五、（本题满分8分）

解 因为 $\frac{1}{2} \le a_n \le 1$，且 $a_{n+2} - a_n = \frac{1+a_n}{2+a_n} - \frac{1+a_{n-2}}{2+a_{n-2}} = \frac{a_n - a_{n-2}}{(2+a_n)(2+a_{n-2})}$，

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ $\{a_{2n}\}$ 都单调有界，故均收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = A$，则 $A = \frac{1+A}{2+A}$，解得 $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

于是 $\{a_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

六、（本题满分7分）

解 $y^{(n)}(x) = 2^{n-2}e^{2x}(4x^2+4nx+n^2-n)$，则 $y^{(n)}(1) = 2^{n-2}(n^2+3n+4)e^2$，

$$y = e^2 + 4e^2(x-1) + 7e^2(x-1)^2 + \frac{22e^2}{3}(x-1)^3$$
$$+\cdots+\frac{2^{n-2}(n^2+3n+4)e^2}{n!}(x-1)^n + o(x-1)^n$$

七、（本题满分6分）

证明 (法一) 设 $F(x) = f(x) - 2x$，则 $F(x)$ 在$[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导。

因为 $F(1) = -1, F(2) = 1, F(3) = -4$，所以 $F(3) < F(1) < F(2)$，由 $F(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上连续可得，存在 $\eta \in (2,3)$ 使得 $F(\eta) = F(1)$。于是由罗尔定理可得，存在 $\xi \in (1,\eta) \subset (1,3)$，使得 $F'(\xi) = 0$，即 $f'(\xi) = 2$。

(法二) 在区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1 \in (1,2)$ 使得 $f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 4$，存在 $\xi_2 \in (2,3)$ 使得 $f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = -3$。因为 $f'(\xi_2) < 2 < f'(\xi_1)$，所以由达布定理可得，存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (1,3)$ 使得 $f'(\xi) = 2$。