习 题 课 十

一、选择题

1. 设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx,\ N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)dx,$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx,$ 则

$(A)M>P>N$　　　$(B)M<P<N$

$(C)P>M>N$　　　$(D)P<M<N$

2. 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$,则$F(x)$

(A).为正数　　　(B).为负数

(C).恒为零　　　(D).不是常数

二、计算下列积分

1. $\int xf''(x)dx$

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$,求 $\int xf'(x)\ dx$

3. $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{3x-2}}dx$

4. $\int_0^1 x(\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt)dx$

5. $\int_0^{n\pi} x\left|\sin x\right|dx$

6. $\int_0^{\pi}[\dfrac{f'(x)}{1+x}-\dfrac{f(x)}{(1+x)^2}]dx$(已知$f(0)=0,\ f(\pi)=\pi$)

三、证明题

1.设$f(x),g(x)$在$[0,1]$上的导数连续，且$f(0)=0$, $f'(x)\ge 0, g'(x)\ge 0$, 试证：对任意的$a\in[0,1]$有

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$$

2.设 $f(x)$在$[a,b]$上单增连续，证明

$$\int_a^b \frac{a+b}{2}f(x)dx\le\int_a^b xf(x)dx$$

3.设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f''(x)>0$,证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，

证明：当 $0<\lambda<1$ 时 $\int_0^\lambda f(x)dx\ge\lambda\int_0^1 f(x)dx$.

5. 设$f(x)$在$[0,1]$可导. $f(0)=0, 0< f'(x)\le 1$, 则

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx$$