

## 习 题 课 二

### 一、问答题

1. 下列说法能否作为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  的定义。

(1) 对于无穷多个  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ ,  $\forall n > N$ , 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

(2)  $\forall \varepsilon > 0$ , 总存在无穷多个  $x_n$ , 使  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

2. 有界数列是否一定收敛? 无界数列是否一定发散?

3. 单调数列是否一定收敛? 收敛数列是否一定单调?

4. 若数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  发散, 问数列  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$ ,  $\{\frac{x_n}{y_n}\}$  是否一定发散?

### 二、证明题

1. 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0 (a > 1)$ 。

2. 若  $|x_{n+1}| \leq q|x_n|$  ( $0 < q < 1$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 。

### 三、求下列极限

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}$ ;

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} (x \neq 0)$ ;

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) (|x| < 1)$ ;

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}$ ;

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}};$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{n}{n^2 + \frac{1}{n}} \right);$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right].$$

#### 四、解答题

1. 设  $0 < x_n < 1$ ,  $x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 证明数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限。

2. 设  $x_1=10$ ,  $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ ,  $n=1, 2, \dots$ , 试证数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限。

#### 五. 求函数极限

1. 证明极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-1}{6(x+1)} = \frac{1}{3}$

2. 设  $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

3. 求  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}$

4. 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{30} (2x+3)^{70}}{(5x-9)^{100}}.$

5. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}})$

#### 六. 解答题

1. 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 且  $A > 0$ , 用极限定义证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ .

2. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^2} - \frac{x}{1-x} \right) = \frac{3}{2}$ , 求  $a$ .

3. 设  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  存在,  $f(x) = x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , 求  $f(x)$ .

4. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$ , 求  $a, b$  的值.