

# 《算法分析与设计》第3次作业\*

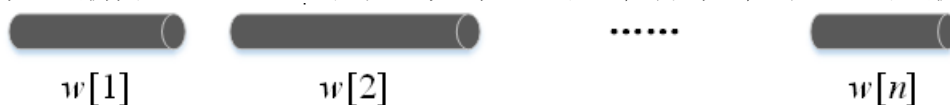
姓名：谈金翰 学号：71118314

2020/4/5

## 算法分析题

题目：铁管焊接

$n$  个铁管具有重量，被按序存放在  $w[i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ 。这些铁管将根据它们的顺序，被焊接成一个大的铁管，每个时间任意两个相邻的铁管可以被选中来进行焊接。焊接的代价是焊接的铁管中的重量较大的铁管的重量。例如： $w[1]=5$ ,  $w[2]=1$ ,  $w[3]=2$ ，如果 1 和 2 先进行焊接，则焊接的代价为 5，然后 3 被焊接代价为 6，那么总的焊接代价为  $5+5=10$ 。但是如果先焊接 2 和 3，再焊 1，那么总的代价为  $2+5=7$ 。



- (1) 设计一个动态规划算法去发现最优的焊接顺序，使得整个代价最小和确立迭代关系。
- (2) 将设计的算法应用到一个具体的实例中，去发现最优焊接顺序和其相应的焊接总代价，该实例具有 5 个钢管， $w[1]=6$ ,  $w[2]=2$ ,  $w[3]=7$ ,  $w[4]=5$ ,  $w[5]=8$ 。请给出详细的解决过程。
- (3) 如果这个问题用贪心法做，如何开展？请设计一个贪心法来实现，并分析算法的结果。

答：

- (1) 将铁管  $i, i+1 \dots j$  简记为  $A[i:j]$ ，其重量 weight 简记为  $W[i:j]$ ；其中  $i < j$ ； $A[1:n]$  的  $cost = A[1:k]$  的  $cost + A[k+1:n]$  的  $cost + \max\{W[1:k], W[k+1:n]\}$ ；铁管焊接问题的最优解包含着其子问题的最优解。  
设计算  $A[i:j]$  所需要的最少代价  $cost$  为  $cost[i,j]$ ；原问题最优值为  $cost[1:n]$ ；  
当  $i=j$  时，利用最优子结构性性质计算  $cost[i,j]$ ；

\*

$$cost[i, j] = cost[i, k] + cost[k + 1, j] + \max \{W[i : k], W[k + 1 : j]\}; i < k < j$$

递归地定义  $ost[i, j]$  为:

$$cost[i, j] = \begin{cases} 0, & i = j \\ cost[i, k] + cost[k + 1, j] + \max \{W[i : k], W[k + 1 : j]\}, & i < j \end{cases}$$

同时, 使用  $s[i, j]$  记录在第  $i$  根钢管和第  $j$  跟钢管之间的位置  $k$  处进行最后一次焊接伪代码如下:

输入  $n, W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

输出  $Cost[]$ ,  $S[]$

Merge(int  $W[], n$ )

1. for  $i \leftarrow 1$  to  $n$

2.  $cost[i][i] \leftarrow 0$

3. endfor

4. for  $r \leftarrow 1$  to  $n-1$

5. for  $i \leftarrow 1$  to  $n-r$

6.  $j \leftarrow i+r$

7.  $cost[i, j] \leftarrow -9999$

8. for  $m \leftarrow i$  to  $j-1$

9.  $c \leftarrow cost[i, m] + cost[m+1, j] + \max(W(i, m), W(m+1, j))$

10. if  $c < cost[i, j]$

11. then  $cost[i, j] \leftarrow c$

12.  $s[i, j] \leftarrow m$

13. endif

14. endfor

15. endfor

16. endfor

17. return  $cost$  and  $S$

18. end

(2) 按照动态规划算法得到的  $weight[i][j]$  如下:

i/j	1	2	3	4	5
1	6	8	15	20	28
2	0	2	9	14	22
3	0	0	7	12	20
4	0	0	0	5	13
5	0	0	0	0	8

$cost[i][j]$  如下:

i/j	1	2	3	4	5
1	0	6	14	25	37
2	0	0	7	14	28
3	0	0	0	7	19
4	0	0	0	0	8
5	0	0	0	0	0

S[i][j] 如下:

i/j	1	2	3	4	5
1	0	1	2	2	3
2	0	0	2	3	3
3	0	0	0	3	4
4	0	0	0	0	4

最终的焊接顺序为  $(((2,6),7),(5,8))$

最小代价:  $\text{cost}[1,5]=6+8+8+15=37$

(3) 设计贪心算法:

1) 遍历所有铁管重量, 选择最小的那个, 将其和左右两边较小的那个焊接, 并生成一个新的铁管, 之后再次遍历剩余  $n-1$  个铁管重量, 重复上面的操作。

算法分析: 这个算法不能得到最优解:

以上面第二题为例: 贪心法得到的解为:

$((((2,6)(7,5))8))$

焊接代价为:  $6+7+12+20=45$ , 最小代价应为 37

因此不是最优解, 此算法不能得到最优解

2) 遍历所有铁管重量, 算出最小的焊接代价所在的位置进行焊接, 并生成一个新的铁管, 之后再次遍历剩余  $n-1$  个铁管重量, 重复上面的操作。

算法分析: 这个算法不能得到最优解:

以上面第二题为例: 贪心法得到的解为:

$((((2,6)(7,5))8))$

焊接代价为:  $6+7+12+20=45$ , 最小代价应为 37

因此不是最优解, 此算法不能得到最优解