$. 再利用不变性的关系式(5), 我们可以把$A$从最后的表达式中移去. 然后, 考虑到(6), 并且把我们的步骤回到(7), 便得出

$$V_{s+1}(u_1\cdots, u_s, w)=\|M_{s+1}(u_1, \cdots, u_s, w)\|$$

这就是所要建立的结论, 证毕.

2. 形式的代数学

形式的代数学是以2.3的公理(1), (5)和(6)为基础的. 这些公理各各肯定了楔积的反交换性, 关于S乘积的齐性, 和它关于形式加法的可分配性. 要证明这些公理的相容性只要指出它们在R^3的特殊情况下是相容的就可以了. 在5.1(6)我们已经指出如何把一个形式和向量场做成一一对应, 使得楔积和向量积互相对应. 因为向量积具有所说公理的对应性质, 所以这些公理是相容的.

3. 关于Curl² 的一个注意

在高阶微分(5.2)中只有Δ的幂Δ^n是把数量场带到数量场去的(5.2(7)). 这些可以按分量地使用到向量场去, 而产生新的微分把向量场带到向量场去. 这些新的微分因而可以和标准的向量微分Curl^k, $\mathrm{Grad}\Delta^i\mathrm{div}$ (5.2(7)) 组合起来. 这种组合的最低次是值得注意的:

$$\mathrm{Curl}^2 f=\mathrm{Grad}\mathrm{Div} f-\Delta f \tag{1}$$

证明是简单的: 为了实现运算的需要我们把f形式化; 然后把所得结果看作向量场; 而比较它们的分量. 对左边我们从$f=\Sigma a^i dx^i$开始. 则

$$\begin{gathered}\mathrm{Curl} f=\Sigma A^i dx_i\\ A^1=a_2^3-a_3^2,\quad A^2=a_3^1-a_1^3,\quad A^3=a_1^2-a_2^1\end{gathered} \tag{2}$$

且$\mathrm{Curl}^2 f$的第一场分量是

$$(\mathrm{Curl}^2 f)^1 = A_2^3 - A_3^2 \\ = a_{12}^2 - a_{22}^1 - a_{33}^1 + a_{13}^3 \tag{3}$$

对右边我们有

$$(\mathrm{GradDiv} f)^1 = a_{11}^1 + a_{21}^2 + a_{31}^3 \tag{4}$$

$$(\Delta f)^1 = a_{11}^1 + a_{22}^1 + a_{33}^1 \tag{5}$$

由于混合偏导数的相等性(4)减(5)的差是(3)，证毕.

参 考 书 目

[1] Courant, R. Differential and Integral Calculus, Interscience, New york, 1937.

[2] Fleming, W. Functions of Several Variables, 2nd ed., Springer Verlag, 1977.

[3] Nickerson, H. K., Spencer, D. C., and Steenrod, N. E. Advanced Calculus, Van Nostrand, 1959.

[4] Santalo, L. A. Introduction to Integral Geometry, Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago, Hermann et Cie., Paris, 1953.

[5] Schreier, O., and Sperner, E. Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory, Chelsea, New York, 1959.

[6] Spivak, M. Calculus on Manifolds, Benjamin, 1965.