Regularization and Reproducing Kernel Hilbert Spaces & Wavelet Smoothing

-The Elements of Static Learning Data Mining, Inference, and Prediction-

장예훈

18.06.11.Mon

Hilbert Space

- 무한차원의 벡터 스페이스
  - 힐베르트 공간 내 두 벡터의 내적은 두 함수의 곱셈에 대한 적분
- 유클리드 공간(표준적인 유한차원, 실수)을 일반화한 개념

$$\mathbb{H} := \left\{ x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \mid x_i, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Hilbert Space 중에서도 Reproducing Property를 가진 것들을

→ **Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS)**

Reproducing Kernel

- 먼저, Kernel 함수란?
  - X의 원소 두 개를 받아 실수 값을 결과로 내는 다변수 함수
  - 인자 하나를 x로 고정시켰을 때, 단변수 함수 $\mathrm{k}(\cdot, x): X \rightarrow \mathbb{R}$가

    같은 Hilbert Space상에 존재해야함 → 내적 해야 하니까!

- Reproducing Property란?
  - 어떤 함수 f와 $k(\cdot, x)$를 Inner Product하는 것은 f를 x에 대해 Evaluation하는 것

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS)

- RKHS
  - Reproducing Kernel을 가지고 있는 Hilbert Space

- $A\ Hilberet\ Space\ H\ of\ functions\ f \colon X \ \rightarrow \ \mathbb{R}$
  $is\ called\ Reproducong\ Kernel\ Hilbert\ Space$
  $if\ the\ evaluations\ fuctional\ L_x : H \ \rightarrow \ \mathbb{R}$
  $is\ a\ bounded\ (\Leftrightarrow continuous)linear\ operator\ for\ all\ x \in X$

- 음?

Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS)

- $A\ Hilberet\ Space\ H\ of\ functions\ f\!: X\ \rightarrow\ \mathbb{R}$
  $is\ called\ Reproducong\ Kernel\ Hilbert\ Space$
  $if\ the\ evaluations\ \boldsymbol{fuctional}\ \boldsymbol{L_x}\ : H\ \rightarrow\ \mathbb{R}$
  $is\ a\ bounded\ (\Leftrightarrow continuous) linear\ operator\ for\ all\ x \in X$

  → $\boldsymbol{L_x}$: 함수를 인자로 받아서 실수 값을 내는 함수 (functional이라고 부름)

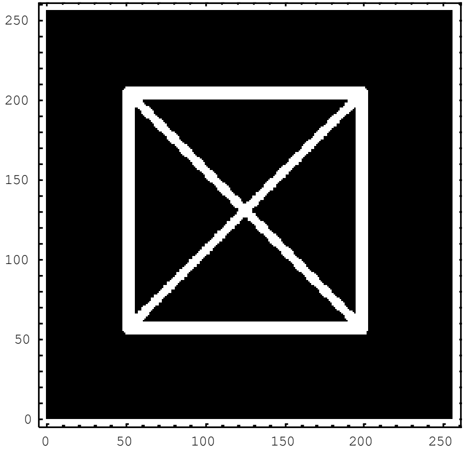
- $X\ \rightarrow \mathbb{R}$ 함수들을 원소로 하는 Hilbert Space H가 Bounded 돼있으면 RKHS

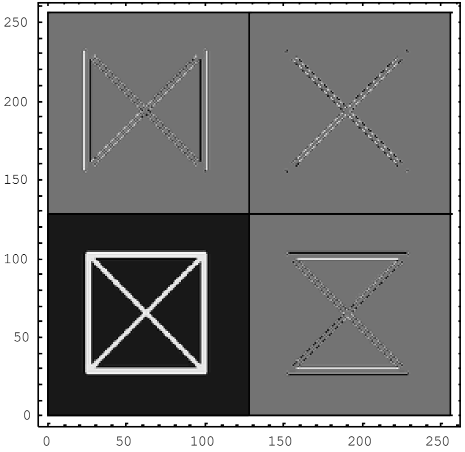
- RKHS의 원소인 함수들은 항상 어떤 다른 함수 K_x와의 내적을 통해 함수 값 계산 가능

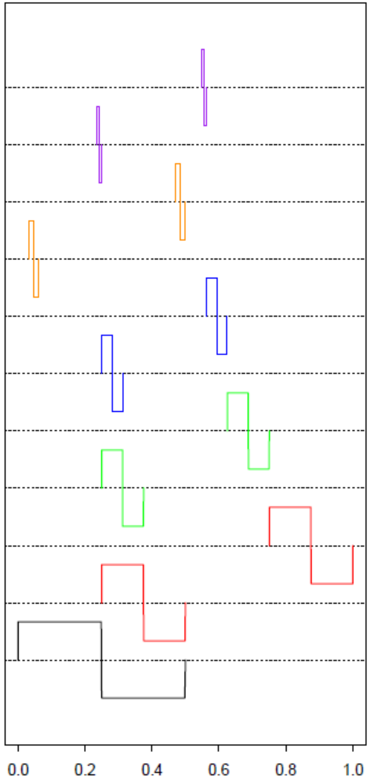
Wavelet Smoothing

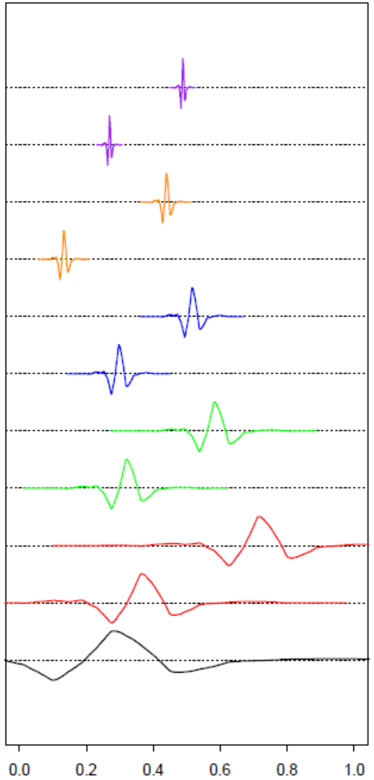
- 신호 분석의 한 기법
    - 시간의 함수로 나타난 값을

      주파수의 함수로 바꾸는 기술









Wavelet Smoothing

- 원래는 신호의 분석을 통한 잡음제거나 신호 압축에 사용
- 데이터의 클리닝 과정에 outlier 값이나 nan 값을 채우거나 압축할 때
- 여러 다른 스케일이나 해상도의 이미지 데이터를 처리할 때