习题 2.3.3

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题 (2.3.3)**.** 令 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbf{F}(x)$ 的多项式, 而 a, b, c, d 是 $\mathbf{F}$ 中的数, 并且

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

证明,

$$(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = (f(x), g(x))$$

注 1. 我们先来看与之对应的数论中的相应结论.a, b, c, d 仍然满足题设条件, 但是 $p, q \in \mathbf{Z}$, 我们来证明

$$(ap + bq, cp + dq) = (p, q).$$

很可惜这个命题是不成立的. 比如,$(1, 1) = 1$, 但是 $(1 + 2, 3 + 9) = 3$. 由以下论证可以看出, 对于数论中的对应结论, 我们必须要求 $ad - bc = \pm 1$.

证明. 令

$$\begin{cases} af(x) + bg(x) = p(x), \\ cf(x) + dg(x) = q(x). \end{cases}$$

由于行列式不为 0, 因此可得

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} p(x) & b \\ q(x) & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \\ g(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} a & p(x) \\ c & q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

这样子, 就易得命题成立 (为什么?). ∎

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com