

D. 芽芽的期末考

Description

本題為 Output Only。

本題有一些怪怪的上傳限制，請詳閱題目敘述再作答。

芽芽除了要兼顧繁重的高中課業以外，他同時也是一名熱愛演算法，因此認真參與資訊之芽算法班課程的好學生¹。這陣子，期末考的季節又要到來，芽芽要一邊準備學校的期末考，也要準備資芽的二階認證考。本來，芽芽對於自己在二階認證考的表現有十足的自信，不幸的是，資芽的講師們忽然發瘋說要新增期末筆試！渴望著優秀結業的芽芽非常慌張，於是他找上了你。

期末考考卷在這份 PDF 的後面，請你告訴芽芽答案！請將考卷答案上傳到 CMS 上。另外，芽芽偷偷找了一個講師來幫忙，所以你上傳答案之後，可以即時得知這份作答會得到的分數，不過你只能知道總分，而不能知道各題詳細的得分狀況。還有，為了防止作弊被發現，你**只能上傳 5 次**²。而且，那名講師想要提高作弊難度，因此**你得到的分數，會是你最後一次提交得到的分數**。

Output

請直接把你的作答內容上傳到 CMS 上！不要上傳任何程式碼。

你上傳的檔案之中應該要包含 10 行，其中第 i 行是第 i 題的答案，每一題答案的輸出格式詳細請參考考卷上「在答案卷上的作答格式」的說明，大致如下：

- 單選題：一個大寫英文字母，代表你選擇的選項。
- 多選題：一些大寫英文字母，中間不要有空格，例如 ACD，代表你選擇的選項。**請按照字母順序並且不要有重複的選項。**
- 填充題：所有填充題的答案都是一個數字，請寫出這個數字。
- 排列題：排列題的所有項目都會是大寫英文字母，請寫出答案的排列，中間不要有空格，例如 ADCEB，所有項目都要出現恰好一次。

考卷中每一題都有作答範例，參考作答範例的格式，把第 i 題的答案放在第 i 行就對了。如果你不確定你的作答方式是不是符合格式，可以在 CMS 上提問，芽芽可以幫你舉手問監考講師（但你不要自己舉手，不然會被發現你在作弊）。

你不作答的題目可以是空行³，如果你最後幾題不作答，也可以沒有那幾行，但請不要輸出不符合格式要求的字串，也不要輸出多餘的換行空白（最後一行的最後面可以有換行），不然讀卡機可能會有各種不能預期的結果，例如該題 0 分、附近的題目 0 分，或是整張考卷 0 分等

¹等一下就不是了。

²當然是一隊只能 5 次。

³請特別注意行號是否正確，講師不會特別幫你你是不是偏了一格

等。

配分

考卷有 10 題，每答對一題就會得到 10 分。請特別注意：

- 一隊只能提交 5 次。千萬不要傳錯檔案，講師不會還你次數。
- 你最終得到的分數是最後一次提交的成績。

Hint

- 如果你非常害怕用手打文字檔案會有多出的換行空白，可以考慮用程式輸出答案，在 main 的最一開始加上 `freopen("output.txt", "w", stdout)` 就可以把程式輸出放進 `output.txt` 這個檔案裡。
- 相對於芽芽和其他筆試考場內的考生，你擁有「有電腦和網路」這個優勢。
- 嗯？你說有很多題目根本不能用手做，芽芽考太高分不是會引來懷疑嗎？芽芽沒想到這件事，所以你也不用想。

資訊之芽算法班期末筆試

本次考試共有 10 題，一題 10 分，每一題都要答案完全正確才會給分。請在答案卷上的第 i 行處寫下第 i 題的答案，並嚴格遵守作答格式。例題的答案不需要寫在答案卷上。

單選題

本大題中，每一題都恰有一個選項是正確答案。對於每一題，請在作答處寫下一個大寫英文字母，代表你選擇的選項。

例. AtCoder Regular Contest¹ 通常都在星期日舉辦，但偶爾會在星期六，以下是一些星期六的日期，請問哪一天**沒有** AtCoder Regular Contest？

(A) 2023/01/14 (B) 2023/02/25 (C) 2023/04/08 (D) 2023/07/01 (E) 2023/12/09

例題的正確答案是 (D)，在答案卷上作答時應該寫下 D。

1. 2024 資訊之芽算法班**沒有**教以下哪個主題？

(A) 動態規劃 (B) 計算幾何 (C) 字串 (D) 線段樹 (E) 分治

2. 以下程式碼的輸出為何？

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 int cnt = 0;
5 int g(int x);
6 int f(int x){
7     cnt++;
8     if(x == 0) return 1;
9     return g(x + x / 2);
10 }
11 int g(int x){
12     cnt++;
13     return f(x / 2);
14 }
15 int main(){
16     f(20240622);
17     cout << cnt << "\n";
18 }
```

(A) 110 (B) 111 (C) 112 (D) 113 (E) 114

¹<https://atcoder.jp/contests/archive?ratedType=2&category=0&keyword=>

3. 你有看過有人線段樹寫左開右閉嗎？我是沒有看過。假設今天你心血來潮，要寫一個區間全部都以左開右閉（區間 l, r 代表 $(l, r]$ ，也就是包含 r 但不包含 l ）表示的，支援區間求和的線段樹，你應該要在以下的 __ (1) __ 和 __ (2) __ 中填入什麼？

```
// query(ql, qr) 要回傳 (ql, qr] 的總和，保證  $0 \leq ql < qr \leq n$ 
// 目前在節點 id，節點 id 對應的範圍是 (L, R]
int query(int ql, int qr, int L = 0, int R = n, int id = 1){
    if(__ (1) __){
        return seg[id];
    }
    // 左子節點是 (L, M]，右子節點是 (M, R]
    int M = (L + R) / 2;
    if(qr <= M) return query(ql, qr, L, M, 2 * id);
    else if(__ (2) __) return query(ql, qr, M, R, 2 * id + 1);
    else return query(ql, qr, L, M, 2 * id) + query(ql, qr, M, R, 2 * id + 1);
}
```

- (A) $ql \leq L \ \&\& \ R \leq qr; ql \geq M$ (B) $ql \leq L \ \&\& \ R \leq qr; ql > M$
 (C) $ql < L \ \&\& \ R \leq qr; ql \geq M$ (D) $ql < L \ \&\& \ R \leq qr; ql > M$

多選題

本大題中，每一題的選項都有至少一個是正確答案。對於每一題，請在作答處寫下一些大寫英文字母，代表你選擇的選項。作答時，請按照字母順序寫下選項，中間不要有空格或任何其他分隔符號，且不要寫重複的選項。

例. 以下是一些圖靈獎 (Turing award) 得主，請選出所有在世的人。

- (A) Edsger Wybe Dijkstra (B) Robert Endre Tarjan (C) Adi Shamir
 (D) Richard Wesley Hamming (E) John Edward Hopcroft

例題的正確答案是 (B)(C)(E)，在答案卷上作答時應該寫下 BCE。

4. 還記得換零錢問題嗎？有 n 種硬幣面額 $1 = c_1 < c_2 < \dots < c_n$ ，你想要湊出恰好 X 元，至少要用幾個硬幣？有一個 Greedy 作法是這樣的：

Input: c_1, c_2, \dots, c_n, X

$ans \leftarrow 0$

for i from n to 1 **do**

$cnt \leftarrow \lfloor \frac{X}{c_i} \rfloor$

$ans \leftarrow ans + cnt$

$X \leftarrow X - cnt \times c_i$

end for

Output ans

也就是盡量先用最大的面額。如你所知，這個作法不一定在任意的面額組合下都是正確的。對於一個特定的面額組合，要是對於任何正整數 X ，這個演算法都會輸出正確答案，那麼我們就稱這個面額組合是一個 canonical coin system。請選出以下所有的 canonical coin system。

- (A) 1, 2, 4, 8 (B) 1, 2, 3 (C) 1, 6, 9
 (D) 1, 5, 10, 32, 50, 100 (E) 1, 5, 10, 50, 100 (F) 1, 3, 10

5. 井字遊戲的規則是，有一個 3×3 的棋盤，一開始所有格子都是空的，先手跟後手輪流行動，輪到先手時，先手可以選一個空格子，在裡面畫上 X，而輪到後手時，後手可以選一個空格子，在裡面畫上 O。先讓自己的符號佔據一個直排、橫列或是對角線的人就獲勝了，如果所有格子都填滿了還沒有人獲勝，那兩人平手。以下是遊戲在某個時刻的盤面，請選出所有先手有必勝策略的盤面。

X		O
X	O	X
	O	X

(A)

(B)

X	O	X
		O
	O	X

(C)

	O	X
X		O
		X

(D)

X	X	O

(E)

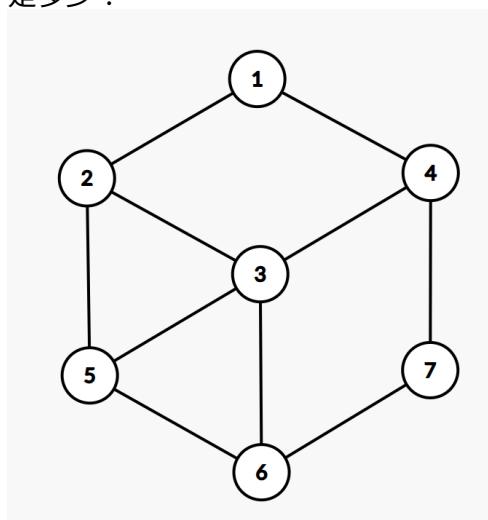
	O	X

(F)

填充題

本大題中，每一題的答案都是一個正整數。對於每一題，請在作答處寫下代表答案的正整數，不要有前導 0。

- 例. 一張無向圖的最小點覆蓋 (Minimum Vertex Cover) 的定義是，一個大小最小的點的集合，滿足任一條邊都有至少一個端點在這個集合之中。請問以下這張圖的最小點覆蓋大小是多少？

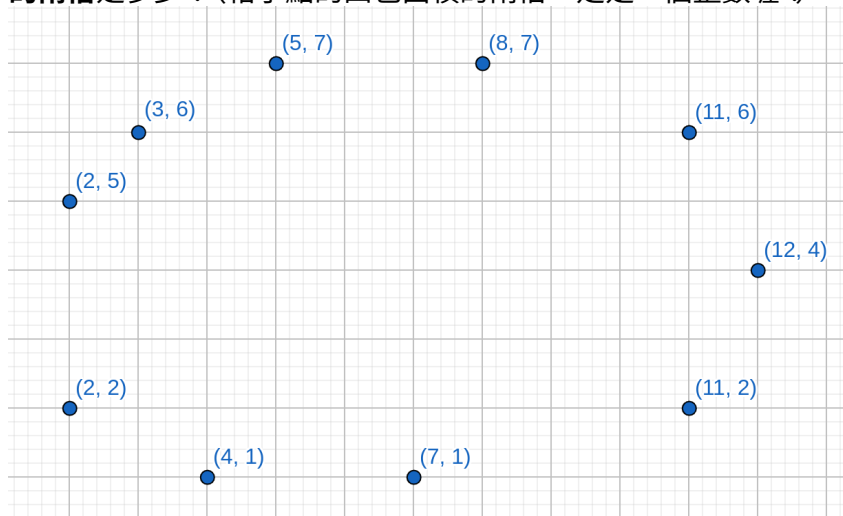


例題的正確答案是 4，在答案卷上作答時應該寫下 4。

6. 有一個長度為 40 的陣列 x ，每一項都可以是 0 或 1，請問有幾種這樣的陣列 x 會使以下這個式子是 true？

```
(!x[15] || !x[11] || x[3]) && (!x[6] || !x[8] || !x[9]) && (!x[4] || !x[6]
|| !x[15]) && (!x[0] || x[10] || !x[2]) && (!x[10] || x[3] || x[19]) && (!x[5]
|| x[3] || x[17]) && (!x[19] || x[0] || x[11]) && (x[5] || x[18] || x[1]) &&
(!x[3] || x[17] || x[18]) && (!x[11] || x[8] || x[15]) && (!x[7] || x[8] ||
!x[4]) && (x[15] || x[19] || x[13]) && (!x[10] || x[15] || !x[6]) && (!x[1]
|| !x[7] || !x[6]) && (!x[17] || x[7] || x[4]) && (x[12] || x[17] || !x[5])
&& (!x[10] || !x[8] || !x[17]) && (!x[9] || x[3] || x[5]) && (!x[15] || x[17]
|| !x[8]) && (!x[19] || x[10] || x[6]) && (x[21] || x[37] || !x[30]) && (!x[25]
|| x[24] || x[35]) && (x[22] || x[23] || x[36]) && (x[39] || x[35] || x[28])
&& (x[35] || !x[36] || x[39]) && (!x[34] || x[39] || !x[22]) && (x[29] || x[30]
|| x[36]) && (x[32] || x[27] || x[23]) && (x[27] || x[31] || x[34]) && (!x[28]
|| x[31] || !x[32]) && (x[37] || x[22] || !x[24]) && (!x[39] || !x[28] || !x[37])
&& (!x[30] || x[22] || x[32]) && (x[34] || x[28] || x[20]) && (!x[33] || x[37]
|| !x[28]) && (x[36] || x[30] || x[20]) && (!x[22] || x[23] || !x[36]) && (!x[33]
|| x[38] || !x[24]) && (!x[33] || x[20] || x[27]) && (x[37] || !x[30] || x[34])
```

7. 你可以移除以下這些點的其中一個，請問移除一個點之後，剩下的點的最小可能凸包面積的兩倍是多少？（格子點的凸包面積的兩倍一定是一個整數喔！）



排列題

本大題中，每一題都有若干個項目，每個項目的編號都是一個大寫英文字母，你的目標會是將它們以題目指定的順序排序。對於每一題，請在作答處寫下代表答案的排列，中間不要有空格或任何其他分隔符號，每個項目要出現恰好一次。

例. 以下是一些機場，請將它們由北至南排序。（以 2024/6/19 17:18 時中文維基百科上寫的座標為準。）

(A) 香港國際機場 (B) 臺北松山機場 (C) 高雄國際機場 (D) 臺灣桃園國際機場

例題的正確答案是 (D)(B)(C)(A)，在答案卷上作答時應該寫下 DBCA。

8. 以下是一些資芽講師的名字，請將它們按照姓名總筆劃數，由小到大排序。總筆劃數一樣的，照項目編號的字母順序小到大排序。

(A) 賴昭勳 (B) 王榆立 (C) 陳俊安 (D) 邱翊均 (E) 黃允謙

9. 請將以下的 $T(n)$ 按照複雜度由小到大排序。複雜度一樣的，照項目編號的字母順序小到大排序。

$$(A) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ T(n-1) + n, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(B) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(C) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(D) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(E) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n^2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(F) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n \log n, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(G) T(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \leq 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n\alpha(n), & \text{otherwise} \end{cases}, \alpha(n) \text{ 是反阿克曼函數 (inverse Ackermann function).}$$

10. 有一個公正的六面骰，也就是骰出每一面的機率都是 $1/6$ ，請將以下事件按照發生的機率，由小到大排序。

- (A) 不斷丟這個骰子，直到第一次骰出 6 為止，失敗（骰出不是 6）的次數 ≥ 10 次。
 (B) 不斷丟這個骰子，直到第一次骰出 6 為止，失敗（骰出不是 6）的次數 ≥ 20 次。
 (C) 丟這個骰子 5 次，骰出偶數的次數 ≥ 4 。
 (D) 丟這個骰子 10 次，骰出偶數的次數 ≥ 8 。
 (E) 丟這個骰子 20 次，骰出偶數的次數 ≥ 16 。