

## 习 题 课 三

### 一、填空题

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5\cos x}{3x^2 + 6\sin x} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  与  $\frac{1}{x^3}$  是等价无穷小,  $g(x)$  与  $\frac{2}{x^2}$  是等价无穷小, 则

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x)}{3g(x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 设  $x \rightarrow 0$  时,  $(e^{x\cos x^2} - e^x)$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 则  $k = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 已知  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $1 - \cos x$  是等价无穷小, 则常数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$

### 二、选择题

1. 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 - \cos x)\ln(1+x^2)$  是比  $x\sin x^n$  高阶的无穷小, 而  $x\sin x^n$  是比  $(e^{x^2} - 1)$  高阶的无穷小, 则正整数  $n$  等于 ( )

(A) 1;            (B) 2;            (C) 3;            (D) 4。

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$ ,  $a^2 + c^2 \neq 0$ , 则 ( )

(A)  $a = -4c$ ;        (B)  $a = 4c$ ;        (C)  $b = -4d$ ;        (D)  $b = 4d$ 。

3. 当  $x \rightarrow 1$  时, 函数  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限为 ( )

(A).等于2;(B).等于0

(C).等于 $\infty$ ;(D).不存在但不等于 $\infty$ .

4. 设数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n y_n\} = 0$ , 则下列断言正确的是 ( )

(A) 若  $\{x_n\}$  发散, 则  $\{y_n\}$  必发散;

(B) 若  $\{x_n\}$  无界, 则  $\{y_n\}$  必有界;

(C) 若  $\{x_n\}$  有界, 则  $\{y_n\}$  必为无穷小;

(D) 若  $\{\frac{1}{x_n}\}$  为无穷小, 则  $\{y_n\}$  必为无穷小。

### 三、问答题

1. 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量, 能否说有界函数与无穷大量的乘积是无穷大量?
2. 无界函数是否一定是无穷大量?

### 四、求下列极限

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ ;    2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[5]{x^5 - 2x^4 + 1} - x)$ 。

### 五. 解答题

1. 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x})}{e^x - 1} = 5$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 。
2. 确定常数  $a$  和  $b$ , 使  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x - 1} - ax - b) = 0$ 。

### 六. 求下列极限

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{4}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$     2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$     3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{\frac{4}{x}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

七. 1. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x} & x < 0 \\ x + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ , 已知  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在, 求  $a$ 。

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{ax^2 - x + 1})$  存在且不等于零, 求  $a$ 。

3. 设  $P(x)$  为多项式,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x) - x^3}{x^2} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x} = 1$ , 求  $P(x)$ 。

4. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!})$

5. 设  $x > 2$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$