习题

8.（2）1，（5）$\frac{1}{2}$，

（6）

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2)}{x(x+1)}=-\frac{1}{2},$$

（7）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{9x^2+6x+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{9+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{3}$$

（8）$\frac{1}{2}$，（9）$\frac{n(n+1)}{2}$，（10）$\frac{mn(n-m)}{2}$，

9.（2）$a=1,b=-1$，

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-ax-b)=0$，

解：$\because \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-ax)-\lim\limits_{x\to\infty}b$，

$\therefore b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-ax)$，

又$\because \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x}-a)$，

所以显然$a>0$，并且$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x-1}}{x}=1$，

$\therefore b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2-x-1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+1}}=-\frac{1}{2}$，

1.$\frac{\alpha}{\beta}$，（5）$(-1)^n$，（6）$\frac{2}{\pi}$，

（8）$\frac{1}{8}$，（9）e^{-10}，（11）e^{-2}，（12）e^2，2.（1）$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$，

$\therefore x\sim 0^+$时$x\sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x^3}$成立。

4.（1）1，（2）$\frac{1}{2}$，（4）$\frac{1}{2}$，

5.设$m,n\in N_+$，证明：

（1）当$x\to 0$时，$\circ(x^m)+\circ(x^n)=\circ(x^l),l=\min(m,n);$

设$f(x)=\circ(x^m)$，所以$f(x)=\alpha(x)x^m$ ，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$，

同理设$g(x)=\circ(x^n)$，所以$g(x)=\beta(x)x^n$ ，$\lim\limits_{x\to 0}\beta(x)=0$，

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^l}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^l}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^l}$

由于$m-l\geq 0,n-l\geq 0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^l}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^l}=0,$

所以$\circ(x^m)+\circ(x^n)=\circ(x^l),l=\min(m,n)$，

（2）当$x\to 0$时，$\circ(x^m)\cdot\circ(x^n)=\circ(x^{m+n})$，

设$f(x)=\circ(x^m)$，所以$f(x)=\alpha(x)x^m$ ，$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$，
同理设$g(x)=\circ(x^n)$，所以$g(x)=\beta(x)x^n$ ，$\lim\limits_{x\to0}\beta(x)=0$，
$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)\cdot g(x)}{x^{m+n}}=\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=0$，
所以$\circ(x^m)\cdot\circ(x^n)=\circ(x^{m+n})$

（3）当$x\to0$时，$\circ(cx^n)=\circ(x^n)(c\neq0)$，

设$f(x)=\circ(cx^n)$，所以$f(x)=\alpha(x)cx^n$ ，$\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$，
由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{c\alpha(x)x^n}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}c\alpha(x)=0$

7.证明：取$a_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},n=0,1,2,\cdots$，则$0<a_n<1$，但$f(a_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，
所以$f(x)$在区间$(0,1]$内无界，

但$\exists G_0=2>0$，对于$\forall\delta>0$，总存在正整数n使得$0<\frac{1}{2n\pi}<\delta$，取$x_0=\frac{1}{2n\pi}$，
则$f(x_0)=2n\pi\cdot\sin2n\pi=0<G_0$，

所以当$x\to0^+$时，$f(x)$不是无穷大量。