数学问题解答

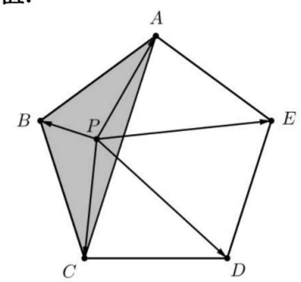
2025 年 2 月号问题解答

（解答由问题提供人给出）

2826 如图所示，已知 $ABCDE$ 是正五边形，P 是$\triangle ABC$ 中（含边界）的动点. 设

$$x_1\overrightarrow{PA}+x_2\overrightarrow{PB}+x_3\overrightarrow{PC}+x_4\overrightarrow{PD}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0},$$

其中 $\forall i\in\{1,2,3,4,5\}$，$x_i\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=1$. 求 x_5 的最大值.



（浙江省永嘉中学　叶卢庆　325100）

解 首先证明下面的引理.

引理 若 $c_1,c_2,c_3,c_4\geqslant 0$，$c_1+c_2+c_3+c_4=1$. 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=c_1\overrightarrow{PA}+c_2\overrightarrow{PB}+c_3\overrightarrow{PC}+c_4\overrightarrow{PD}$，则点 Q 在四边形 $ABCD$ 中（含边界）.

引理证明 (i)若 $c_1+c_2=0$，则 $c_3+c_4=1$，此时 $\overrightarrow{PQ}=c_3\overrightarrow{PC}+c_4\overrightarrow{PD}$，由定比分点公式，可得点 Q 位于线段 CD 上，则点 Q 位于四边形 $ABCD$ 的边界.

(ii)若 $c_3+c_4=0$，则 $c_1+c_2=1$，此时 $\overrightarrow{PQ}=c_1\overrightarrow{PA}+c_2\overrightarrow{PB}$，由定比分点公式，可得点 Q 位于线段 AB 上，则点 Q 位于四边形 $ABCD$ 的边界.

(iii)若 $c_1+c_2\neq 0$，且 $c_3+c_4\neq 0$，则

$$\overrightarrow{PQ}=(c_1+c_2)\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\overrightarrow{PA}+\frac{c_2}{c_1+c_2}\overrightarrow{PB}\right)+(c_3+c_4)\left(\frac{c_3}{c_3+c_4}\overrightarrow{PC}+\frac{c_4}{c_3+c_4}\overrightarrow{PD}\right),$$

记 $\frac{c_1}{c_1+c_2}\overrightarrow{PA}+\frac{c_2}{c_1+c_2}\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}$，$\frac{c_3}{c_3+c_4}\overrightarrow{PC}+\frac{c_4}{c_3+c_4}\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PN}$，则由定比分点公式，点 M,N 分别位于线段 AB 和线段 CD 上，如图 1 所示.

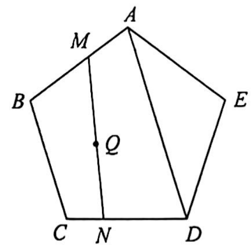


图 1

则 $\overrightarrow{PQ}=(c_1+c_2)\overrightarrow{PM}+(c_3+c_4)\overrightarrow{PN}$，由定比分点公式，点 Q 位于线段 MN 上，因此点 Q 位于四边形 $ABCD$ 中（含边界）.

综上，引理证毕.

下面解决原题. 首先，$x_1+x_2+x_3+x_4\neq 0$. 这是因为，假如 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，则 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$，$x_5=1$，可得 $\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$，导致 P,E 重合，矛盾.

于是可令

$$\overrightarrow{PF}=\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PA}+\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PB}+\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PC}+\frac{x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PD},$$

则题目中的向量等式可化为

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)\overrightarrow{PF}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0},$$

即 $(1-x_5)\overrightarrow{PF}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{FP}=x_5\overrightarrow{FE}$. 于是点 F 在线段 EP 的延长线上. 又由引理，点 F 在四边形 $ABCD$ 中（含边界），因此点 F 只能在 $\triangle ABC$ 中（含边界），如图 2 所示.

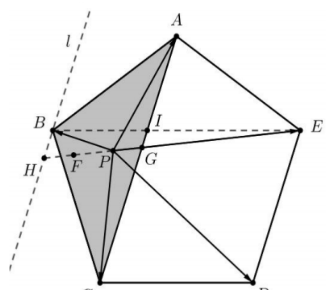


图2

过点 B 作直线 AC 的平行线 l，设直线 FE 与直线 AC 交于点 G，与直线 l 交于点 H. 设直线 BE 与直线 AC 交于点 I. 则

$$x_5=\frac{|FP|}{|FE|}\leqslant\frac{|FG|}{|FE|}\leqslant\frac{|FG|+|HF|}{|FE|+|HF|}=\frac{|HG|}{|HE|}=\frac{|BI|}{|BE|}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

当且仅当点 P 与点 I 重合，点 F 与点 B 重合时，

即 $x_1=x_3=x_4=0, x_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，$x_5$ 取得最大值$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.