

经过平面上 $n + 1$ 个整点的 n 次多项式为整系数多项式的充要条件

叶卢庆*

杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

问题 1. 设 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ 为平面上的 $n+1$ 个整点. 其中 x_1, x_2, \dots, x_{n+1} 两两不等. 我们知道, 经过这 $n+1$ 个整点的多项式只有一个. 下面我们来探究经过这些点的多项式是整系数多项式的充要条件.

解答. 我们使用 Newton 插值法. 易得经过 $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ 的多项式为

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_1) + (x - x_1)f[x_1, x_2] \\ & + (x - x_1)(x - x_2)f[x_1, x_2, x_3] \\ & + \dots \\ & + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

其中 $\forall k \geq 2$,

$$f[x_1, x_2, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_{k-1}] - f[x_2, \dots, x_k]}{x_1 - x_k},$$

且 $f[x_1] = f(x_1), f[x_2] = f(x_2)$. 可见, $f(x)$ 从低到高次的各项系数为

$$f[x_1], f[x_1, x_2], \dots, f[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}].$$

只要这些都是整数, 那么经过这 $n+1$ 个点的多项式都是整系数多项式. ■

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读, E-mail: h5411167@gmail.com