复平面上的点形成正 n 边形的一个必要条件

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

定理 1. 设 z_1,z_2,z_3 为复平面上的三个点 Z_1,Z_2,Z_3 所代表的复数, 且 Z_1,Z_2,Z_3 如果不共线, 则按照逆时针方向放置. 则这三个点形成正三角形的充要条件是

$$z_1+\omega_3 z_2+\omega_3^2 z_3=0, \tag{1}$$

其中 $\omega_3=e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

证明.

$$z_1+\omega_3 z_2+\omega_3^2 z_3=0 \iff z_1+\omega_3 z_2+(-1-\omega_3)z_3=0 \iff z_1-z_3=\omega_3(z_3-z_2).$$

得证. ■

定理 2. 设 z_1,z_2,z_3,z_4 为复平面上的四个点 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 所代表的复数, 且 Z_1,Z_2,Z_3,Z_4 如果不共线, 则按照逆时针方向放置. 若这四个点是正方形的四个顶点, 则

$$z_1+\omega_4 z_2+\omega_4^2 z_3+\omega_4^3 z_4=0, \tag{2}$$

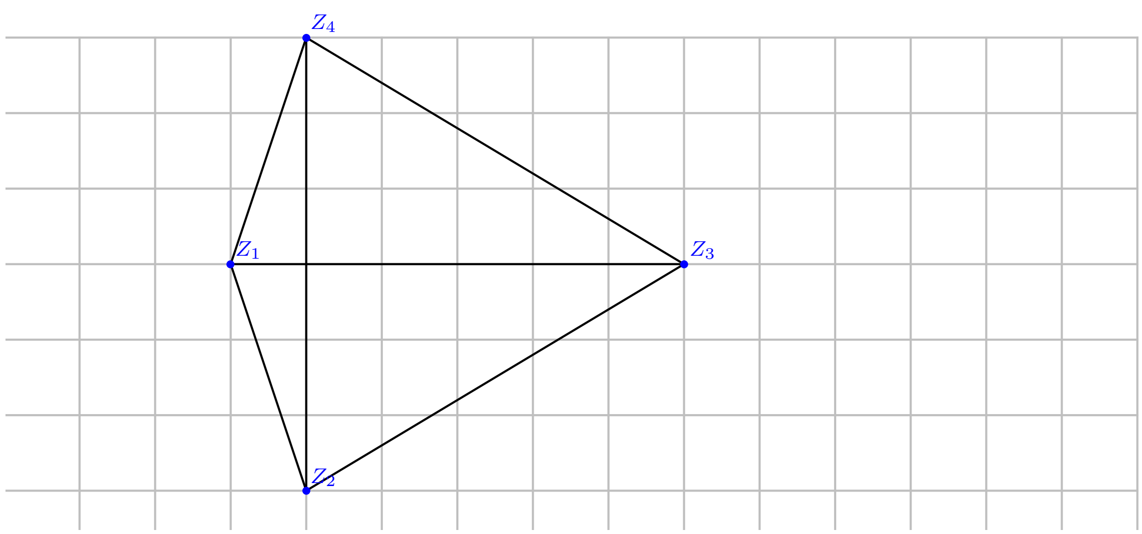
其中 $\omega_4=e^{\frac{2\pi i}{4}}$.

证明.

$$z_1+\omega_4 z_2+\omega_4^2 z_3+\omega_4^3 z_4=0 \iff (z_1-z_3)=i(z_4-z_2).$$

得证. ■

注 2.1. 注意式 *2* 不是四个点形成正方形顶点的充要条件. 因为方程 *2* 还可以是如下情形:



*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

定理 3. 设 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 为复平面上的五个点 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 所代表的复数, 且 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 不共线时, 则按照逆时针方向放置. 若这五个点形成正五边形的五个顶点, 则

$$z_1 + \omega_5 z_2 + \omega_5^2 z_3 + \omega_5^3 z_4 + \omega_5^4 z_5 = 0.$$

其中 $\omega_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ 是 5 次单位根.

证明. 由于五个点形成正五边形的五个顶点, 因此我们把形成的正五边形的中心平移到原点. 也就是说, 令 $z_i' = z_i + p$, 其中 p 是一个复数,

$$p = -\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5}{5}.$$

易得

$$z_1 + \omega_5 z_2 + \omega_5^2 z_3 + \omega_5^3 z_4 + \omega_5^4 z_5 = 0 \iff z_1' + \omega_5 z_2' + \omega_5^2 z_3' + \omega_5^3 z_4' + \omega_5^4 z_5' = 0,$$

这是因为 $p + \omega_5 p + \omega_5^2 p + \omega_5^3 p + \omega_5^4 p = 0$. 然后, 令 $z_i = re^{\theta i}$, 其中 $r > 0$ 是一个实数. 这样, 我们就只用证明

$$r(e^{\theta i} + \omega_5^2 e^{\theta i} + \omega_5^4 e^{\theta i} + \omega_5^6 e^{\theta i} + \omega_5^8 e^{\theta i}) = 0,$$

也就是证明

$$1 + \omega_5^2 + \omega_5^4 + \omega_5^6 + \omega_5^8 = 0,$$

这是容易的. ■

定理 4. 设 $z_1, \cdots, z_n$ 为复平面上的 n 个点 $(n \geq 3)$ $Z_1, \cdots, Z_n$ 所对应的复数. 且 $Z_1, \cdots, Z_n$ 不共线时, 按照逆时针方向放置. 若这 n 个点形成正 n 边形的 n 个顶点, 则

$$z_1 + \omega_n z_2 + \omega_n^2 z_3 + \cdots + \omega_n^{n-1} z_n = 0.$$

其中 $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

证明. 可以完全仿照 $n = 5$ 的情形 (引理 2.3) 来证明, 最后划归为要证明的一个等式为

$$1 + \omega_n^2 + \omega_n^4 + \cdots + \omega_n^{2n-2} = 0,$$

根据等比数列求和公式, 也就是证明,

$$\frac{1 - \omega_n^{2n}}{1 - \omega_n^2} = 0.$$

得证. ■

定理 5. 设 z_1, z_2, z_3, z_4 为复平面上的四个点 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 所代表的复数, 且 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 如果不共线, 则按照逆时针方向放置. 则这四个点是以 p 为中心的正方形的四个顶点当且仅当

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 4p, \\ z_1 + \omega_4 z_2 + \omega_4^2 z_3 + \omega_4^3 z_4 = 0, \\ z_1 + \omega_4^2 z_2 + \omega_4^4 z_3 + \omega_4^6 z_4 = 0, \\ z_1 + \omega_4^3 z_2 + \omega_4^6 z_3 + \omega_4^9 z_4 = 2z_1. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}}$.

证明. 很简单, 请自行验证. ■