Compitino I. Maggio 2020

Tempo: un'ora e mezza

Esercizio I (8 punti) Calcolare **uno** dei seguenti integrali col metodo dei residui

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 - \pi^2/4)}\, dx\,;$$
$$b) \int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}\, dx\,.$$

Nel caso se ne risolva più di uno **indicare quale si vuole che venga valutato**.

Esercizio II (5+5 punti)

a) Espandere $\frac{1}{z^2-1}$ in serie di Laurent nelle due regioni $0 < |z+1| < 2$ e $|z+1| > 2$.

b) Determinare la regione di convergenza dalla serie di Laurent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n}$.

Domande di teoria (12 punti) Rispondere alle seguenti domande, motivando brevemente la risposta:

a) Elencare le condizioni a cui deve soddisfare un dominio D perchè $f(z)$ si possa sviluppare in serie di Taylor e in serie di Laurent convergente in D.

b) Sia data una funzione olomorfa $f(z)$ con una singolarità isolata in z_0. Dire se esiste e quanto vale $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ nel caso in cui z_0 sia una singolarità eliminabile, un polo o una singolarità essenziale, rispettivamente.

c) Qual è il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze della funzione $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ nell'intorno di $z = 0$?

d) Quanto vale $\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$ dove γ è una arbitraria curva chiusa nel piano?

Domande facoltative

e) Data la serie di Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ convergente nell'anello $D = \{0 \le r < |z| < R \le \infty\}$. Sotto quali condizioni sui coefficienti a_n $f(z)$ ammette una primitiva olomorfa in D?

f) La serie di cui all'esercizio II) punto b può essere prolungata analiticamente ad un dominio che contenga un intorno di $z = 0$? [Suggerimento: risommare la serie]

Partial exam I, May 2020

You have 1 hour 30 minutes

Exercise I (8 points) Use the method of residues to calculate **one** of the following integrals

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 - \pi^2/4)}\, dx\,;$$

$$b) \int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+1)}\, dx\,.$$

If you calculate both integrals, **please clearly indicate which integral you want us to consider for evaluation**.

Exercise II (5+5 points)

a) Expand $\frac{1}{z^2-1}$ in Laurent series in the two regions $0 < |z+1| < 2$ and $|z+1| > 2$.

b) Determine the convergence region of the Laurent series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n}$.

Theory questions (12 points) Answer the following questions with a short explanation:

a) List the conditions on the domain D under which $f(z)$ on D can be expanded in Taylor and in Laurent series convergent in D.

b) Let $f(z)$ be an holomorphic function with an isolated singularity in z_0. Determine whether it exists and what is the value of $\lim_{z\to z_0} |f(z)|$ in the cases of a removable singularity, a pole and an essential singularity.

c) Find the convergence radius of the power series expansion of the function $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ about $z = 0$.

d) Find the value of $\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$ where γ is an arbitrary closed curve in the complex plane.

Optional questions

e) Consider the Laurent series $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ convergent in the annulus $D = \{0 \leq r < |z| < R \leq \infty\}$. Find the conditions on the coefficients a_n under which $f(z)$ admits an holomorphic primitive in D.

f) Is it possible to analytically continue the series of point b in exercise II) to a domain containing a neighbourhood of $z = 0$? [Hint: re-sum the series first]