

## 习 题 课 十 三

### 一、选择题

(1) 微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$  的通解是 ( )

(A)  $\frac{1}{\sin \frac{y}{x}} = Cx$ ; (B)  $\sin \frac{y}{x} = C + x$ ;

(C)  $\sin \frac{y}{x} = Cx$ ; (D)  $\sin \frac{x}{y} = Cx$ 。

(2) 若连续函数  $f(x)$  满足关系式  $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) dt + \ln 2$ ,

则  $f(x)$  等于 ( )。

(A)  $e^x \cdot \ln 2$ ; (B)  $e^{2x} \cdot \ln 2$ ;

(C)  $e^x + \ln 2$ ; (D)  $e^{2x} + \ln 2$ 。

### 二、填空题

(1) 方程  $xdy - ydx = y^2 e^y dy$  的通解为\_\_\_\_\_。

(2) 方程  $y' = \frac{1}{xy + x^2 y^3}$  的通解为\_\_\_\_\_。

(3) 微分方程  $yy'' + y'^2 = 0$ , 满足初始条件  $y|_{x=0}=1$ ,  $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$  的特解为\_\_\_\_\_。

### 三、解答题

(1) 求初值问题  $\begin{cases} (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0 & (x > 0) \\ y|_{x=1} = 0 \end{cases}$  的解。

(2) 解方程  $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' = 0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$ 。

(3) 求方程  $y'' = 2y^3$  满足初始条件  $y|_{x=0}=1$ ,  $y'|_{x=0}=1$  的特解。

(4) 求微分方程  $xdy+(x-2y)dx=0$  的一个解  $y=y(x)$ ，使得由曲线  $y=y(x)$  与直线  $x=1$ ， $x=2$  以及  $x$  轴所围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周的旋转体体积最小。

(5) 已知  $f'(0)$  存在，求满足关系式  $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$  的函数  $f(x)$ 。

### 三、计算题

设平面图形  $D$  由  $x^2+y^2\leq 2x$  与  $y\geq x$  所确定，试求  $D$  绕直线  $x=2$  旋转一周所生成的旋转体的体积。