

文章编号: 1002-0446(2004)01-0083-04

# 一种基于测地线的机器人轨迹规划方法<sup>\*</sup>

张连东, 王德伦

(大连理工大学机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘 要:** 提出了一种基于测地线的机器人轨迹规划方法. 该方法克服了传统的轨迹规划方法的某些不足, 其规划是在关节空间(黎曼空间)内进行的, 规划目标是直角坐标空间内的直线, 即两点之间的最短路径, 也可以是系统动能最小, 或某项综合指标最优. 该规划方法直接得到机器人的各关节的转角和角速度, 无需进行运动学反解和多项式插值. 本文的基于测地线的轨迹规划是以轨迹弧长作为参考变量的, 因此它还具有非时间参考的机器人轨迹规划的优点.

**关键词:** 机器人轨迹规划; 测地线; 非时间参考的轨迹规划

**中图分类号:** TP24 **文献标识码:** B

## ROBOT TRAJECTORY PLANNING BASED ON GEODESICS

ZHANG Lian-dong, WANG De-lun

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** A geodesic based trajectory planning method for robots is proposed in this paper, which overcomes some shortcomings of traditional trajectory planning method. The planning is performed in joint space and the planning objects can be a line in Cartesian space, the kinetic energy or some combined indices. Angle and velocity of each joint is attained directly and no inverse kinematics and polynomial interpolation are needed. Because arc length of trajectory is regarded as the variant in geodesics based method, it possesses the advantages of non-time based trajectory planning at the same time.

**Keywords:** robot trajectory planning; geodesics; non-time based trajectory planning

### 1 引言(Introduction)

在进行机器人的轨迹规划时, 往往希望节点之间的路径最短, 或动能最小, 或其综合指标最优. Paul 用齐次变换矩阵表示目标位置, 生成直线运动轨迹<sup>[1]</sup>. Taylor 对节点间的直线规划问题提出了两种方法, 第一种方法是直角坐标路径控制法, 用四元数表示转动, 但需要大量的实时计算; 第二种方法是有界偏差路径法, 选取足够多的节点, 用关节变量的线性插值控制操作臂, 使其与直线路径的偏差不超过预定值<sup>[1]</sup>. 本文的方法是利用现代微分几何<sup>[2]</sup>中测地线的几何性质, 进行两节点之间路径最短(直线)的轨迹规划. 测地线是黎曼曲面上两点之间路径最短的必要条件, 对于直角坐标空间中的规划, 两节点之间的测地线就是直线. 若要使两节点之间动能最小, 则其轨迹对应于以系统动能作为黎曼度量所决定的黎曼表面上的测地线; 同理, 对于某项综合性能指标, 两点之间的最优轨迹对应于该综合性能指

标作为黎曼度量所决定的黎曼表面上的测地线. 该规划方法直接得到机器人的各关节的转角和角速度, 无需进行运动学反解和在直线轨迹上选多个节点进行多项式插值. Milos Zefran 等<sup>[3]</sup>应用测地线研究了单自由度刚体的平滑轨迹; Rodnay 与 Rimon<sup>[4]</sup>将二自由度机器人的动能看作黎曼度量, 将该黎曼度量所决定的黎曼曲面映射到三维空间进行可视化, 定性分析了几种特殊的二自由度机器人的动力学性质, 找出了该曲面上的一些特殊的测地线. 但并未给出一般条件下的测地线的确定方法. 目前很少见到有文献介绍测地线应用于机器人的最优轨迹规划. 本文基于测地线的轨迹规划方法是以轨迹弧长为参考变量, 属于非时间参考的规划方法<sup>[5]</sup>, 在这种规划方法下, 系统在处理不确定事件时更具有智能性. 因此, 本文应用测地线进行机器人轨迹规划的研究. 该

<sup>\*</sup> 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59975013).

方法不仅适用于二自由度机器人,而且也适用于三自由度及多自由度机器人。

## 2 测地线的概念<sup>[4]</sup> (The concept of geodesics)

测地线是曲面上两点之间的最短线,是平面上的直线在平面上的推广,例如球面上两点之间的直线(最短线)是球面上过这两点的大圆的一段圆弧。为了将测地线的概念应用于机器人的轨迹规划,我们考虑更抽象的黎曼曲面上的测地线  $C$ :

$$\theta_i = \theta_i(t) \quad (1)$$

$\theta_i$  可看作对应于机器人的各关节转角。黎曼曲面是与空间固定坐标系的选择无关的抽象的几何曲面,它由黎曼度量唯一确定。例如,根据优化任务的不同,可以分别以轨迹弧长和系统动能为黎曼度量,它们决定了不同的黎曼曲面,曲面上的测地线分别对应于路径最短和能量最小。黎曼度量是一个正定的二次形式,设黎曼曲面上的黎曼度量为:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} d\theta_i d\theta_j \quad (2)$$

上式中的  $g_{ij}$  为黎曼度量系数。微分几何中曲线的弧长是不变量,在推导测地线的方程时,选弧长  $s$  作为曲线的参数是方便的,这时  $\frac{d\theta_i}{ds}$  为曲线的切向量。测地线的切向量的协变微分为零,对曲线的切向量求协变微分并令其等于零,得到测地线的微分方程为:

$$\frac{d^2\theta_i}{ds^2} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj}^i \frac{d\theta_k}{ds} \frac{d\theta_j}{ds} = 0 \quad (3)$$

式中  $\theta_i$ ——机器人的第  $i$  个关节变量;

$n$ ——机器人的自由度;

$\Gamma_{kj}^i$ ——克里斯托弗(Christoffel)符号;

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{im} \left( \frac{\partial g_{km}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_m} \right) \quad (4)$$

式中,  $g_{ij}$ ——黎曼度量系数矩阵的第  $i$  行第  $j$  列所对应的元素;

由于黎曼度量系数矩阵及其逆矩阵都是对称矩阵,因此由式(4)可知,  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$ 。

对于二自由度平面 2R 机器人来说,  $n=2$ , 所以测地线方程式(3)是由两个微分方程构成的微分方程组。

## 3 基于测地线的机器人轨迹规划方法(Geodesics based robot trajectory planning method)

本文根据现代微分几何学中测地线的概念,提出了一种基于测地线的机器人轨迹规划方法。该方

法分为以下步骤:

### (1)构造黎曼度量

根据规划任务要求构造黎曼度量,例如,若要求规划两点之间的最短路径,则以轨迹弧长微分的平方作为黎曼度量,以平面二自由度 2R 机器人为例,如图 1 所示。

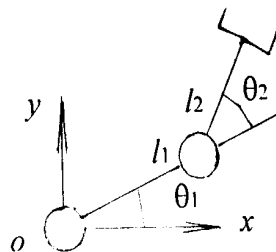


图 1 平面 2R 机器人简图

Fig. 1 Planar 2R robot

若只考虑机器人的位置,其运动学正解为:

$$\begin{cases} x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $l_1, l_2$ ——连杆 1 和连杆 2 的杆长;

$\theta_1, \theta_2$ ——关节 1 和关节 2 的转角。

假设杆长为单位长度 1, 即  $l_1 = l_2 = 1$ , 并用  $c_1$  表示  $\cos(\theta_1)$ ,  $s_1$  表示  $\sin(\theta_1)$ 。

机器人轨迹弧长的黎曼度量为:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

式中,  $s$ ——机器人轨迹的弧长;

$ds^2$ ——弧长微分的平方, 即弧长的黎曼度量。

将机器人的速度正解式(5)中的  $x$  换成  $dx$ ,  $y$  换成  $dy$ ,  $\dot{\theta}_1$  换成  $d\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  换成  $d\theta_2$ , 并将其代入到弧长的黎曼度量表达式中, 得到弧长的黎曼度量为:

$$ds^2 = (2 + 2c_2) d\theta_1^2 + 2(1 + c_2) d\theta_1 d\theta_2 + d\theta_2^2$$

将其写成黎曼度量系数矩阵的形式为:

$$\begin{aligned} ds^2 &= [d\theta_1 \quad d\theta_2] \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= [d\theta_1 \quad d\theta_2] \begin{bmatrix} 2 + 2c_2 & 1 + c_2 \\ 1 + c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

### (2)求测地线的微分方程

根据黎曼度量系数, 求出测地线方程中的 Christoffel 符号, 得出测地线的微分方程组。

### (3)确定测地线微分方程组的初始条件

若轨迹规划的初始条件是在直角坐标空间内给出的, 则应将其转化到关节空间内, 它是解微分方程组的初始条件。

### (4)解微分方程组, 得到机器人最优轨迹。

#### 4 平面 2R 机器人路径最短的轨迹规划 (Trajectory planning of shortest path for planar 2R robot)

平面二自由度机器人从点  $A(1, 0)$  移动到点  $B(0, 1)$ , 在  $A$  点处的初始速度为  $1\text{m/s}$ , 方向沿直线  $AB$  的方向, 要求规划从  $A$  到  $B$  的最短路径(直线).

##### (1) 确定黎曼度量

对于这个路径最短的轨迹规划问题, 以弧长作为黎曼度量, 其结果已在前文得出, 为式(6). 将(6)式中的各黎曼度量系数代入到式(4)中, 求出各 Christoffel 符号. 让  $\Gamma_{kj}^i$  中的每个系数  $i, j, k$  都取遍 1 和 2, 则得到所有的克里斯托弗符号, 并且注意到  $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ . 由式(6)可知该机器人的黎曼度量系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2c_2 & 1+c_2 \\ 1+c_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

该黎曼度量系数矩阵的逆矩阵为:

$$\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin^2 \theta_2} & \frac{1}{c_2-1} \\ \frac{1}{c_2-1} & \frac{-2}{c_2-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

首先求  $\Gamma_{11}^1$ , 令  $i=1, k=1, j=1$ , 则  $\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{11}^1$ .

将  $i, j, k$  的值和式(7)、(8)代入到克里斯托弗的式(4)中, 得到  $\Gamma_{11}^1 = \frac{s_2}{c_2-1}$ .

本文应用 MATLAB 编写了 Christoffel 符号的计算程序, 可以方便得出所有的 Christoffel 符号的值, 利用该程序, 各 Christoffel 符号的计算结果如下:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{s_2}{c_2-1}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{s_2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{s_2}, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{2s_2}{c_2-1}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{22}^2 = -\frac{s_2}{c_2-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

##### (2) 求测地线的微分方程组

将式(3)按  $i, j, k$  展开, 则得到测地线微分方程组的一般形式为:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \Gamma_{11}^1 \dot{\theta}_1^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{22}^1 \dot{\theta}_2^2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \Gamma_{11}^2 \dot{\theta}_1^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \Gamma_{22}^2 \dot{\theta}_2^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

将式(9)所得到的各克里斯托弗符号的值代入到式(10)中, 得测地线微分方程组为:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1^2 - \frac{2}{s_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{1}{s_2} \dot{\theta}_2^2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 - \frac{2s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1^2 - \frac{2s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_2^2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

将此微分方程组化成标准的状态方程的形式为:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{ds} = \dot{\theta}_1 \\ \frac{d\dot{\theta}_1}{ds} = -\frac{s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{2}{s_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{s_2} \dot{\theta}_2^2 \\ \frac{d\theta_2}{ds} = \dot{\theta}_2 \\ \frac{d\dot{\theta}_2}{ds} = \frac{2s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{2s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{s_2}{c_2-1} \dot{\theta}_2^2 \end{cases} \quad (12)$$

##### (3) 确定测地线微分方程组的初始条件

通过运动学逆解将直角坐标空间内的初始条件(起始点  $A(1, 0)$ , 初始速度  $1\text{m/s}$ , 方向沿矢量  $AB$  的方向)转化到机器人的关节空间, 其逆解有两种, 选其中的一种, 即:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = -\frac{2\pi}{3} \quad (13)$$

$$[\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T = [1.1152 \quad -0.8164]^T \quad (14)$$

##### (4) 解微分方程组

应用 MATLAB 软件, 首先编写该微分方程组(12)的 M 文件, 然后应用 ODE45 函数, 在给定的初始条件式(13)、(14)下, 求解微分方程组(12), 程序内容见附录 1, 得到该机器人的轨迹规划结果, 如图 2 所示.

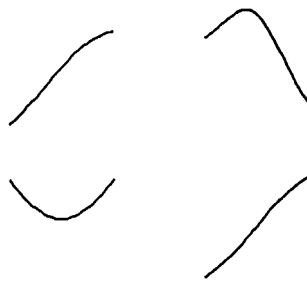


图 2 2R 机器人关节空间内的轨迹规划结果

Fig. 2 Trajectory planning results of 2R robot in joint space

##### (5) 关节空间(黎曼空间)内测地线的可视化

该规划所得到的测地线在关节空间内的可视化结果如图 3. 横坐标为关节 1 的转角, 纵坐标为关节 2 的转角.

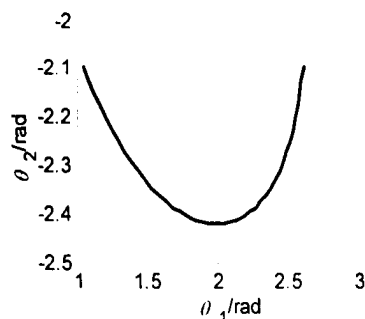


图 3 2R 机器人关节空间内的轨迹仿真结果

Fig. 3 Trajectory simulation result of 2R robot in joint space

## (6) 直角坐标空间内测地线的可视化

该规划结果在直角坐标空间内的可视化结果如图 4 所示。

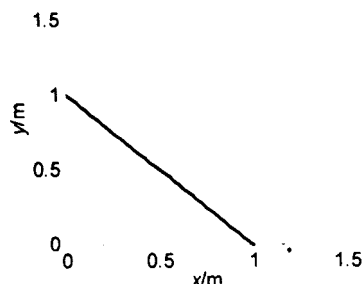


图 4 直角坐标空间内的测地线的轨迹仿真

Fig. 4 Trajectory simulation of geodesics in Cartesian space

同理, 当需要进行系统动能最优或路径与动能的综合指标最优的轨迹规划时, 可以构造相应的黎曼度量, 在给定的初始条件下, 规划出机器人的最优轨迹. 为了对机器人进行控制, 各种规划结果最终都要落实到关节空间内, 采用基于测地线的机器人轨迹规划方法可直接得到机器人各关节的位移和速度, 规划出来的轨迹路程(或能量)最优, 对于轨迹两端的加速和减速路径段, 可采用传统的多项式插值的方法。

## 5 结论 (Conclusion)

本文提出了一种基于测地线的机器人路径最短(或能量最优)的轨迹规划新方法, 该方法通过解测地线的微分方程, 直接得到机器人在给定的规划任务下的各关节的角位移和角速度, 不需要进行机器人的运动学反解计算. 另外, 该方法是以测地线的弧

长作为变量的, 因此, 它还具有非时间参考的轨迹规划的优点。

## 参考文献 (References)

- [1] 熊有伦. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- [2] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.
- [3] Zefran M, Kumar V, Croke B C. On the generation of smooth three-dimensional rigid body motions[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation 1998, 14(4): 576-589.
- [4] Rodney G, Rimón E. Isometric visualization of configuration spaces of two-degrees-of-freedom mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2001, 36(4): 523-545.
- [5] 李杰, 韦庆, 常文森. 非时间参考的机器人路径规划与控制方法[J]. 机器人, 2001, 23(1): 11-14.

## 附录 1 测地线微分方程组(12)的求解程序

首先编写微分方程组(12)的 M 文件:

设  $y(1) = \theta_1$ ,  $y(2) = \dot{\theta}_1$ ,  $y(3) = \theta_2$ ,  $y(4) = \dot{\theta}_2$ , 因此,  $dy(1) = y(2)$ ,  $dy(3) = y(4)$ . 根据式(13)和(14), 关节空间内的初始条件可以表示为:

$$y(1) = \frac{\pi}{3}, y(2) = 1.1152$$

$$y(3) = -\frac{2\pi}{3}, y(4) = -0.8164.$$

根据以上规则, 式(12)用 M 文件可写成如下形式:

```
function dy=planar2R1a(s, y)
dy=zeros(4, 1); % create a 4 * 1 matrix
dy(1)=y(2);
dy(2)=-sin(y(3))/(cos(y(3))-1) * y(2)^2 + 2/
sin(y(3)) * y(2) * y(4) + 1/sin(y(3)) * y(4)^2;
dy(3)=y(4);
dy(4)=2 * sin(y(3))/(cos(y(3))-1) * y(2)^2 + 2 * sin(y(3))/
(cos(y(3))-1) * y(2) * y(4) + sin(y(3))/(cos(y(3))-1) * y(4)^2;
```

然后应用如下命令求解该测地线微分方程组的解:

```
ode45('planar2R1a', [0 1.414], [pi/3 1.1152 -
2 * pi/3 - 0.8164])
```

## 作者简介:

张连东 (1971-), 男, 博士研究生, 研究领域: 机器人轨迹规划和控制。

王德伦 (1958-), 男, 博士生导师, 研究领域: 机器人智能设计, 机器人机构学。