

习 题 课 四

一、问答题

1. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, $g(x)$ 在 x_0 间断, 能否断定 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 间断?
 $f(x)g(x)$ 呢?
2. 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 间断, 能否断定 $f(x)+g(x)$ 在 x_0 间断?
3. 若 $|f(x)|$ 在 x_0 连续, 能否断定 $f(x)$ 在 x_0 连续?
4. 分段函数是否一定有间断点?
5. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) > 0$, 能否断定方程 $f(x)=0$ 在 (a, b) 内必无实根?

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$, 则常数 a, b 满足()
(A) $a < 0, b < 0$; (B) $a > 0, b > 0$;
(C) $a \leq 0, b > 0$; (D) $a \geq 0, b < 0$ 。
2. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)=5$, 则 $f(x_0)=()$
(A) 5 (B) x_0
(C) 无定义 (D) -5
3. 设 $f(x)=\begin{cases} \ln(\cos x)x^{-2}, & x \neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a=()$
(A) 0; (B) 1; (C) ∞ ; (D) $-\frac{1}{2}$ 。

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x + x \sin \frac{1}{x^2} & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 ()

(A) 连续点 (B) 第一类不可去间断点

(C) 可去间断点 (D) 第二类间断点

5. 设 $f(x), \phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 连续, 且 $f(x) \neq 0$, $\phi(x)$ 有间断点, 则

(A) $\phi(f(x))$ 必有间断点; (B) $[\phi(x)]^2$ 必有间断点;

(C) $f(\phi(x))$ 必有间断点; (D) $\frac{\phi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

三、填空题

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x < 0 \\ ax+b, & 0 \leq x \leq 1 \\ \arctan \frac{1}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$, 在所定义的区间上连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$;
 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

四. 问 a, b 取何值时, 下列函数在定义域内连续:

1. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ \sin(ax+b) & x \leq 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$

五、求下列极限

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 5}{x^3 + 1} \right)^{2-x^3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi}{2} x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} (e^{x^2} + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}}$$

六、证明题

1. 证明方程 $x - 2\sin x = a (a > 0)$ 至少有一个正实根。

2. 证明方程 $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, 其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$,

在 (λ_1, λ_2) 和 (λ_2, λ_3) 内至少各有一个实根。

3. 证明: 当 n 为奇数时, 方程 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ 至少有一个实根。

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f(f(x)) = x$, 证明在 $(-\infty, +\infty)$ 内至少有一个 x_0 满足 $f(x_0) = x_0$ 。

5. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$ 的连续性。

6. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) > 0$, 试证: 存在 x_0 的某邻域, 使得在此邻域内有 $kf(x) > f(x_0)$, 其中 $k > 1$ 。

7. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x < 0. \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点, 并说明其类型。