数列的极限

1.1 数列

数列及其极限的概念

定义$1-1-1$

定义域是正整数集$\mathbb{N}_+$的一个函数$f:\mathbb{N}_+\to\mathbb{R}$称为一个数列记为$\{a_n\}$，其中$a_n=f(n)$称为通项。若$f$是有界函数，则称$\{a_n\}$为有界数列；否则称$\{a_n\}$为无界数列。

定义$1-1-2$

设$\{a_n\}$是$\mathbb{R}$中的一个数列，如果$\exists a\in\mathbb{R}$，使得$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，当$n\geq N$，都有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

则称$\{a_n\}$是收敛的且收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\quad\text{或者}\quad\text{当}n\to\infty，a_n\to a。$$

这时称a是数列的极限。如果上述条件不成立，就称$\{a_n\}$为发散的或者不收敛。

例　证明数列$\{\frac{n}{n+1}\}$收敛于1.

证明：因为$|a_n-1|=\frac{1}{n+1}$,所以对于任意的$\varepsilon>0$，取正整数$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$,则当$n\geq N$，有

$$|a_n-1|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}=\frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon。$$

因此，数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$收敛于1。

定理$1-1-3$

数列$\{a_n\}$收敛于a当且仅当对于a的任何ε邻域$U(a,\varepsilon)$，除有限多项以外，

$\{a_n\}$中的其余项都包含在$U(a,\varepsilon)$中。

证明：设$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$U(a,\varepsilon)$是$a$的$\varepsilon$邻域。对此$\varepsilon > 0, \exists N > 0$，当$n \geq N$时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon，$$

即$a_n \in U(a,\varepsilon)$，因此只有$a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}$可能不在$U(a,\varepsilon)$内。

反过来，假设a的任意ε邻域$U(a,\varepsilon)$包含除有限多个以外的全部$\{a_n\}$的项，那么对于任
$0,$只有有限多项不在$U(a,\varepsilon)$内，记为$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}$。取$N = max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\} + 1$，则当$n \geq N$时，$a_n \in U(a,\varepsilon)$，即$|a_n - a| < \varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a。$$

收敛数列的性质与极限的四则运算法则

定理$1-1-4$（唯一性）

如果数列$\{a_n\}$收敛，那么其极限是唯一的。

证明：(反证法) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 有两个极限 a, b, 且 $a \neq b$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, 那么对 $\varepsilon = \frac{1}{2}|b-a| > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知, 存在正整数 N_1, 当 $n \geqslant N_1$ 时,

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad ①$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ 知, 存在正整数 N_2, 当 $n \geqslant N_2$ 时,

$$|a_n - b| < \varepsilon. \quad ②$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n \geqslant N$ 时, ①式和②式同时成立. 因而

$$|a-b| \leqslant |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a-b|,$$

矛盾, 从而可知收敛数列的极限是唯一的.

定理$1-1-5$（有界性）

如果数列$\{a_n\}$收敛，那么$\{a_n\}$有界。

证明：设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. 由数列极限的定义可知，对于 $\varepsilon = 1$，存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1,$$

即

$$|a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

取 $M = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|\}$，则对于任意 $n \geqslant 1$，

$$|a_n| \leqslant M.$$

定理1－1－6（保号性）

如果 $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a > 0$，那么$\forall p \in (0, a)$，$\exists N > 0$，当$n \geq N$时，有$a_n > p > 0$。

证明：对 $\varepsilon = a - p > 0$，存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 即

$$p < a_n < 2a - p.$$

因此，$\forall p \in (0, a)$，$\exists N > 0$，当 $n \geqslant N$ 时，有 $a_n > p > 0$.

推论1－1－7

若数列$\{a_n\}$满足：当$n \geq N\ in \mathbb{N}_+$时，$a_n \geq 0$，且$a_n$收敛于$a$，那么则$a \geq 0$。

定理 1.1.13 (四则运算法则) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为收敛数列，$c \in \mathbb{R}$ 为常数. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，则

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$;

(2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = ca$;

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = ab$;

(4) 如果 $b \neq 0$，那么 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

定理 1.1.15 (夹逼定理) 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足当 $n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}_+$ 时, 有 $b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 所以 $\exists N_1 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geqslant N_1$ 时, 有

$$|b_n - a| < \varepsilon,$$

即

$$a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 所以 $\exists N_2 \in \mathbb{N}_+$, 当 $n \geqslant N_2$ 时, 有

$$|c_n - a| < \varepsilon,$$

即

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

记 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n \geqslant N$ 时,

$$a - \varepsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < a + \varepsilon,$$

即

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

所以数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

无穷大数列

定义$1-1-10$

设$\{a_n\}$是$\mathbb{R}$中的一个数列，如果$\forall M > 0 =$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n \geq N$时，$|a_n| > M$，那么称$\{a_n\}$为无穷大数列，或称$\{a_n\}$趋于$\infty$，记为$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$。

特别的，如果$\forall M > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，当$n \geq N$时，$a_n > M$(或者$a_n < -M$)，就称$\{a_n\}$趋于$+\infty$(或者$-\infty$)，记为$\lim_{n\to\infty}(a_n) = +\infty$(或者$-\infty$)。

定理$1-1-11$ 数列$\{a_n\}$为无穷大数列当且仅当$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$。

1.2 确界原理

确界的概念

设非空实数集$S \subset R$,
（1）若 $\exists M \in R$，使得$\forall x \in S, x \leq M$，则称$S$有**上界**，M为S的一个**上界。**
（2）若$\exists M \in R$，使得$\forall x \in S, x \geq M$，则称$S$有**下界**，M为S的一个**下界。**
既有上界又有下界的实数集称为**有界集**，否则称为**无界集。**

（1）若$M \in R$是S的一个上界，且任何小于M的实数都不是S的上界，则称M为S的**上确界**，记为$M = \sup S$。
（2）若$m \in R$是S的一个下界，且任何大于M的实数都不是S的下界，则称M为S的**下确界**，记为$M = \inf S$。
若$M \in S$，则称M为S的最大元，记为$M = \max S$。
若$m \in S$，则称m为S的最小元，记为$m = \min S$。

确界的数学描述与确界原理

用ϵ语言描述确界

M是S的上确界 $\Leftrightarrow$ M是S的上界且对于任意小的$\epsilon > 0, \exists x_0 \in S$, 使得$x_0 > M - \epsilon$。
m是S的下确界 $\Leftrightarrow$ m是S的下界且对于任意小的$\epsilon > 0, \exists x_0 \in S$, 使得$x_0 < M + \epsilon$。

确界原理

任何R上的有上（下）界的非空子集都有上（下）确界。

单调有界准则

设数列$\{a_n\}$，若$a_n \leq a_{n+1} (a_n \geq a_{n+1})$，则称该数列是单调增加（单调减少）的。单调增加和单调减少数列统称为单调数列。
单调有界准则 单调数列$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n\}$有界。

重要极限

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

使用

例 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^n$.

解：　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^2}{\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2}}=\dfrac{1}{e}$.

例

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+3}{n})^n=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{\frac{n}{3}})^{\frac{n}{3}}]^3=e^3$$

利用单调有界准则求相关极限

例 3　设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cdots$, $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$, $\cdots$, 试证明数列$\{a_n\}$极限存在并求此极限值。

证明　显然数列$\{a_n\}$是单调增加数列，又因为

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}<\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}=2,$$

所以$\{a_n\}$有界，因此由单调有界准则知 $\{a_n\}$收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

由已知表达式得 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$，即 $a_n^2=2+a_{n-1}$，

令 $n\to\infty$ 方程两边取极限得 $a^2=2+a$,

解得 $a=-1$（由保号性，舍去）和 $a=2$. 于是所求极限为 2.

1.3 柯西准则

定义1-3-1 设数列$\{a_n\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_k\cdots$，则称$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的一个子数列（子列）。

定理1-3-2 $\{a_n\}$收敛 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$的任意子数列都收敛且收敛于相同的极限。

证明：充分性显然；下证明必要性：

已知$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+,$当$n\geq N$时$,|a_n-a|<\epsilon$

由于$n_1<n_2<\cdots<n_j\cdots,$显然有$j\leq n_j$对于所有$j\geq 1$成立。

因此当$k\geq N$时$,n_k\geq k\geq N,$有$|a_{n_k}-a|<\epsilon$，即$\lim_{n\to\infty}(a_{n_k})=a$。

♦若$\{a_n\}$的子数列发散，或存在$\{a_n\}$的两个收敛的子数列极限不相等，则$\{a_n\}$发散。

定理1-3-3(Bolzano—Weierstrass定理) 有界数列必有收敛的子数列。

定义1-3-4 设$\{a_n\}$是R中的一个数列，若$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^+,$当$m,n\geq N$时$,|a_m-a_n|<\epsilon$，则称$\{a_n\}$是柯西数列。

定理1-3-5(柯西准则)

设$\{a_n\}$是$\mathbb{R}$中的一个数列，则$\{a_n\}$收敛当且仅当$\{a_n\}$是柯西数列。

cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

例：证明数列$\{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\}$发散。

证明 :设$a_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$，则$\forall n\in\mathbb{N}_+$，取$m=2n,$有：

$$|a_m-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}$$

$$\geq\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}+...+\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2}$$