习 题 课 八

一、选择题

1．下列结论正确的是（　　）

（A）$\dfrac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$；　　（B）$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x)$；

（C）$\int_a^b f'(x)dx=f(x)$；　　（D）$\int_a^b f'(x)dx=f(x)+c$。

2. 设 $f(x)\in C, F(x)=\int_a^b |x-t|\, f(t)dt$ $,a<x<b,$ 则

$F''(x)=(\quad)$

(A) 0　　(B) $f(x)$

(C) $-f(x)$　　(D) $2f(x)$

3.设$f(x)\in C_{[a,\,b]}$,则由$y=f(x), x=a, x=b, y=0$所围成的图形面积为(　)

$(A).\int_a^b f(x)dx$　　(B). $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

$(C).\int_a^b |f(x)|dx$　　(D).不能确定

4．设在区间$[a,b]$上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，

$S_1=\int_a^b f(x)dx$，$S_2=f(b)(b-a)$；$S_3=\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，

则必有（　）.

（A）$S_1<S_2<S_3$；

（B）$S_2<S_1<S_3$；

（C）$S_3<S_1<S_2$；

（D）$S_2<S_3<S_1$。

5．设 $f(x)=\int_0^{\sqrt{1+x}-1}\ln(1+t)dt$， $g(x)=e^x-x-1$，

则当 $x\to 0$ 时， $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

（A）等价无穷小；　（B）同阶但非等价无穷小；

（C）低阶无穷小；　（D）高阶无穷小。

6．方程 $\sqrt{x}+\int_0^x\sqrt{1+t^4}dt=\cos x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内（　　）

（A）有且仅有一个实根；（B）有且仅有两个实根；

（C）有无穷个根；　　（D）无实根。

二、计算题

1． $x=\int_1^t u\ln u du$， $y=\int_t^2 u^2\ln u du$，求 $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$。

2．设 $\sin x-\int_1^{y-x}e^{-t^2}dt=0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$。

3．设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$， $0\le x\le 2$.

4．求 $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2dt$.

5． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

6．设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\ne 0\\ C, & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，

（1）求 C 使 $F(x)$ 在 $x=0$ 连续；　（2）求 $F'(x)$。

三、证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $|f'(x)|\le M$， $f(a)=0$，

试证$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{M}{2}(b-a)^2$。

2．设函数$f(x)$在$[0,\ 1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx \quad (k>1),$$

证明至少存在一点$\xi\in(0,\ 1)$，使得$f'(\xi)=(1-\frac{1}{\xi})f(\xi)$。

3. 设 $f(x)$在$[0,\ 1]$上可导,且 $2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=f(1),$
证明至少存在一点 $\xi\in(0,\ 1)$，使

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi)$$

4.设 $f(x),g(x)\in C_{[a,b]}$,证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,
使

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$$

证明：$F(x)=\int_x^b g(x)dx\cdot\int_a^x f(x)dx$

5. 设 $f(x), g(x)$在$[a,b]$连续，试证施瓦茨($Schwarz$)不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)。$$

6．设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导，$f(1)-f(0)=1$，

试证$\int_0^1 f'^2(x)dx\ge1$。