My Note of Learning Non-commutative Geometry

Ye Ning

January，28，2026

目录

0.1 Chapter 2

Definition 2.4 A *representation* of a finite-dimensional *-algebra A is a pair (H, π) where H is a (finite-dimensional, complex) inner product space and π is a *-algebra map

$$\pi : A \to L(H).$$

A representation (H, π) is called irreducible if $H \neq 0$ and the only subspaces in H that are left invariant under the action of A are $\{0\}$ or H.

对这个定义的理解：这里所谓的 representation 其实就是把抽象代数 A 中的元素变成 Hilbert 空间 H 上的具体算子。也就是说，A 本来是一个抽象的“算子代数”，而 $L(H)$ 是“真正的算子代数（矩阵）”；而 π 则是把抽象算子变成具体算子的“解释器”。

为什么这里的映射必须是 $*-algebra$ map 呢？原因是 $*-algebraA$ 有加法、乘法、单位元，同时 A 有 $*$ 运算（类似共轭转置）。相应的，为保持住这些结构，π 就必须满足：

$$\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b) \quad \text{加法}$$

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{乘法}$$

及

$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \quad \text{共轭}$$

尤其是这最后一条意味着抽象的“自伴算子”（厄米算子）会被表示成真正的“自伴矩阵”。

此外，这里选择 Hilbert 空间也是有原因的。因为 Hilbert 空间有内积，有范数，有完备性，可以在上面讨论算子的连续性、自伴性及谱。它是量子力学的自然舞台也是 C^* 的唯一合理载体。而关于 Hilbert 空间的 $L(H)$ 的这种写法也有其特定的含义：$L(H)$ 代表了 H 上所有有界线性算子的集合，换句话说就是所有 $n \times n$ 复矩阵的集合。即

$$L(H) \cong M_n(C).$$

之所以这里不采用 $M_n(C)$ 是因为只有在有限维的情况下 $L(H)$ 才能和矩阵划等号，而在无限维的情况下矩阵不再是合适的语言。但“线性算子”仍然是核心对象。所以数学家统一将其写成：

$$L(H) = \{T : H \to H | T\text{是有界线性算子}\}$$

另外，这里强调“有界”的原因是在无限维的 Hilbert 空间里有些线性算子是“无界”的，如微分算子。这种无界算子是不能被放进 C^* 代数里的，也因此不能直接用于表示论。

Definition 2.6 Two representations (H_1, π_1) and (H_2, π_2) of a $*$-algebra A are *unitarily equivalent* if there exists a unitary map $U : H_1 \to H_2$ such that

$$\pi_1(a) = U^* \pi_2(a) U$$

Definition 2.7 The *structure space* $\hat{A}$ of A is the set of all unitary equivalence classes of irreducible representations of A.

Definition 2.8: An algebra (bi)module:

Let A, B be algebras (not necessarily matrix algebras). A left A-module is a vector space E that carries a left representation of A, i.e., there is a bilinear map $A \times E \ni (a, e) \mapsto a \cdot e \in E$ such that

$$(a_1 a_2) \cdot e = a_1 \cdot (a_2 \cdot e); \quad (a_1, a_2 \in A, e \in E).$$

Similarly, a right B-module is a vector space F that carries a right representation of B, i.e., there is a bilinear map $F \times B \ni (f, b) \mapsto f \cdot b \in F$ such that

$$f \cdot (b_1 b_2) = (f \cdot b_1) \cdot b_2; \quad (b_1, b_2 \in B, f \in F).$$

Finally, an $A - B$-*bimodule* E is both a left A-module and a right B-module, with mutually commuting actions:

$$a \cdot (e \cdot b) = (a \cdot e) \cdot b; \quad (a \in A, b \in B, e \in E).$$

关于 (bi)module 定义 (Definition 2.8) 的一些看法：要正确理解这个定义中的内容我们需要了解什么是“模”。拿这里提到的 B-module 来说，可以将其看成一个集合，而该集合的成员不一定是普通的数，而是更抽象意义上的算子，数当作是一种特殊的算子。因此这里提到的 Hilbert Module 可以被看成是 Hilbert Space 的一种推广。相应的这里提到的 vector space E 和 F 也不是我们从线性代数那里学到的向量，在那里组成向量的是一个个的数。而这里的向量元素全部来自 B-module，即一个个的算子。因此这个向量是之前线性代数中的向量的一个推广。具体来说在 Hilbert module B^m 里，向量是一个 m 维列向量，其中每个分量是 B 的元素。假如我们有 $B = M_2(C)$，那么：

$$e = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, A_i \in M_2(C).$$

也就是说该向量 e 的每一个分量都是一个 2×2 的矩阵！当然了，必须注意的是这个例子也是个特殊情况，而在一般情况下模 B 的元素有可能根本不是矩阵，它可能是一个函数，一个阿贝尔群或是一个算子，等等。

Exercise 2.7 Show that $A - A$-bimodule given by A itself is an element in $\mathbf{KK}_f(A, A)$ by establishing that the following formula defines an A-valued inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : A \times A \to A$: $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$

Idea of Solution: 为了解这个问题，最主要的是正确理解 $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$ 中的 a. 我们需要意识到这是属于 A 的一个元素，因此是一个矩阵，另外这是一个方阵。究其原因是 A 是自身的 bimodule，也就是不论从左还是从右皆能作用其自身，因此长度必须等于宽度。此外，

我们还需要正确理解方阵的内积：$\langle a, a' \rangle$。这里其实让 a 做了一个转置共轭然后与 a' 进行普通意义下的矩阵乘法。在些理解的基础上就不难验证定义 2.9 中诸条件如 $\langle e_1, a \cdot e_2 \rangle_E = \langle a^* \cdot e_1, e_2 \rangle$. 其实就是利用乘法的结合律。

How to understand the Definition of the balanced tensor product （BTP）？ If E is a right B-module, and F is a left A-module, we can form the *balanced tensor product*:

$$E \otimes_B F \coloneqq E \otimes F / \left\{ \sum_i (e_i a_i \otimes f_i - e_i \otimes a_i f_i) : \quad a_i \in B, e_i \in E, f_i \in F \right\}. \tag{1}$$

In other words, the quotient imposes A-linearity of the tensor product, i.e., in $E \otimes_B F$ we have

$$ea \otimes_B f = e \otimes_B af; \quad (a \in B, e \in E, f \in F).$$

总结和 AI 讨论之后的一些看法：首先，关于这个 BTP 的直观理解是我们在使用 quotient 粘合这里的 E 和 F。如果直接做代数张量积 $E \otimes F$, 我们会得到一个巨大的空间，其中 $e \cdot b \otimes f$ 与 $e \otimes b \cdot f$ 是两个完全不同的元素。但在组合态射时，我们强制令其代表同一个“路径”。其次，从代数的角度来看在代数张量积 $E \otimes F$ 中，元素的形式是:

$$\sum_i e_i \otimes f_i.$$

如果我们允许 E 的右 B 作用与 F 的左 B 作用独立存在，我们就会得到**过多的自由度**。这会导致无法定义 $A - C$ 双模结构；无法定义内积；无法定义组合态射。为此我们进行了 balanced quotient：

$$E \otimes_B F \coloneqq (E \otimes F)/N,$$

其中 N 是由所有

$$eb \otimes f - e \otimes bf$$

生成的子空间。换句话说 N 是所有“不兼容 B”的误差项，而 quotient 的作用是将所有误差项都杀掉。其结果就是 B 的左右作用被强制一致；B 不再出现在结果中，最终得到一个真正的 $A - C$ 模块了。最后让我们从 Hilbert 模块版的角度来拆解一下这个定义的意义和来源。如果我们想定义一个 C 值内积：

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle \in C.$$

但是 E 的内积给的是 B：

$$\langle e_1, e_2 \rangle_E \in B.$$

与此同时 F 的内积却是：

$$\langle f_1, f_2 \rangle_F \in C.$$

唯一能把它们接起来的方式是：

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F.$$

此外还需要注意的是在 $e \otimes bf$ 的计算中优先级永远是先算 bf，再做张量积。

Definition 2.11 The *Kasparov product* $F \circ E$ between Hilbert bimodules $E \in \mathbf{KK}_f(A, B)$ and $F \in \mathbf{KK}_f(B, C)$ is given by the balanced tensor product $F \circ E := E \otimes_B F \qquad (E \in \mathbf{KK}_f(A, B), F \in \mathbf{KK}_f(B, C))$, so that $F \circ E \in \mathbf{KK}_f(A, C)$, with C-valued inner product given on elementary tensors by

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F, \tag{2}$$

and extended linearly to all of $E \otimes F$

关于 Kasparov Product 的一些理解：

从代数直觉上来说 Kaparov Product 是将中间的 B 也消掉了。其结果就是 $F \circ E := E \otimes_B F$.

从 Hilbert 模块结构来解读,这应该看成是内积的传递。这一点体现在 $\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F$ 中。这个表达式的右边其实完成了三个步骤：先在 E 中算出一个 B 元素 $b := \langle e_1, e_2 \rangle_E \in B$; 然后现用这个 B 元素作用于 F 上形成 $bf_2 \in F$; 最后再在 F 里算 C 值内积 $\langle f_1, bf_2 \rangle_F \in C$。

Example 2.10 More generally, let $\phi : A \to B$ be a *-algebra homomorphism between matrix algebras A and B. From it, we can construct a Hilbert bimodule E_ϕ in $\mathbf{KK}_f(A, B)$ as follows. Let E_ϕ be B as a vector space with the natural right B-module structure and inner product, but with A acting on the left via the homomorphism ϕ:

$$a \cdot b = \phi(a) b; \quad (a \in A, b \in E_\phi). \tag{3}$$

Exercise 2.8 Show that the association $\phi \rightsquigarrow E_\phi$ from Example 2.10 is *natural* in the sense that

1. $E_{\mathrm{id}_A} \simeq A \in \mathbf{KK}_f(A, A)$,
2. for *-algebra homomorphisms $\phi : A \to B$ and $\psi : B \to C$ we have an isomorphism

$$E_\psi \circ E_\phi \equiv E_\phi \otimes_B E_\psi \simeq E_{\psi \circ \psi} \in \mathbf{KK}_f(A, C), \tag{4}$$

that is, as $A - C$-bimodules.

Ideas to Solution: Let us talk about the meaning of the symbol $\simeq$ in the context of NCG first. If we see $E \simeq F$, it not only means there is a one-to-one mapping relation between the elements in the two sets, it also means "conservation of structure". More specifically, to fulfill $E \simeq F$, there must exist a biprojectivity $\Phi : E \to F$ such that:

1. $\Phi(a \cdot e) = a \cdot \Phi(e)$
2. $\Phi(e \cdot b) = \Phi(e) \cdot b$
3. $\langle \Phi(e_1), \Phi(e_2) \rangle_F = \langle e_1, e_2 \rangle_E$