利用模 2 约化法解决杭州师范大学 2008 年考研高代第 1 题

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

习题 (杭州师范大学 2008 年考研高等代数)**.** 求证*: 多项式* $x^6 + x^3 + 1$ *在有理数域上不可约.*

证明. 要证明 $f(x) = x^6 + x^3 + 1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 即只用证明

$$f(x) = x^6 + x^3 + 1$$

在 $\mathbf{Z}$ 上不可约 (因为在 $\mathbf{Q}$ 上可约的整系数多项式必定在 $\mathbf{Z}$ 上可约). 假若 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上可约, 则设 $f(x) = p(x)g(x)$, 其中 $p(x), g(x)$ 都是整系数多项式.$p(x), g(x)$ 中, 必定有一个次数不大于 3 的非常数整系数因式, 不妨设为 $p(x)$, 此时易得 $f(x)$ 是 $\mathbf{F}_2[x]$ 上的可约多项式. 在模 2 下考虑,$p(x)$ 只可能是如下几种多项式, 所以在 $\mathbf{F}_2[x]$ 里, $f(x)$ 只可能被如下几种多项式整除:

$$x, x{+}1; x^2, x^2{+}x, x^2{+}1, x^2{+}x{+}1; x^3, x^3{+}1, x^3{+}x, x^3{+}x^2, x^3{+}x^2{+}1, x^3{+}x^2{+}x, x^3{+}x{+}1, x^3{+}x^2{+}x{+}1$$

但是经过 $\mathbf{F}_2[x]$ 中的带余除法验证, 易得以上多项式都不整除 $f(x)$, 因此假设错误. 可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上不可约, 因此在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约. ■

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com