

## 习 题 课 十 二

一、求下列方程的解

$$1. \quad xyy' = 1 - x^2$$

$$2. \quad y = xy' - ay' + b$$

$$3. (x^2 - y^2)y' = 2xy$$

$$4. (xy + y^3) dy - dx = 0$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^4}$$

$$6. \begin{cases} y'' = 1 + y'^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$$

二.1. 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内有定义,  $f'(0) = 2$ , 对

$$\forall x, y, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

求  $f(x)$ .

2. 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内有  $f'(x) > 0$ , 其反函数为  $g(x)$ ,

$$\text{满足 } \int_1^{f(x)} g(t) dt = \frac{1}{5} (x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{3}}), \text{ 求 } f(x).$$

3. 设  $f(x) \in C_{(-\infty, +\infty)}$ , 若由  $y = f(x), x = 1, x = t (t > 1)$

与  $x$  轴围成的平面图形绕  $x$  轴旋转一周所得的

$$\text{旋转体体积为 } V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)],$$

且满足  $f(2) = \frac{2}{9}$ , 求  $f(x)$ .

4. 设  $F(x) = f(x)g(x)$ , 其中函数  $f(x), g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内满足以下条件:  $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x)$ , 且  $f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$ , 试求:

(1)  $F(x)$  满足的一阶微分方程; (2)  $F(x)$  的表达式.