

# My Note of Learning Non-commutative Geometry

Ye Ning

January, 28, 2026

## 目录

0.1 Chapter 2 . . . . .	2
-------------------------	---

## 0.1 Chapter 2

**Definition 2.4** A *representation* of a finite-dimensional \*-algebra  $A$  is a pair  $(H, \pi)$  where  $H$  is a (finite-dimensional, complex) inner product space and  $\pi$  is a \*-algebra map

$$\pi : A \rightarrow L(H).$$

A representation  $(H, \pi)$  is called irreducible if  $H \neq 0$  and the only subspaces in  $H$  that are left invariant under the action of  $A$  are  $\{0\}$  or  $H$ .

**Definition 2.8: An algebra (bi)module:**

Let  $A, B$  be algebras (not necessarily matrix algebras). A left  $A$ -module is a vector space  $E$  that carries a left representation of  $A$ , i.e., there is a bilinear map  $A \times E \ni (a, e) \mapsto a \cdot e \in E$  such that

$$(a_1 a_2) \cdot e = a_1 \cdot (a_2 \cdot e); \quad (a_1, a_2 \in A, e \in E).$$

Similarly, a right  $B$ -module is a vector space  $F$  that carries a right representation of  $B$ , i.e., there is a bilinear map  $F \times B \ni (f, b) \mapsto f \cdot b \in F$  such that

$$f \cdot (b_1 b_2) = (f \cdot b_1) \cdot b_2; \quad (b_1, b_2 \in B, f \in F).$$

Finally, an  $A - B$ -bimodule  $E$  is both a left  $A$ -module and a right  $B$ -module, with mutually commuting actions:

$$a \cdot (e \cdot b) = (a \cdot e) \cdot b; \quad (a \in A, b \in B, e \in E).$$

**关于 (bi)module 定义 (Definition 2.8) 的一些看法:** 要正确理解这个定义中的内容我们需要了解什么是“模”。拿这里提到的  $B$ -module 来说，可以将其看成一个集合，而该集合的成员不一定是普通的数，而是更抽象意义上的算子，数当作是一种特殊的算子。因此这里提到的 Hilbert Module 可以被看成是 Hilbert Space 的一种推广。相应的这里提到的 vector space  $E$  和  $F$  也不是我们从线性代数那里学到的向量，在那里组成向量的是一个个的数。而这里的向量元素全部来自  $B$ -module，即一个个的算子。因此这个向量是之前线性代数中的向量的一个推广。具体来说在 Hilbert module  $B^m$  里，向量是一个  $m$  维列向量，其中每个分量是  $B$  的元素。假如我们有  $B = M_2(C)$ ，那么：

$$e = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, A_i \in M_2(C).$$

也就是说该向量  $e$  的每一个分量都是一个  $2 \times 2$  的矩阵！当然了，必须注意的是这个例子也是个特殊情况，而在一般情况下模  $B$  的元素有可能根本不是矩阵，它可能是一个函数，一个阿贝尔群或是一个算子，等等。

**Exercise 2.7** Show that  $A - A$ -bimodule given by  $A$  itself is an element in  $\mathbf{KK}_f(A, A)$  by establishing that the following formula defines an  $A$ -valued inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : A \times A \rightarrow A$ :  
 $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$

**Idea of Solution:** 为了解这个问题，最主要的是正确理解  $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$  中的  $a$ . 我们需要意识到这是属于  $A$  的一个元素，因此是一个矩阵，另外这是一个方阵。究其原因是  $A$  是自身的 bimodule，也就是不论从左还是从右皆能作用其自身，因此长度必须等于宽度。此外，我们还需要正确理解方阵的内积:  $\langle a, a' \rangle$ . 这里其实让  $a$  做了一个转置共轭然后与  $a'$  进行普通意义上的矩阵乘法。在些理解的基础上就不难验证定义 2.9 中诸条件如  $\langle e_1, a \cdot e_2 \rangle_E = \langle a^* \cdot e_1, e_2 \rangle$ . 其实就是利用乘法的结合律。

**How to understand the Definition of the balanced tensor product (BTP) ?** If  $E$  is a right  $B$ -module, and  $F$  is a left  $A$ -module, we can form the *balanced tensor product*:

$$E \otimes_B F := E \otimes F / \left\{ \sum_i (e_i a_i \otimes f_i - e_i \otimes a_i f_i) : a_i \in B, e_i \in E, f_i \in F \right\}. \quad (1)$$

In other words, the quotient imposes  $A$ -linearity of the tensor product, i.e., in  $E \otimes_B F$  we have

$$ea \otimes_B f = e \otimes_B af; \quad (a \in B, e \in E, f \in F).$$

**总结和 AI 讨论之后的一些看法:** 首先，关于这个 BTP 的直观理解是我们在使用 quotient 粘合这里的  $E$  和  $F$ 。如果直接做代数张量积  $E \otimes F$ , 我们会得到一个巨大的空间，其中  $e \cdot b \otimes f$  与  $e \otimes b \cdot f$  是两个完全不同的元素。但在组合态射时，我们强制令其代表同一个“路径”。其次，从代数的角度来看在代数张量积  $E \otimes F$  中，元素的形式是:

$$\sum_i e_i \otimes f_i.$$

如果我们允许  $E$  的右  $B$  作用与  $F$  的左  $B$  作用独立存在，我们就会得到过多的自由度。这会导致无法定义  $A - C$  双模结构；无法定义内积；无法定义组合态射。为此我们进行了 balanced quotient:

$$E \otimes_B F := (E \otimes F)/N,$$

其中  $N$  是由所有

$$eb \otimes f - e \otimes bf$$

生成的子空间。换句话说  $N$  是所有“不兼容  $B$ ”的误差项，而 quotient 的作用是将所有误差项都杀掉。其结果就是  $B$  的左右作用被强制一致； $B$  不再出现在结果中，最终得到一个真正的  $A - C$  模块了。最后让我们从 Hilbert 模块版的角度来拆解一下这个定义的意义和来源。如果我们想定义一个  $C$  值内积：

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle \in C.$$

但是  $E$  的内积给的是  $B$ :

$$\langle e_1, e_2 \rangle_E \in B.$$

与此同时  $F$  的内积却是:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_F \in C.$$

唯一能把它们接起来的方式是:

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F.$$

此外还需要注意的是在  $e \otimes bf$  的计算中优先级永远是先算  $bf$ , 再做张量积。

**Definition 2.11** The Kasparov product  $F \circ E$  between Hilbert bimodules  $E \in \mathbf{KK}_f(A, B)$  and  $F \in \mathbf{KK}_f(B, C)$  is given by the balanced tensor product  $F \circ E := E \otimes_B F$  ( $E \in \mathbf{KK}_f(A, B), F \in \mathbf{KK}_f(B, C)$ ), so that  $F \circ E \in \mathbf{KK}_f(A, C)$ , with  $C$ -valued inner product given on elementary tensors by

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F, \quad (2)$$

and extended linearly to all of  $E \otimes F$

关于 Kasparov Product 的一些理解:

从代数直觉上来说 Kasparov Product 是将中间的  $B$  也消掉了。其结果就是  $F \circ E := E \otimes_B F$ .

从 Hilbert 模块结构来解读, 这应该看成是内积的传递。这一点体现在  $\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F$  中。这个表达式的右边其实完成了三个步骤: 先在  $E$  中算出一个  $B$  元素  $b := \langle e_1, e_2 \rangle_E \in B$ ; 然后现用这个  $B$  元素作用于  $F$  上形成  $bf_2 \in F$ ; 最后再在  $F$  里算  $C$  值内积  $\langle f_1, bf_2 \rangle_F \in C$ 。

**Example 2.10** More generally, let  $\phi : A \rightarrow B$  be a \*-algebra homomorphism between matrix algebras  $A$  and  $B$ . From it, we can construct a Hilbert bimodule  $E_\phi$  in  $\mathbf{KK}_f(A, B)$  as follows. Let  $E_\phi$  be  $B$  as a vector space with the natural right  $B$ -module structure and inner product, but with  $A$  acting on the left via the homomorphism  $\phi$ :

$$a \cdot b = \phi(a)b; \quad (a \in A, b \in E_\phi). \quad (3)$$

**Exercise 2.8** Show that the association  $\phi \rightsquigarrow E_\phi$  from Example 2.10 is *natural* in the sense that

1.  $E_{\text{id}_A} \simeq A \in \mathbf{KK}_f(A, A)$ ,
2. for \*-algebra homomorphisms  $\phi : A \rightarrow B$  and  $\psi : B \rightarrow C$  we have an isomorphism

$$E_\psi \circ E_\phi \equiv E_\phi \otimes_B E_\psi \simeq E_{\psi \circ \phi} \in \mathbf{KK}_f(A, C), \quad (4)$$

that is, as  $A - C$ -bimodules.

**Ideas to Solution:** Let us talk about the meaning of the symbol  $\simeq$  in the context of NCG first. If we see  $E \simeq F$ , it not only means there is a one-to-one mapping relation between the elements in the two sets, it also means "conservation of structure". More specifically, to fulfill  $E \simeq F$ , there must exist a biprojectivity  $\Phi : E \rightarrow F$  such that:

1.  $\Phi(a \cdot e) = a \cdot \Phi(e)$
2.  $\Phi(e \cdot b) = \Phi(e) \cdot b$
3.  $\langle \Phi(e_1), \Phi(e_2) \rangle_F = \langle e_1, e_2 \rangle_E$