习 题 课 七

一、选择题

1．若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　　）

（A）0；　（B）6；　（C）36；　（D）∞。

2．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则（　　）

（A）$a=1,\ b=-\dfrac{5}{2}$；　（B）$a=0,\ b=-2$；

（C）$a=0,\ b=-\dfrac{5}{2}$；　（D）$a=1,\ b=-2$。

3. 设偶函数$f(x)$有二阶连续导数，且$f''(0)\neq 0$则$x=0$（　）

(A).不是$f(x)$的驻点　(B).不是$f(x)$的极值点

(C).是$f(x)$的极值点　(D) 不能确定是否为$f(x)$的极值点

4. $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$（　）

(A). 只有极大值，无极小值

(B).只有极小值，无极大值

(C).在$x=-1$时取极大值，在$x=0$时取极小值

(D) .在$x=-1$时取极小值，在$x=0$时取极大值

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续且 $f(0)=0$，

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）不可导；　（B）可导且 $f'(0)\neq 0$；

（C）有极大值；　（D）有极小值。

6. 设在[0，1]上，$f''(x)>0$，则下列不等式

成立的是（　　）

（A）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

（B）$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；

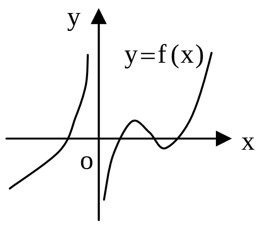
（C）$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；

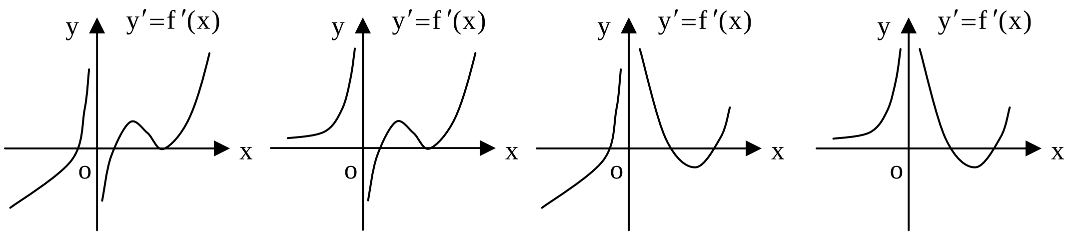
（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$。

7. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，

y=f(x) 的图形如图所示，则导

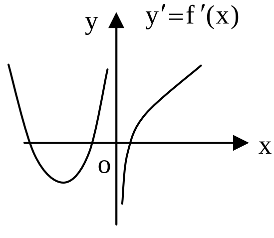
函数 $y'=f'(x)$ 的图形为（　）





（A）　　　　（B）　　　　（C）　　　　（D）

8. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（）



（A） 一个极小值点和两个极大值点；

（B） 两个极小值点和一个极大值点；

（C） 两个极小值点和两个极大值点；

（D） 三个极小值点和一个极大值点；

9. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间

(a,b) 内可导，则（　　）

（A）当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

（B）$\forall\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$；

（C）当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

（D）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

10. 设$f(x)$有三阶连续导数，$f'(0)=0$，且对一切 x 满足

$f''(x)+[f'(x)]^2=x$，则（　）

(A) $f(0)$是$f(x)$的极大值；

(B) $f(0)$是$f(x)$的极小值；

(C) 点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；

(D) $f(0)$不是$f(x)$的极值，点$(0,f(0))$也不是曲线

$y=f(x)$的拐点。

二、填空题

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$______。

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=$______。

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)=$______。

4．$f(x)=e^{x^2}-1$ 在 $x=0$ 处带拉格朗日余项的一阶泰勒公式为______________________________。

三、证明题

1．设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明 $\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$。

2. 设 $f''(x)$ 在 $x=a$ 连续，证明：对 $f(a+h)=f(a)+h\,f'(a+\theta h)$ 中的θ，有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$ 。

3．设 $x>0$，常数 $a>e$，证明：$(a+x)^{a}<a^{a+x}$ 。

4．设 $x>0$，求满足不等式 $\ln x\le A\sqrt{x}$ 的最小正数 A。

5．设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数。证明如果 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,\,a-\frac{f(a)}{k})$ 内有且仅有一个实根。

6．若火车每小时所耗燃料费用与火车速度立方成正比，已知速度为 $20{}^{km}\!/_{h}$ 时，每小时的燃料费用为 40 元，其他费用每小时 200 元，求最经济的行驶速度。