习题 2.2.6

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题 (2.2.6). 考虑有理数域上多项式

$$f_{n,k}(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n,$$

这里 k,n 都是非负整数. 证明

$$x^{k+1}|(x-1)f_{n,k}(x)+(x+1)^{k+n+1}.$$

证明. 采用数学归纳法. 当 $k=0$ 时, 我们先证明

$$x|(x-1)(x+1)^n+(x+1)^{n+1}.$$

也就是证明

$$x|(x+1)^n(x-1+x+1).$$

成立. 假设 $k=p$ 的时候, 命题成立. 则 $k=p+1$ 时, 我们来看

$$(x+1)^{p+1+n}+(2x)(x+1)^{p+n}+\cdots+(2x)^{p+1}(x+1)^n=(x+1)^{p+1+n}+2xf_{n,p}(x)$$

因此,

$$\begin{aligned}(x-1)f_{n,p+1}(x)+(x+1)^{p+n+2}&=(x-1)(x+1)^{p+n+1}+2x(x-1)f_{n,p}(x)+(x+1)^{p+n+2}\\&=2x((x+1)^{p+n+1}+(x-1)f_{n,p}(x)).\end{aligned}$$

结合假设, 可得

$$x^{p+2}|2x((x+1)^{p+n+1}+(x-1)f_{n,p}(x)).$$

因此根据数学归纳法, 命题成立. ■

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com