

初等阵对单位正方形的作用

叶卢庆

杭州师范大学理学院, 学号:1002011005

Email:h5411167@gmail.com

2013. 12. 6

在这篇文章里, 我们研究 $n \times n$ 的初等矩阵 P 对 n 维单位正方形的作用. 这里的初等阵 P 代表的是矩阵的初等行变换, 且不包括将某一行乘以一个非零数这种操作. 我们希望证明, n 维单位正方形在 P 所代表的线性映射的作用下, 体积不变.

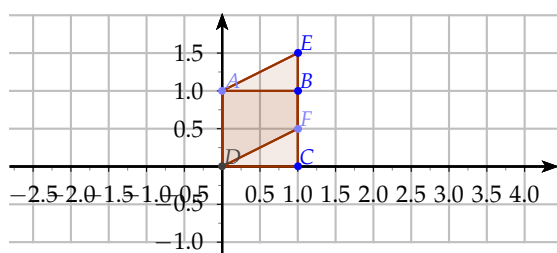
为此我们先考虑 $n = 2$ 的特殊情形. 此时, 不妨设单位正方形为 $[0, 1] \times [0, 1]$. 在此时, 若 P 代表的操作是行交换, 则 \mathbf{R}^2 中的点 (x, y) 在 P 的作用下会变成 (y, x) . 因此单位正方形在 P 的作用下连位置都没发生变动, 更不必说面积了. 若 P 代表的操作是某一行乘以一个非零常数后加到另一行上, 不妨设是第一行乘以 λ 后加到第二行上, 则 P 对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

点 (x, y) 在 P 的作用下变为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}.$$

这个时候, $[0, 1] \times [0, 1]$ 会如何变化呢? 我们画图. 作为 $\lambda = \frac{1}{2}$ 的特例, 我们发现正方形 $ABCD$ 会成为平行四边形 $AEFD$. 显然, 此时面积并不发生变化.



现在我们探索一般情形. 在一般情形, 当 $n \times n$ 矩阵 P 对应的操作是第 i 行和第 j 行互换之时, 显然 P 会把一个单位正方形变成同一个单位正方形, 此时显然面积不变. 当 P 对应的操作是第 i 行乘以一个非零常数 λ 加到第 j 行上时, \mathbf{R}^n 中的点 $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$ 在 P 的作用下变成 $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, \lambda x_i + x_j, \dots, x_n)$. 此时, 我们发现, 单位正方形在 P 的作用下形成的几何体在任何一个维度上的宽度并没发生变化, 因此其体积仍然等于单位正方形体积.