

# 有轴平面束的方程

叶卢庆\*

2014 年 11 月 12 日

我们来证明如下的定理, 来自吕林根, 许子道编的《解析几何》第四版定理 3.8.2.

**定理.** 如果两个平面

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (1)$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2)$$

交于一条直线  $L$ , 那么以直线  $L$  为轴的有轴平面束的方程是

$$l(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (3)$$

其中  $l, m$  是不全为零的任意实数.

**证明.** 首先, 容易证明方程(3)代表的平面都经过直线  $L$ , 关键是证明, 任意经过直线  $L$  的平面都可以写成方程(3)的形式. 这是很简单的事实, 因为平面(3)的法向量是

$$l(A_1, B_1, C_1) + m(A_2, B_2, C_2),$$

这是平面(1)的法向量和平面(2)的法向量的线性组合, 当  $l, m$  遍历实数时, 向量  $l(A_1, B_1, C_1) + m(A_2, B_2, C_2)$  能取遍跟直线  $L$  垂直的所有方向, 这就表明了所有经过直线  $L$  的平面都能写成方程(3)的形式.  $\square$

---

\*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: yeluqingmathematics@gmail.com