习题 2.2.7

叶卢庆[*]
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题 (2.2.7)**.** 证明 x^d-1 整除 x^n-1 当且仅当 d 整除 n.

证明. $\Leftarrow$: 此时, 不妨设 $n=kd$, 此时, 易得

$$x^n-1=(x^d)^k-1^k=(x^d-1)\Delta.$$

其中 Δ 是一个多项式. 因此 $x^d-1|x^n-1$.

$\Rightarrow$: $x^d-1|x^n-1$ 说明 $n\geq d$. 假若 $d\nmid n$, 则根据带余除法, 存在唯一的 q,r, 使得

$$n=qd+r,$$

其中 $0<r<d$. 则

$$x^n-1=x^{qd+r}-1.$$

而

$$x^{qd+r}-1=x^{qd}x^r-x^r+x^r-1=x^r(x^{qd}-1)+(x^r-1)=(x^d-1)x^r\Delta'+(x^r-1).$$

易得 $x^d-1\nmid x^r-1$, 因此,$x^d-1\nmid x^n-1$, 矛盾. 因此 $d|n$. ■

注 1. 这个结论建立了 $d|n$ 和 $x^d-1|x^n-1$ 的对应关系, 个人认为会有大用.

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com