习题

25.(2) $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$

26. $x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+\frac{(n+1+\theta x)e^x}{(n+1)!}$, $\theta\in(0,1)$.

27(1) $1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

(3) $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+o(x^{2n})$

28.(1)$\frac{1}{2}$ (2)$\frac{1}{8}$

31.**证明概要:** 由$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$，$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$. $\because f'(a)=f'(b)=0$, 那么在上两式中取$x=\frac{a+b}{2}$, 可得$f(\frac{a+b}{2})=f(a)+\frac{f''(\xi_1)(b-a)^2}{8}$ 以及$f(\frac{a+b}{2})=f(b)+\frac{f''(\xi_2)(b-a)^2}{8}$. 相减可得, $|f(b)-f(a)|=\frac{(b-a)^2}{4}\frac{|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|}{2}$. $\because |f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\le|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|$, 令$f(\xi_*)$满足$|f''(\xi_*)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$, $\therefore \exists\xi\in(a,b)$使$|f''(\xi)|\ge\frac{4}{(b-a)^2}$

32.**证明概要:** 由$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2$, 令$t=0$ 和1, 可得$f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2$, $f(1)=f(x)+(1-x)f'(x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}x^2$. 则$f'(x)=f(1)+f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$ 即$\|f'(x)|\le 2a+\frac{b}{2}\max_{x\in[0,1]}\{x^2+(1-x)^2\}\le 2a+\frac{b}{2}$.

2.(1)单调递增区间为$(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi-\frac{\pi}{6})$和$(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{3})$

单调减区间为$(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi)$和$(k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{2})$

(2)在$(-\infty,+\infty)$上单调递增

（3）单调递增区间为$(0,n)$，单调减区间为$(n,+\infty)$

2,(1)令$f(x)=(1+x)\ln 1+x-\arctan x$, 由$f(0)=0$ 求导可判断.

(2)$f(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(x+1)(x>0)$, $f(0)=0$, $g(x)=\ln(1+x)-x, g(0)=0$

3.$0<a<\frac{1}{e}$时有两个零点; $a=\frac{1}{e}$时，有一个零点; $a>\frac{1}{e}$时没有零点。

4.（1）极小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}-2k\pi}$；极大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{-\pi}{4}-2k\pi}$

（2）无极值

（3）极大值为$f(e)=e^{\frac{1}{e}}$; 无极小值

5.$f_{min}(x)=f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$, $f_{max}(x)=f(0)=f(1)=1$

6.令$f(x)=e^x-x-1, f(0)=0$

7.由中值定理$f(a-\frac{f(a)}{k})-f(a)=-f'(\xi)\frac{f(a)}{k}$

8.略

9.令$g(x)=20x^3-3x^5$

$g_{max}(x)=g(2)=64$,所以至少取64

10.令$f(x)=(1-x)e^x$

$f_{max}(x)=f(0)=1$

11.当$r=\sqrt[3]{\frac{U}{2\pi}}$时$S$取最小值。

$h=2\sqrt[3]{\frac{U}{2\pi}}$

$d:h=1:1$

12.C的坐标为$(-1,3)$,面积为8