东 南 大 学 考 试 卷（答案）（A 卷）

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

课程名称 概率论与数理统计 考试学期 11-12-3 得分

适用专业 全校 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$ 表示标准正态分布的分布函数，

$\Phi(-1.645)=0.05$;　$\Phi(0)=0.5$;　$\Phi(1)=0.8413$

$\Phi(1.3)=0.9032$;　$\Phi(1.96)=0.975$;　$\Phi(2)=0.9772$

一、填充题（每空格 2’，共 38’；过程班共 34’）

1) 已知 P(B)=P(A)=0.2，A 和 B 相互独立,则 P(A-B)=__0.16__;P(AUB)=__0.36__。

2) 一盒中有 2 个白球，3 个黑球，每次抽取一球，从中不放回地抽取两次，则第二次取到黑球的概率为__0.6__，取到两个球颜色相同的概率为__2/5__。

3) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,4), P(X<1)=$ _0.5__。（过程班不做）

4) 设 $W(t)$ 是参数为 σ^2 的 $Wiener$ 过程，则随机过程 $X(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}W(t), t>0$ 的一维概率密度函数 $f(x;\ t)=$ __$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-x^2/2\}$__。（过程班做）

5) 随机变量 X，Y 独立同分布，都服从正态分布 N(1，4)，则 P(X-Y> $2\sqrt{2}$)=__0.1587__。

6) 随机变量 X，Y 的联合分布律为：P(X=0,Y=0)=0.2; P(X=0,Y=1)=0.3; P(X=1,Y=0)=0.3; P(X=1,Y=1)=0.2. 则 X+Y 分布律为__p(X+Y=0)=0.2;P(X+Y=1)=0.6;P(X+Y=2)=0.2__。E[XY]= __0.2__。（过程班不做）

7) 随机变量 X，Y 的相关系数为 0.5，则 5-2X，和 Y-1 的相关系数为__-0.5__。

8) 设随机变量序列 {Xn,n=1,2,…} 独立同分布，$EX_1=2$, $DX_1=2$, 则 $\frac{1}{n}(X_1^2+X_2^2+\ldots+X_n^2)\xrightarrow{p}$ __6__。

9) 设总体 X 服从正态分布 $N(1,2)$, $X_1, X_2, ..., X_{10}$ 是来此该总体的样本，$\bar{X}, S^2$ 分别表示样本均值和样本方差， 则 $E\bar{X}=$ __1__，$E(\bar{X}S^2)=$ __2______。

10) 随机变量 X 的分布律为 P(X= -1)=P(X=1)=1/2,则其分布函数为____F(x)=0,x<-1;F(x)=0.5,-1<=x<1;F(x)=1,x>=1;____________。

11) 随机变量 X 服从 [0,1] 上的均匀分布，则 Y= -2X+1 的密度函数为___U[-1,1],f(y)=0.5;-1<y<1;f(y)=0,其他。______________。

12) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 N(0,4) 的简单随机样本，则 $\frac{1}{4}(X_1^2+X_2^2+X_4^2)$ 服从 $\underline{\chi^2(3)}$ 分布，若 $c\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}} \sim t(2)$，则常数 $c=$ __1__。

13) 设某假设检验问题的水平 α =0.1,根据样本得到的结论是拒绝原假设,则可能犯哪一类错误____I_____(填 I，II)，犯错误的概率为____0.1_____(填数值或不能确定)。

14) 设总体 $X \sim f(x,a)$，a 为未知参数，若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是来自某总体的简单随机样本，$\bar{X}, S^2$ 分别表示表示样本均值和样本方差。设 $\frac{\bar{X}-a}{S} \sim U[-2,2]$(均匀分布)，则 a 的置信度为 80%的置信区间为 $\underline{\bar{X}\pm 1.6S}$。

二、(10’) 设有一个箱子中有红球 4 只，白球 6 只.从该箱中任取一球涂上红色后放回去,然后再从该箱中任取一球.（1）求第二次取出的球为红球的概率；（2）如果第二次取出的球为红球，则第一次取出的球是红球的概率是多少？

解：$A-$ 第一次取得红球；B 第二次取出红球；
$P(A)=2/5; P(\bar{A})=3/5; P(B|A)=2/5; P(B|\bar{A})=1/2;$

(1) $$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$
$$=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{50}=0.46$$,

(2) $$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{4/25}{23/50}=\frac{8}{23}$$

三、(15’) 设随机变量（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(2x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}.$$

求（1）常数 a; (2)Y 的边缘密度函数;（3）求条件概率 P(Y<1|X=1)。(过程班不做该题)。

$(1)\iint f(x,y)dxdy=1;.$

$\int_0^\infty\int_0^\infty ae^{-(2x+y)}dxdy=1;.a=2;$

$(2)f_Y(y)=\int_{-\infty}^\infty f(x,y)dx.=\int_0^\infty 2e^{-(2x+y)}dx(1')=e^{-y};y>0;$

$f_Y(y)=0;y\le 0.$

(3)易见 X 和 Y 相互独立，所以

$P(Y<1\,|\,X=1)=P(Y<1)=\int_{-\infty}^1 f_Y(y)dy=\int_0^1 e^{-y}dy(1')=1-e^{-1}$

四、(10’)设随机变量 X~U[1,2],Y~U[0,2],X 和 Y 相互独立，令 Z=Y+2X，求随机变量 Z 的概率密度函数 $\boldsymbol{f_Z(z)}$。（过程班 9’）.

解:因为X和Y相互独立,故 $(X,Y)\sim f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1/2 & 1<x<2,0<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(Y+2X\le z)$$

$$=\iint\limits_{y+2x\le z} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-2x}f(x,y)dydx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-2x)dx,$$

$$1<x<2;0<z-2x<2,f(x,z-2x)=0.5;$$

$$z<2,f_Z(z)=0;$$

$$2<z<4;f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-2x)dx$$

$$=\int_1^{z/2}0.5dx=z/4-1/2;$$

$$4<z<6;f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-2x)dx$$

$$=\int_{(z-2)/2}^{2}0.5dx=3/2-z/4;$$

$$z>6,f_z(z)=0;$$

$$f_z(z)=\begin{cases}z/4-1/2 & 2<z<4\\ 3/2-z/4 & 4<z<6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

或

$$(X,Y) \sim f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 1 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(Y + 2X \le z)$$

$$= \iint\limits_{y+2x \le z} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-2x} f(x,y)dydx$$

$$z < 2, F_Z(z) = 0;$$

$$2 < z < 4; F_Z(z) = \int_1^{z/2} \int_0^{z-2x} 0.5 dydx =$$

$$= \int_1^{z/2} 0.5(z-2x)dx = z^2/8 - z/2 + 1/2;$$

$$4 < z < 6;$$

$$F_Z(z) = 1 - \int_{(z-2)/2}^{2} \int_{z-2x}^{2} 0.5 dydx =$$

$$= 1 - \int_{(z-2)/2}^{2} 0.5(2 - z + 2x)dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(z^2/4 - 3z + 9) = -z^2/8 + 3z/2 - 7/2;$$

$$or\ F_Z(z) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(3 - z/2)(6 - z).$$

$$z > 6, F_z(z) = 1;$$

求导得到密度函数

$$f_z(z) = \begin{cases} z/4 - 1/2 & 2 < z < 4 \\ 3/2 - z/4 & 4 < z < 6 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

五、(10’)利用中心极限定理求大约至少需要重复投掷一枚硬币多少次才能使得正面出现的频率和真实的概率之差的绝对值小于 0.05 的概率大于 0.95?

解：设需投 n 次，正面出现的概率为 p;正面出现的次数为 k,则

$$k \sim b(n,p), Ek = np; Dk = np(1-p)$$

$$P(|\frac{k}{n} - p| > 0.05) < 0.95.$$

$$P(|\frac{k}{n}-p|<0.05)=P(\frac{|k-np|}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}});\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\approx N(0,1)$$

$$\approx 2\Phi(\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}})-1>0.95.$$

$$\Phi(\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}})>0.975;.\frac{0.05n}{\sqrt{np(1-p)}}>1.96$$

$$\sqrt{n}>39.2\sqrt{p(1-p)}>39.2/2=19.6$$

$$n>19.6^2=384.16,.$$

取 n=385

六、(10')设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布,其分布率为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,...;\lambda>0$$

$X_1,\ldots X_n$ 为来自该总体的样本, (1)求参数 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$, (2) 证明 $\hat{\lambda}$ 为 λ 的无偏估计量.

解：

$$l(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i!}\lambda^{n\bar{X}}e^{-n\lambda},(\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)$$

$$\ln l(\lambda)=\ln(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i!})+n\bar{X}\ln\lambda-n\lambda$$

$$\frac{d\ln l(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n\bar{X}}{\lambda}-n=0;.\hat{\lambda}=\bar{X};$$

$$E\hat{\lambda}=E\bar{X}=EX=\lambda$$

所以，$\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计量.

七、 (7')设总体 X 服从正态分布 N (u, 1), 现有来自该总体样本容量为 25 的样本, 其样本均值为 2.4, 试检验 H_0: u=2.0 v.s. H_1: u$\neq$2.0.(检验水平 $\alpha=0.05$)

解：检验统计量 $U=\frac{\bar{X}-2}{1/5}\sim N(0,1);u_{0.025}=1.96$

拒绝域：$D=\{(X_1,...,X_{25})\,|\,|U|>1.96\}$

U 的观测值，U=5（2.4-2）=2>1.96;

拒绝原假设。

（以下两题过程班做）

八、(5’)设随机过程 $X(t)=A\cos(t+\Theta),\quad -\infty<t<+\infty$，其中 A 是服从参数 λ 的指数分布 $e(\lambda)$，其概率密度函数为 $f(a)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda a}, a\ge 0\\ 0, a<0\end{cases}$

Θ 是在 $[0,\ \pi]$ 上服从均匀分布，即 $\Theta\sim U(0,\pi)$；且 A 与 Θ 独立，求：$X(t)$ 的相关函数 $R_X(s,t)$。

解：

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=EX(s)X(t)\\&=E(A^2\cos(s+\Theta)\cos(t+\Theta))\\&=EA^2E\cos(s+\Theta)\cos(t+\Theta)\end{aligned}$$

其中 $EA^2=DA+(EA)^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$，

$$E\cos(s+\Theta)\cos(t+\Theta)=-\frac{1}{2}E\cos(s+t+2\Theta)+\frac{1}{2}\cos(s-t)=\frac{1}{2}\cos(s-t)$$

所以 $R_X(s,t)=\dfrac{1}{\lambda^2}\cos(s-t)$

九、(15’)设质点在 1,2,3,4 上做随机游动，假设只能在时刻 n=1,2，… 移动，且只能停留在 1,2,3,4 点上。当质点转移到 2,3 点时，它以 1/3 的概率向左，向右移动一个格或停留原处，当质点移动到 1 点时，以概率 1 向右移动一个格，当质点移动到 4 点时，以概率 1 向左移动一个格。以 X_n 表示时刻 n 质点所处的位置，X_0 表示初始时刻 0 质点所处位置，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为齐次马氏链。

（1）写出一步转移概率矩阵；

（2）若初始时刻质点位于点 1，求概率 $P(X_2=3, X_4=2, X_5=1)$；

（3）证明 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 具有遍历性，并求出极限分布。

解：

状态空间 $I=\{1,2,3,4\}$

（1） $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）初始分布为： $\boldsymbol{p}(0)=(1,0,0,0)$

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/9 & 5/9 & 2/9 & 1/9 \\ 1/9 & 2/9 & 5/9 & 1/9 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$P(X_2=3,X_4=2,X_5=1)=p_{13}(2)p_{32}(2)p_{21}(1)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{81}$

（3） $P(4)=P(2)^2=(p_{ij}(4))$，可以算的 $p_{ij}(4)>0$ 对于任意的 i,j,故马氏链 $\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 具有遍历性。

设平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4)$ 解方程组 $\begin{cases} \boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_3=1 \\ \pi_i\geq 0,i=1,2,3,4 \end{cases}$

得 $\pi_1=\pi_4=\frac{1}{8}$, $\pi_2=\pi_3=\frac{3}{8}$，所以极限分布为 $(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8})$