数学问题解答

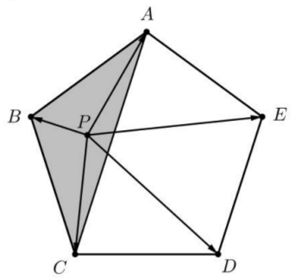
2025 年 2 月号问题解答

(解答由问题提供人给出)

2826 如图所示,已知 $ABCDE$ 是正五边形,P 是$\triangle ABC$ 中(含边界)的动点.设

$x_1\overrightarrow{PA}+x_2\overrightarrow{PB}+x_3\overrightarrow{PC}+x_4\overrightarrow{PD}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$,

其中$\forall i\in\{1,2,3,4,5\}$,$x_i\geqslant 0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i=1$.求 x_5 的最大值.



(浙江省永嘉中学 叶卢庆 325100)

解 首先证明下面的引理.

引理 若 $c_1,c_2,c_3,c_4\geqslant 0$,$c_1+c_2+c_3+c_4=1$.点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ}=c_1\overrightarrow{PA}+c_2\overrightarrow{PB}+c_3\overrightarrow{PC}+c_4\overrightarrow{PD}$,则点 Q 在四边形 $ABCD$ 中(含边界).

引理证明 (i)若 $c_1+c_2=0$,则 $c_3+c_4=1$,此时 $\overrightarrow{PQ}=c_3\overrightarrow{PC}+c_4\overrightarrow{PD}$,由定比分点公式,可得点 Q 位于线段CD 上,则点 Q 位于四边形$ABCD$ 的边界.

(ii)若 $c_3+c_4=0$,则 $c_1+c_2=1$,此时 $\overrightarrow{PQ}=c_1\overrightarrow{PA}+c_2\overrightarrow{PB}$,由定比分点公式,可得点 Q 位于线段AB 上,则点Q 位于四边形$ABCD$ 的边界.

(iii)若 $c_1+c_2\neq 0$,且 $c_3+c_4\neq 0$,则

$$\overrightarrow{PQ}=(c_1+c_2)\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\overrightarrow{PA}+\frac{c_2}{c_1+c_2}\overrightarrow{PB}\right)+(c_3+c_4)\left(\frac{c_3}{c_3+c_4}\overrightarrow{PC}+\frac{c_4}{c_3+c_4}\overrightarrow{PD}\right),$$

记$\frac{c_1}{c_1+c_2}\overrightarrow{PA}+\frac{c_2}{c_1+c_2}\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}$,$\frac{c_3}{c_3+c_4}\overrightarrow{PC}+\frac{c_4}{c_3+c_4}\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PN}$,

则由定比分点公式,点 M,N 分别位于线段 AB 和线段 CD 上,如图 1 所示.

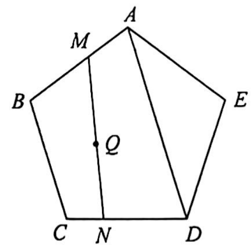


图 1

则 $\overrightarrow{PQ}=(c_1+c_2)\overrightarrow{PM}+(c_3+c_4)\overrightarrow{PN}$,由定比分点公式,点 Q 位于线段MN 上,因此点 Q 位于四边形$ABCD$ 中(含边界).

综上,引理证毕.

下面解决原题.首先,$x_1+x_2+x_3+x_4\neq 0$.这是因为,假如 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$,则 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$,$x_5=1$,可得 $\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$,导致 P,E 重合,矛盾.

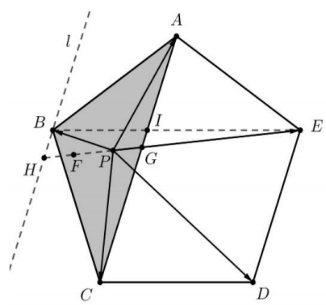
于是可令

$$\overrightarrow{PF}=\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PA}+\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PB}+\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PC}+\frac{x_4}{x_1+x_2+x_3+x_4}\overrightarrow{PD},$$

则题目中的向量等式可化为

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)\overrightarrow{PF}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0},$$

即 $(1-x_5)\overrightarrow{PF}+x_5\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$,即 $\overrightarrow{FP}=x_5\overrightarrow{FE}$.于是点 F 在线段 EP 的延长线上.又由引理,点 F 在四边形 $ABCD$ 中(含边界),因此点 F 只能在$\triangle ABC$ 中(含边界),如图 2 所示.



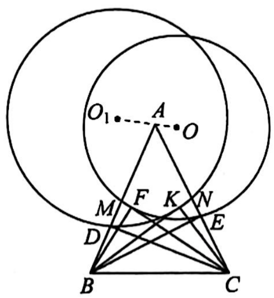
过点 B 作直线AC 的平行线l,设直线 FE 与直线 AC 交于点G,与直线 l 交于点 H.设直线 BE 与直线AC 交于点I.则

$$x_5=\frac{|FP|}{|FE|}\leqslant\frac{|FG|}{|FE|}\leqslant\frac{|FG|+|HF|}{|FE|+|HF|}=\frac{|HG|}{|HE|}=\frac{|BI|}{|BE|}=\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

当且仅当点 P 与点 I 重合,点 F 与点 B 重合时,

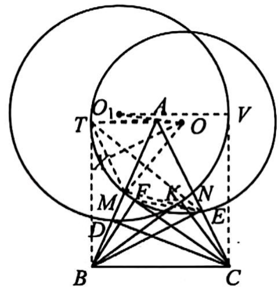
即 $x_1=x_3=x_4=0, x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，x_5 取得最大值 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2827　如图所示，在锐角 $\triangle ABC$ 中，边 AB、AC 的中点分别为 M、N，$BE\perp AC$ 于点 E，$BF\perp CM$ 于点 F，$\odot O$ 过 E、F、M 三点，$CD\perp AB$ 于点 D，$CK\perp BN$ 于点 K，$\odot O_1$ 过 D、K、N 三点. 求证：O_1、A、O 三点共线.



（江西省高安市石脑二中　王典辉　330818）

证明　如图所示，把 $\triangle ABC$ 的三个角简记为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，不妨设 $\angle B\geqslant\angle C$. 过点 A 作 $TV /\!/ BC$，作 $BT\perp TV$，$CV\perp TV$，垂足分别为 T、V. 连接 TM、TE、TO、OM、O_1V、EF.



则有 $\angle ATB=90^\circ=\angle AEB$，得 A、T、B、E 四点共圆.

因为 $\angle BFC=90^\circ=\angle BEC$，得 B、C、E、F 四点共圆.

又因为 MT 为 $\mathrm{Rt}\triangle ATB$ 斜边上的中线，有 $MT=MA=MB$.

因此，有
$$\begin{aligned}\angle MTE&=\angle BTE-\angle BTM\\&=\angle BAE-\angle TBM\\&=90^\circ-\angle ABE-(90^\circ-\angle ABC)\\&=\angle EBC=\angle EFC,\end{aligned}$$

因而，得 T、M、F、E 四点共圆于 $\odot O$.

作 $OX\perp TM$ 于点 X，则 $TX=\dfrac{1}{2}TM=\dfrac{1}{4}AB$，
$$\begin{aligned}\angle TOX&=\frac{1}{2}\angle TOM=\angle TEM\\&=\angle AEM-\angle AET\\&=\angle A-\angle ABT\\&=\angle A-(90^\circ-\angle B)\\&=90^\circ-\angle C,\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\angle OTM&=90^\circ-\angle TOX\\&=90^\circ-(90^\circ-\angle C)\\&=\angle C.\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}\angle ATO&=\angle ATM-\angle OTM\\&=\angle TAM-\angle C\\&=\angle B-\angle C\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

$$AT=AB\cos\angle TAB=AB\cos\angle B\cdots\cdots\text{②}$$

$$TO=\frac{TX}{\cos\angle OTM}=\frac{AB}{4\cos\angle C}\cdots\cdots\text{③}$$

把②÷③，得

$$\frac{AT}{TO}=4\cos\angle B\cdot\cos\angle C\cdots\cdots\text{④}$$

同理，可证

$$\angle AVO_1=\angle B-\angle C\cdots\cdots\text{⑤}$$

$$\frac{AV}{VO_1}=4\cos\angle B\cdot\cos\angle C\cdots\cdots\text{⑥}.$$

所以，由①、⑤与④、⑥，得 $\angle ATO=\angle AVO_1$，$\dfrac{AT}{TO}=\dfrac{AV}{VO_1}$.

当 $\angle B=\angle C$ 时，点 O_1、O 都在直线 TAV 上，所以 O_1、A、O 三点共线.

当 $\angle B>\angle C$ 时，$\triangle ATO\backsim\triangle AVO_1$，故 $\angle TAO=\angle VAO_1$，所以 O_1、A、O 三点共线.

2828　面试中答对 1 题得 1 分，答错 1 题得 -1 分，共答对 m 题答错 n 题，$m\geqslant n\geqslant 2$. 答题过程中，积分始终保持为正数才能合格. 求面试合格的概率 $P(m,n)$.

（南京师范大学附属扬子中学　薛大庆　210048）

解　答题成绩单为 m 个 1 和 n 个 -1 排成的序列，共有 C_{m+n}^{n} 种. 设合格成绩单的种数为 $f(m,n)$，则

（1）当 $n=2$ 时，成绩单由 m 个 1 和 2 个 -1 排成. 必须答对第 1、2 两题才能合格，这时答错的两题在后 m 题中，有 C_m^2 种；其中答错第 3、4 两