习题 4.3.2.　2014.11.17.23:25

将直线 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转，求这旋转面的方程，并就 α 和 β 可能的值讨论这是什么曲面？

解：设曲面上的任一点为 (x_0,y_0,z_0)，则都存在直线上的相应一点 (x_1,y_1,z_1)，满足：

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2 = x_1^2+y_1^2 & ① \\ z_0 = z_1 & ② \end{cases}$$

且 (x_1,y_1,z_1) 本身满足

$$\begin{cases} \frac{x_1}{\alpha}=\frac{z_1}{1} & ③ \\ y_1=\beta. & ④ \end{cases}$$

将条件 ①,②,③,④ 联立，可得

$$x_0^2+y_0^2=\alpha^2 z_0^2+\beta^2. \quad ⑤$$

可见，旋转面的方程为

$$x^2+y^2-\alpha^2 z^2=\beta^2.$$

当 $\alpha=0$，且 $\beta=0$ 时，旋转面为一个点 $(0,0,0)$.

当 $\alpha\neq0$，且 $\beta=0$ 时，旋转面是一个锥面，该锥面的顶点为原点，准线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\alpha^2 \\ z=1 \end{cases}.$$

可见这是一个圆锥面.

当 $\alpha=0$，且 $\beta\neq0$ 时，旋转面是一个柱面 $x^2+y^2=\beta^2$.

当 $\alpha\neq0$，且 $\beta\neq0$ 时，旋转面是单叶双曲面.