多元反函数定理的一个证明

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

摘要: 仅利用微分中值定理, 以及微扰不改变一个可逆矩阵的可逆性, 给出了多元反函数定理的一个证明.

关键词: 多元反函数定理; 微分中值定理; 可逆矩阵

中图分类号:O172.1

多元反函数定理是多元微分学中的核心定理之一. 利用它能直接推出隐函数定理. 其叙述如下:

定理 1 (多元反函数定理)**.** *设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集合, 并设 $T:E\to\mathbf{R}^n$ 是在 E 上连续可微的函数. 假设 $\mathbf{x_0}\in E$ 使得线性变换 $f'(\mathbf{x_0}):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是可逆的, 那么存在含有 $\mathbf{x_0}$ 的开集 $U\subset E$ 以及含有 $f(\mathbf{x_0})$ 的开集 $V\subset\mathbf{R}^n$, 使得 f 是从 U 到 V 的双射, 而且逆映射 $f^{-1}:V\to U$ 在点 $f(\mathbf{x_0})$ 处可微, 而且*

$$(f^{-1})'(f(\mathbf{x_0}))=(f'(\mathbf{x_0}))^{-1}.$$

现在, 笔者来阐述自己发现的证明, 这种证明只用到了微分中值定理以及简单的矩阵知识. 为此, 我们先来看一个引理:

引理 1 (微扰不改变可逆矩阵的可逆性)**.** *设 $A_{n,n}$ 是一个 n 行 n 列的可逆矩阵, 其第 i 行, 第 j 列的项记为 a_{ij}. 则存在 $\varepsilon>0$, 使得 $\forall 0\le\delta_{ij}<\varepsilon$, 矩阵*

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}+\delta_{11} & a_{12}+\delta_{12} & \cdots & a_{1n}+\delta_{1n}\\ a_{21}+\delta_{21} & a_{22}+\delta_{22} & \cdots & a_{2n}+\delta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}+\delta_{n1} & a_{n2}+\delta_{n2} & \cdots & a_{nn}+\delta_{nn}\end{pmatrix}$$

可逆.

引理证明. 我们来看 n^2 元函数 $\det A_{n,n}$, 该函数的 n^2 个自变量分别是矩阵 $A_{n,n}$ 中的各个项, 易得该 n^2 元函数关于各个自变量连续. 当矩阵 A 可逆时,$\det A_{n,n}\neq 0$. 此时对于每个变量 a_{ij} 来说, 存在 $\varepsilon_{ij}>0$, 使得 $\forall 0\le\delta_{ij}<\varepsilon_{ij}$, 当 a_{ij} 被 $a_{ij}+\delta_{ij}$ 替代时,$\det A_{n,n}$ 依然非零, 而且正负符号和原来的 $\det A_{n,n}$ 相比没有变号.

令 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\cdots,\varepsilon_{1n},\varepsilon_{21},\varepsilon_{22},\cdots,\varepsilon_{2n},\cdots,\varepsilon_{n1},\varepsilon_{n2},\cdots,\varepsilon_{nn}\}$, 且矩阵可逆当且仅当行列式非零, 即可得引理. ■

引理 1 有如下推论:

推论 1.1. *存在含有 $\mathbf{x_0}$ 的开集 U', 使得 f 在 U' 上的每一点处的导数可逆.*

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

下面我们来证明 $f(U')$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集. 为此, 我们只用证明如下结论:

引理 2. 对于 $f(U')$ 中的任意一个点 $\mathbf{x}'$, 当该点的邻域足够小时, 整个邻域都会含于 $f(U')$.

引理证明. ∎