问题征解

编者按:本栏目精选有趣、实用、新颖、灵巧、深浅适度、富有启发性的题目进行征解,使其成为启迪思维、开发智力的小智囊.该栏目面向广大读者征集问题,问题的选题范围不做限制,但难度应适当控制,适宜中学生解答.欢迎自编新问题,也可以在现有问题基础上进行改编,提供试题时请注明来源,并请附上解题思路分析和详细解答.每期问题征解时间为 40 天,提供试题或解答请发送到电子邮箱:shxtxwtzj@163.com.

2024 年第 6 期问题解答

661. 解方程 $\tan(60°+x)+\sqrt{3}=4\cos x$,其中 $0°<x<90°$.

(湖北省公安县第一中学 杨先义 供题)

解 (辽宁省本溪市高级中学 李佳 提供)

$\tan(60°+x)+\sqrt{3}=4\cos x$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}+\tan x}{1-\sqrt{3}\tan x}+\sqrt{3}=4\cos x$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}-2\tan x=4\cos x(1-\sqrt{3}\tan x)$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\cos x-2\sin x=4\cos^2 x-4\sqrt{3}\sin x\cos x$

$\Rightarrow 2\cos(x+30°)=1+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1+2\cos(2x+60°)=1+2[2\cos^2(x+30°)-1]$

$\Rightarrow 2\cos(x+30°)=4\cos^2(x+30°)-1$,

解得 $\cos(x+30°)=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$.

又 $\because \sin 36°=\cos 72°=\cos(36°+18°)$,

$\therefore 2\sin 18°\cos 18°=\cos 36°\cos 18°-\sin 36°18°$

$=(1-2\sin^2 18°)\cos 18°-2\sin 18°\cos 18°\sin 18°$,

又 $\cos 18°>0$,所以 $4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0$,

解得 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$(负根舍掉).

$\therefore \cos 36°=1-2\sin^2 18°=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$,

$\cos 108°=-\sin 18°=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$.

又 $\cos(x+30°)=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$,且 $0°<x<90°$,所以 $x+30°=36°$ 或 $x+30°=108°$.

所以原方程的解为 $x=6°$ 或 $x=78°$.

662. 已知正实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{3}{c+3}+\dfrac{4}{d+4}=1$,求 $abcd$ 的最小值.

(安徽省无为中学 朱小扣 供题)

解法 1 (广东省中山纪念中学 邓启龙 提供)

令 $x=\dfrac{1}{a+1},y=\dfrac{2}{b+2},z=\dfrac{3}{c+3},w=\dfrac{4}{d+4}$,则 $a=\dfrac{1-x}{x},b=\dfrac{2(1-y)}{y},c=\dfrac{3(1-z)}{z},d=\dfrac{4(1-w)}{w}$, $x+y+z+w=1$,所以

$abcd=\dfrac{24(1-x)(1-y)(1-z)(1-w)}{xyzw}=\dfrac{24}{xyzw}(y+z+w)(x+z+w)(x+y+w)(x+y+z)\geqslant \dfrac{24}{xyzw}\cdot 3\sqrt[3]{yzw}\cdot 3\sqrt[3]{xzw}\cdot 3\sqrt[3]{xyw}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=1944$,

当且仅当 $x=y=z=w=\dfrac{1}{4}$,即 $a=3,b=6,c=9,d=12$ 时等号成立.

所以 $abcd$ 的最小值为 1944.

解法 2 (广东省广州市第八十九中学 王菊华 提供)

因为正实数 a,b,c,d 满足 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{3}{c+3}+\dfrac{4}{d+4}=1$,所以

$\dfrac{a}{a+1}=1-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{3}{c+3}+\dfrac{4}{d+4}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{2}{b+2}\cdot\dfrac{3}{c+3}\cdot\dfrac{4}{d+4}}$,

$\dfrac{b}{b+2}=1-\dfrac{2}{b+2}=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{3}{c+3}+\dfrac{4}{d+4}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a+1}\cdot\dfrac{3}{c+3}\cdot\dfrac{4}{d+4}}$,

$\dfrac{c}{c+3}=1-\dfrac{3}{c+3}=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{4}{d+4}\geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{a+1}\cdot\dfrac{2}{b+2}\cdot\dfrac{4}{d+4}}$,

$\dfrac{d}{d+4}=1-\dfrac{4}{d+4}=\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{b+2}+\dfrac{3}{c+3}$

$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a+1}\cdot\frac{2}{b+2}\cdot\frac{3}{c+3}}$,

四式相乘,整理得 $abcd \geqslant 3^4\times1\times2\times3\times4=1944$,当且仅当 $\frac{1}{a+1}=\frac{2}{b+2}=\frac{3}{c+3}=\frac{4}{d+4}=\frac{1}{4}$ 即 $a=3,b=6,c=9,d=12$ 时等号成立.

所以 $abcd$ 的最小值为 1944.

解法 3 (江苏省泗洪姜堰高级中学 程坚 提供)

先证明如下引理:设正实数 a,b,c,d 满足 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=1$,则 $abcd$ 的最小值为 81.

将等式 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\frac{1}{d+1}=1$ 去分母并整理得

$$abcd-3=ab+bc+cd+da+ac+bd+2(a+b+c+d). \quad ①$$

设 $x=\sqrt[4]{abcd}$,则 $x>0$,由基本不等式可得

$a+b+c+d\geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$,

$ab+cd\geqslant 2\sqrt{abcd}$,

$bc+da\geqslant 2\sqrt{abcd}$,

$ac+bd\geqslant 2\sqrt{abcd}$.

于是,由等式 ① 可得 $x^4-3\geqslant 6x^2+8x$,即 $x^4-6x^2-8x-3\geqslant 0$,整理得 $(x-3)(x+1)^3\geqslant 0$,所以 $x\geqslant 3$. 即 $abcd$ 的最小值为 81,当且仅当 $a=b=c=d=3$ 时取等号.

对于原题,因为 $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b+2}+\frac{3}{c+3}+\frac{4}{d+4}=1$,所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{\frac{b}{2}+1}+\frac{1}{\frac{c}{3}+1}+\frac{1}{\frac{d}{4}+1}=1$.

由引理可得 $a\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{3}\cdot\frac{d}{4}=\frac{abcd}{24}$ 的最小值为 81,当且仅当 $a=3,b=6,c=9,d=12$ 时取得.

故 $abcd$ 的最小值为 $81\times24=1944$.

663. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,若 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\leqslant\lambda(\tan A+\tan B+\tan C)$ 恒成立,求实数 λ 的最小值.

(安徽省无为中学 朱小扣 供题)

解法 1 (陕西省西安市高陵区第一中学 袁方 提供)

设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC=a,AC=b,BC=c$,半周长为 p,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则

$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{p}{R}$,

$\cos A+\cos B+\cos C$

$=\frac{2p^2(a+b+c)-2p(a^2+b^2+c^2)}{abc}-3$

$=\frac{R+r}{R}$,

$\tan A+\tan B+\tan C=\frac{2pr}{p^2-(r+2R)^2}$,

若 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\leqslant\lambda(\tan A+\tan B+\tan C)$,则 $\frac{p}{R+r}\leqslant\lambda\cdot\frac{2pr}{p^2-(r+2R)^2}$,所以

$\lambda\geqslant\frac{p^2-(r+2R)^2}{2r(R+r)}$.

由欧拉不等式 $R\geqslant 2r$ 和 Gerretsen 不等式 $r(16R-5r)\leqslant p^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$,可得:

$\frac{p^2-(r+2R)^2}{2r(R+r)}\geqslant\frac{4R^2+4Rr+3r^2-(r+2R)^2}{2r(2r+r)}$

$=\frac{1}{3}$,

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时取得等号.

所以 λ 的最小值为 $\frac{1}{3}$.

解法 2 (云南省大理州漾濞县第一中学 范花妹 提供)

取 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$,可得 $\lambda\geqslant\frac{1}{3}$.

不妨设 $\frac{\pi}{2}>A\geqslant B\geqslant C>0$,则

$\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C$,$\frac{1}{\cos A}\geqslant\frac{1}{\cos B}\geqslant\frac{1}{\cos C}$.

由 Chebyshev 不等式和 Cauchy 不等式,得

$\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)$

$=\frac{1}{3}(\sin A\cdot\frac{1}{\cos A}+\sin B\cdot\frac{1}{\cos B}+\sin C\cdot\frac{1}{\cos C})$

$\geqslant\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C})$

$\geqslant\frac{1}{9}(\sin A+\sin B+\sin C)\cdot\frac{(1+1+1)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}$

$=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}$,

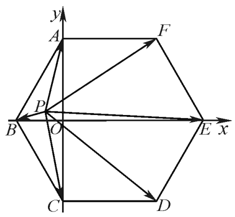
所以实数 λ 的最小值为 $\frac{1}{3}$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时取得.

664. 已知 $ABCDEF$ 是正六边形，P 是 $\triangle ABC$ 中(含边界)的动点，如图所示. 设非负实数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6 满足 $x_1\overrightarrow{PA}+x_2\overrightarrow{PB}+x_3\overrightarrow{PC}+x_4\overrightarrow{PD}+x_5\overrightarrow{PE}+x_6\overrightarrow{PF}=\mathbf{0}$，且 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1$. 求 x_6 的最大值.

(浙江省永嘉中学　叶卢庆　供题)

解法1　(四川省成都华西中学　张云华　提供)

不妨设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2. 如图，以 BE 所在直线为 x 轴，CA 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系，则可求得正六边形 $ABCDEF$ 的顶点坐标分别为 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(0,-\sqrt{3})$，$D(2,-\sqrt{3})$，$E(3,0)$，$F(2,\sqrt{3})$. 设 $P(m,n)$，则



$\overrightarrow{PA}=(-m,\sqrt{3}-n)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-m,-n)$，

$\overrightarrow{PC}=(-m,-\sqrt{3}-n)$，

$\overrightarrow{PD}=(2-m,-\sqrt{3}-n)$，

$\overrightarrow{PE}=(3-m,-n)$，$\overrightarrow{PF}=(2-m,\sqrt{3}-n)$.

于是，由 $x_1\overrightarrow{PA}+x_2\overrightarrow{PB}+x_3\overrightarrow{PC}+x_4\overrightarrow{PD}+x_5\overrightarrow{PE}+x_6\overrightarrow{PF}=\mathbf{0}$ 可得：

$-m(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)-x_2+2x_4+3x_5+2x_6=0$，

$-n(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)+\sqrt{3}(x_1-x_3-x_4+x_6)=0$.

又 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1$，所以

$m=-x_2+2x_4+3x_5+2x_6$

$=x_1+x_3+3x_4+4x_5+3x_6-1$，

$n=\sqrt{3}(x_1-x_3-x_4+x_6)$.

由点 P 在 $\triangle ABC$ 内可得 $m\leqslant 0$，故

$x_1+x_3+3x_4+4x_5+3x_6-1\leqslant 0$.

又 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\geqslant 0$，可得 $3x_6-1\leqslant 0$，解得 $x_6\leqslant\frac{1}{3}$.

当 $x_1=x_3=x_4=x_5=0$，$x_2=\frac{2}{3}$ 时，$x_6=\frac{1}{3}$，此时 $m=0$，$n=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即点 $P(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 在 $\triangle ABC$ 内(含边界)，符合题意.

综上所述，x_6 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

解法2　(供题人提供)

由条件可得 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$，

所以 $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}$，

$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}$，

$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{PA}-2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$.

将上述表达式代入等式 $x_1\overrightarrow{PA}+x_2\overrightarrow{PB}+x_3\overrightarrow{PC}+x_4\overrightarrow{PD}+x_5\overrightarrow{PE}+x_6\overrightarrow{PF}=\mathbf{0}$，整理可得

$(x_1+x_4+2x_5+2x_6)\overrightarrow{PA}+(x_2-2x_4-3x_5-2x_6)\overrightarrow{PB}+(x_3+2x_4+2x_5+x_6)\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

P 是 $\triangle ABC$ 中(含边界)的动点，等价于上式中 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC}$ 前的系数都非负. 由于 $\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PC}$ 前的系数已经非负，故只需 $x_2-2x_4-3x_5-2x_6\geqslant 0$，所以 $x_6\leqslant\frac{1}{2}(x_2-2x_4-3x_5)\leqslant\frac{x_2}{2}$.

又因为 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1$，所以 $3x_6\leqslant x_2+x_6\leqslant x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1$，

解得 $x_6\leqslant\frac{1}{3}$.

又当 $x_1=x_3=x_4=x_5=0$，$x_2=\frac{2}{3}$ 时，$x_6=\frac{1}{3}$，此时点 P 为线段 BF 与 AC 的交点，在 $\triangle ABC$ 的边界上，符合题意.

综上所述，x_6 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

665. 已知非负实数 x,y,z 满足 $x^2+y^2+z^2=1$，证明：$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}\geqslant 2$.

(云南省大理州漾濞县第一中学　范花妹　秦庆雄　供题)

证明　(供题人提供)

由已知条件、柯西不等式和绝对值不等式，可得

$(1-xy)(1-zx)$

$=(x^2+y^2+z^2-xy)(x^2+y^2+z^2-zx)$

$=[(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{4}z^2]\cdot[(x-\frac{1}{2}z)^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{4}y^2]$

$\geqslant[\,|(x-\frac{y}{2})(x-\frac{z}{2})|+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{4}yz]^2$

$\geqslant[(x-\frac{y}{2})(x-\frac{z}{2})+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{4}yz]^2$，

所以 $\sqrt{(1-xy)(1-zx)}\geqslant(x-\frac{y}{2})(x-\frac{z}{2})$

$+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2+\frac{1}{4}yz$,即

$$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}$$
$$\geqslant x^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}yz.$$

同理可得

$$\sqrt{(1-xy)(1-yz)}$$
$$\geqslant y^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}z^2-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xz,$$
$$\sqrt{(1-zx)(1-yz)}$$
$$\geqslant z^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}y^2-\frac{1}{2}xz-\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xy.$$

将上述三个不等式两边分别相加,可得

$$\sqrt{(1-xy)(1-zx)}+\sqrt{(1-yz)(1-xy)}+\sqrt{(1-zx)(1-yz)}$$
$$\geqslant\frac{5}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(xy+yz+zx)$$
$$=2(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{4}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$$
$$\geqslant 2(x^2+y^2+z^2)=2.$$

2024 年第 8 期问题

671. 已知正实数 x,y 满足 $x+y=1$,求$\frac{16y}{3x}+\frac{1}{x^2y}$的最小值.

(安徽省六安第二中学　陶兴红　供题)

672. 已知 $x\in[0,2\pi)$,求 $f(x)=|\cos x+\sin x-1|+|\cos(x+\frac{\pi}{3})+\sin(x+\frac{\pi}{3})-1|$ 的最小值.

(四川省成都华西中学　张云华　供题)

673. 求函数 $y=\sqrt{36-(x+0.5)^2}-\sqrt{16-(x-0.5)^2}$ 的最小值.

(江苏省南京市六合区实验高级中学　王安寓　供题)

674. 设 $m,n\in(0,2)$,$0<\theta<\frac{5\pi}{12}$,求 $T=\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\frac{5\pi}{12}}+\sqrt{m^2+4-4m\cos\theta}+\sqrt{n^2+4-4n\cos(\frac{5\pi}{12}-\theta)}$ 的最小值

(江苏省南京市六合区实验高级中学　王安寓　供题)

675. 设 a,b,c 是正数,求证:

$$(a^2+\frac{8}{b+1})(b^2+\frac{8}{c+1})(c^2+\frac{8}{a+1})\geqslant 125.$$

(四川成都金牛西林巷 18 号晨曦数学工作室　宿晓阳　供题)

(上接第 20 页)

又因为运用运算放缩可得

$$\frac{1}{2k^2}=\frac{2}{4k^2}<\frac{2}{4k^2-1}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1},$$

所以 $\cos\frac{1}{k}>1-(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1})$.

又 $\frac{1}{k\tan\frac{1}{k}}=\frac{\cos\frac{1}{k}}{k\sin\frac{1}{k}}(k\in\mathbf{N}^*)$,且由(1)知 $\sin\frac{1}{k}<\frac{1}{k}$,所以$\frac{1}{k\tan\frac{1}{k}}>\cos\frac{1}{k}$,故

$$\frac{1}{k\tan\frac{1}{k}}>1-(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}).$$

所以,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\tan\frac{1}{k}}>[1-(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})]+[1-(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})]+\cdots+[1-(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=n-(1-\frac{1}{2n+1})=n-\frac{2n}{2n+1}.$$

评注　函数、数列、不等式关系密切,三者联姻难度增加,用函数性质加运算放缩法处理此类题,深化数学知识之间的联系,彰显了通性通法,使数学核心素养落地开花.

数列解题无止境,运用运算获取放缩的基础,运用放缩获取求和的策略,运用求和后放缩定乾坤,是处理数列范围问题的通性通法,很值得关注.

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.

(收稿日期:2024-04-20)

邮发代号:38-334(上半月)
中国期刊报刊订阅网址: http://bk.11185.cn
刊号: ISSN 0488-7395
CN 42-1152/O1
定价:10.00 元