

《算法设计与分析》第2次作业

姓名: 叶宏庭

学号: 71118415

算法分析题

题目1: 求下列递推关系表示的算法复杂度(当 $n = 1$ 时, $T(n) = 1$)。

$$(1) T(n) = 7T\left(\frac{n}{7}\right) + n$$

$$(2) T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

$$(3) T(n) = 8T\left(\frac{n}{6}\right) + n^{\frac{3}{2}} \log n \text{ (用主定理证明, 选做)}$$

答:

$$(1) T(n) = \sum_{i=0}^{\log_7 n} 7^i \times \left(\frac{n}{7^i}\right) = n \log n$$

$$(2) T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} 4^i \times \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 \times n^2 = n^2 \log n$$

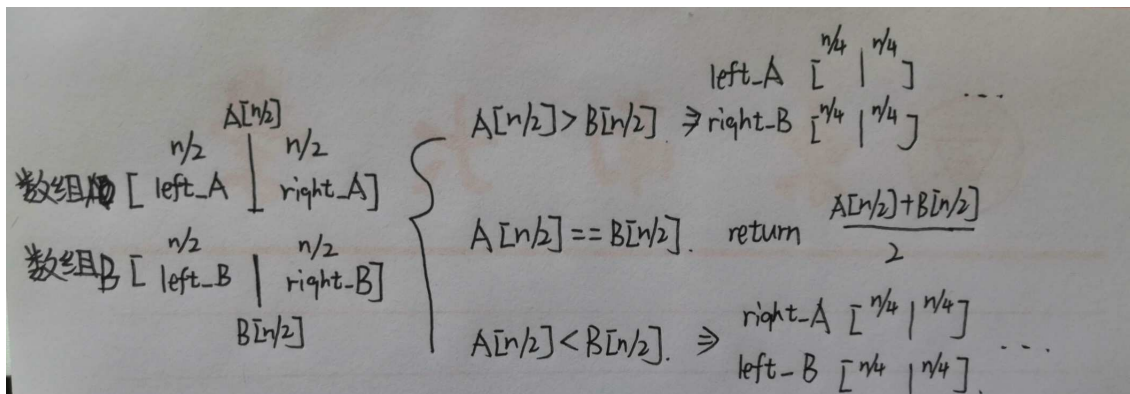
$$(3) \because f(n) = n^{\frac{3}{2}} \log n = \Omega(n^{\log_6 8 + \varepsilon})$$

$$\text{且存在 } c < \frac{2\sqrt{6}}{9} \log_6 6n < 1, \text{ 使得 } 8f(n/6) < cf(n)$$

$$\therefore T(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}} \log n)$$

题目2: 设 $X[0:n-1]$ 和 $Y[0:n-1]$ 为两个数组, 每个数组中含有 n 个已排序的数。试设计一个 $O(\log n)$ 时间的分治算法, 找出 X 和 Y 的 $2n$ 个数的中位数, 并证明算法的时间复杂性为 $O(\log n)$ 。

答: 包括算法思路, 伪代码和时间复杂度分析



算法思路如图所示, 假设 C 为合并 A 与 B 且排好序, 找到 A 与 B 的中间位置进行比

较，若 $A[n/2] > B[n/2]$ ，则 $leftB$ 这部分必然在 C 的前 n 个元素中，这时，中位数必定在 $leftA$ 与 $rightB$ 中(小于的情况同理)，继续递归，直到 $A[n/2] == B[n/2]$ ，可以返回中位数。

伪代码：

```
int MediumNumber(vector<int> &A,vector<int> &B,int size){
    if(size==1)
        return (A[0]+B[0])/2;
    if(A[size/2]==B[size/2])
        return (A[size/2]+B[size/2])/2;
    if(A[size/2]>B[size/2])
        return MediumNumber(A[0:size/2],B[size/2:size],size/2);
    if(A[size/2]<B[size/2])
        return MediumNumber(A[size/2:size],B[0:size/2],size/2);
}
```

由算法思路可以看出， $T(n) = T(n/2) + O(1)$ ，采用迭代法可得：

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log n} O(1) = O(\log n)$$

算法实现题

题目1：问题描述：在与联盟的战斗中连续失败之后，帝国退居其最后据点。帝国依靠其强大的防御系统，击退了联盟的六次进攻。经过数次不眠之夜的思考，联盟将军亚瑟注意到防御系统的唯一弱点是其能源供应。该系统由 N 个核电站供电，任何一个发生故障都将导致系统瘫痪。


这位将军很快就派 N 名特工袭击据点。不幸的是，由于帝国空军的袭击，他们未能降落在预期的位置。作为一名经验丰富的将军，亚瑟很快意识到他需要重新安排计划。他现在想知道的第一件事是哪个特工离任何一个核电站最近。你是否可以帮助将军计算特工与核电站之间的最小距离？


题目细节及提交地址：<https://vjudge.net/contest/360672>；源码使用在线提交方式，提交密码：seu711184；用户名使用学号-姓名格式。

算法思路：

通过题目可知，图中存在 $2N$ 个点，其中 N 个系统， N 个特务，为了获得特务到系统的最短距离，我们将特务与特务，系统与系统之间的距离设为无穷大，由此，我们只需解决 $2N$ 个点的最近点对问题，采用分治法解决。

结果截图：

#24774685 | 71118415_yht's solution for [Problem A] 

| Status | Time | Memory | Length | Lang | Submitted | Shared |
|----------|--------|--------|--------|------|---------------------|---|
| Accepted | 2813ms | 9576kB | 1803 | C++ | 2020-03-16 15:46:46 |  |

Select Code

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cmath>
```