# 离散 Fourier 变换将正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点变成三角形的三个顶点

叶卢庆 *

2014 年 2 月 14 日

我们来看复平面上的 $n(n \geq 3)$ 个点 $Z_0, \cdots, Z_{n-1}$, 它们对应的复数分别为 $z_0, \cdots, z_{n-1}$. 点 $Z_0, \cdots, Z_{n-1}$ 按照逆时针方向排列, 且 $Z_0, \cdots, Z_{n-1}$ 是一个正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点. 设点 $P$ 是 $n$ 边形 $Z_0 \cdots Z_{n-1}$ 的中心, 其对应的复数为 $p$. 易得

$$p = \frac{z_0 + z_1 + \cdots + z_n}{n}.$$

将正 $n$ 边形平移, 使得 $\forall 0 \leq k \leq n-1$, $Z_k$ 平移到 $Z_k'$, 其中 $Z_k'$ 对应的复数为 $z_k' = z_k - p$. 易得存在复数 $re^{i\theta}$, 使得 $z_k' = re^{i\theta}\omega_n^k$, 其中 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是 $n$ 次单位根,$r > 0$. 且向量

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_n^0 & \omega_n^0 & \cdots & \omega_n^0 \\ \omega_n^0 & \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_n^0 & \omega_n^{n-1} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

对于不理解线性代数的读者来说, 可以把表达式 (1) 理解成如下,

$$\begin{cases} u_0 = \omega_n^0 z_0 + \omega_n^0 z_1 + \cdots + \omega_n^0 z_{n-1}, \\ u_1 = \omega_n^0 z_0 + \omega_n^1 z_1 + \cdots + \omega_n^{n-1} z_{n-1}, \\ \vdots \\ u_{n-1} = \omega_n^0 z_0 + \omega_n^{n-1} z_1 + \cdots + \omega_n^{(n-1)(n-1)} z_{n-1}. \end{cases}$$

这是一个离散 Fourier 变换. 如上叙述的内容作为本文中所有定理的条件. 易得

$$u_0 = z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = np.$$

下面我们来证明

**定理 1.** 当 $1 \leq j < n-1$ 时,

$$u_j = \omega_n^0 z_0 + \omega_n^j z_1 + \cdots + \omega_n^{j(n-1)} z_{n-1} = 0,$$

当 $j = n-1$ 时,

$$u_j = \omega_n^0 z_0 + \omega_n^j z_1 + \cdots + \omega_n^{j(n-1)} z_{n-1} = nre^{i\theta}.$$

**证明**. 由于当 $1 \leq j \leq n$ 时, 根据等比数列求和公式,

$$\omega_n^0 p + \omega_n^j p + \cdots + \omega_n^{j(n-1)} p = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} u_j &= \omega_n^0 z_0 + \omega_n^j z_1 + \cdots + \omega_n^{j(n-1)} z_{n-1} \\ &= \omega_n^0 z_0' + \omega_n^j z_1' + \cdots + \omega_n^{j(n-1)} z_{n-1}' \\ &= re^{i\theta}(\omega_n^0 + \omega_n^{j+1} + \cdots + \omega_n^{(j+1)(n-1)}). \end{aligned}$$

当 $\omega_n^{j+1} = 1$ , 也就是 $j = n-1$ 时, 可得 $u_j = nre^{i\theta}$. 否则, 根据等比数列求和公式, 易得 $re^{i\theta}(\omega_n^0 + \omega_n^{j+1} + \cdots + \omega_n^{(j+1)(n-1)}) = 0$. □

*1992–, 杭州师范大学在读本科生,Email:h5411167@gmail.com

由上面的定理可见,

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} np \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ nre^{i\theta} \end{pmatrix}.$$

于是, 离散 Fourier 变换把一个正 $n$ 边形 $(n \geq 3)$ 的顶点变成一个三角形的顶点, 三角形的三个顶点对应的复数分别为 $0, np, nre^{i\theta}$, 当然当这三个顶点有重合时, 那个三角形是退化的三角形.

特别的, 当 $n = 3$ 时, 离散 Fourier 变换将正三角形的三个顶点变为三角形的三个顶点. 易得