习题 2.2.2

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题 (2.2.2)**.** 证明 $x|f(x)^k$ 当且仅当 $x|f(x)$.

证明. 按照题目的意思, 显然是 $k>1$. 而且由于当 $f(x)\equiv 0$ 的情形是简单的, 我们也不予讨论.

$\Leftarrow$: 当 $x|f(x)$ 时, 表明 $f(x)=g(x)x$, 其中 $g(x)$ 是一个多项式. 因此 $f(x)^k=g(x)^kx^k=(g(x)^kx^{k-1})x$, 因此 $x|f(x)^k$.
$\Rightarrow$: 当 $x|f(x)^k$, 说明 $f(x)$ 不是零多项式, 且由于证明中的第一句话,$f(x)$ 也不是 0. 假设 $x\nmid f(x)$, 则根据带余除法, 存在唯一的 $p(x),r(x)$, 使得

$$f(x)=p(x)x+r(x),$$

其中 $r(x)$ 是个零多项式. 下面我们来看

$$f(x)^k=(p(x)x+r(x))^k,$$

易得该多项式的常数项必为 $r(x)^k$, 因此 $x\nmid f(x)^k$, 矛盾. 因此我们有 $x|f(x)$. ■

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com