论向量法解几何问题的基本思路(续)

张景中[1,2]　彭翕成[1]

(1 武汉　华中师范大学教育信息技术工程研究中心　430079
2 广州　广州大学教育软件研究所　510006)

例 15　如图 15,设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点. 过 O 作平行于 BC 的直线,与 AB 和 AC 分别交于 J 和 P. 过 P 作直线 PE 平行于 AB,与 BO 的延长线交于 E. 求证:$CE \parallel AO$.

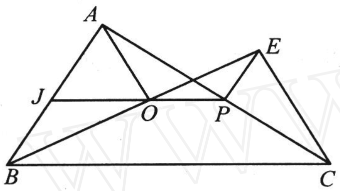

图 15

思路　设定有关的比例参数后,利用回路 POE 与 JBO 求出 PE 和 BJ 的比值.

证明 1　设 $\overrightarrow{PC} = u\overrightarrow{AP}$,显然 $\overrightarrow{BJ} = u\overrightarrow{JA}$,再设 $\overrightarrow{PO} = v\overrightarrow{OJ}$,则:

$$\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{PO} = v\overrightarrow{OJ} = v(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BJ})$$

由平面向量基本定理得 $\overrightarrow{PE} = v\overrightarrow{BJ} = uv\overrightarrow{JA}$,于是

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PE} = u\overrightarrow{PA} + uv\overrightarrow{JA} = u(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) + uv(\overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OA}) = uv(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JO}) + u(1 + v)\overrightarrow{OA} = u(1 + v)\overrightarrow{OA}$,

这证明了 $CE \parallel AO$.

证明 2　设 $\overrightarrow{BO} = n\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{BA} = m\overrightarrow{BJ}$,则 $\overrightarrow{CA} = m\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CP} = (m-1)\overrightarrow{CP}$.

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = n\overrightarrow{EO} + m\overrightarrow{BJ} = n\overrightarrow{EP} + n\overrightarrow{PO} + mn\overrightarrow{PE} = (m-1)n\overrightarrow{PE} + n(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{OA}) = (m-1)n\overrightarrow{PE} + (m-1)n\overrightarrow{CP} - n\overrightarrow{OA} = (m-1)n\overrightarrow{CE} - n\overrightarrow{OA}$,即 $(m-1)n\overrightarrow{CE} = (1+n)\overrightarrow{OA}$.

所以 $CE \parallel AO$.

例 16　如图 16,设四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 和 DC 的延长线交于点 E,另一组对边 AD 和 BC 的延长线交于点 F,则 AC 的中点 L, BD 的中点 M, EF 的中点 N 三点共线(此线称为高斯线).

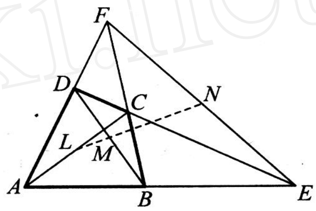

图 16

证明 1　设 $\overrightarrow{AB} = u\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD} = v\overrightarrow{AF}$,用回路 DCF, BCE 和 $DCBA$ 来确定点 C 的分比:

由 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF} = (1-v)\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE} = (1-u)\overrightarrow{AE}$,

得:$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = v\overrightarrow{FA} + u\overrightarrow{AE} = \dfrac{u}{1-u}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}) - \dfrac{v}{1-v}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF})$

整理后得到:$(1-u)\overrightarrow{DC} + (1-v)\overrightarrow{CB} = u(1-v)\overrightarrow{CE} + v(1-u)\overrightarrow{FC}$,

由平面向量基本定理得

$$(1-u)\overrightarrow{DC} = u(1-v)\overrightarrow{CE} \qquad (1)$$

对 3 个中点顺次用定比分点公式(或中点消去公式),再利用回路 $AFCE$ 和 $ABCD$ 得:

$$4\overrightarrow{LN} = 2(\overrightarrow{LF} + \overrightarrow{LE}) = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} = 2(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE}) \qquad (2)$$

$$4\overrightarrow{LM} = 2(\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{LB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \qquad (3)$$

由原设得:$\overrightarrow{AB} = u\overrightarrow{AE} = u(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) = u(v\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE})$　(4)

结合(4)和(1)得:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=uv\overrightarrow{AF}+(1-u)\overrightarrow{CD}+u\overrightarrow{CE}=uv\overrightarrow{AF}+u(1-v)\overrightarrow{EC}+u\overrightarrow{CE}=uv(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE})$ (5)

由(5)(2)(3)得 $\overrightarrow{LM}=uv\overrightarrow{LN}$,这证明了 L, M, N 共线.

证明 2 设 $\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AE}=n\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AF}$,则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DA}+n\overrightarrow{BE}=n\overrightarrow{BE}-k\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}-m(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})=(mn-m+1)\overrightarrow{BE}-m\overrightarrow{AF}$. 由 $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{CE}$ 共线,得 $k(mn-m+1)=mn$. 又

$$\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{BL}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}k(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(m-k)\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}k(1-n)\overrightarrow{BE}.$$

$\overrightarrow{LN}=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{BF}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{BE}$,因为 $k(mn-m+1)=mn$,所以 $\frac{1-m}{m-k}=\frac{n}{k(1-n)}$. 故 $\overrightarrow{ML}\parallel\overrightarrow{LN}$,又因为 L 为公共点,所以 L、M、N 三点共线.

4 内积及其它基本性质的应用

用回路法配合平面向量基本定理能够解决的问题,属于仿射几何的范围,所涉及的几何量,限于平行或共线的线段之比. 若问题涉及垂直及角度的大小,或涉及不平行的线段的比值,则属于度量几何范围,一般要用到向量的内积和绝对值才能解决.

向量的内积常常用来证明两线垂直,这是大家熟悉的用法.

内积的另一种用法,是用某个向量 $\mathbf{a}$ 点乘一个向量等式的两端,把和 $\mathbf{a}$ 垂直的向量消去,达到简化等式的目的. 例如,用垂直于 $\overrightarrow{BC}$ 的向量 $\mathbf{a}$ 点乘等式 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 的两端,立刻得到等式 $\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AC}$;这种手法在解决较复杂的几何问题时常常用到.

在例 16 证明 1 中,为了确定点 C 的分比,要用到 3 个回路等式. 如果用内积,就可以一气呵成. 如图 16,设 $\mathbf{a}$ 是 BF 的法向量,则:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CE}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{DC}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{CE}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{DF}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{BE}}=\frac{\mathbf{a}\cdot((1-v)\overrightarrow{AF})}{\mathbf{a}\cdot\left(\frac{1-u}{u}\overrightarrow{AB}\right)}=\frac{u(1-v)}{1-u}\cdot\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AF}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AB}}=\frac{u(1-v)}{1-u}$$

这就简捷地得到了(1).

例 17 如图 17,设点 O 在 $\triangle ABC$ 内部,且有 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,求 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AOC$ 面积之比(2004 年希望杯竞赛训练题).

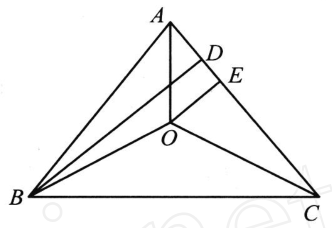

图 17

解 设 $\mathbf{e}$ 为 AC 的单位法向量,作 $BD\perp AC$, $OE\perp AC$,

$$BD=\overrightarrow{AB}\cdot\mathbf{e}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot\mathbf{e}=\left(\overrightarrow{AO}+\frac{\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{CO}}{2}\right)\cdot\mathbf{e}=OE+\frac{OE+3OE}{2}=3OE.$$

所以 $\triangle ABC$ 面积是 $\triangle AOC$ 面积的 3 倍.

例 18 如图 18,正三角形 ABC 中,D、E 分别是 AB、BC 上的一个三等分点,且 AE、CD 交于点 P,求证 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{DC}$.

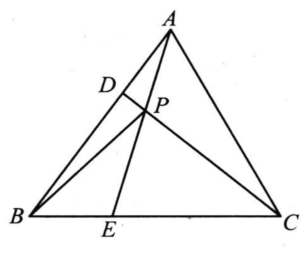

图 18

证明 设正三角形边长为 a, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD})-\frac{3}{2}(\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PE})$,

即有 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AP}-\frac{3}{2}\overrightarrow{PE}$,即 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AE}$.

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{3}{7}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right),$$

$$=\frac{1}{21}(\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AB})\cdot(2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC})=$$

$\frac{1}{21}(2a^2\cos120°+3a^2-8a^2-12a^2\cos120°)=0.$

例 19　如图 19,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 是 BC 的中点,E 是从 D 作 AC 的垂线的垂足,F 是 DE 的中点. 证明:$\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BE}$.(1962 年全俄数学竞赛题)

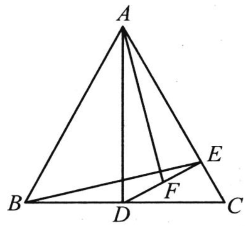

图 19

证明　$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD})$

$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CE}))$

$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{ED}\times\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AE}\times\overrightarrow{CE})=0$,所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BE}$.

例 20　如图 20,设直线 l 与 $\triangle ABC$ 的边 AB 成 α 角,问 $\triangle ABC$ 的各角与边及 α 之间有何关系?

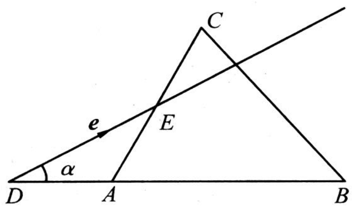

图 20

解　设 e 是 l 上的一个单位向量. 因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$,故 $\overrightarrow{AB}\cdot e+\overrightarrow{BC}\cdot e+\overrightarrow{CA}\cdot e=0$,

即 $c\cos\alpha+a\cos(\pi-\alpha-B)+b\cos(\pi-A+\alpha)=0$,化简得

$a\cos(\alpha+B)+b\cos(A-\alpha)=c\cos\alpha$. 当 $\alpha=0$ 时,$a\cos B+b\cos A=c$,此即射影定理;当 $\alpha=90°$ 时,$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,此即正弦定理.

例 21　如图 21,分别以 $\triangle ABC$ 的两边 AB,AC 向外作两个正方形,AH 为 BC 边上的高,延长 HA 交 DG 于 I,求证 $DI=IG$. 反之,若点 I 为 DG 中点,延长 IA 交 BC 于 H,求证 $AH\perp BC$.[12]

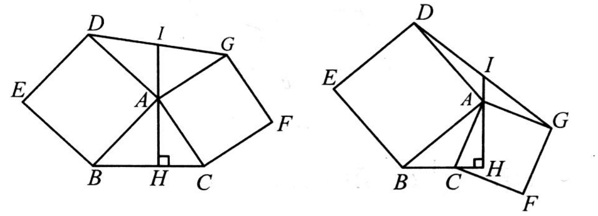

图 21

证明　若 $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BC}$,则 $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,而 $(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BA}=0$,所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AI}$;又由于 $\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AG}$、$\overrightarrow{AI}$ 共起点,且 D,G,I 三点共线,所以 $t=2$,即 $DI=IG$.

若 $DI=IG$,则 $2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BA}=0$,所以 $AH\perp BC$.

例 22　如图 22,设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心,D 是 AB 的中点,E 是 $\triangle ACD$ 的重心,且 $AB=AC$. 证明:$OE\perp CD$.(1983 年英国奥林匹克试题)[10]

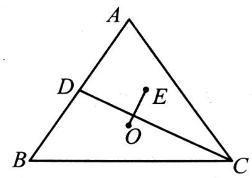

图 22

证明　已知 $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})$,则

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OC}^2\right)+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)=0.$

例 23　如图 23,求证四边形中,两组对边中点的距离之和不大于四边形的半周长,当且仅当四边形是平行四边形时等号成立.(1973 年南斯拉夫奥林匹克试题)[10]

证明　由 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$(例 4 结论)得 $|\overrightarrow{EF}|=\left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})\right|\le\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|)$,同

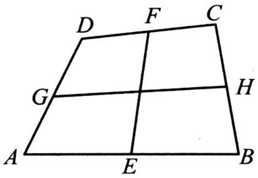

图 23

理 $|\overrightarrow{GH}| \le \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)$，故 $|\overrightarrow{GH}|+|\overrightarrow{EF}| \le \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|+|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{BC}|)$. 当且仅当 $AB /\!/ CD, AD /\!/ BC$ 时等号成立.

例 24 如图 24, AD 与 CE 交于点 F, 若 BF 的延长线交 AC 于 G, 求证: $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$ (塞瓦定理)

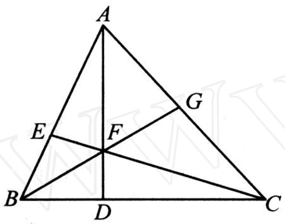

图 24

证明 设 $\overrightarrow{AE}=u\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BD}=v\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CG}=w\overrightarrow{GA}$, 则有

方法 1 设 $\mathbf{a}$ 是 AD 的法向量, 则:

$$\frac{CF}{FE}=\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{CF}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{FE}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{CD}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AE}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\left(\frac{1}{v}\overrightarrow{DB}\right)}{\mathbf{a}\cdot\left(\frac{u}{1+u}\overrightarrow{AB}\right)}=\frac{1+u}{uv}\cdot\frac{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{DB}}{\mathbf{a}\cdot\overrightarrow{AB}}=\frac{1+u}{uv};$$

再设 $\mathbf{b}$ 是 BF 的法向量, 则:

$$w=\frac{CG}{GA}=\frac{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{CG}}{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{GA}}=\frac{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{CF}}{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{FA}}=\frac{1+u}{uv}\cdot\frac{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{BE}}{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{FA}}$$

$$=\frac{1+u}{uv}\cdot\frac{\mathbf{b}\cdot\left(\frac{1}{1+u}\overrightarrow{BA}\right)}{\mathbf{b}\cdot\overrightarrow{FA}}=\frac{1}{uv},$$ 即所欲证.

方法 2

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=(1+w)\overrightarrow{AG}+\frac{1+v}{v}\overrightarrow{DB}$$

$$=(1+w)(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})+\frac{1+v}{v}(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FB}),$$

整理得: $\overrightarrow{AF}=\frac{1+v}{wv}\overrightarrow{FD}$.

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\frac{(1+u)}{u}\overrightarrow{AE}+(1+v)\overrightarrow{DC}=\frac{(1+u)}{u}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE})+(1+v)(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}),$$

整理得: $\overrightarrow{AF}=u(1+v)\overrightarrow{FD}$. 综合两式可得: $uvw=1$, 证毕.

著名的帕普斯定理的构图中, 涉及 3 对线段的交点. 文[13]中用颇大的篇幅, 借助于坐标法实现了此定理的向量法证明. 下面利用内积提供一个简捷的证明. 利用这里的方法解决前面的例 14, 也较为方便.

例 25 如图 25, 设两直线相交于点 O, A、B、C 三点共线, X、Y、Z 三点共线. 点 P 是 AY 和 BX 的交点, 点 Q 是 AZ 和 CX 的交点, 点 R 是 BZ 和 CY 的交点. 求证: P、Q、R 三点共线. (帕普斯定理)

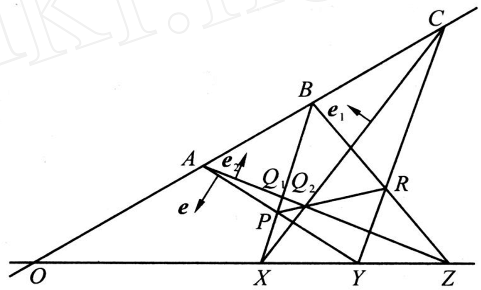

图 25

证明 设 $OX:OY:OZ=x:y:z$, $OA:OB:OC=a:b:c$, $\mathbf{e}\perp AY$, 则

$$\frac{XP}{XB}=\frac{\overrightarrow{XP}\cdot\mathbf{e}}{\overrightarrow{XB}\cdot\mathbf{e}}=\frac{\overrightarrow{XY}\cdot\mathbf{e}}{(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OB})\cdot\mathbf{e}}=\frac{\overrightarrow{XY}\cdot\mathbf{e}}{\left(\overrightarrow{XO}+\frac{b\overrightarrow{OA}}{a}\right)\cdot\mathbf{e}}=\frac{a(y-x)}{by-ax}.$$

同理 $\frac{CR}{CY}=\frac{z(c-b)}{cz-by}$, $\frac{ZR}{ZB}=\frac{c(z-y)}{cz-by}$, $\frac{AP}{AY}=\frac{x(b-a)}{by-ax}$.

设 CX, PR 交于点 Q_1, AZ, PR 交于点 Q_2, 只需证 $\frac{PQ_1}{Q_1R}\cdot\frac{Q_2R}{PQ_2}=1$. 设 $\mathbf{e}_1\perp XC$, $\mathbf{e}_2\perp AZ$, 则 $\frac{PQ_1}{Q_1R}\cdot$

$$\frac{Q_2R}{PQ_2}=\frac{\overrightarrow{PQ_1}\cdot\mathbf{e}_1}{\overrightarrow{Q_1R}\cdot\mathbf{e}_1}\frac{\overrightarrow{Q_2R}\cdot\mathbf{e}_2}{\overrightarrow{PQ_2}\cdot\mathbf{e}_2}=\frac{\overrightarrow{PX}\cdot\mathbf{e}_1}{\overrightarrow{CR}\cdot\mathbf{e}_1}\frac{\overrightarrow{ZR}\cdot\mathbf{e}_2}{\overrightarrow{PA}\cdot\mathbf{e}_2}=\left(\frac{ac(y-x)(z-y)}{xz(c-b)(b-a)}\right)\frac{\overrightarrow{BX}\cdot\mathbf{e}_1}{\overrightarrow{CY}\cdot\mathbf{e}_1}\frac{\overrightarrow{ZB}\cdot\mathbf{e}_2}{\overrightarrow{YA}\cdot\mathbf{e}_2}$$

$$= \left(\frac{ac(y-x)(z-y)}{xz(c-b)(b-a)}\right)\frac{\overrightarrow{BC}\cdot e_1}{CY\cdot e_1}\,\frac{\overrightarrow{AB}\cdot e_2}{YA\cdot e_2} =$$

$$\left(\frac{ac(y-x)(z-y)}{xz(c-b)(b-a)}\right)\left(\frac{c-b}{c}\right)\left(\frac{x}{y-x}\right)\left(\frac{b-a}{a}\right)\left(\frac{z}{z-y}\right) =$$

1 最后一行是因为 $\overrightarrow{BC}=\frac{(c-b)\overrightarrow{OC}}{c}$, $\overrightarrow{XY}=\frac{(y-x)\overrightarrow{OX}}{x}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{(b-a)\overrightarrow{OA}}{a}$, $\overrightarrow{YZ}=\frac{(z-y)\overrightarrow{OZ}}{z}$,以及 $\overrightarrow{OC}\cdot e_1=\overrightarrow{OX}\cdot e_1$, $\overrightarrow{OA}\cdot e_2=\overrightarrow{OZ}\cdot e_2$.

5　向量法解立体几何题

用向量法解立体几何问题,也比较简单.选择适当的回路,再使用内积,常常能够奏效.近年教材和杂志上用向量法求解,常要建立空间直角坐标系,然后根据已知条件求出相关点的坐标,再作计算.计算虽然不准,但较为繁琐,书写也费事.直接用向量运算求解,不但简捷,也有助于提高学生的数学素养.

例 26　如图 26,在边长为 1 的立方体中,连接 $B'D$ 于平面 ACD' 交于点 P,求 DP.[2,续3]

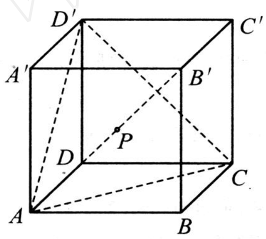

图 26

证明　因为 $\overrightarrow{DB'}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=0$,则 $DB'\perp AC$;同理 $DB'\perp AD'$;所以 $B'D\perp$ 平面 ACD'. $\frac{B'P}{PD}=\frac{\overrightarrow{B'A}\cdot\overrightarrow{B'D}}{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B'D}}=\frac{(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})}{\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})}=2$,所以 $DP=\frac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 27　如图 27,在正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,点 M,N,P 分别是棱 AB, CC', DD' 的中点,点 Q 是线段 AN 上的点,且 $AQ=\frac{1}{3}AN$.求证:P,Q,M 三点共线.[14]

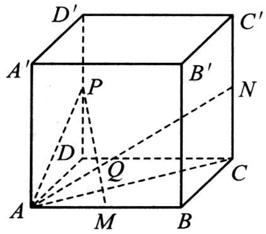

图 27

证明

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{AM}=3(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AM})=3\overrightarrow{QM}$

例 28　如图 28,已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中,点 M,N 分别是棱 BB' 和对角线 CA' 的中点.求证:$MN\perp BB'$.[15]

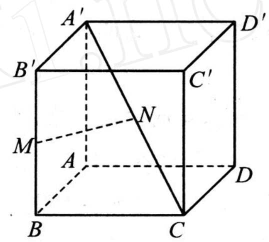

图 28

证明　$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BB'}=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})\cdot\overrightarrow{BB'}$

$=\left(\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{D'A'})\right)\cdot\overrightarrow{BB'}=$

$\left(\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD'}\right)\cdot\overrightarrow{BB'}=0$,

所以 $MN\perp BB'$.

用向量法解题,有时可将同一证明从平面搬到立体中去,文[1]中就列举了这样的例子.下面这个例子也是如此.

例 29　如图 29,平行四边形两对角线的平方和等于四条边的平方和.[16]

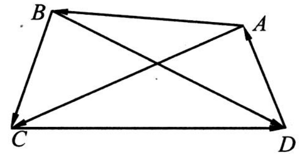

图 29

证明　设 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{BC}=b$, $\overrightarrow{CD}=c$, $\overrightarrow{DA}=d$,由 $a+b+c+d=\mathbf{0}$ 得 $a+c=-(b+d)$.

所以 $0\le(a+c)^2=-(a+c)(b+d)=-(a\cdot$

$b + a \cdot d + c \cdot b + c \cdot d)$

$$= \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - (a + b)^2 + a^2 + d^2 - (a + d)^2 + c^2 + b^2 - (c + b)^2 + c^2 + d^2 - (c + d)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[a^2 + b^2 - \overrightarrow{AC}^2 + a^2 + d^2 - \overrightarrow{BD}^2 + c^2 + b^2 - \overrightarrow{BD}^2 + c^2 + d^2 - \overrightarrow{AC}^2]$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \overrightarrow{BD}^2 - \overrightarrow{AC}^2.$$

结论:(1) 若四边的平方和等于对角线的平方和,则 $a + c = \mathbf{0}$,即 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,可得四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

(2) 任意四边形中,四边的平方和不小于对角线的平方和;

(3) 由于证明过程没有用到四点共面这一性质,那么结论(2) 对于空间四面体仍然适用.

6 小结

注意数形结合,灵活选择回路,利用共线线段成比例性质和平面向量基本定理,有必要时辅以向量的内积,这就是用向量方法解几何题的基本思路.

其中"回路"的选择是关键,也包含了技巧. 从本质上看,选择回路就是列向量方程的一种手段. 向量的"回路方程"常常比用坐标法列出的方程简单而容易求解,体现出数学的简洁之美.

就是这个直观而又简单的"回路",常常关系到问题解决的成败,但只要你在解题的过程中经常想到要利用"回路",那么适当的回路就不难找到,问题的解决就会变得简捷明快.

向量法解平面几何的困难,常常涉及两条线段的交点. 从交点处着眼分拆向量,分别构造回路,是常用的方法. 接着就是利用条件,将回路中某些"多余"的项消去,留下我们所关心的两组分别共线的向量,使平面向量基本定理有用武之地,问题就迎刃而解了.

还有一个细节要注意:不要轻易把向量用一个字母表示(如 $\overrightarrow{AB} = c$). 这样表示不容易看出回路,也不便检查回路等式是否有错. 在确定不用回路法时,才用简化表示.

用向量法解平面几何中的可构图问题(可以用尺规作图实现问题中的图形),可以建立生成可读证明的机械化算法. 此事说来话长,不继续罗唆了.

参考文献

1 李尚志. 中学数学中的向量方法(2 期连载). 数学通报,2007,2 月 - 3 月
2 齐民友. 中学数学教学中的向量(4 期连载). 数学通报,2007,4 月 - 7 月
3 严士健主编,张惠英等编著. 向量及其应用. 北京:高等教育出版社,2005
4 杨忠. 立足课本 学好平面向量课例. 数学教学,2007,7
5 人民教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书(必修数学 4)(B 版). 北京:人民教育出版社,2004,9
6 人民教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书(必修数学 4)(A 版). 北京:人民教育出版社,2004,5
7 张定强. 向量方法在研究几何问题中的作用探析. 数学通报,2004,9
8 段刚山. 也谈用向量法证明三角形中线交于一点等问题. 数学通报,2006,3
9 湖北教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书(必修数学 4). 武汉:湖北教育出版社,2004,5
10 岑爱国,李彩虹. 向量与几何. 数学通讯. 2006,10
11 饶雨. 向量及其运算. 数学通讯,2006,10
12 李印权."一个几何命题的推广"的向量证法. 数学通讯,2007,13
13 宣满友,范建琴. 巴卜斯定理的向量证法与六点共线问题. 数学通报,2003,3
14 湖北教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书(选修 2 - 1). 武汉:湖北教育出版社,2007,1
15 人民教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书(选修 2 - 1). 北京:人民教育出版社,2005,6
16 杨亢尔. 一个平行四边形判定定理的简证. 数学通报,2007,6

(续完)