

基于微分几何法的机器人最优轨迹规划

张连东, 葛研军

(大连铁道学院 机械工程系, 辽宁 大连 116028)

摘 要: 将二自由度机器人的轨迹弧长指标视为黎曼度量, 在黎曼空间内进行机器人的最佳轨迹规划. 基于微分几何的方法, 求出了具有此种黎曼度量的黎曼曲面上的测地线作为机器人的最佳轨迹, 并进行了计算机轨迹仿真, 验证了轨迹规划结果的正确性.

关键词: 微分几何; 测地线; 轨迹规划

中图分类号: TP24

文献标识码: A

现行的机器人轨迹规划方法^[1]是在给定若干路径点后, 通过运动学逆解转换成关节空间矢量, 对于每一段路径, 各关节在相同的时间内根据插值函数独立运动到该段路径终点, 较少顾及关节之间的耦合效应. 在进行机器人的轨迹规划时, 我们希望所得出的轨迹与空间固定坐标系的选取无关, 并且该轨迹还能对机器人的某项指标进行优化. Milos Zefran 等^[2]利用黎曼几何中李群的方法研究了刚体在三维空间的轨迹规划. Park^[3]将黎曼度量的概念用于机器人机构的设计. 现代微分几何中黎曼度量和测地线是与坐标系无关的概念, 而测地线又是在给定黎曼度量下两点之间距离最短的必要条件. 因此, 本文应用测地线来进行机器人的轨迹规划.

1 测地线的概念

测地线是平面上的直线在曲面上的推广, 曲面上连接两点之间的最短曲线必是测地线. 如图1所示, 一个矩形经过等距变换后, 成为一个圆柱面. 这样, 平面上的直线就变成圆柱面上的螺旋线, 该螺旋线就是圆柱面上的测地线. 又如图2所示的球面, 其上的大圆就是测地线. 测地线有许多特殊的几何性质, 其中对轨迹规划有重要作用的有

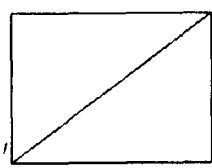


图1 圆柱面测地线

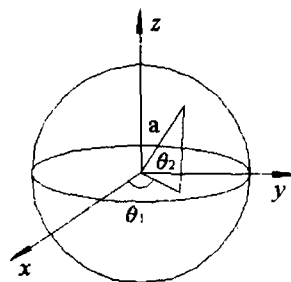


图2 球面测地线

如下两点: ① 曲面上连接两点之间的最短曲线是测地线; ② 测地线的切向量 (速度) 在平行移动下保持不变, 因而沿测地线方向加速度为零, 运动平稳.

2 黎曼度量的概念

以图2所示的球面为例. 其在三维欧氏空间内的方程为:

收稿日期: 2002-09-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (59975013); 辽宁省基金重大项目 (2001101005)

作者简介: 张连东 (1971-), 男, 讲师, 博士.

$$\begin{cases} x = a \cos \theta_2 \cos \theta_1 \\ y = a \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ z = a \sin \theta_2 \end{cases} \quad (1)$$

球面上弧长微分的平方为:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 d\theta_2^2 + a^2 \cos^2 \theta_2 d\theta_1^2 \quad (2)$$

若将上式改写为:

$$ds^2 = (d\theta_1, d\theta_2) \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

此时, 可以将球面看作以 θ_1, θ_2 为变量的二维抽象黎曼曲面, 该曲面以弧长为黎曼度量, 以 $\begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \theta_2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ 为度量系数矩阵, 因此, 可以将此球面看作一个二维黎曼空间, 它与坐标系的选取无关, 即脱离于原来的三维欧氏空间而独立存在. 曲面上的所有内蕴几何性质都由黎曼度量决定, 如弧长、高斯曲率、测地线等. 在球面 (黎曼空间) 上, 欧氏空间中向量的普通平移是没有意义的, 因为球面 (黎曼空间) 上不同点处有不同的切空间 (切标架), 一个按普通平移而来的向量, 并不会落在该点的切空间内, 因此也就不是球面上的向量.

3 给定黎曼度量的黎曼曲面上的测地线^[4]

给定黎曼度量的黎曼曲面上测地线的方程为:

$$\frac{d^2 \theta_i}{ds^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{d\theta_k}{ds} \frac{d\theta_j}{ds} = 0 \quad (4)$$

上式中第二项采用了爱因斯坦和式约定, 即该项表示对指标 k 和 j 求和. 其中,

$$\Gamma_{kj}^i = \frac{1}{2} g^{mi} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial \theta_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \theta_m} \right) \quad (5)$$

称为克里斯托弗符号. g_{ij} 为对应度量系数矩阵的各元素. g^{ij} 为度量系数矩阵的逆矩阵所对应的各元素.

4 以测地线作为机器人最优轨迹

由于测地线具有很好的几何性质, 本文考虑将此性质应用到机器人的轨迹规划中, 以机器人的末端执行器的轨迹弧长为指标进行机器人的轨迹规划, 求出机器人所走轨迹最短的必要条件 (测地线). 解微分方程 (4), 即得到以测地线为机器人轨迹规划最佳轨迹时的机器人各关节的位移和速度.

5 算 例

5.1 机器人的运动学正解

本文应用微分几何中活动标架^[4, 5]的方法推导机器人的运动学正解. 以二自由度机器人为例, 如图 3.

第一个关节上的活动标架为:

$$\begin{cases} e_1^{(1)} = k \\ e_2^{(1)} = e_{(\theta_1)} \\ e_3^{(1)} = e_{l_1(\theta_1)} \end{cases} \quad (6)$$

第二个关节上的活动标架为:

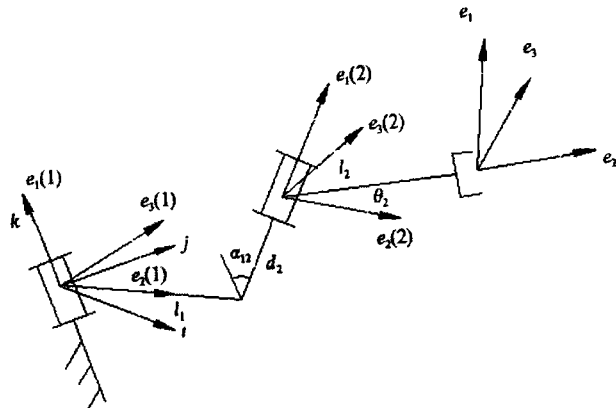


图 3 二自由度机器人示意图

$$\begin{cases} e_1^{(2)} = \cos\alpha_{12} e_1^{(1)} - \sin\alpha_{12} e_{1(\theta_1)} \\ e_2^{(2)} = e_{(\theta_1)} \\ e_3^{(2)} = e_1^{(2)} \times e_2^{(2)} = \cos\alpha_{12} e_{1(\theta_1)} + \sin\alpha_{12} e_1^{(1)} \end{cases} \quad (7)$$

$$r_2 = l_1 e_{(\theta_1)} + d_2 e_1^{(2)} = l_1 e_{(\theta_1)} + d_2 (\cos\alpha_{12} e_{1(\theta_1)} + \sin\alpha_{12} e_1^{(1)}) \quad (8)$$

r_2 表示关节 2 上标架原点的位置向量。

上式表示了相邻两关节之间建立活动标架的一个递推算法。

最后, 在端执行器上建立活动标架 $\{r, e_1, e_2, e_3\}$:

$$\begin{cases} e_1 = e_1^{(2)} \\ e_2 = e_{(\theta_2)} \\ e_3 = e_{1(\theta_2)} \end{cases} \quad (9)$$

其中, $e_{(\theta_2)}$ 是关节 2 上活动标架内的圆矢量函数,

$$e_{(\theta_2)} = \cos\theta_2 e_2^{(2)} + \sin\theta_2 e_3^{(2)} \quad (10)$$

$$r = r_2 + l_2 e_2 \quad (11)$$

r 表示末端执行器上标架原点 (参考点) 的位置向量。

有了上面的机器人运动学方程正解, 就可以求出末端执行器轨迹弧长微分的平方, 即黎曼度量。此黎曼度量决定了一个抽象的黎曼曲面 (球面即为抽象曲面的一个特例, 它相当于二自由度机器人的连杆 1 长度为零, 且两关节轴线垂直的情形), 该曲面上的测地线就是要规划的机器人最佳轨迹。

5.2 以弧长作为黎曼度量的机器人轨迹规划

平面 2R 机器人如图 4, 假设各杆长都取 1, 由机器人运动学正解公式 (6) ~ (11) 可求出其弧长平方为:

$$ds^2 = (d\theta_1 \ d\theta_2) \begin{pmatrix} 2+2c_2 & 1+c_2 \\ 1+c_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix}$$

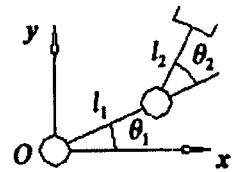


图 4 平面 2R 机器人示意图

以此弧长为黎曼度量, 解测地线的微分方程 (4), 对于给定的初始条件, 曲面上的测地线唯一确定。

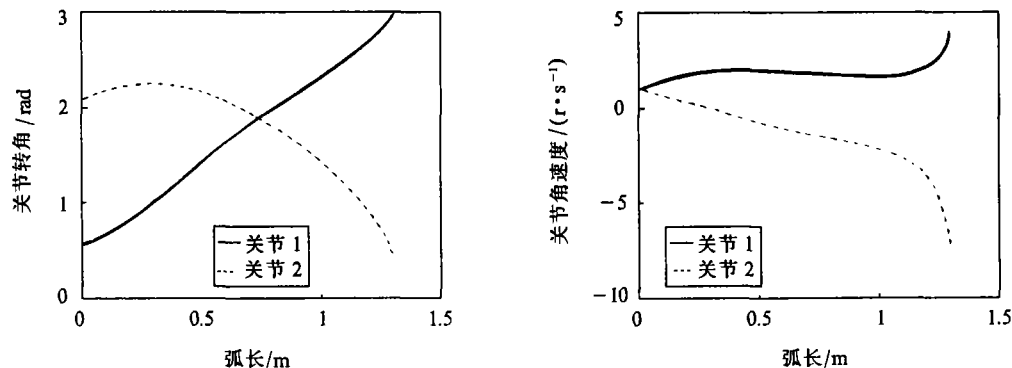


图 5 测地线方程数值解

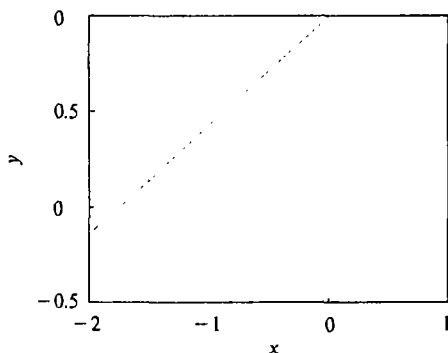


图 6 运动学仿真结果

例如, 当初始条件为: $\theta_1 = \frac{1}{6}\pi$, $\theta_2 = \frac{2}{3}\pi$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 1$ 时, 测地线方程的数值解为图 5。

利用测地线方程轨迹规划的结果, 在欧氏空间中对机器人端执行器进行运动学仿真, 其结果如图 6。

由图 6 可以看出, 按测地线进行机器人的轨迹规划, 所得轨迹为直线, 即平面上的测地线, 它是两点间路程最短的必要条件。

6 结 论

本文应用微分几何的方法, 将机器人的末端执行器的轨迹弧长作为黎曼度量, 该黎曼度量决定了一个抽象的黎曼曲面, 该曲面脱离于欧氏空间而独立存在, 与坐标系的选取无关. 研究了曲面上的测地线, 利用其特殊的几何性质进行机器人的最优轨迹规划, 规划指标是末端执行器所走轨迹路程最短. 最后以二自由度机器人为例进行了机器人的轨迹规划, 并对规划结果进行了仿真, 证明了规划结果的正确性.

参考文献:

- [1] PAUL R P, ROBOT. MANIPULATORS, MATHEMATICS, PROGRAMMING and CONTROL[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1981.
- [2] MILOS ZEFRAN, VIJAY KUMAR, CHRISTOPHER B Croke. On the Generation of Smooth Three-Dimensional Rigid Body Motions[J]. IEEE tran. on Robotics and Automation, 14(4): 576-589, 1998.
- [3] PARK, F C. Distance Metrics on the Rigid Body Motions with Applications to Mechanism Design[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 117(3): 48-54, 1995.
- [4] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[J], 北京: 北京大学出版社, 1989.
- [5] 王德伦, 刘 健, 肖大准. 机构运动几何学的统一曲率理论[M]. 中国科学(e), 1998, 28(1): 69-75.

Optimization of Trajectory Planning of Robot Manipulators Based on Differential Geometry

ZHANG Lian-dong, GE Yan-jun

(Dept. of Mechanical Engineering, Dalian Railway Institute, Dalian 116028; China)

Abstract: The distance length of the trajectory of the 2-DOF robot manipulator is regarded as the Riemannian metric in this paper, and take the optimum trajectory planning in Riemannian space. Based on differential geometry, the geodesic on the abstract Riemannian surface is calculated to be the optimum trajectory. Whereas the computer simulation is carried out to verify the result obtained from the geodesic.

Key words: differential geometry; geodesic; trajectory planning