习 题 课 十 一

一、选择题

1. 如图，x 轴上有一线密度为常数μ，长度为 L 的细杆，有一质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a，已知引力系数为 k，则质点和细杆之间引力的大小为（　）

（A）$\int_{-L}^{0}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$；　（B）$\int_{0}^{L}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$；

（C）$2\int_{-\frac{L}{2}}^{0}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$；（D）$2\int_{0}^{\frac{L}{2}}\frac{km\mu dx}{(a-x)^2}$。

2. 半圆形闸门的半径为 R，将其垂直放入液体中，且直径与液面相齐。设液体的密度 $\rho=1$，若坐标原点取在圆心，x 轴正向朝下，则闸门所受压力 P 为（　　）.

（A）$\int_0^R g\sqrt{R^2-x^2}dx$；

（B）$\int_0^R 2g\sqrt{R^2-x^2}dx$；

（C）$2\int_0^R gx\sqrt{R^2-x^2}dx$；

（D）$2\int_0^R g(R-x)\sqrt{R^2-x^2}dx$。

3. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为（　　）

（A）$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$；　（B）$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$；

（C）$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$；　（D）$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

一、填空题

1. 如图，由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积为_______。

2. 设曲线 L 由 $\begin{cases} x=\int_0^{t^2}\sqrt{1+u}du \\ y=\int_0^{t^2}\sqrt{1-u}du \end{cases}$ 确定，则该曲线对应于 $0\le t\le 1$ 的弧长为_______。

三、计算下列广义积分

1. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

2. $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$

3. $\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

4. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$

四、解答题

1．求曲线 $y=x^2-2x$， $y=0$， $x=1$， $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积。

2．设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，试求：

（1） 切线方程；

（2）此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积。

3.设 $y=f(x)=e^{\frac{x}{2}}$(1) 在原点与$x(x>0)$之间找一点 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$，使此点左右两边阴影部分的面积相等，写出ϑ 的表达式;

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

4．求由曲线 $y=x^3$， $x=2$， $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=-1$ 旋转，所得旋转体的体积 V.

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$，证明在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$， $x=a$ 所围成的面积 A_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$， $x=b$ 所围成的面积 A_2 的三倍。（$a<b$）

6.已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+c}{x-c})^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$，求 c