11—12（二）A 解答与评分标准

一、选择题（每题3分，共15分）

1 C, 2 B, 3 D, 4 D, 5 C

CBDDC

随机过程

1 C, 2 B, 3 D, 4 C, 5 B

二、填充题（每题3分，共15分）

1 $\frac{13}{48}$, 2 $1-\frac{1}{3}e^{-1}$, 3 $\frac{7}{2}$, 4 $\chi^2(1)$, 5 $e^{-\frac{1}{X}}$

随机过程

1 $\frac{13}{48}$, 2 $1-\frac{1}{3}e^{-1}$, 3 $\frac{7}{2}$, 4 $\chi^2(1)$, 5 $C_X(s,t)=4+st$

三、（10分）

设 $A_1=\{X\le 215\}, P(A_1)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)=0.1587$ ……1分

[illegible]全概率思想

$A_2=\{215<X\le 225\}, P(A_2)=2[\Phi(1)-1]=0.6826$ ……1分

$A_3=(X>225\}, P(A_3)=1-\Phi(1)=0.1587$ ……1分

B 表示该电子元件损坏，则

1 $P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$ ……2分

$=0.1587\times 0.1+0.6826\times 0.001+0.1587\times 0.2=0.0483$ ……1分

2 $P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}$ ……3分

$=\dfrac{0.1587\times 0.2}{0.0483}=0.657$ ……1分

随机过程此题为8分

四（10分）1、$F_Y(y)=P(X^2\le y)=$ ……1分

$$=\begin{cases}0, y<0\\ P(-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx, y\ge 0\end{cases}$$ ……2分

[illegible]分布函数. 2分

分段 2分.

$$=\begin{cases}0,\ \ y<0\\ \int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{3}dx=\frac{5\sqrt{y}}{6}, 0\le y<1\\ \int_{-\sqrt{y}}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{3}dx+\int_{1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{6}dx=\frac{\sqrt{y}+4}{6}, 1\le y<4\\ 1, y\ge 4\end{cases}$$ ……4分

2、$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x^2dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{3}x^2dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{6}x^2dx=\frac{2}{3}$ ……3分

随机过程无此题

五、（15分）随机过程此题为第四题，分值为（12分）

公式对- 2

1、$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0,y<0\\ 6\int_{0}^{1-y}xdx=3(1-y)^2,0<y<1\cdots\cdots 5分\\ \int_{-\infty}^{+\infty}0dx=0,y>0\end{cases}$

2分

2、$f_{X|Y}(x\left|\frac{1}{2}\right.)=\frac{f(x,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})}=\begin{cases}8x,0<x<\frac{1}{2}\\ 0,其它\end{cases}$ ……5分

2分

3、$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$ ……1分

2分

$=\begin{cases}0,z<0\\ 6\int_{0}^{z}xdx\int_{0}^{z-x}dy=z^3,0\le z<1\\ 1,z\ge 1\end{cases}$ ……4分

六、（10分）随机过程为第五题（8分）

设 X 为抽取的 n 个球中 0 号球的个数，则

2分 $X\sim b(n,0.1)$ ……2分

则 n 满足

$P(0.09<\frac{X}{n}<0.11)=P(\left|\frac{X}{n}-0.1\right|<0.01)$ ……2分

$=P(\frac{|X-0.1n|}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}<0.01\sqrt{\frac{n}{0.1\times 0.9}})$ ……2分

$\approx 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{30})-1\ge 0.9544$ ……2分

$\Rightarrow\ \Phi(\frac{\sqrt{n}}{30})\ge 0.9772=\Phi(2)\Rightarrow n\ge 3600$ ……2分

七（10分）随机过程为第六题

2分 3分

1、$\alpha_1(\theta)=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^3}{2\theta^3}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=3\theta$ ……3分

$\underline{\underline{令}}\bar{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{3}$ ……2分

2、似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{X_i^2}{2\theta^3}e^{-\frac{X_i}{\theta}} \qquad \cdots\cdots 1分$$

$$= 2^{-n}\theta^{-3n}e^{-\frac{n\bar{X}}{\theta}}\prod_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad \cdots\cdots 1分$$

$$\ln L(\theta)=-n\ln 2-3n\ln\theta-\frac{n\bar{X}}{\theta}+\ln\prod_{i=1}^{n}X_i^2 \qquad \cdots\cdots 1分$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{-3n}{\theta}+\frac{n\bar{X}}{\theta^2}=0 \qquad \cdots\cdots 1分$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_L=\frac{\bar{X}}{3} \qquad \cdots\cdots 1分$$

八、（7分） 1、统计量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{100}X_i^2 \sim \chi^2(100)$ ……2分

2、因为

$$P(\chi^2_{0.975}(100)<\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{100}X_i^2<\chi^2_{0.025}(100))$$

$$=P(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.025}(100)}<\sigma^2<\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.975}(100)})=0.95 \qquad \cdots\cdots 3分$$

故 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.025}(100)},\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.975}(100)})=(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{129.5612},\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{74.2219}) \qquad \cdots\cdots 2分$$

九、（8分）在显著水平 α=0.05 下，检验问题

$$H_0:\ \mu=10 \leftrightarrow H_1:\ \mu=10.3225$$

$\frac{\bar{x}-\mu}{5}\sqrt{100}\sim N(0,1)$

的拒绝域

$$S=\{(x_1,\cdots,x_{100})\left|\frac{\bar{x}-10}{5}\sqrt{100}\geq u_{0.05}=1.645)\right.\} \qquad \cdots\cdots 4分$$

所以犯第二类错误的概率为

$$\beta=P(接受\ H_0\left|H_0\ 不成立\right.) \qquad \cdots\cdots 2分$$

$$=P(\frac{\bar{X}-10}{5}\sqrt{100}<1.645\left|H_1:\ \mu=10.3225成立\right.)$$

$$=P(\frac{\bar{X}-10.3225+10.3225-10}{5}\sqrt{100}<1.645\left|H_1:\ \mu=10.3225成立\right.)$$

$$=P(\frac{\bar{X}-10.3225}{5}\sqrt{100}<1.645-0.645\left|H_1:\ \mu=10.3225成立\right.)$$

$$=\Phi(1)=0.8413 \qquad \cdots\cdots 2分$$

随机过程第七题（14分）

1、因为统计量 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{100}X_i^2 \sim \chi^2(100)$ ……2分

$$P(\chi^2_{0.975}(100) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{100}X_i^2 < \chi^2_{0.025}(100))$$

$$= P(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.025}(100)} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.975}(100)}) = 0.95 \quad \text{……3分}$$

故 σ^2 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.025}(100)}, \frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{\chi^2_{0.975}(100)}) = (\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{129.5612}, \frac{\sum_{i=1}^{100}X_i^2}{74.2219}) \quad \text{……2分}$$

2、在显著水平 α=0.05 下，检验问题

$$H_0\text{：}\ \mu = 10 \leftrightarrow H_1\text{：}\ \mu = 10.3225$$

的拒绝域

$$S = \{(x_1,\cdots,x_{100}) \left| \frac{\overline{x}-10}{5}\sqrt{100} \ge u_{0.05} = 1.645)\right.\} \quad \text{……4分}$$

所以犯第二类错误的概率为

$$\beta = P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 不成立）} \quad \text{……1分}$$

$$= P(\frac{\overline{X}-10}{5}\sqrt{100} < 1.645 | H_1\text{：}\ \mu = 10.3225\text{成立）}$$

$$= P(\frac{\overline{X}-10.3225+10.3225-10}{5}\sqrt{100} < 1.645 | H_1\text{：}\ \mu = 10.3225\text{成立）}$$

$$= P(\frac{\overline{X}-10.3225}{5}\sqrt{100} < 1.645 - 0.645 | H_1\text{：}\ \mu = 10.3225\text{成立）}$$

$$= \Phi(1) = 0.8413 \quad \text{……2分}$$

八（8分）随机过程

$$F(x;\ t)\ = P(X(t) \le x)\ = P(\frac{t}{X} \le x) \quad \text{……2分}$$

$$= \begin{cases} \int_{\frac{t}{x}}^{+\infty} 0dx = 0, x < t \\ \int_{\frac{t}{x}}^{1} 4x^3 dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = 1-(\frac{t}{x})^4, x \ge t \end{cases} \quad \text{……6分}$$

九、（10分） 1、$\{X_n;\ n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵为

1 $\{X_n;\ n\geq 0\}$的一步转移概率矩阵$P=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ……4分

2、$p_{21}(2)=\sum_{k=0}^{2} p_{2k}p_{k1}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{35}{72}$ ……1分

$P(X_1=2, X_3=1, X_2=2)=p_2(1)p_{21}(2)p_{12}$ ……1分

$=1\times\frac{35}{72}\times\frac{1}{6}=\frac{35}{432}$ ……1分

3、因为$\{X_n;\ n\geq 1\}$的一步转移概率矩阵无零元，故其具有遍历性，设其极限分布为 (π_0,π_1,π_2),则由

$$(\pi_0,\pi_1,\pi_2)P=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$$

及 $\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$

$\Rightarrow(\pi_0,\pi_1,\pi_2)=(\frac{99}{299},\frac{60}{299},\frac{140}{299})$ ……3分