

# My Note of Learning Non-commutative Geometry

Ye Ning

January, 28, 2026

## 目录

0.1 Chapter 2 . . . . . 2

## 0.1 Chapter 2

**Definition 2.4** A *representation* of a finite-dimensional  $*$ -algebra  $A$  is a pair  $(H, \pi)$  where  $H$  is a (finite-dimensional, complex) inner product space and  $\pi$  is a  $*$ -algebra map

$$\pi : A \rightarrow L(H).$$

A representation  $(H, \pi)$  is called *irreducible* if  $H \neq 0$  and the only subspaces in  $H$  that are left invariant under the action of  $A$  are  $\{0\}$  or  $H$ .

**对这个定义的理解:**这里所谓的 representation 其实就是把抽象代数  $A$  中的元素变成 Hilbert 空间  $H$  上的具体算子。也就是说,  $A$  本来是一个抽象的“算子代数”, 而  $L(H)$  是“真正的算子代数(矩阵)”; 而  $\pi$  则是把抽象算子变成具体算子的“解释器”。

为什么这里的映射必须是  $*$ -algebra map 呢? 原因是  $*$ -algebra  $A$  有加法、乘法、单位元, 同时  $A$  有  $*$  运算(类似共轭转置)。相应的, 为保持住这些结构,  $\pi$  就必须满足:

$$\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b) \quad \text{加法}$$

$$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) \quad \text{乘法}$$

及

$$\pi(a^*) = \pi(a)^* \quad \text{共轭}$$

尤其是这最后一条意味着抽象的“自伴算子”(厄米算子)会被表示成真正的“自伴矩阵”。

此外, 这里选择 Hilbert 空间也是有原因的。因为 Hilbert 空间有内积, 有范数, 有完备性, 可以在上面讨论算子的连续性、自伴性及谱。它是量子力学的自然舞台也是  $C^*$  的唯一合理载体。而关于 Hilbert 空间的  $L(H)$  的这种写法也有其特定的含义:  $L(H)$  代表了  $H$  上所有有界线性算子的集合, 换句话说就是所有  $n \times n$  复矩阵的集合。即

$$L(H) \cong M_n(C).$$

之所以这里不采用  $M_n(C)$  是因为只有在有限维的情况下  $L(H)$  才能和矩阵划等号, 而在无限维的情况下矩阵不再是合适的语言。但“线性算子”仍然是核心对象。所以数学家统一将其写成:

$$L(H) = \{T : H \rightarrow H | T \text{ 是有界线性算子}\}$$

另外, 这里强调“有界”的原因是在无限维的 Hilbert 空间里有些线性算子是“无界”的, 如微分算子。这种无界算子是不能被放进  $C^*$  代数里的, 也因此不能直接用于表示论。

**Definition 2.6** Two representations  $(H_1, \pi_1)$  and  $(H_2, \pi_2)$  of a  $*$ -algebra  $A$  are *unitarily equivalent* if there exists a unitary map  $U : H_1 \rightarrow H_2$  such that

$$\pi_1(a) = U^* \pi_2(a) U$$

**Definition 2.7** The *structure space*  $\hat{A}$  of  $A$  is the set of all unitary equivalence classes of irreducible representations of  $A$ .

**Definition 2.8: An algebra (bi)module:**

Let  $A, B$  be algebras (not necessarily matrix algebras). A left  $A$ -module is a vector space  $E$  that carries a left representation of  $A$ , i.e., there is a bilinear map  $A \times E \ni (a, e) \mapsto a \cdot e \in E$  such that

$$(a_1 a_2) \cdot e = a_1 \cdot (a_2 \cdot e); \quad (a_1, a_2 \in A, e \in E).$$

Similarly, a right  $B$ -module is a vector space  $F$  that carries a right representation of  $B$ , i.e., there is a bilinear map  $F \times B \ni (f, b) \mapsto f \cdot b \in F$  such that

$$f \cdot (b_1 b_2) = (f \cdot b_1) \cdot b_2; \quad (b_1, b_2 \in B, f \in F).$$

Finally, an  $A - B$ -bimodule  $E$  is both a left  $A$ -module and a right  $B$ -module, with mutually commuting actions:

$$a \cdot (e \cdot b) = (a \cdot e) \cdot b; \quad (a \in A, b \in B, e \in E).$$

**关于 (bi)module 定义 (Definition 2.8) 的一些看法:** 要正确理解这个定义中的内容我们需要了解什么是“模”。拿这里提到的  $B$ -module 来说, 可以将其看成一个集合, 而该集合的成员不一定是普通的数, 而是更抽象意义上的算子, 数当作是一种特殊的算子。因此这里提到的 Hilbert Module 可以被看成是 Hilbert Space 的一种推广。相应的这里提到的 vector space  $E$  和  $F$  也不是我们从线性代数那里学到的向量, 在那里组成向量的是一个一个的数。而这里的向量元素全部来自  $B$ -module, 即一个个的算子。因此这个向量是之前线性代数中的向量的一个推广。具体来说在 Hilbert module  $B^m$  里, 向量是一个  $m$  维列向量, 其中每个分量是  $B$  的元素。假如我们有  $B = M_2(C)$ , 那么:

$$e = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, A_i \in M_2(C).$$

也就是说该向量  $e$  的每一个分量都是一个  $2 \times 2$  的矩阵! 当然了, 必须注意的是这个例子也是个特殊情况, 而在一般情况下模  $B$  的元素有可能根本不是矩阵, 它可能是一个函数, 一个阿贝尔群或是一个算子, 等等。

**Exercise 2.7** Show that  $A - A$ -bimodule given by  $A$  itself is an element in  $\mathbf{KK}_f(A, A)$  by establishing that the following formula defines an  $A$ -valued inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : A \times A \rightarrow A$ :  $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$

**Idea of Solution:** 为了解这个问题, 最主要的是正确理解  $\langle a, a' \rangle_A = a^* a' : (a, a' \in A)$  中的  $a$ . 我们需要意识到这是属于  $A$  的一个元素, 因此是一个矩阵, 另外这是一个方阵。究其原因是  $A$  是自身的 bimodule, 也就是不论从左还是从右皆能作用其自身, 因此长度必须等于宽度。此外,

我们还需要正确理解方阵的内积： $\langle a, a' \rangle$ 。这里其实让  $a$  做了一个转置共轭然后与  $a'$  进行普通意义下的矩阵乘法。在些理解的基础上就不难验证定义 2.9 中诸条件如  $\langle e_1, a \cdot e_2 \rangle_E = \langle a^* \cdot e_1, e_2 \rangle$ 。其实就是利用乘法的结合律。

**How to understand the Definition of the balanced tensor product (BTP) ?** If  $E$  is a right  $B$ -module, and  $F$  is a left  $A$ -module, we can form the *balanced tensor product*:

$$E \otimes_B F := E \otimes F / \left\{ \sum_i (e_i a_i \otimes f_i - e_i \otimes a_i f_i) : a_i \in B, e_i \in E, f_i \in F \right\}. \quad (1)$$

In other words, the quotient imposes  $A$ -linearity of the tensor product, i.e., in  $E \otimes_B F$  we have

$$ea \otimes_B f = e \otimes_B af; \quad (a \in B, e \in E, f \in F).$$

**总结和 AI 讨论之后的一些看法：**首先，关于这个 BTP 的直观理解是我们在使用 quotient 粘合这里的  $E$  和  $F$ 。如果直接做代数张量积  $E \otimes F$ ，我们会得到一个巨大的空间，其中  $e \cdot b \otimes f$  与  $e \otimes b \cdot f$  是两个完全不同的元素。但在组合态射时，我们强制令其代表同一个“路径”。其次，从代数的角度来看在代数张量积  $E \otimes F$  中，元素的形式是：

$$\sum_i e_i \otimes f_i.$$

如果我们允许  $E$  的右  $B$  作用与  $F$  的左  $B$  作用独立存在，我们就会得到过多的自由度。这会导致无法定义  $A-C$  双模结构；无法定义内积；无法定义组合态射。为此我们进行了 balanced quotient:

$$E \otimes_B F := (E \otimes F) / N,$$

其中  $N$  是由所有

$$eb \otimes f - e \otimes bf$$

生成的子空间。换句话说  $N$  是所有“不兼容  $B$ ”的误差项，而 quotient 的作用是将所有误差项都杀掉。其结果就是  $B$  的左右作用被强制一致； $B$  不再出现在结果中，最终得到一个真正的  $A-C$  模块了。最后让我们从 Hilbert 模块版的角度来拆解一下这个定义的意义和来源。如果我们想定义一个  $C$  值内积：

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle \in C.$$

但是  $E$  的内积给的是  $B$ ：

$$\langle e_1, e_2 \rangle_E \in B.$$

与此同时  $F$  的内积却是：

$$\langle f_1, f_2 \rangle_F \in C.$$

唯一能把它们接起来的方式是：

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F.$$

此外还需要注意的是在  $e \otimes bf$  的计算中优先级永远是先算  $bf$ ，再做张量积。

**Definition 2.11** The *Kasparov product*  $F \circ E$  between Hilbert bimodules  $E \in \mathbf{KK}_f(A, B)$  and  $F \in \mathbf{KK}_f(B, C)$  is given by the balanced tensor product  $F \circ E := E \otimes_B F$  ( $E \in \mathbf{KK}_f(A, B), F \in \mathbf{KK}_f(B, C)$ ), so that  $F \circ E \in \mathbf{KK}_f(A, C)$ , with  $C$ -valued inner product given on elementary tensors by

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F, \quad (2)$$

and extended linearly to all of  $E \otimes F$

**关于 Kasparov Product 的一些理解：**

从代数直觉上来说 Kasparov Product 是将中间的  $B$  也消掉了。其结果就是  $F \circ E := E \otimes_B F$ 。

从 Hilbert 模块结构来解读，这应该看成是内积的传递。这一点体现在  $\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle_{E \otimes_B F} = \langle f_1, \langle e_1, e_2 \rangle_E f_2 \rangle_F$  中。这个表达式的右边其实完成了三个步骤：先在  $E$  中算出一个  $B$  元素  $b := \langle e_1, e_2 \rangle_E \in B$ ；然后现用这个  $B$  元素作用于  $F$  上形成  $bf_2 \in F$ ；最后再在  $F$  里算  $C$  值内积  $\langle f_1, bf_2 \rangle_F \in C$ 。

**Example 2.10** More generally, let  $\phi : A \rightarrow B$  be a  $*$ -algebra homomorphism between matrix algebras  $A$  and  $B$ . From it, we can construct a Hilbert bimodule  $E_\phi$  in  $\mathbf{KK}_f(A, B)$  as follows. Let  $E_\phi$  be  $B$  as a vector space with the natural right  $B$ -module structure and inner product, but with  $A$  acting on the left via the homomorphism  $\phi$ :

$$a \cdot b = \phi(a)b; \quad (a \in A, b \in E_\phi). \quad (3)$$

**Exercise 2.8** Show that the association  $\phi \rightsquigarrow E_\phi$  from Example 2.10 is *natural* in the sense that

1.  $E_{\text{id}_A} \simeq A \in \mathbf{KK}_f(A, A)$ ,
2. for  $*$ -algebra homomorphisms  $\phi : A \rightarrow B$  and  $\psi : B \rightarrow C$  we have an isomorphism

$$E_\psi \circ E_\phi \equiv E_\phi \otimes_B E_\psi \simeq E_{\psi \circ \phi} \in \mathbf{KK}_f(A, C), \quad (4)$$

that is, as  $A - C$ -bimodules.

**Ideas to Solution:** Let us talk about the meaning of the symbol  $\simeq$  in the context of NCG first. If we see  $E \simeq F$ , it not only means there is a one-to-one mapping relation between the elements in the two sets, it also means "conservation of structure". More specifically, to fulfill  $E \simeq F$ , there must exist a biprojectivity  $\Phi : E \rightarrow F$  such that:

1.  $\Phi(a \cdot e) = a \cdot \Phi(e)$
2.  $\Phi(e \cdot b) = \Phi(e) \cdot b$
3.  $\langle \Phi(e_1), \Phi(e_2) \rangle_F = \langle e_1, e_2 \rangle_E$