习 题 课 十 四

一、选择题

1．微分方程 $y''-6y'+9y=x^2e^{3x}$ 的待定特解为（　　）

（A） $y^*=ax^2e^{3x}$；

（B） $y^*=x^2(ax^2+bx+c)e^{3x}$；

（C） $y^*=x(ax^2+bx+c)e^{3x}$；

（D） $y^*=ax^4e^{3x}$（a，b 为待定常数）。

2．微分方程 $y''-4y'-5y=e^{-x}+\sin 5x$ 的待定特解为（　　）

（A） $y^*=ae^{-x}+b\sin 5x$；

（B） $y^*=ae^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$；

（C） $y^*=axe^{-x}+b\sin 5x$；

（D） $y^*=axe^{-x}+b\cos 5x+c\sin 5x$。

3. 若 y_1, y_2, y_3 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个线性无关的解，则该方程的通解为

$A)$ $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$

(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

4. 若 $y=e^{3x}+(1+x)e^{-x}$ 为方程 $y''+ay'+by=ce^{-x}$ 的解，则该方程的通解为

(A) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+xe^{-x}$　$(B) y=C_1e^{3x}+C_2(1+x)e^{-x}$

$(C) y=C_1e^{3x}+(1+x)e^{-x}$　(D) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+e^{-x}$

二、填空题

1．设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数），为某二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为________________。

2．$\frac{d^4y}{dx^4}+3\frac{d^3y}{dx^3}=0$ 的通解是______________________________。

3．已知二阶非齐次线性方程 $y''+P(x)+Q(x)y=f(x)$ 的三个特解：$y_1^*=x-(x^2+1)$，$y_2^*=3e^x-(x^2+1)$，$y_3^*=2x-e^x-(x^2+1)$，则该方程满足 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 的特解为___________________________。

三、确定下列方程的特解形式

1. $y''-4y'=\sin 4x$

2. $5y''-6y'+5y=e^{\frac{3}{5}x}\cos x$

3. $y''+y'=2x^3-x-2$　　4. $y''-4y'+4y=e^{2x}$

5. $y''+y'+y=(7\cos x-4\sin x)\ e^x$

四、解答题

1. 求方程 $y''-3y'+2y=16x+\sin 2x+e^{2x}$ 的通解.

2.设$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x), f(0)=0, g(x)\neq 0,\ F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

⑴ 求 $F(x)$.

(2) 若由 $y=1, x=0, x=a(a>0)$与 $y=F(x)$ 围成的图形面积为 $S(a)$，求 $\lim\limits_{a\to+\infty}S(a)$。

3. 设过原点的曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$上有二阶导数，且满足 $\int_0^x(x+2-t)f'(t)\ dt=x-f'(x)$，求 $f(x)$.

4．设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

5．设 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 是某个二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。

6．求微分方程 $xy''-2y'+\frac{2}{x}y=x^2$ 满足条件 $y(1)=\frac{1}{2}$，$y'(1)=\frac{7}{2}$ 的特解。

7. 利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^{x}$ 化简，并求出原方程的通解。

8．设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点（$\frac{1}{2}$,0）。

①试求曲线 L 的方程；

②求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小？

9．设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求出函数 $y=y(x)$ 的极值。

10．一个半球体状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积成正比，比例常数 $k>0$。假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状，已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的 $\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少小时？