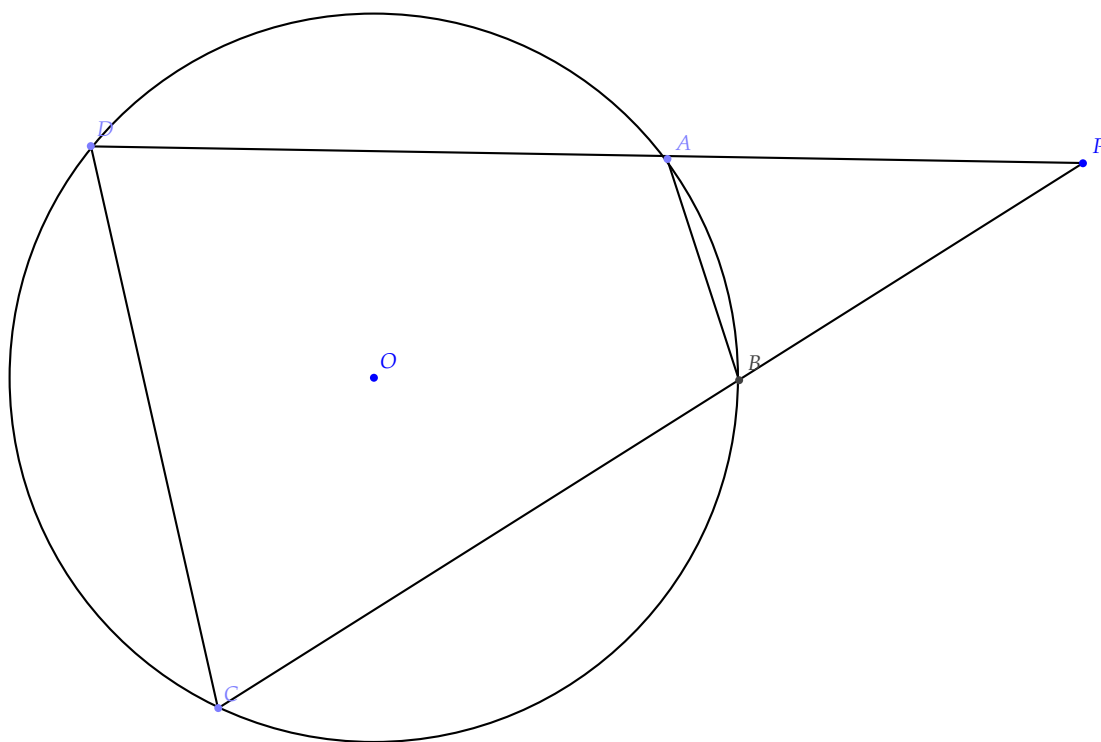


过圆外一点做两直线与圆相交形成的四边形面积最大值, 未完成

叶卢庆
杭州师范大学理学院
Email:h5411167@gmail.com
2013. 11. 18

如图, 已知一定圆, 过圆外一定点 P 作直线 PD, PC 分别与圆相交于 A, B, C, D 四点. 求四边形 $ABCD$ 的面积何时最大, 以及最大值为多少.



失败的尝试 1. 不妨设圆的半径为 r , 点 P 与圆心 O 的距离为 p . 则根据圆幂定理, 可得

$$|PA||PD| = p^2 - r^2. \quad (1)$$

$$|PB||PC| = p^2 - r^2. \quad (2)$$

由 (1) 和 (2) 可得

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PB|}{|PD|} = k. \quad (3)$$

因此, 三角形 PAB 与三角形 PCD 相似. 且

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PCD}} = k^2. \quad (4)$$

将 (3) 代入 (1), 可得

$$\frac{|PA||PB|}{p^2 - r^2} = k, \quad (5)$$

我们知道,

$$S_{ABCD} = S_{PCD} - S_{PAB} = S_{PAB} \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right). \quad (6)$$

因此将 (5) 代入 (6) 可得

$$S_{ABCD} = S_{PAB} \frac{(p^2 - r^2)^2 - |PA|^2 |PB|^2}{|PA|^2 |PB|^2}. \quad (7)$$

我们知道,

$$S_{PAB} = \frac{1}{2} |PA| |PB| \sin \angle APB, \quad (8)$$

我们发现, 将 (8) 代入 (7) 后并不能让四边形 $ABCD$ 的面积表达式简化. 我们只好另寻它路. \square

第二种解决方案. 如图,

