yhx-随堂测试(2)

试鸢

一：质量为 6000kg 的火箭垂直发射，喷气相对火箭的速度为 2000m/s，每秒喷气 120kg，求：

(1）起飞时火箭的加速度;
(2）若所带燃料为 4800kg，火箭的最后速度;
(3）火箭能达到的最大高度;
设上升高度范围内$g = 9.8m/s^2$

由密舍尔斯基方程，竖直方向有：

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - v'\frac{dm}{dt}$$

(1) 起飞时

$$\begin{aligned} a = \frac{dv}{dt} &= -g - \frac{v'}{m}\frac{dm}{dt} \\ &= \left[-9.8 - \frac{2000}{6000} \times (-120)\right] m/s^2 \\ &= 30.2m/s^2 \end{aligned}$$

(2) 由

$$\int_0^v dv = \int_0^t -gdt - \int_{m_0}^m \frac{v'}{m}dm$$

得 t 时刻火箭速度

$$v = -gt + v' \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

易知燃料消耗完时 $m = 1200kg$，$t = \frac{4800kg}{120kg/s} = 40s$，代入得

$$\begin{aligned} v &= \left[-9.8 \times 40 + 2000ln\left(\frac{6000}{1200}\right)\right] m/s \\ &= 2.83 \times 10^3 m/s \end{aligned}$$

(3) 燃料用完之前，t 时刻的高度为：

$$\begin{aligned} x = \int_0^x dx = \int_0^t vdt &= \int_0^t \left[v' \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right) - gt\right] dt \\ &= v'\left[t - \left(\frac{m_0}{\alpha} - t\right) \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)\right] - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

代入 $t = 40s$，$m_0 = 6000kg$，$\alpha = 120kg/s$，得

$$\begin{aligned} x &= 2000 \times \left[40 - \left(\frac{6000}{120} - 40\right) \times \ln\left(\frac{6000}{6000 - 120 \times 40}\right)\right] - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 40^2 \\ &= 4.00 \times 10^5 m \end{aligned}$$

二： 在实验室中，质子 **A** 以$0.6c$的速度向东运动，质子 **B** 以$0.5c$的速度向西运动，求：

(1) 在实验室参考系中，质子 A 的动能和动量的大小;
(2) 在与质子 B 相对静止的参考系中，质子 A 的动能和动量的大小;

设质子 A 的静止质量为m_0
(1)

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]$$

$$= 0.25m_0c^2$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= 0.75m_0c$$

(2) 在与质子 B 相对静止的参考系中，质子 A 的速度为

$$v' = \frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}} = 0.846c$$

所以

$$E_k' = m'c^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(v')^2}{c^2}}} - 1\right]$$

$$= 0.876m_0c^2$$

$$p' = m'v' = \frac{m_0 v'}{\sqrt{1-\frac{(v')^2}{c^2}}}$$

$$= 1.59m_0c$$

三： 在惯性系中，理想流体在重力作用下作定常流动时，同一流线上的压强 **p**、流速 **v**、密度和高度 **h** 之间的关系满足伯努利方程，请推导：

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = 常量$$

详见课本第 3 章第 8 节第 3 小节伯努利方程部分，此处仅给出公式推导，无具体分析过程。

$$A_{外} = p_1S_1l_1 - p_2S_2l_2 = (p_1 - p_2)V$$

$$A_{外} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$(p_1 - p_2)V = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

$$p_1V + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = p_2V + \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = 常量$$