习 题 课 九

一、选择题

1．设 $f(x)$ 连续，则 $\int_a^x f(t)dt$ 为（　　）

（A） $f(t)$ 的一个原函数；　（B） $f(t)$ 的所有原函数；

（C） $f(x)$ 的一个原函数；　（D） $f(x)$ 的所有原函数。

2．若 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$（　　）

（A）$\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$；　　（B）$x-\frac{1}{2}x^2+C$；

（C）$\frac{1}{2}x^2-x+C$；　　（D）$\cos x-\sin x+C$。

3. 若 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$，$x\neq 0$，则 $F(x)=$（　　）

（A）0；　（B）$\frac{\pi}{2}$；　（C）$\arctan x$；　（D）$2\arctan x$。

4.设 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f''(t)dt$ 的导数与 x^2 是等价无穷小，则 $f''(0)=$

(A).0　　　　(B).1

(C).∞　　　　(D).$\frac{1}{2}$

5.设 $g(x)=\int_0^x t\quad f(x^2-t^2)dt$, 则 $g'(x)=$

(A).$xf(x^2)$　　　　(B).-xf(x^2)

(C) .$2xf(x^2)$　　　　(D)-$2xf(x^2)$

6.设 $f(x)$ 连续，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(xt)dx\quad (t>0,s>0)$, 则 I 的值

(A).依赖于 s，t　　　　(B).依赖于 x，t 不依赖于 s

(C) .依赖于 s，t ,x　　　　(D)依赖于 s,不依赖于 t

7.设$f(x)$连续，$n\int_0^1 xf^2(2x)dx=\int_0^2 tf^2(t)dt$，则 n 等于

$(A).2$ (B).4

$(C).\frac{1}{4}$ (D).$\frac{1}{2}$

二、解答题

1．求函数 $f(x)=\max\{1,\ x^2\}$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上满足 $F(0)=1$ 的一个原函数。

2．设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1,\\ x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求 $f(x)$，进而求$\int f'(x)dx$ 。

3．已知曲线 $y=f(x)$ 在任意点处的切线斜率为 $ax(x-1)(a<0)$， 且 $f(x)$ 的极小值为 2，极大值为 6，求 $f(x)$ 。

4．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且对任意的正数 a，b，积分$\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$ 。

5.(1).已知 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+\tan^2 x, 0<x<1$,求$f(x)$.

(2). 已知 $\int xf(x)dx=\arcsin x+c$, 求 $\int\frac{1}{f(x)}dx$.

(3). 设 $f(x)$ 的一个原函数为$F(x)$,$F(0)=1$,当$|x|\le 1$时,

$f(x)F(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,求$f(x)$.

(4). 设 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x & x\le 0\\ \ln(2x+1) & x>0\end{cases}$,求$f(x)$的原函数$F(x)$。

三、计算下列不定积分

1． $\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx$

2． $\int\frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}dx$

3．$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

4．$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

5. $\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos 2x} dx$

6. $\int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx$

7. $\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx$

8. $\int \frac{1}{x(1-x^4)} dx$

9. $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} dx$

10. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [\cos x (\ln \frac{1+x}{1-x} + \sin^2 x) + \sqrt{1-4x^2}] dx$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

12. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx$

13. $I = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$, 其中 $f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin x & x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

四、解答题

1.设 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1)当 n 为正整数时，且 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ 时，证明 $2n \le S(x) \le 2(n+1)$.

(2)求 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

2.设当 $x \ge 1$ 时，$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$，且 $f(1) = 1$,

令 $a_n = f(n)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \le \frac{\pi}{4} + 1$.

五、证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，试证：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微，且 $|f'(x)| \le M$，$f(0) = f(1) = 0$，试证：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{M}{4}$。