三道试题的共同命题背景探析

叶卢庆
(浙江省永嘉县永临中学，325106)

摘　要:本文利用定积分和凸函数揭示了一道浙江省高中数学竞赛题和两道浙江省数学高考题的共同命题背景.

关键词:定积分；凸函数；命题背景；竞赛题；高考题

自浙江省数学高考自主命题实施以来，浙江卷涌现了不少叙述简洁、内涵丰富、贴近数学本质的试题，一些试题具有深刻的高等数学背景，有效地考察了学生的数学素养和进一步学习的潜力.在此，我们使用定积分和凸函数揭示两道浙江省数学高考题的共同命题背景.

一、从一道竞赛题谈起

例1　(2009年浙江省高中数学竞赛第20题)设函数 $f(x)=3ax^2-2(a+b)x+b$，其中 $a>0$，b 为任意常数.证明：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant \max\{f(0),f(1)\}$.

文[1]从多个角度解析了例1，并借助定积分和函数的凸性给出了例1的几何解法.其实，通过进一步提炼，可得如下定理，作为例1的命题背景.

定理　已知 $a<b$，若 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的连续凸函数，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则

$$\max_{[a,b]}|f(x)|\leqslant\max\{|f(a)|,|f(b)|\}.$$

为了证明这个定理，先叙述并证明如下引理，该引理来自著作[2]，它从积分的角度刻画了函数的凸性.

引理　已知 $a<b$，若 $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的连续凸函数，则

$$\int_s^t f(x)dx\leqslant\frac{t-s}{2}[f(t)+f(s)],$$

其中 $a\leqslant s<t\leqslant b$.

证明　当 $f(x)$ 在$[a,b]$上恒为正时，引理的几何意义很明显.如图1所示是 $f(x)$ 在$[s,t]$上的图象，其中点 $S(s,f(s))$，$T(t,f(t))$.阴影部分的面积是 $\int_s^t f(x)dx$，梯形的面积是 $\frac{t-s}{2}[f(t)+f(s)]$.

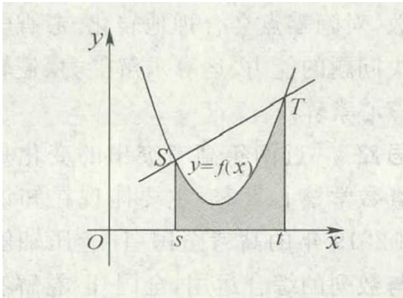

图1

由函数的凸性，函数在点 S，T 之间的图象不会高于线段 ST，故阴影部分的面积不大于梯形的面积，由此即得引理中的不等式.

当连续函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上不恒为正时，必存在足够大的正数 p，使得 $g(x)=f(x)+p$ 在$[a,b]$上恒正.由于 $g(x)$ 也是$[a,b]$上的凸函数，故 $\int_s^t g(x)dx\leqslant\frac{t-s}{2}[g(t)+g(s)]$，即

$$\int_s^t[f(x)+p]dx\leqslant\frac{t-s}{2}[f(t)+f(s)+2p],$$

不等式两边同时减去 $(t-s)p$，即得

$$\int_s^t f(x)dx\leqslant\frac{t-s}{2}[f(t)+f(s)].$$

引理证毕.

定理的证明　使用反证法.

设 $|f(c)|=\max_{[a,b]}|f(x)|$，其中 $a\leqslant c\leqslant b$.若 $|f(c)|>\max\{|f(a)|,|f(b)|\}$，则 $a<c<b$ 且 $f(c)$ 是 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值或最小值.又因为 $f(x)$ 是凸函数，所以 $f(c)$ 是最小值，且必有 $f(c)\leqslant 0$(否则若最小值 $f(c)>0$，则 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上是正值连续函数，$\int_a^b f(x)dx>0$，矛盾).故 $-f(c)>\max\{|f(a)|,|f(b)|\}$，于是 $f(a)+f(c)<0$，且 $f(b)+f(c)<0$.则由引理得

$$\int_a^c f(x)dx\leqslant\frac{c-a}{2}[f(a)+f(c)]<0,$$

$$\int_c^b f(x)dx \leqslant \frac{b-c}{2}[f(c)+f(b)]<0,$$

于是$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx<0$,

这与$\int_a^b f(x)dx=0$矛盾.

故假设不成立,即

$\max\limits_{[a,b]}|f(x)| \leqslant \max\{|f(a)|,|f(b)|\}$.

下面使用该定理详解例1,由此洞悉此题的命制思路.

例1解析　当$a>0$时,二次函数$f(x)$是凸函数,且

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1[3ax^2-2(a+b)x+b]dx=0,$$

由定理可得:$\max\limits_{[0,1]}|f(x)| \leqslant \max\{|f(0)|,|f(1)|\}=\max\{|b|,|a-b|\}$.而

$$\max\{|b|,|a-b|\}=\begin{cases}a-b, & b\leqslant \dfrac{a}{2},\\ b, b>\dfrac{a}{2},\end{cases}$$

故$\max\limits_{[0,1]}|f(x)| \leqslant \max\{|b|,|a-b|\}=\max\{b,a-b\}=\max\{f(0),f(1)\}$.

二、两道浙江省数学高考题的共同命题背景

其实,上述定理也是一道2012年浙江省数学高考题的命题背景.

例2　(2012年浙江卷理科第22题)已知$a>0,b\in\mathbf{R}$,函数$f(x)=4ax^3-2bx-a+b$.

(Ⅰ)证明:当$0\leqslant x\leqslant 1$时,

(i)函数$f(x)$的最大值为$|2a-b|+a$;

(ii)$f(x)+|2a-b|+a\geqslant 0$;

(Ⅱ)略.

解　(Ⅰ)当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$f''(x)=24ax\geqslant 0$,故$f(x)$是$[0,1]$上的凸函数.且

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(4ax^3-2bx-a+b)dx=0.$$

由定理可得:$\max\limits_{[0,1]}|f(x)| \leqslant \max\{|f(0)|,|f(1)|\}=\max\{|a-b|,|3a-b|\}$.而

$$\max\{|a-b|,|3a-b|\}=\begin{cases}3a-b, b\leqslant 2a,\\ a-b, b>2a,\end{cases}$$

即$\max\{|a-b|,|3a-b|\}=|2a-b|+a$.

故对于任意$0\leqslant x\leqslant 1$,$|f(x)|\leqslant|2a-b|+a$,这样就同时解决了第(i)问和第(ii)问.

再来看一道2006年浙江省高考题,虽然此题的命制没有直接用到定理的结论,但是也用到了二次函数的凸性和$\int_0^1 f(x)dx=0$.

例3　(2006年浙江卷理科第16题)设函数$f(x)=3ax^2+2bx+c$,若$a+b+c=0$,$f(0)>0$,$f(1)>0$,求证:

(Ⅰ)$a>0$且$-2<\dfrac{b}{a}<-1$;

(Ⅱ)方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有两个实根.

解　(Ⅰ)由题意,

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3ax^2+2bx+c)dx$$
$$=a+b+c=0,$$

结合$f(0)>0$,$f(1)>0$,可得二次函数$f(x)$是区间$[0,1]$上的凸函数(否则$\int_0^1 f(x)dx>0$),故$f(x)$的图象开口向上,即$a>0$.再由$f(0)>0$可得$c=-a-b>0$,由$f(1)>0$可得$3a+2b+c=2a+b>0$,解得$-2<\dfrac{b}{a}<-1$.

(Ⅱ)因为$f(x)$在$[0,1]$上连续,所以存在$0\leqslant c\leqslant 1$,使得$f(c)=\min\limits_{[0,1]}f(x)$.必有$f(c)<0$,否则若最小值$f(c)\geqslant 0$,结合二次函数$f(x)$的凸性,会有$\int_0^1 f(x)dx>0$,矛盾.故$f(0)f(c)<0$且$f(c)f(1)<0$,由连续函数的零点存在定理,$f(x)$在$(0,c)$和$(c,1)$之间都存在零点,且由于二次函数的零点至多有两个,故$f(x)$在$(0,1)$内恰有两个零点.即方程$f(x)=0$在$(0,1)$内有两个实根.

参考文献:

[1] 沈虎跃.一道竞赛题的解法分析与命题背景[J].中学教研(数学),2009(10):34-36.

[2] 周民强.微积分专题论丛[M].北京:科学出版社,2013.

(收稿日期:2020-01-09)