

高数试题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right)^x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 设 $x = e^{-t}$, $y = \int_0^t \ln(1+u^2) du$, 求 $\frac{d^2 y}{d^2 x} \Big|_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 则非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是
(A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.
(B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.
(D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在
6. 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解
7. 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值
8. (I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 |\ln t| t^n dt, n=1, 2, \dots$ 的大小, 说明理由
(II) 设 $M_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt (n=1, 2, \dots)$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$
9. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.