习题 4.4.6

叶卢庆*

2015 年 1 月 6 日

题目. 已知椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(c<a<b)$, 试求过 x 轴并与曲面的交线是圆的平面.

解. 设平面的方程为
$$z=py.$$
则要使得平面与椭球面的交线是圆, 必须使 $p\neq 0$. 将平面方程代入椭球面方程, 可得曲线的方程为
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=py\end{cases}.$$
即
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+(\frac{1}{b^2}+\frac{p^2}{c^2})y^2=1,\\ z=py.\end{cases}\tag{1}$$
在 XOY 平面上,
$$\frac{x^2}{a^2}+(\frac{1}{b^2}+\frac{p^2}{c^2})y^2=1$$
的两条半轴长度分别为
$$a,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}}}.$$
两条半轴依次投影到 $z=py$ 平面上, 得到的线段的长度依次为
$$|p|a,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}}}.$$
令
$$|p|a=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}}},$$
即
$$\frac{1}{c^2}p^4+\frac{1}{b^2}p^2-\frac{1}{a^2}=0.$$
解得
$$p^2=\frac{-\frac{1}{b^2}+\sqrt{\frac{1}{b^4}+\frac{4}{c^2a^2}}}{\frac{2}{c^2}}=\frac{-\frac{c^2}{b^2}+\sqrt{\frac{c^4}{b^4}+\frac{4c^2}{a^2}}}{2}$$
于是可以轻易地得到 p 的两个解. 这样我们就确定了平面, 使得曲线 (1)是一个圆. □

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com