经过平面上 $n+1$ 个整点的 n 次多项式为整系数多项式的充要条件

叶卢庆*
杭州师范大学理学院, 浙江 杭州 310036

问题 1. 设 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ 为平面上的 $n+1$ 个整点. 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 两两不等. 我们知道, 经过这 $n+1$ 个整点的多项式只有一个. 下面我们来探究经过这些点的多项式是整系数多项式的充要条件.

解答. 我们使用 Newton 插值法. 易得经过 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n),(x_{n+1},y_{n+1})$ 的多项式为

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1) &+ (x-x_1)f[x_1,x_2] \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)f[x_1,x_2,x_3] \\ &+ \cdots \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)f[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}]. \end{aligned}$$

其中 $\forall k\geq 2$,

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_k]=\frac{f[x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_2,\cdots,x_k]}{x_1-x_k},$$

且 $f[x_1]=f(x_1)$,$f[x_2]=f(x_2)$. 可见,$f(x)$ 从低到高次的各项系数为

$$f[x_1],f[x_1,x_2],\cdots,f[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}].$$

只要这些都是整数, 那么经过这 $n+1$ 个点的多项式都是整系数多项式. ■

注 1. 有一个挺不错的推论*: 如果整数 $x_1,x_2,...,x_{n+1}$ 中相邻的数都是相差 1, 那么经过整点 $(x_1,y_1),\cdots,(x_{n+1},y_{n+1})$ 的 n 次多项式必为整系数多项式.*

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:h5411167@gmail.com