吕林根, 许子道《解析几何》习题 3.2.7

叶卢庆*

2014 年 11 月 10 日

题目. 设平面 π 为 $Ax+By+Cz+D=0$, 它与联结两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线相交于点 M, 且 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$, 求证

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

证明. λ 之值, 即为 M_1 到平面的距离与 M_2 到平面的距离之比, 即位 M_1 与平面的离差与 M_2 与平面的离差之比的相反数. 我们先把平面的一般方程化为法式方程, 为

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

于是点 M_1 和平面的离差为

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x_1\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y_1\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z_1\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

同理点 M_2 和平面的离差为

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x_2\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y_2\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z_2\pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

两个离差相除, 并取相反数, 可得

$$\lambda=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

□

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com