一道 IMO 不等式预选题的新证明

叶卢庆*

2014 年 5 月 27 日

题目 (第 31 届 IMO 预选题, 泰国提供). 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$, 且 $ab+bc+cd+da=1$, 求证

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}. \tag{1}$$

证明.

$$ab+bc+cd+da=1 \iff (a+c)(b+d)=1.$$

不妨先让 $b+d$ 固定成任意一个正实数, 即让 $b+d=p$, 其中 $p\in\mathbf{R}^+$ 是一个常数. 则 $a+c$ 也固定,$a+c=q=\frac{1}{p}$. 则

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}&=\frac{a^3}{p+c}+\frac{c^3}{p+a}\\&=\frac{(a^4+c^4)+p(a^3+c^3)}{p^2+1+ac}.\end{aligned}$$

由于

$$ac\leq\frac{(a+c)^2}{4},$$

$$a^3+c^3=(a+c)^3-3ac(a+c)\geq(a+c)^3-\frac{3(a+c)^3}{4},$$

$$a^4+c^4=(a+c)(a^3+c^3)-ac(a+c)^2-2a^2c^2\geq(a+c)\left[(a+c)^3-\frac{3(a+c)^3}{4}\right]-\frac{(a+c)^4}{4}-2\left[\frac{(a+c)^2}{4}\right]^2.$$

上面的三个不等式的等号成立的条件都是 $a=c$. 因此我们有

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}=\frac{(a^4+c^4)+p(a^3+c^3)}{p^2+1+ac}$$

在 $a=c=\frac{q}{2}$ 的时候达到最小值, 最小值为

$$\frac{q^4}{4+2q^2}.$$

同理,

$$\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

在 $b=d=\frac{p}{2}$ 的时候达到最小值. 最小值为

$$\frac{p^4}{4+2p^2}.$$

为了证明不等式 (1), 我们只用证明

$$\frac{q^4}{4+2q^2}+\frac{p^4}{4+2p^2}\geq\frac{1}{3}. \tag{2}$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

其中 $pq=1$. 不等式 (2) 也就是证明

$$\begin{aligned}\frac{q^4}{4+2q^2}+\frac{p^4}{4+2p^2}&=\frac{q^4(4+2p^2)+p^4(4+2q^2)}{(4+2p^2)(4+2q^2)}\\&=\frac{2(p^4+q^4)+(q^2+p^2)}{10+4(p^2+q^2)}\\&=\frac{2(p^2+q^2)^2+(p^2+q^2)-4}{10+4(p^2+q^2)}\geq\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

令 $p^2+q^2=t$, 也就是证明

$$6t^2-t-22\geq 0,$$

也就是证明

$$(t-2)(6t+11)\geq 0,$$

也就是证明 $t\geq 2$. 这是显然的, 因为 $t=p^2+q^2\geq 2pq=2$. 综上所述, 不等式 (1) 得证. □