吕林根, 许子道《解析几何》习题 4.4.5

叶卢庆*

2014 年 11 月 19 日

题目. 一直线分别交坐标面 yOz,zOx,xOy 于三点 A,B,C. 当直线变动时, 直线上的三定点 A,B,C 也分别在三个坐标面上变动, 另外直线上有第四个点 P, 它与 A,B,C 三点的距离分别为 a,b,c, 当直线按照这样的规定变动时, 试求 P 点的轨迹.

解. 设直线的方程为

$$\frac{x-q_1}{t_1}=\frac{y-q_2}{t_2}=\frac{z-q_3}{t_3},$$

其中 q_1,q_2,q_3,t_1,t_2,t_3 都是参数, 且 t_1,t_2,t_3 为直线的一个方向余弦. 令 $x=0$, 可得

$$A:(0,q_2-\frac{q_1}{t_1}t_2,q_3-\frac{q_1}{t_1}t_3).$$

令 $y=0$, 可得

$$B:(q_1-\frac{q_2}{t_2}t_1,0,q_3-\frac{q_2}{t_2}t_3).$$

令 $z=0$, 可得

$$C:(q_1-\frac{q_3}{t_3}t_1,q_2-\frac{q_3}{t_3}t_2,0).$$

现在, 设 P 的坐标为 (x_p,y_p,z_p). 则由题目条件可得

$$\begin{cases}(\frac{x_p}{t_1},\frac{y_p}{t_2},\frac{z_p}{t_3})=(0,\frac{q_2}{t_2}-\frac{q_1}{t_1},\frac{q_3}{t_3}-\frac{q_1}{t_1})\pm a(1,1,1),\\(\frac{x_p}{t_1},\frac{y_p}{t_2},\frac{z_p}{t_3})=(\frac{q_1}{t_1}-\frac{q_2}{t_2},0,\frac{q_3}{t_3}-\frac{q_2}{t_2})\pm b(1,1,1),\\(\frac{x_p}{t_1},\frac{y_p}{t_2},\frac{z_p}{t_3})=(\frac{q_1}{t_1}-\frac{q_3}{t_3},\frac{q_2}{t_2}-\frac{q_3}{t_3},0)\pm c(1,1,1).\end{cases}$$

可见,

$$\frac{x_p}{t_1}=\pm a,\frac{y_p}{t_2}=\pm b,\frac{z_p}{t_3}=\pm c,$$

可见,

$$\frac{x_p^2}{a^2}+\frac{y_p^2}{b^2}+\frac{z_p^2}{c^2}=t_1^2+t_2^2+t_3^2=1.$$

可见, 点 P 的轨迹为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. □

评论. 此题中,“定点”这个条件是不必要的.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com