第一周

试鸢

1. 设数列$\{na_n\}$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$收敛，证明级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛。

已知 ABel 变换：$\sum_{n=1}^{n} \alpha_i(\beta_i - \beta_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1}\beta_i = \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \alpha_{i+1})\beta_i + \alpha_n\beta_n - \alpha_1\beta_0$

$$\text{可令 } \alpha_n = n, \beta_n = a_n, \text{记}\alpha_0 = 0,$$

$$\text{则} \sum_{i=1}^{n} i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}(-a_i) + na_n - a_0 = -\sum_{i=0}^{n} a_i + (n+1)a_n \text{ 收敛},$$

$$\text{于是} \sum_{i=0}^{n} a_i = (n+1)a_n - \sum_{i=1}^{n} i(a_i - a_{i-1}) \text{ 收敛,即级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ 收敛。}$$

2. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛。

$$\text{已知} \sum_{i=1}^{n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_1 \text{收敛}, n \to \infty$$

$$\text{即}\{a_n\} \text{ 收敛} \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n, |a_n| < M,$$

$$\text{所以 } |a_nb_n| < M\ |b_n|, \text{又} \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \text{ 收敛, 推得} \sum_{n=1}^{\infty} M|b_n| \text{ 收敛},$$

$$\text{由比较判别法，级数} \sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n| \text{ 收敛。}$$

3. 设极限$\lim_{n\to\infty} na_n$存在，试证级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛。

$$\{na_n\}\text{有极限} \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n, |na_n| < M$$

$$\Rightarrow |a_n| < \frac{M}{n} \Rightarrow a_n^2 < \frac{M^2}{n^2}$$

$$\text{易知} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2} = M^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛。}$$

$$\text{由比较判别法，级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ 收敛。}$$

4. 设$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)(n = 1, 2, ...)$，证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$存在；
(2) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$收敛。

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$$

(1)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1$$

于是a_n单调减且有下界 1,由单调有界原理，$\{a_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

(2)

$$0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_n}\leqslant a_n-a_{n+1}$$

由$\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_1-a_{n+1}$可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$收敛，

由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛。

5. 若记数列$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$，试证明：

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)$收敛；
(2) $\{u_n\}$极限存在。
(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$。

(1)

$$u_{k+1}-u_k=\frac{1}{k+1}-[\ln(k+1)-\ln k]$$

由拉格朗日中值定理$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi},\xi\in(x,x+1)$,

于是$\ln(1+x)-\ln x\geqslant\frac{1}{x+1}\Rightarrow u_{k+1}-u_k<0$

$$又u_{k+1}-u_k=\frac{1}{k+1}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k+1}-\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\approx-\frac{3}{2n^2}$$

$$则\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$$

已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法的极限形式，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛。

(2)

由（1），$\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_1)$ 存在，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 显然存在。即$\{a_n\}$极限存在。

(3)

$$\text{令} \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{2n} = c,$$

$$\text{显然有} \lim_{n\to\infty}(u_{2n} - u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \ln 2 = 0.$$

思考题： $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\right)$ **和** $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{3}{2}n^{\frac{2}{3}}\right)$ **存在吗？为什么？**

思路同 5(1)(2)可证