习 题 课 六

一、证明题

1．设函数 $f(x)$在[0,3]上连续,在(0,3)内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$， $f(3)=1$，

试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

2．设在 [0, 1] 上 $|f''(x)|\le M$ ，且在 (0, 1) 内 $f(x)$ 取得极大值，试证：

$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$.

3．定理：设 $f(x)$ 在 $[x_0, b)$（或 $(a, x_0]$）上连续，在 (x_0, b)（或 (a, x_0)）内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)=A$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)=B$），则 $f'_+(x_0)=A$（或 $f'_-(x_0)=B$）。

4．设 $f(x)$， $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导， $f(a)=f(b)=0$，

证明：（1） $\forall\lambda\in R$， $\exists\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$，

（2） $\exists\eta\in(a, b)$，使 $f'(\eta)+f(\eta)g'(\eta)=0$。

5．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导， $f(a)=f(b)=1$，

试证： $\exists\xi, \eta\in(a, b)$，使 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$。

6. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导且 $0<a<b$，证明：$\exists\xi, \eta\in(a, b)$，

使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

7. 设 a_1，a_2，$\cdots$ a_n满足

$$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$$

证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$

在$(0, \dfrac{\pi}{2})$内至少有一个根。

8. 设$f(x)$在[1, 2]上有二阶导数，且$f(1)=f(2)=0$，
$F(x)=(x-1)^2 f(x)$，证明：存在$\xi\in(1,\ 2)$，使 $F''(\xi)=0$

9. 设$f(x)$在[0, 1]上有二阶导数，且$f(1)=f(0)=0$，
证明：存在$\xi\in(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

10. 设函数 f(x) 在 [a, b] 连续， 在 (a, b) 内可导，

且$f(a)=f(b)=2a, f(\frac{a+b}{2})=a+b,$

证明在[a, b]上至少存在一点ξ，使得 $f'(\xi)=1$.

11. 设$f(x)$在[0, 1]上可导，且$f(1)=1$，$f(0)=0$，
证明：对所有满足$\alpha+\beta=1$的正数α,β，存在
相异的ξ，$\eta\in(0,\ 1)$，使 $\alpha f'(\xi)+\beta f'(\eta)=1$.

12. 设函数 f(x), g(x) 在 [a, b] 连续， 在 (a, b) 内可导，

且$f(a)f(b)>0, f(a)f(\frac{a+b}{2})<0, \forall x\in[a,b], g(x)\neq 0,$ 证明在[a, b]上至少

存在一点ξ，使 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$.

13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(c)=f(b)=0$，其中

$c\in(a,b)$，

证明：（1）至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$，

使$f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0,\ i=1,2.$

（2）存在$\xi\in(a,b)$,使 $f''(\xi)=f(\xi)$.

二、解答题

1. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$，

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 C 的值。

2.已知$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-e^x+1}{x^2} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$

(1).问 a 取何值时, $f(x)$在$x=0$连续？

(2) .在(1)之下, $f(x)$在$x=0$是否可导？若可导，求$f'(x)$.

3. 设$f(x)$有一阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)$存在，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(1) .问 a 取何值时, $g(x)$处处连续.

(2). 对（1）中确定的a，证明 $g(x)$有一阶连续导数.

三、求下列极限

1.$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

3.$\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1})(a\neq 0)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^4}$ 5.$\lim\limits_{n\to\infty}(n^3+3^n)^{\frac{1}{n}}$

四．设 $f(x)$ 有四阶导数，且 $f(0)=0,$

$f'(0)=-1, f''(0)=2, f'''(0)=-3, f^{(4)}(0)=6,$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x[1-\ln(1+x)]}{x^4}.$

五. 设$f(x)$存在二阶导数，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

六．设函数 y=f(x) 在邻域 $N(0,\delta)$ 内有 n 阶导数，且

$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，

证明存在 $0<\theta<1$，使 $\dfrac{f(x)}{x^n}=\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}.$