楔积与向量积

叶卢庆*

2015 年 1 月 17 日

设 $\langle\omega\rangle = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$,$\langle\nu\rangle = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, 则

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle\times\langle\nu\rangle &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\ &= (a_2b_3-b_2a_3)\mathbf{i}+(b_1a_3-a_1b_3)\mathbf{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

我们还知道, 设 $\omega = a_1dx+a_2dy+a_3dz$,$\nu = b_1dx+b_2dy+b_3dz$, 则

$$\omega\wedge\nu = (a_1b_2-a_2b_1)dx\wedge dy+(a_2b_3-a_3b_2)dy\wedge dz+(a_3b_1-a_1b_3)dz\wedge dx.$$

可见, 在映射 $T(dx\wedge dy)=\mathbf{k}$,$T(dy\wedge dz)=\mathbf{i}$,$T(dz\wedge dx)=\mathbf{j}$ 下, 楔积和向量积之间建立了同构的关系. 且

$$T(\omega\wedge v) = \langle\omega\rangle\times\langle\nu\rangle. \tag{1}$$

根据 Lagrange 恒等式,

$$\begin{aligned}\omega\wedge\nu(V_1,V_2) &= \begin{vmatrix}\omega(V_1) & \nu(V_1)\\ \omega(V_2) & \nu(V_2)\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\langle\omega\rangle\cdot V_1 & \langle\nu\rangle\cdot V_1\\ \langle\omega\rangle\cdot V_2 & \langle\nu\rangle\cdot V_2\end{vmatrix}\\ &= (V_1\times V_2)\cdot(\langle\omega\rangle\times\langle\nu\rangle),\end{aligned}$$

可见,$\omega\wedge\nu(V_1,V_2)$ 的几何意义, 就是以向量 V_1,V_2 为邻边的有向平行四边形, 投影到 $\langle\omega\rangle,\langle\nu\rangle$ 展成的平面上所得的平行四边形的有向面积, 再乘以以 $\langle\omega\rangle$,$\langle\nu\rangle$ 为邻边的平行四边形的有向面积. 相当于两个有向平行四边形之间进行的“内积”.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com