整线性映射 $T:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$ 是双射的充要条件

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

摘要: 若线性映射 $T:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$ 对应的矩阵中各个项都是整数, 则称 T 为从 $\mathbf{Z}^2$ 到 $\mathbf{Z}^2$ 的整线性映射. 本文给出了整线性映射 $T:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$ 为双射的充要条件.

关键词: 裴蜀定理, 整线性映射

1 概念, 记号与引理

1. $\mathbf{Z}^2$ 是如下集合:
$$\mathbf{Z}^2=\{(m,n)|m,n\in\mathbf{Z}\}.$$
2. 设 $T:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$ 是线性映射. 且设 T 对应的矩阵为
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$
也即,$\forall(m,n)\in\mathbf{Z}^2$,
$$T((m,n))=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}.$$
若 $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$, 则称 T 为从 $\mathbf{Z}^2$ 到 $\mathbf{Z}^2$ 的整线性映射.
3. 裴蜀定理: 若 $a,b\in\mathbf{Z}$ 且 a,b 互素, 则存在 $p,q\in\mathbf{Z}$, 使得
$$pa+qb=1.$$

2 主要结论

我们现在来证明,

定理 1. 若 $T:\mathbf{Z}^2\to\mathbf{Z}^2$ 是整线性映射, 且 T 对应的矩阵为
$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$
则 T 是双射的充要条件是
$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\pm1.$$

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com

证明. $\Leftarrow$: 首先我们证明 T 是单射, 也即证明, 当 $(m,n)\neq(p,q)$ 时,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

这由矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

的可逆性可以很容易推出.

其次我们证明 T 是满射, 也即证明, 对于任意的 $(p,q)\in\mathbf{Z}^2$, 都存在相应的 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2$, 使得 $T((m,n))=(p,q)$. 我们来看方程组

$$\begin{cases} am+bn=p, \\ cm+dn=q \end{cases}, \tag{1}$$

解得

$$\begin{cases} m=\dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \\ n=\dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{2}$$

而由于

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\pm 1,$$

因此,m,n 在 $\mathbf{Z}$ 中都有唯一解. 因此证明了 T 是满射.

综上所述,T 是双射.

$\Rightarrow$: 设 $(m,n)\in\mathbf{Z}^2,(p,q)\in\mathbf{Z}^2$, 我们来看方程组 1 以及其解 2. 假如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq\pm 1,$$

那么 b,d 必定不互素, 否则根据裴蜀定理, 可以选取合适的 p,q, 使得

$$\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}=1,$$

这样就导致 m 的整数解不存在, 这与 T 是双射矛盾. 同理, 可得 a,c 必定不互素, 否则将会导致 n 的整数解不存在. 不妨设 b,d 的最大公约数为 $k_1>1$,a,c 的最大公约数为 $k_2>1$. 设 $b=b'k_1,d=d'k_1$,$a=a'k_2,c=c'k_2$. 则 b',d' 互素,a',c' 互素. 我们来看

$$m=\frac{\begin{vmatrix} p & b' \\ q & d' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}}.$$

易得此时必然有

$$\begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

否则容易由裴蜀定理得到 m 无整数解这个矛盾. 然而我们知道

$$\begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} = k_2 \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \neq 1,$$

因此, 我们的假设错误, 可见,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1.$$

■