高等数学（A）习题课

Dongfeng Zhang

Southeast University

一. 填空题

1. $\lim_{n\to\infty}\left((\frac{2}{3})^n+\sqrt[n]{\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}\sqrt[n]{n}+\frac{\sin n}{n}\right)=$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1}+\frac{2^2}{n^3+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+\frac{1}{n}}\right)=$

3. 设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1},(x>0)$, 则$y=f(x)=$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$

5. 设$f(x)=\lim_{t\to+\infty}(1+x)\frac{e^{tx}-e^{-tx}}{e^{tx}+e^{-tx}}$, 则$f(x)=$

6. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)=$

7. $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$

8. $\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=$

9. $\lim_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=$

10. $\lim_{x\to1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}=$

二. 判断$x \to 0$时，下列函数极限是否存在

1. $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$

2. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$

3. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1} \arctan \frac{1}{x}$

三. 求下列极限

1. $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$
2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^x}+\frac{2}{n^x}+\cdots+\frac{n}{n^x})$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}, (x\neq 0)$
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot[x]$

5. $\lim_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$
7. $\lim_{n\to\infty}\frac{3x^n-1}{2x^n+1}, x>0$

四. 解答题

1. 设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$, 写出$f(x)$ 的表达式.

2. 设$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$, 求$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(f(1)f(2)\cdots f(n))$.

3. 设$p(x)$ 为多项式，且$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)-x^3}{x^2}=2,\lim_{x\to 0}\frac{p(x)}{x}=1$, 求$p(x)$.

4. 确定常数a, b, 使得$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$.

5. 已知$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-ax+b}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$, 求a, b.
6.(局部保号性) 若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$, 且$A>0$, 则$\exists N^\circ(x_0,\delta)$, 使得当$x\in N^\circ(x_0,\delta)$ 时， $f(x)>0$.
推论：若在$N^\circ(x_0,\delta)$内， $f(x)\geq 0$, 且$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$,
则$A\geq 0$.
问题: 若把推论中的条件改为$f(x)>0$, 是否必有$A>0$?
7. 证明：若$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$, 则$\exists N^\circ(x_0,\delta)$, 使得当$x\in N^\circ(x_0,\delta)$ 时，有$|f(x)|>\frac{|A|}{2}$.