吕林根, 许子道《解析几何》习题 3.2.10

叶卢庆*

2014 年 11 月 11 日

题目. 试求由平面 $\pi_1: 2x-y+2z-3=0$ 与 $\pi_2: 3x+2y-6z-1=0$ 所构成的二面角的角平分面的方程, 在此二面角内有点 $M(1,2,-3)$.

证明. 设欲求的角平分面上有点 (x,y,z), 则 (x,y,z) 到平面 π_1,π_2 的距离相等, 即

$$\frac{|2x-y+2z-3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|3x+2y-6z-1|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}},$$

于是或者有

$$\frac{2x-y+2z-3}{3}=\frac{3x+2y-6z-1}{7} \iff 5x-13y+32z-18=0. \tag{1}$$

或者有

$$-\frac{2x-y+2z-3}{3}=\frac{3x+2y-6z-1}{7} \iff 23x-y-4z-24=0. \tag{2}$$

根据题意, 欲求的平面上存在点, 该点与 M 在同一个二面角内. 而我们知道,

$$2\times 1-2+2\times(-3)-3<0, 3\times 1+2\times 2-6\times(-3)-1>0,$$

可见, 欲求的平面方程只可能是(2). □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com