测地线方程解析

王晓松

(天津市南开社区学院,天津市 300100)

摘 要: 测地线又称为短程线,是指物体在某种时空结构中从一点运动到另一点所走过的最短路程。描述测地线的数学表达式称为测地线方程。测地线方程可以用多种方法推导出来,但需要寻找一种使人最容易理解和接受的方法来完成这一推导过程,才能加深对欧氏空间和非欧氏空间中各种性质的理解。

关键词: 测地线方程;欧氏空间;协变微分

中图分类号:O31 文献标识码:A 文章编号:1673—582X(2010)02—0081—04

人们对于身边经常发生的事情往往是熟视无睹,不去思考其中的道理。比如,如果有人在一块平滑的场地上向前推一下一个圆球,这个球体就会沿直线一直向前运动,直到它碰到障碍物为止。但人们不会去想:为什么这个圆球走直线而不走曲线?然而,这个看似平常的问题却涉及到一个深刻的原理:时空的结构和物体在所受合外力为零时的运动状态。

一、惯性定律的建立

物体在不受外力(或所受合外力为零)时应当处于什么状态?这个问题常人不会多加思考,但科学家不会漏掉这个问题。早在古希腊时代,德谟克利特(Democritus,公元前460—371)、伊壁鸠鲁(Epicurus,公元前342—270)都认为:“当原子在虚空里被带向前进而没有东西与他们碰撞时,它们一定以相等的速度运动(伊壁鸠鲁语)”。但是,不论是古希腊的哲学家还是后来他们的信徒,都无法证实这条原理,实际上他们只能通过猜测或推想得出这样的结论。

亚里士多德则断言,物体只有在一个不断作用者的直接接触下,才能保持运动,一旦推动者停止作用,或两者脱离接触,物体就会停止下来。这种说法实际上是受到人们的一些日常感觉的影响,并且似乎与人们的一些日常经验没有矛盾,但是显然经不起推敲。例如,对于抛射体的运动,亚里士多德解释说,之所以抛射体在出手后还会继续运动,是由于手或机械在作抛物动作中同时也使靠近物体的空气运动,而空气再带动物体运动。但是,亚里士多德的思想不可避免地也会出现纰漏。人们要问,空气对物体的运动也会有阻力作用,为什么有的时候推力大于阻力,有的时候阻力又会大于推力?

惯性定律是牛顿力学的重要基石之一,从亚里士多德的自然哲学转变到牛顿的经典力学,最深刻的变化就在于建立了惯性定律。前者认为一切物体的运动都是由于其它物体的作用;而后者认为“每一个物体都会继续保持其静止或沿一直线作等速运动的状态,除非有力加于其上,迫使它改变这种状态。”这就是牛顿在《自然哲学的数学原理》一书中,作为第一条公理提出的基本原理。

牛顿在建立三大运动定律的同时也创立了万有引力定律,该定律指出:两个物体之间的万有引力与两个物体的质量成正比,与两个物体之间的距离的平方成反比。用数学表达式写出来就是:

$$\vec{F}_g = G\frac{M_g m_g}{r^2}\vec{r}$$

其中G是万有引力恒量($G=6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$),$M_g$;$m_g$ 分别是两个物体的引力质量。

现在我们再来讨论一下牛顿第二定律(加速度为零时它就退化成惯性定律),它的表达式为

$$\vec{F} = m_t\vec{\alpha}$$

收稿日期:2009—09—22

作者简介:王晓松(1961—),男,四川成都人,天津市南开社区学院副教授,主要从事物理和计算机学科教学。

其中的 m_t 代表一个物体的惯性质量。$\vec{F}$ 为作用在物体上的合外力。在此之后的很长一段时间之内人们认为:引力质量和惯性质量分别是一个物体在不同的物理状态下表现出来的不同的物理属性,两者之间没有什么联系。而万有引力定律与牛顿运动定律也是完全不同的两回事。

二、广义相对论对引力问题的解释

爱因斯坦(Einstein)所建立的狭义相对论依赖于一个现实中难以存在的"惯性参照系",这个参照系在自然界中居于特殊地位,但在自然界中难以找到一个实体来诠释这一参照系。同时,牛顿的引力理论是非协变的,不能满足相对论的要求。爱因斯坦不能满足于已有的这种不完善的相对论。经过艰苦的探索,他建立起了广义相对论,这是一种新的引力理论。

1915 年建立起来的广义相对论认为:在引力物体的近旁,空间和时间要被扭曲。行星的轨道运动并不是由于什么引力的作用,而是由于这种时空的扭曲。引力就是弯曲时空的表现。而物体的引力质量和惯性质量是等同的。因为从实验上来看,上世纪 60 年代,迪克(Dicke)等人在前人实验的基础上,观测到

$$\frac{m_g}{m_t}=1+o(10^{-11})$$

就是说在这样一个精度上,也看不到引力质量和惯性质量之差。因此,至少在量值上,两者是相等的。

三、测地线方程的意义及推导

如果说引力来自于时空的扭曲,而并非是由于有什么力的作用,而且引力质量与惯性质量具有等价性。那么我们就可以推论:在低速宏观范畴内时空是平直的,这种时空结构决定了物体在没有受到其他外力的影响下会静止或做匀速直线运动。而在宇观范围内时空是弯曲的,尤其是在具有巨大质量的星体附近时空更是有明显的弯曲,因此行星会按照我们所熟知的轨道运行,这并不是由于存在着什么力。因此,我们可以认为物体在弯曲的时空中走曲线与物体在平直的时空中走直线在本质上是完全一样的,都是物体具有惯性的体现。

那么,物体在弯曲的时空中应当走一条什么样的曲线呢?根据哈密顿原理,保守的、完整的力学体系在相同时间内,由某一初位移转移到另一已知位移的一切可能运动中,真实运动的作用函数具有极值,即对于真实运动来讲,作用函数的变分等于零。进一步说:物体在平直时空内由于惯性而做匀速直线运动,是因为在平直时空内由一点运动到另一点,直线的距离最短。

但是,如果时空本身就是弯曲的,在这一时空中,物体由于惯性而运动就不可能走直线,而且这样的时空也无法用直角坐标系来描述。当然,除了直角坐标系,我们常用的曲线坐标系有球坐标系和柱坐标系。在实际中究竟使用何种曲线坐标系,要看具体的时空结构用哪种坐标系更便于描述物理现象。比如,描述巨大的球状星体周围的时空结构,采用球坐标系就比较方便。如果抛开具体的时空结构,我们所讨论的坐标系就只能是抽象的。

那么,在某种弯曲的时空中物体由于惯性而运动应当沿着什么样的路径呢?这要由具体的时空结构来决定。例如,在巨大的球状星体周围做惯性运动的小星体就会沿着椭圆轨道运动。这是因为巨大的球状星体周围的时空被弯曲成这样的结构,而描述这样的时空结构就以采用球坐标系为宜。而物体在某种时空结构中由于惯性而运动所采用的路径我们就称之为测地线。

测地线又称为短程线,是指物体在某种时空结构中从一点运动到另一点所走过的最短路程。描述测地线的数学表达式称为测地线方程。推导出测地线方程的途径有多种。但笔者认为最易于使人理解和接受的途径是从经典物理的理念出发,逐渐推导出非欧空间中的测地线方程。

在狭义相对论中已经得到单位质量($m=1$)质点的洛伦兹协变式的运动方程为 $F^\mu=\frac{du^\mu}{d\tau}=\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$,其中 $u^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau}$ 代表 4 维速度,F^μ 代表 4 维力,$d\tau$ 代表固有时间。

考虑到狭义相对论的局限性(不能包容引力),因此此处只研究当 $F^\mu=0$ 时,质点在空中做自由运动的情况。此时,质点的运动方程是 $\frac{du^\mu}{d\tau}=0$,或 $\frac{d^2x}{d\tau^2}=0$。

下面将 $\frac{du^\mu}{d\tau}=0$ 改造成广义协变式。

首先,在黎曼空间中,速度矢量可以表示为:$\vec{u}=u^\mu\vec{e}_\mu=u_\mu\vec{e}^\mu$,这里的基矢量 $\vec{e}_\mu$ 或 $\vec{e}^\mu$ 是位置的函数。对于 $\vec{e}_\mu$ 形式的表示式而言,有

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha}\vec{e}_\mu+u^\mu\frac{\partial\vec{e}_\mu}{\partial x^\alpha}$$,定义 $\frac{\partial\vec{e}_\mu}{\partial x^\alpha}=\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\vec{e}_\beta$,这样就有

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}+u^{\mu}\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}+u^{\mu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\vec{e}_{\beta}$$

将上式中第二项的指标μ 和β 和互换, 则

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}+u^{\mu}\frac{\partial \vec{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}+u^{\mu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\vec{e}_{\beta}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}+u^{\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\vec{e}_{\mu}=\left(\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}+u^{\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}\right)\vec{e}_{\mu}$$

如果再定义$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\tilde{\partial} u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\vec{e}_{\mu}$, 根据上式最后一个等于号右边的式子, 这个定义是合理的。去掉矢量因素, 存在

$$\frac{\tilde{\partial} u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}+u^{\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$$

将上式两边乘以 dx^{α}, 可以得到$\frac{\tilde{\partial} u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}+u^{\beta}\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}dx^{\alpha}$

定义$\frac{\tilde{\partial} u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}=Du^{\mu}$, 并且有 $du^{\mu}=\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}$ 是普通微分, 因此有

$Du^{\mu}=du^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}u^{\beta}dx^{\alpha}$, 或者互换右式第二项的指标$\alpha$ 和β 的位置,

就有 $Du^{\mu}=d^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}u^{\alpha}dx^{\beta}$

因为在广义协变式中, 粒子不受力的情况下, 应当是 $F^{\mu}=\frac{Du^{\mu}}{d\tau}=0$, 而不是

$F^{\mu}=\frac{du^{\mu}}{d\tau}=0$, 所以

$Du^{\mu}=du^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}u^{\alpha}dx^{\beta}$ 各项都除以 $d\tau$ 有:

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}u^{\alpha}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}=\frac{Du^{\mu}}{d\tau}=0$$

并且 $u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}$, $u^{\alpha}=\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}$, 因而

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}=0$$

这就是测地线方程。

而在平直时空中, 由于克里斯托弗联络 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=0$, 因此有$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}=0$。这样就有$\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=A$, 而 $x^{\mu}=A\tau+B$。这里的 A, B 是常数。这就说明在平直的时空结构中, 物体由于惯性而运动就应当沿着直线而做匀速运动。

四、总结

本文所阐述的内容可以概括如下:

(1)牛顿第一定律的建立说明了当物体不受外力作用时, 将保持静止或者做匀速直线运动, 一直到有外力迫使它改变这种状态。然而在牛顿时代, 物体间的引力作用与牛顿三定律是无法联系到一起的两回事。

(2)爱因斯坦建立了广义相对论, 将引力视作是在引力物体的近旁, 空间和时间被扭曲的结果, 而不是由于什么力的作用。并且认为物体的引力质量与物体的惯性质量相等。

(3)物体在弯曲的时空中沿测地线运动, 与物体在平直的时空中沿直线运动在本质上是相同的, 都是物体惯性的表现。

参考文献:

[1] 余扬政, 冯承天. 物理学中的几何方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[2] 俞允强. 广义相对论引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999.

[3] 戴天民. 张量和连续介质力学[M]. 沈阳: 辽宁大学出版社, 1986.

[4] 唐肇华, 刘素芸, 翁甲强. 广义相对论导论[M]. 桂林: 广西师范大学出版社, 1997.

[5] 郭奕玲, 沈慧君. 物理学史[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[6] 张三慧, 王虎珠. 力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.

[7] 周衍伯. 理论力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

(下转第 95 页)

三、结束语

由于自动控制原理课程的理论性较强, 教师在教学过程中要融入多种教学手段, 使抽象的系统理论形象化。要通过教学手段的改进、培养学生的工程意识和创新能力, 朝高职教、学、做一体的目标迈进。

参考文献:

[1] 张志涌, 徐彦琴. MATLAB 教程——基于 6. X 版本[M] . 北京: 北京航空航天大学出版社, 2000.

[2] 薛定宇, 陈阳泉. 基于 MATLAB/ Simulink 的系统仿真技术及应用[M] . 北京: 清华大学出版社, 2002.

[3] 陈伯时. 电力拖动自动控制系统[M] . 北京: 机械工业出版社, 2004.

[4] 闻 新, 周 路, 李东江, 贝 超. MATLAB 模糊逻辑工具箱的分析与应用[M] . 北京: 科学出版社, 2006.

Creating New Idea of Course Teaching for Automatic Control Principle

JIANG Shu—jie

(*Tianjin Metallurgy Vocational Technical College, Tianjin 300400 China*)

Abstract: The simulation technology of MATLAB/ simlink and EWB software are introduced into the analysis and research of Automatic Control Principle and System to make the abstract qualitative and quantitative analysis intuitive and visual so that the teaching methods are enriched.

Key words: automatic control; system; MATLAB; simulation

(上接第 83 页)

Analysis on Geodesic Equation

WANG Xiao—song

(*Tianjin Nankai Community College, Tianjin 300100 China*)

Abstract: Geodesic refers to the shortest path an object moves from one point to another point in a time—space structure. The mathematical expression to describe the geodesic is called geodesic equation. Geodesic equation can be derived by many methods, however, the method which is the easiest to be understood and accepted is needed to complete the derivation process. Only by doing so can the various properties in both Euclid space and non—Euclidean space be understood deeply.

Key words: geodesic equation; Euclid space; covariant differentiation