# 习题 3.4.15

叶卢庆*

2014 年 12 月 29 日

**题目.** 设三条直线 $l_1, l_2, l_3$ 两两异面, 且平行于同一平面, 证明: 与 $l_1, l_2, l_3$ 都相交的直线组成的曲面是马鞍面.

**证明**. 设直线 $l_1$ 的方程是
$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0},$$
直线 $l_2$ 的方程是
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{1}=\frac{z-p}{0},$$
其中 $a\neq 1$. 直线 $l_3$ 的方程是
$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{1}=\frac{z-p'}{0},$$
设与 $l_1, l_2, l_3$ 都相交的直线方程为
$$\frac{x-q_1}{t_1}=\frac{y-q_2}{t_2}=\frac{z-q_3}{t_3},$$
则我们有
$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3\\ 1 & 0 & 0\\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}=0,$$
即
$$q_2t_3=q_3t_2. \tag{1}$$
$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3-p\\ a & 1 & 0\\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}=0,$$
结合方程(1), 即
$$t_1q_3-t_1p+at_2p-q_1t_3=0. \iff t_1q_3-q_1t_3=t_1p-at_2p. \tag{2}$$
$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 & q_3-p'\\ a' & 1 & 0\\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}=0.$$
结合方程(1), 即
$$t_1q_3-t_1p'+a't_2p'-q_1t_3=0. \iff t_1q_3-q_1t_3=t_1p'-a't_2p'. \tag{3}$$
由方程(2)和方程(3)可得
$$t_1=\frac{at_2p-a't_2p'}{p-p'}. \tag{4}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

将方程(4)代入方程(2), 可得

$$q_3\frac{at_2p-a't_2p'}{p-p'}-q_1t_3=p\frac{at_2p-a't_2p'}{p-p'}-at_2p. \tag{5}$$

将方程(5)两边同时乘以 $q_3$, 可得

$$q_3^2\frac{at_2p-a't_2p'}{p-p'}-q_1q_3t_3=p\frac{at_2q_3p-a't_2q_3p'}{p-p'}-at_2q_3p. \tag{6}$$

将方程(1)代入方程(6), 可得

$$q_3q_2\frac{apt_3-a'p't_3}{p-p'}-q_1q_3t_3=p\frac{aq_2t_3p-a'q_2t_3p'}{p-p'}-aq_2t_3p. \tag{7}$$

当 $t_3\neq 0$ 时, 在方程(7)两边同时除以 $t_3$, 可得

$$q_3q_2\frac{ap-a'p'}{p-p'}-q_1q_3=p\frac{aq_2p-a'q_2p'}{p-p'}-aq_2p. \tag{8}$$

令 $\frac{ap-a'p'}{p-p'}=-m, ap=n, mp-n=r$, 则方程(8)即

$$q_1q_3+mq_2q_3+rq_2=0. \tag{9}$$

这是个双曲抛物面 (具体证明放在以后). $\square$