西安交通大学 Xi'an Jiaotong University

概率论与数理统计

数学与统计学院

赫孝良

Email: hexl@mail.xjtu.edu.cn

10 典型例题讲解

1. 在电话号码本中任取一个电话号码，求后面四个数字中最大数字是5的概率。

解: 记 A={后面四个数字中最大数字是5}

后面四个数字不同的取法总数为： $n_{\Omega}=10^4$

有利于A的取法数：$n_A=C_4^1 5^3+C_4^2 5^2+C_4^3 5^1+1$ —思路繁杂

有利于A 的取法数：$n_A=6^4-5^4$ —思路简捷

所以 $P(A)=\dfrac{6^4-5^4}{10^4}$

2 一套五卷文集随意放在书架上，求第一卷或第五卷放在旁边的概率。

解: 记 $A=\{\text{第一卷放在旁边}\}$

$B=\{\text{第五卷放在旁边}\}$

要求的是 $P(A\cup B)$

容易求得 $P(A)=P(B)=\dfrac{2\times 4!}{5!}, P(AB)=\dfrac{2\times 3!}{5!}$

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2\times 4!}{5!}+\frac{2\times 4!}{5!}-\frac{2\times 3!}{5!}=0.7$$

3 已知 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$ $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$

求A, B至少发生一个的概率.

解： 要求的是 $P(A\cup B)$

由全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=P(B|A)$$

得 $P(B|A)=1/2$

故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=1-P(A)P(B|A) \quad =3/4$$

乘法公式

4 对有100名学生的班级考勤情况进行评估，从课堂上随机点了10位同学的名字，如果班上学生的缺勤人数从0到2是等可能的，并且该班随机点名为全勤，计算该班实际上确实全勤的概率。

解：记 $A_k=\{$有k个人缺勤$\}$, k=0, 1, 2,

$B=\{$随机点名为全勤$\}$

要计算 $P(A_0\,|\,B)$

由条件 $P(A_k)=\dfrac{1}{3}, k=0,1,2$

有k个人缺勤时点名为全勤的概率为，

$$P(B\mid A_k)=\frac{C_{100-k}^{10}}{C_{100}^{10}}=\frac{(100-k)!90!}{(90-k)!100!}, k=0,1,2$$

由贝叶斯公式得

$$P(A_0\mid B)=\frac{P(A_0)P(B\mid A_0)}{\sum_{k=0}^{2}P(A_k)P(B\mid A_k)}=\frac{110}{298}=0.369$$

5 设有6件产品，其中3件合格品，3件次品。从中随机的取出3件放入甲盒，余下的放入乙盒。现从两盒中各取一件产品。试求：（1）这两件产品都是合格品的概率；（2）在这两件产品都是合格品的条件下，甲盒有2件合格品，乙盒有1件合格品的概率。

解：解法1

记 A={甲乙两盒中各取一件产品为合格品}

B_k={甲盒中有k件合格品}， k=0, 1, 2, 3;

$\Omega=\bigcup_{k=0}^{3}B_k$ $B_0,\ldots,B_3$ 构成互斥完备事件群

(1) 由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_k)P(A|B_k)$$

又求得 $P(B_k)=\dfrac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3},k=0,1,2,3$

$$P(A|B_k)=\frac{k}{3}\frac{3-k}{3},k=0,1,2,3$$

故 $P(A)=\sum_{i=0}^{3}\dfrac{C_3^kC_3^{3-k}}{C_6^3}\dfrac{k}{3}\dfrac{3-k}{3}=\dfrac{1}{5}$

(2) 所求概率为 $P(B_2|A)=\dfrac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\dfrac{1}{2}$

解法2

记 A={甲乙两盒中各取一件新产品为合格品}

B={甲盒中有2件合格品}

(1) 从两盒中各取一件产品，这两件产品都是合格品

⇕

从6件产品取两件产品都是合格品

故 $$P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3!/2!}{6!/(4!2!)}=\frac{1}{5}$$

(2) $$P(B)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{3!/2!\times3!/2!}{6!/(3!\times3!)}=\frac{9}{20}\qquad P(A|B)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

故 $$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{1}{2}$$

6. 设0<$P(B)$<1，证明：随机事件A与B相互独立的充要条件是 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

证：

必要性：设A与B相互独立，则 $\bar{A}$与 $\bar{B}$相互独立，从而

$$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=P(A)+P(\bar{A})=1$$

充分性：设 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

则有 $P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B})=P(A|\bar{B})$

由条件概率定义得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A-AB)}{1-P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

由上式得

$$P(AB)\big(1-P(B)\big)=P(B)\big(P(A)-P(AB)\big)$$

整理得

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以A与B相互独立。

7\. n对夫妻排成一列，求所有丈夫全都排在妻子以后的概率。

解: 记 $A=\{$所有丈夫全都排在妻子以后$\}$

将n对夫妻编号为：1，2，…，n

解法1

n对夫妻不同排列种数为：$n_\Omega=(2n)!$

有利于A的种数为可分两步计算。

1） n个妻子不同排列种数为：$n!$

2）对n个妻子的任一排列，例如

$$n,n-1,\ldots,2,1$$

所有丈夫全都排在妻子以后的种数计算如下：

1号丈夫排在妻子以后的种数为：1

1号丈夫排好后，2号丈夫排在妻子以后的种数为：3

往下，3号丈夫排在妻子以后的种数为：5

…

往下，n号丈夫排在妻子以后的种数为：2n−1

故 所有丈夫全都排在妻子以后的种数为：(2n−1)!!

结合1），2）得有利于A的种数为：

$$n_A = n!(2n-1)!!$$

所以

$$P(A) = \frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!}$$

$$= \frac{n!(2n-1)!!}{(2n)!!(2n-1)!!}$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

解法2

记 $A_k=\{$第k对夫妻，丈夫排在妻子以后$\}$， $k=1,\cdots,n$

易见$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立， 且 $P(A_k)=\frac{1}{2}$

而 $A=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$

所以 $P(A)=\prod_{k=1}^{n}P(A_k)=\frac{1}{2^n}$

8 三门问题

一个源自博弈论的数学游戏问题。有三扇关闭的门，其中一扇后面有一辆汽车，选中有车的那扇门可赢得该汽车，另外两扇门后面则各有一只山羊。当参赛者选定一扇门，但未开启它的时候，主持人开启剩下两扇门的其中一扇，露出一只山羊，主持人清楚地知道，哪扇门后是羊。主持人其后会问参赛者要不要换另一扇仍然关上的门。问题是：换另一扇门会否增加参赛者赢得汽车的机会？

给出答案与理由.

解： 这是一个经典的问题,有多种解法。

将三扇门编号为1、2、3，大奖藏在1号门之后.

记 $A=\{$“选择更换后最终赢得汽车”$\}$,

$B=\{$“选择不换，最终赢得汽车”$\}$,

$C_k=\{$“第一次选中编号为k的门”$\}$, k=1, 2, 3.

则C_1, C_2, C_3 构成互斥完备事件群

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(A|C_k)P(C_k)=\frac{1}{3}P(A|C_2)+\frac{1}{3}P(A|C_3)=\frac{2}{3}$$

$$P(B)=\sum_{k=1}^{3}P(B|C_k)P(C_k)=\frac{1}{3}P(B|C_1)=\frac{1}{3}$$

因此，选择更换赢得汽车的概率大。