

第15次课
(网络流算法部分)



算法分析与设计 (2020)

Analysis and Design of Algorithm

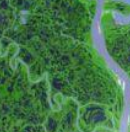
任课教师：金嘉晖 副教授

办公室：东南大学九龙湖校区计算机楼368

Email: jjin@seu.edu.cn

助教：吴碧伟 (220191682@seu.edu.cn)

第八章 网络流算法

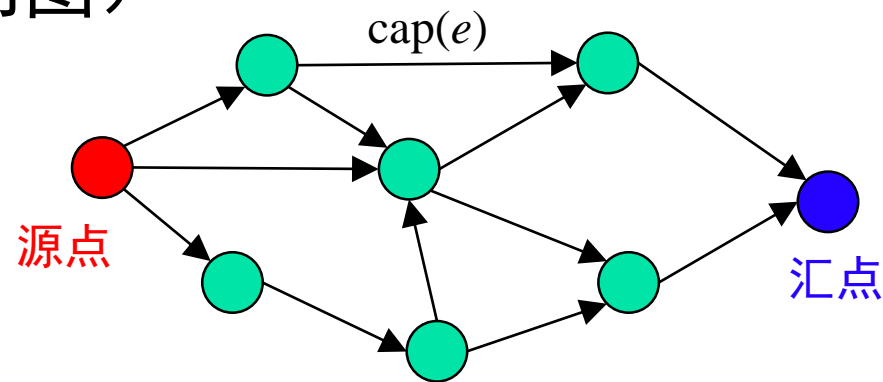
- 



网络流—最大流问题

- **网络** $G=(V,E)$ 的定义（有向图）

- 有**源点** s 和**汇点** t
- 每条边 e 有**容量** $\text{cap}(e) \geq 0$



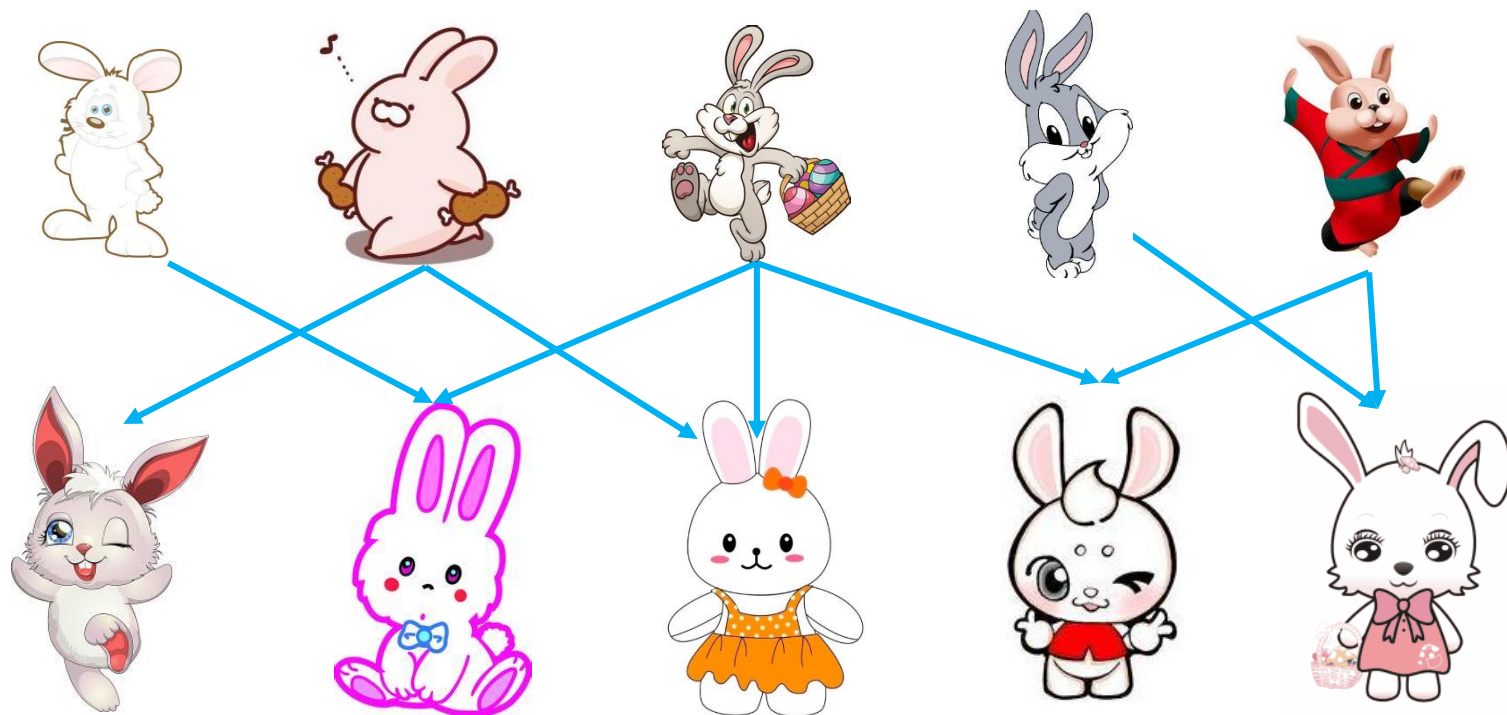
- **网络流** 的定义

- 边集合 E 上的一个非负函数 $\text{flow} = \{\text{flow}(e)\}$, 称为**流量**
- 边 e 上的流量 $\text{flow}(e) < \text{边 } e \text{ 容量 } \text{cap}(e)$

最大流问题：求汇点入边流量和的最大值

回顾第一次课的兔子匹配问题

草原上生活着一群可爱的兔子，有5只公兔子和5只母兔子，每只公兔子都对若干母兔子有好感。如何帮助尽可能多的公兔子找到伴侣？



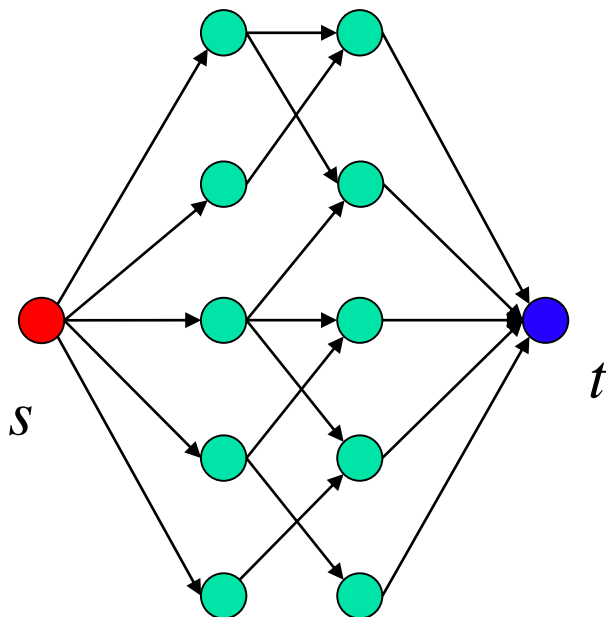
兔子匹配—建模为最大流问题

■ 最大流的网络

- 将公兔子和母兔子看作图中的点
- 若公兔子 a 喜欢母兔子 b ，则在 a 和 b 之间连一条边，边的容量为1
- 增加一个源点 s 和汇点 t

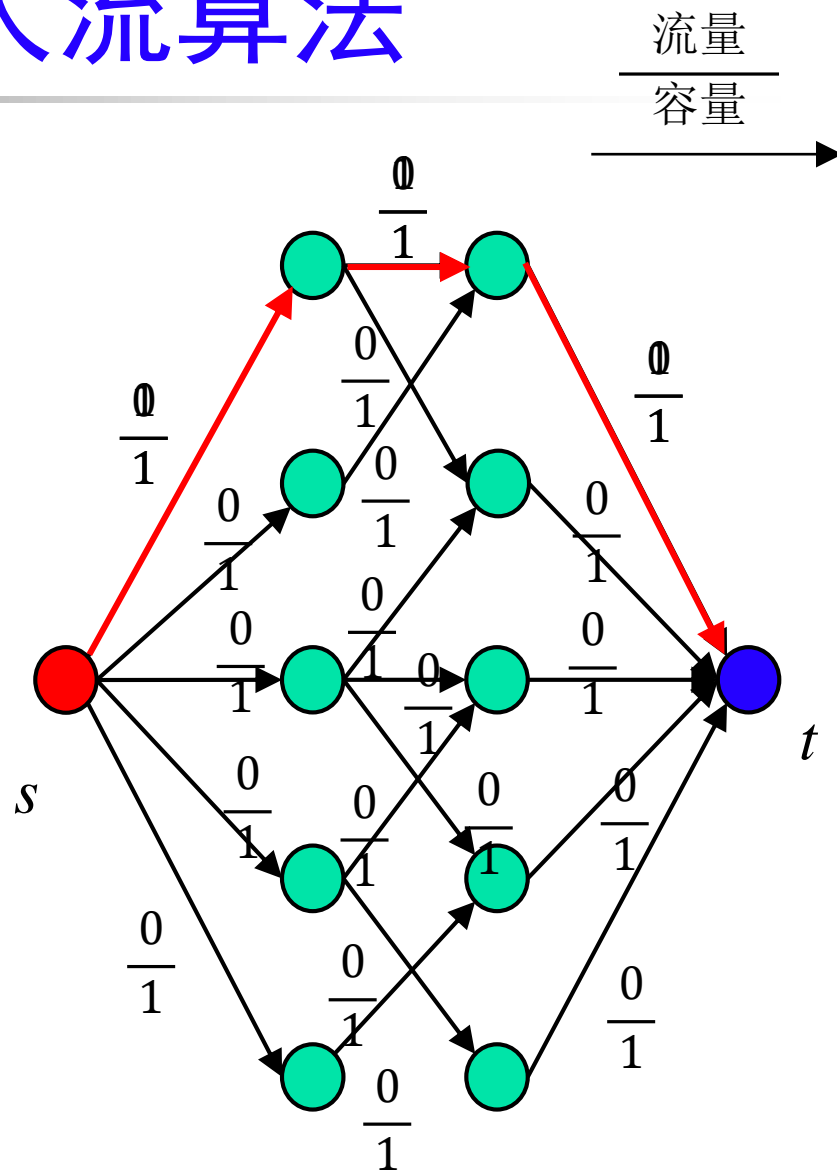
■ 问题描述

- 找从源点 s 到汇点 t 的最大流
- 最大流流量就是最大配对数

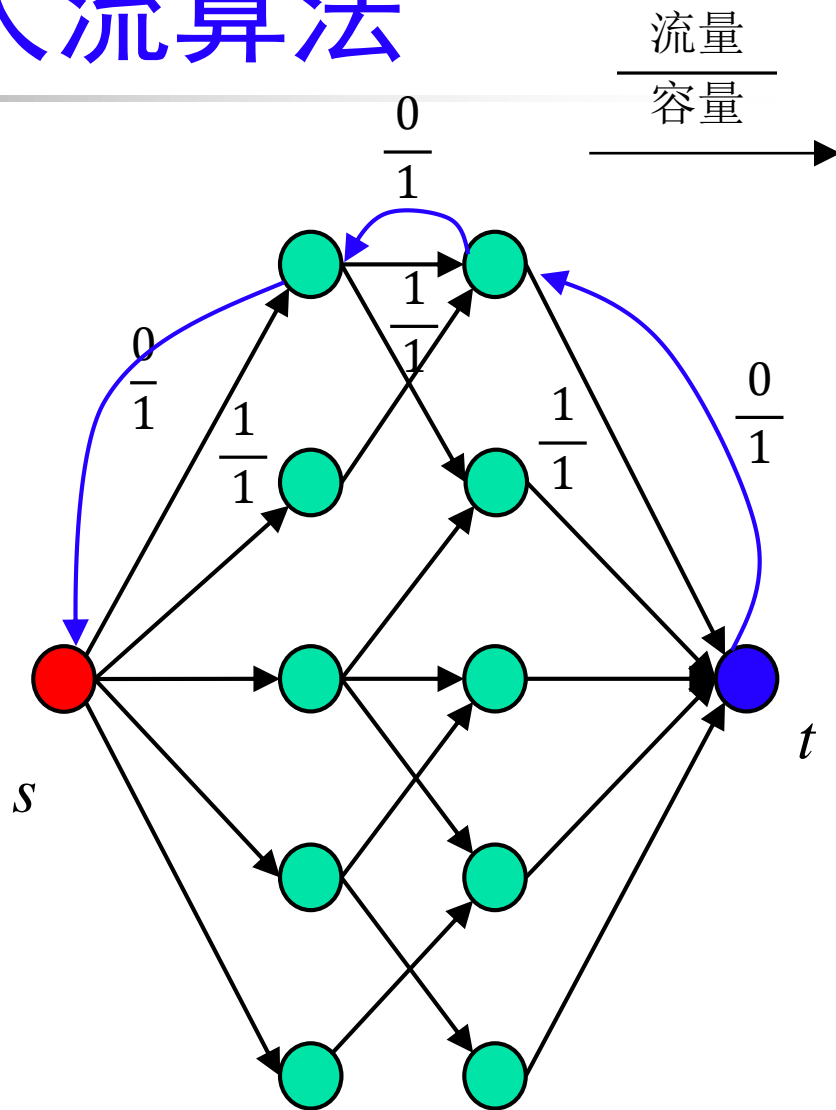


兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从s到t的流

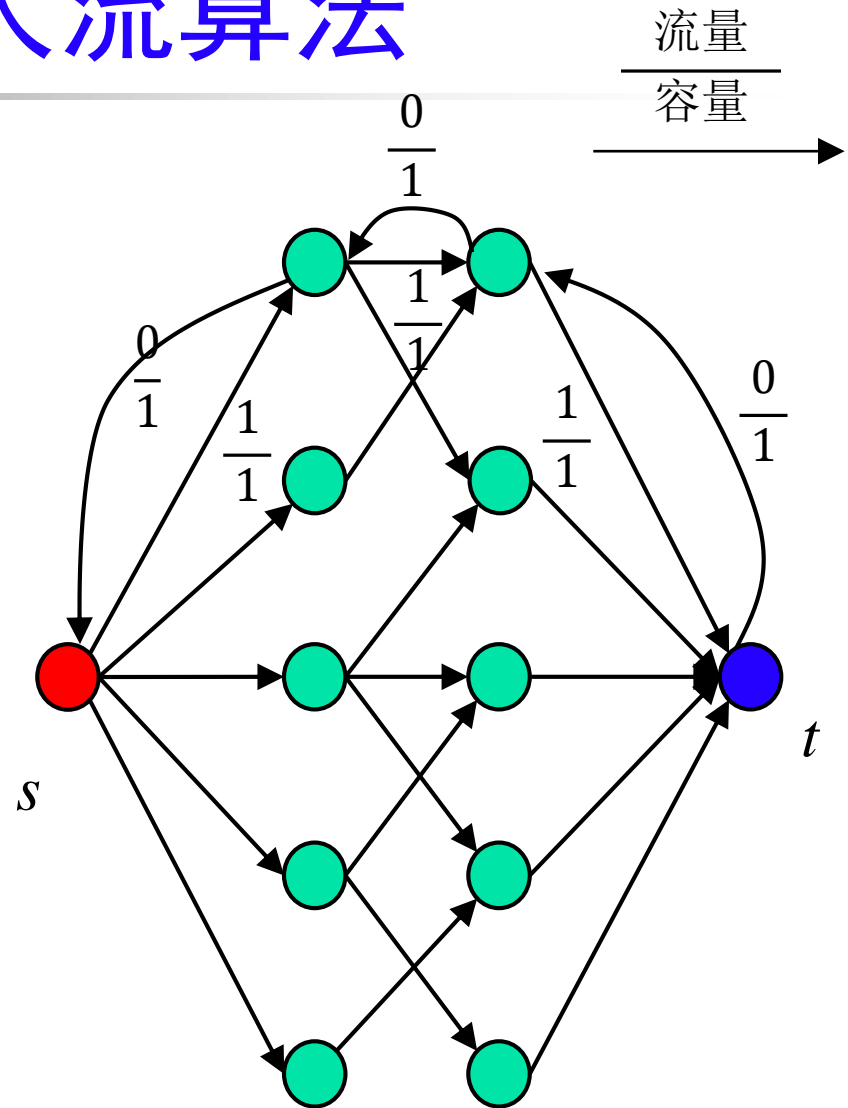


- 1) 找一条从s到t的流
- 2) 构建剩余网络
 - 若边 e 有流量 $\text{flow}(e)$
 - 则生成 e 的反向边 e'
 - 边 e' 的容量为 $\text{cap}(e')$, 流量为0
 - 剩余网络的作用是让流可以被回退



兔子匹配—最大流算法

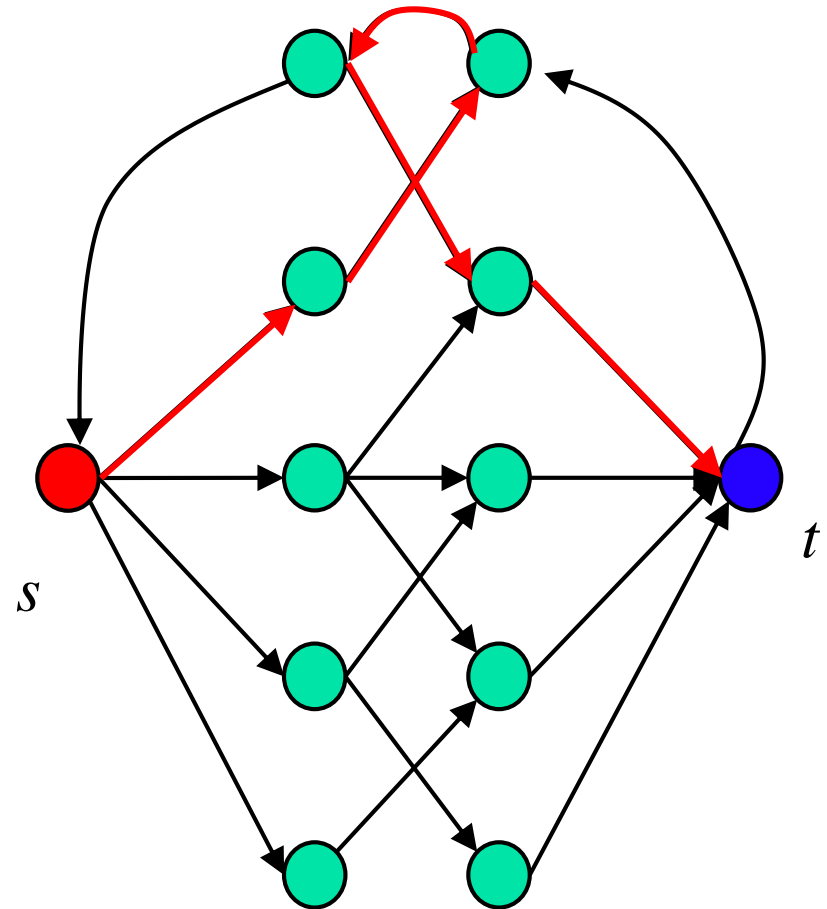
- 1) 找一条从s到t的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从s到t的流



兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

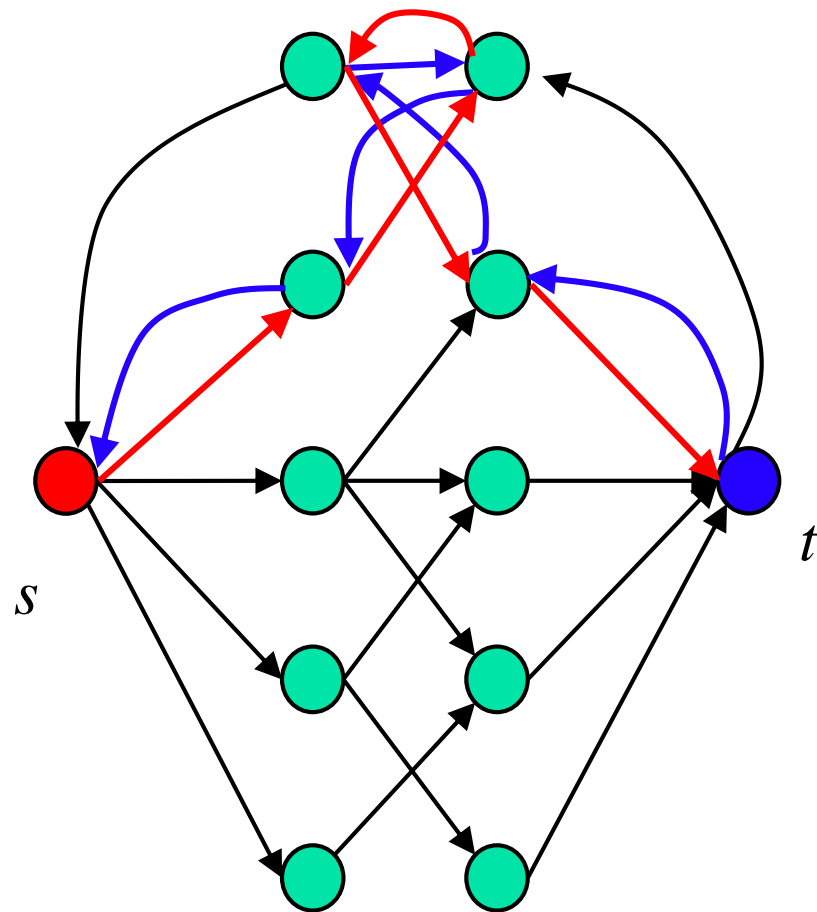


找一条从 s 到 t 的流

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

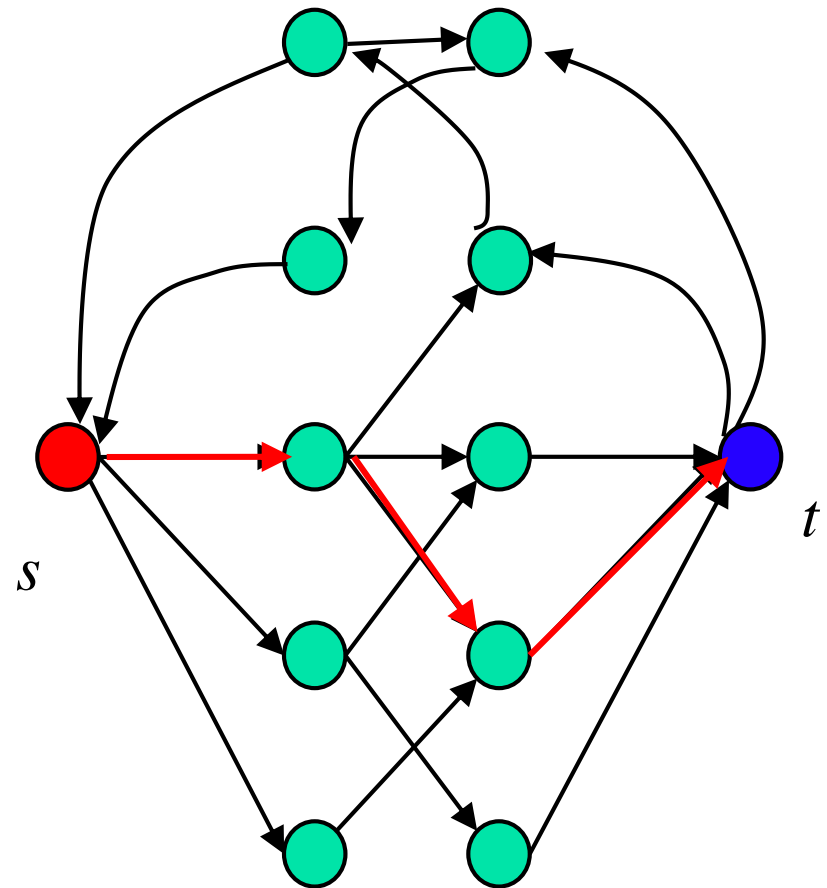


构建剩余网络

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

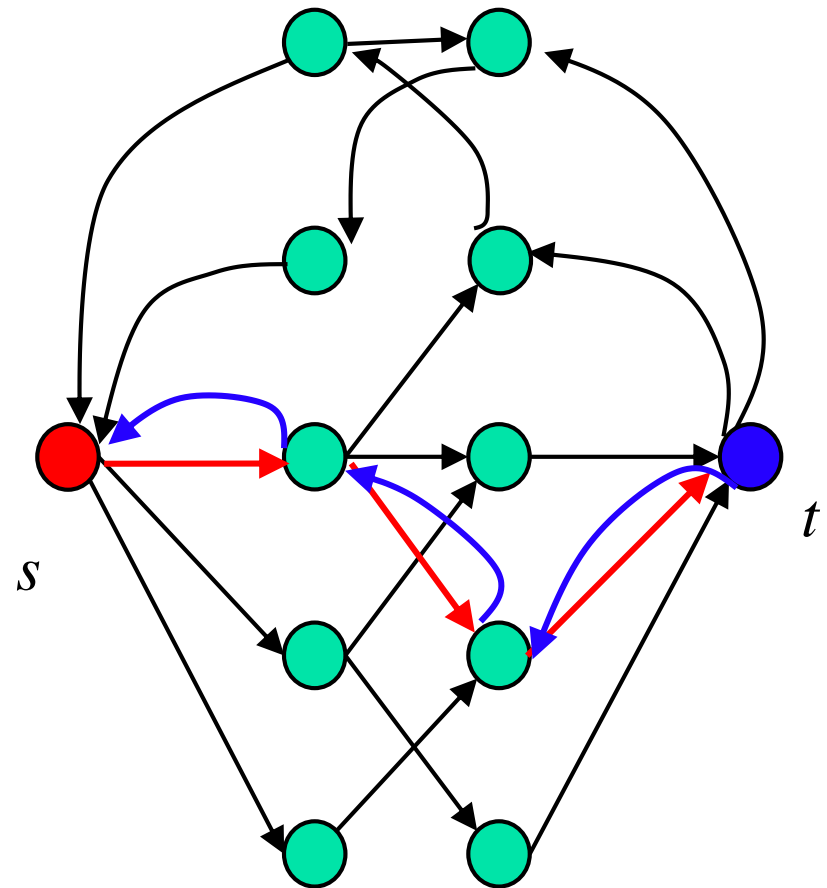


找一条从 s 到 t 的流

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

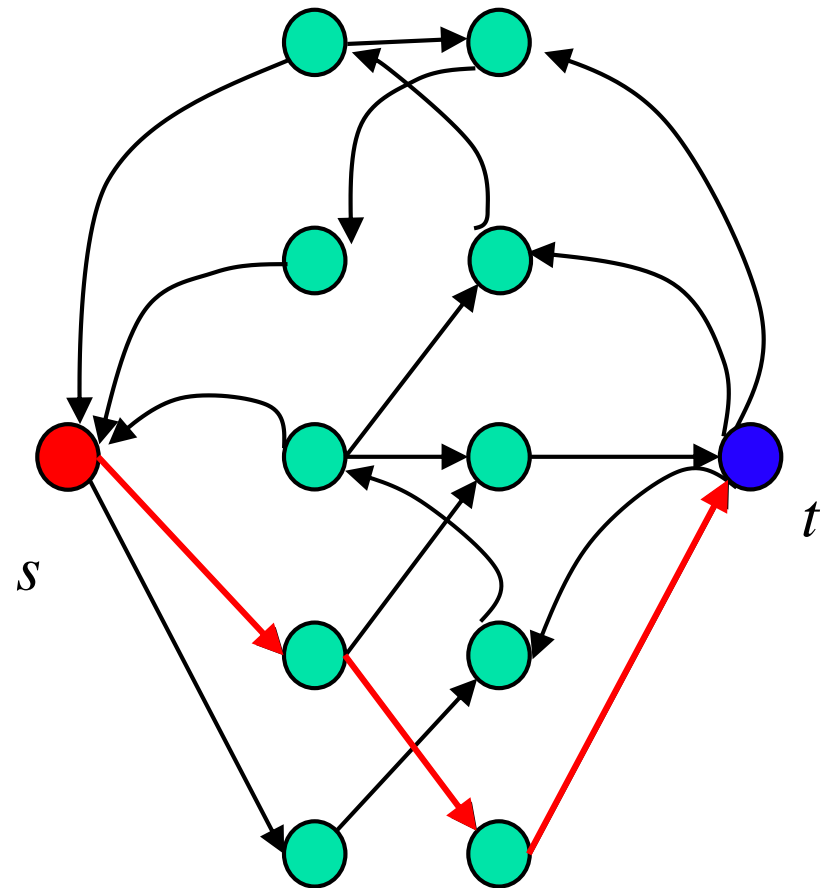


构建剩余网络

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

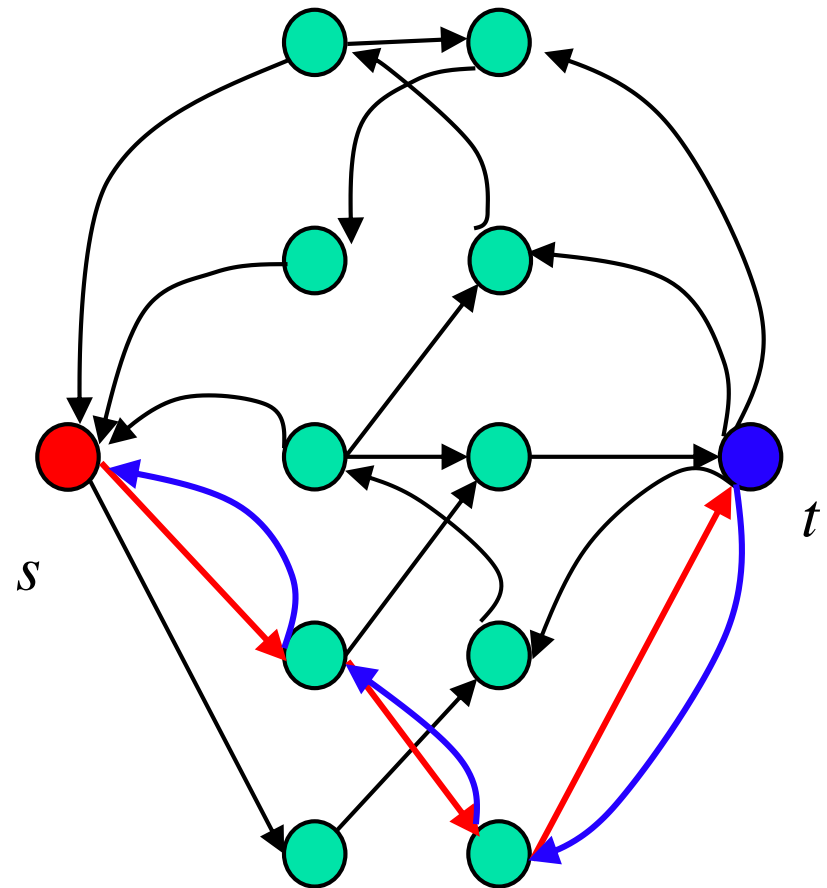


找一条从 s 到 t 的流

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

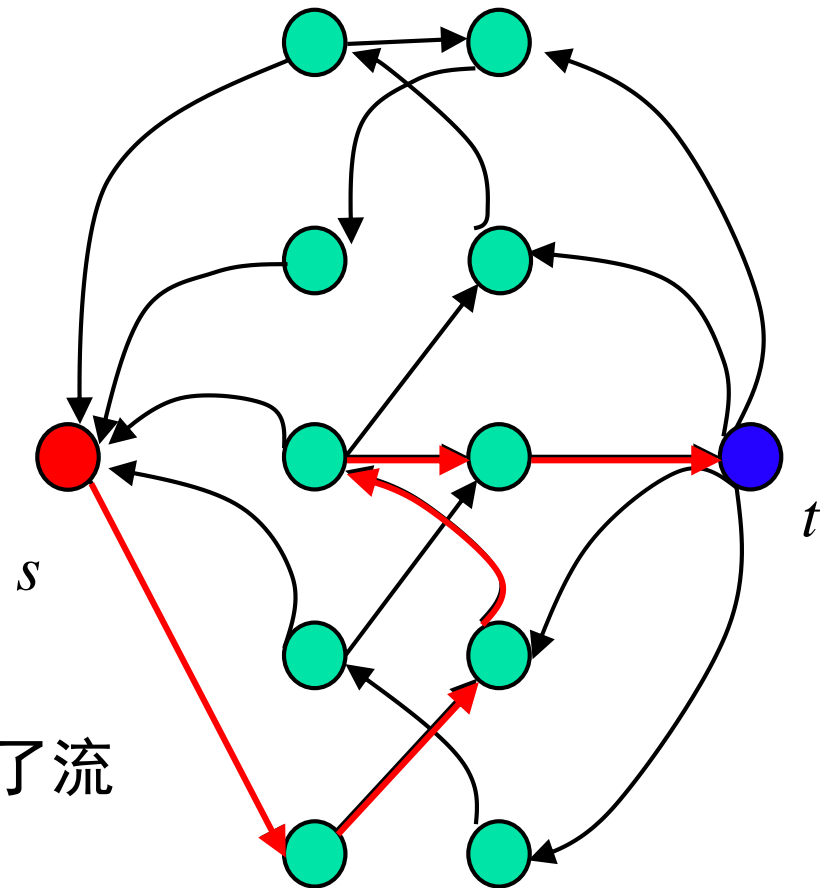


构建剩余网络

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边



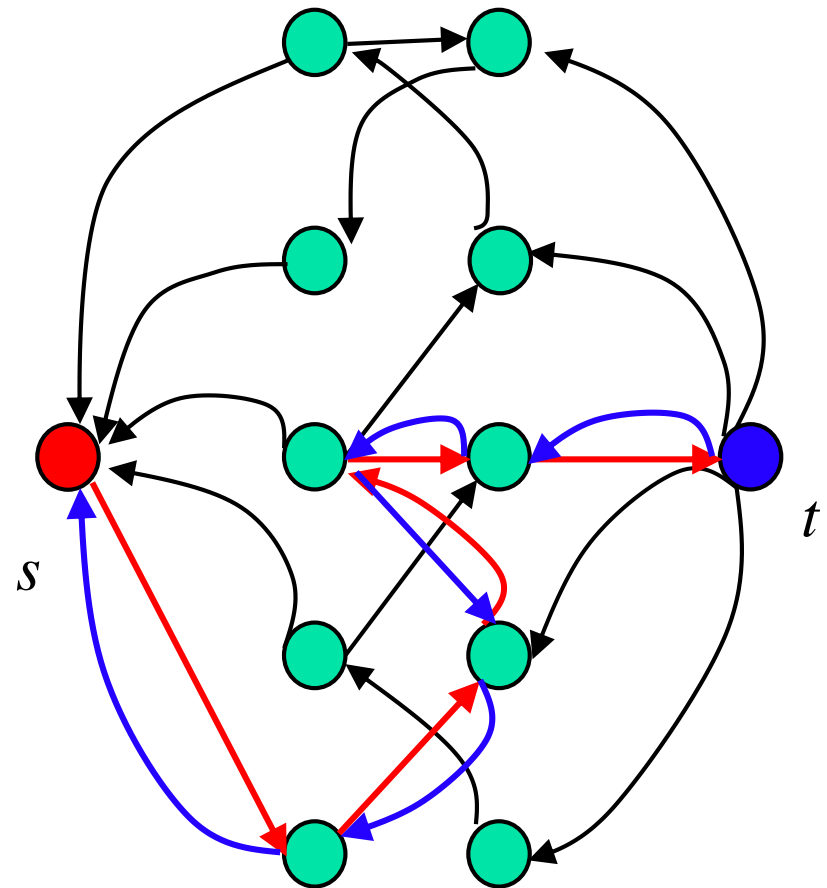
注意： 此处是在剩余网络中回退了流

找一条从 s 到 t 的流

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

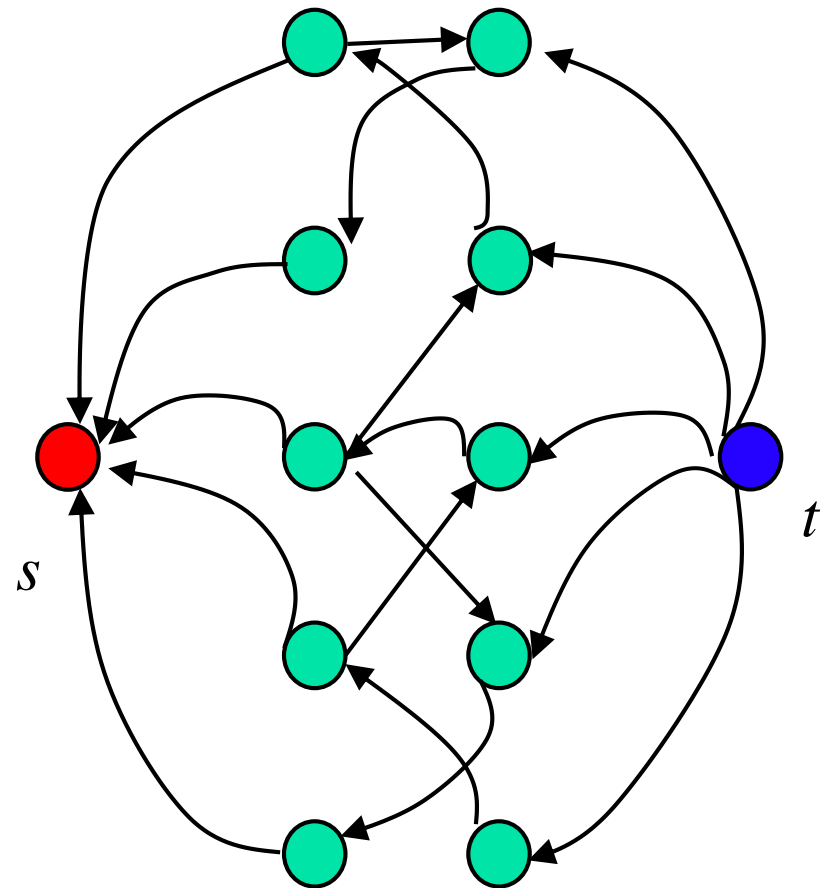


找一条从 s 到 t 的流

兔子匹配—最大流算法

- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流

下图仅显示
有空余容量的边

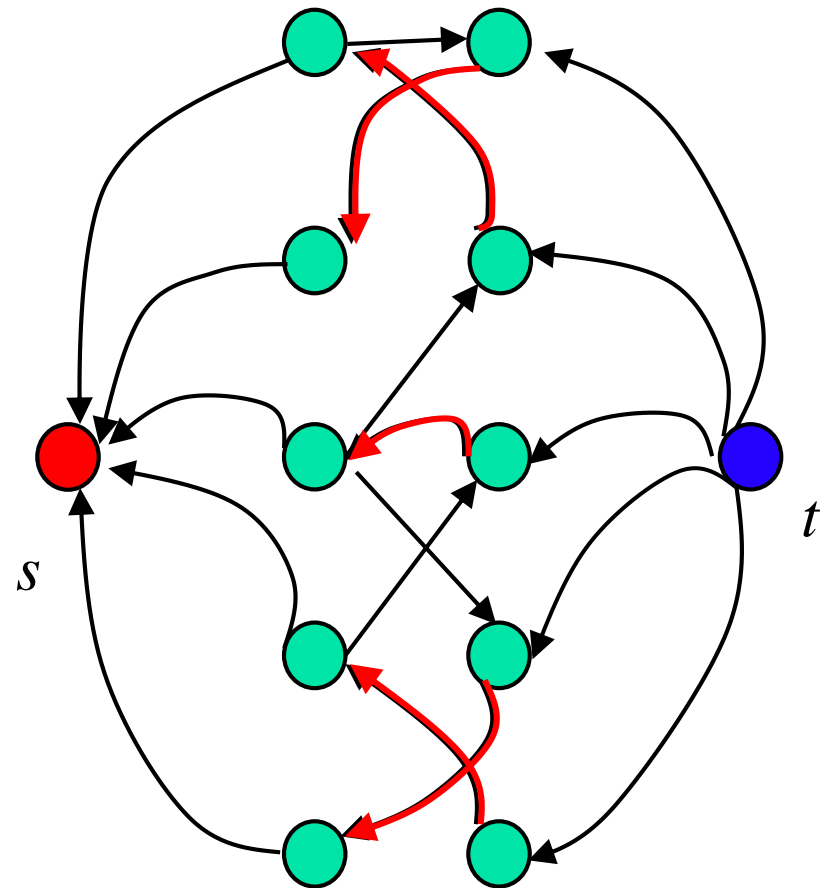


找不到更多的流，停止

兔子匹配—最大流算法

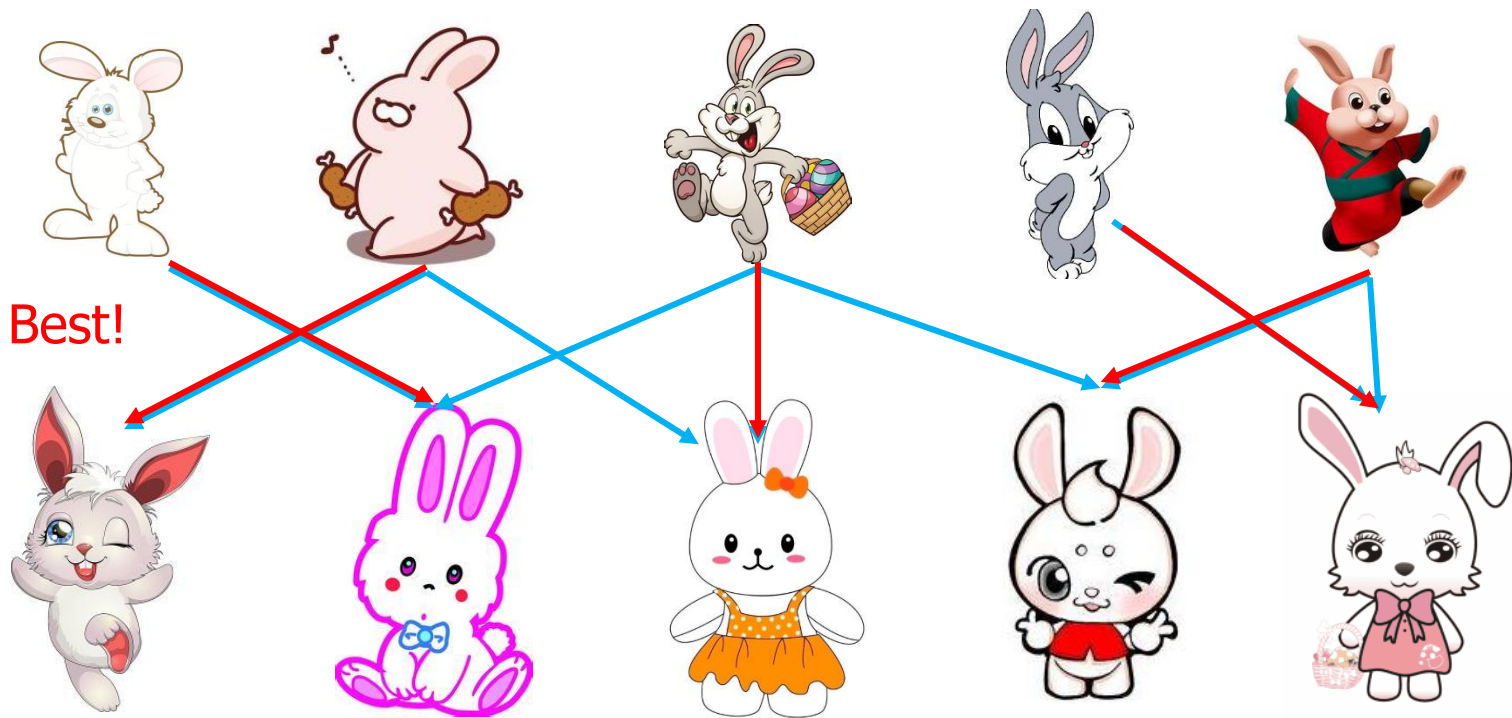
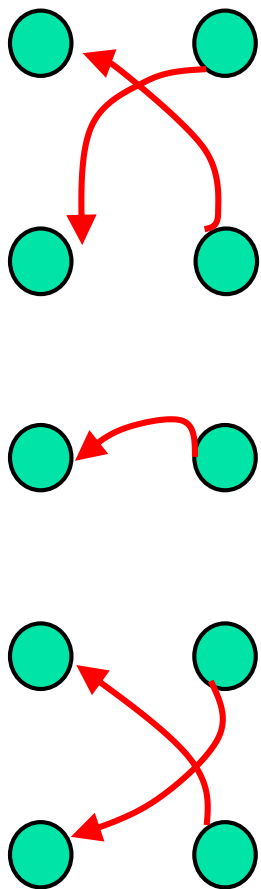
- 1) 找一条从 s 到 t 的流
- 2) 构建剩余网络
- 3) 在剩余网络中重复前两步，直到再也找不到从 s 到 t 的流
- 4) 构造问题的解
 - 若两顶点有反向边相连
 - 则这两点对应的兔子匹配

下图仅显示
有空余容量的边



构造问题的解

兔子匹配—问题的解





课程总结

- 算法概述
 - 算法复杂度分析
- 递归与分治
 - 递归方程
 - 计算递归时间复杂度方法
 - 分治算法框架及应用
- 动态规划
 - 最优子结构性质
 - 递推公式
 - 备忘录
 - 动态规划算法框架及应用



课程总结

- 贪心算法
 - 贪心选择策略
 - 贪心算法的应用
- 回溯法
 - 解空间树（会画）、剪枝函数
 - 算法框架
- 分支限界法
 - 解空间树（会画）、剪枝函数、优先级函数
 - 算法框架
- 随机化算法
 - 三类随机化算法的典型应用