Лабораторная работа 2

Математическое моделирование

Ефремова Ангелина Романовна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель второй лабораторной работы - рассмотреть один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска.

2 Задание

2.1 1. Запись уравнения, описывающего движение катера, с начальными условиями для двух случаев

2.2 2. Построение траектории движения катера и лодки для двух случаев

2.3 3. Нахождение точки пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Рассуждения и вывод дифференциальных уравнений

1. Принимаем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 3.1)

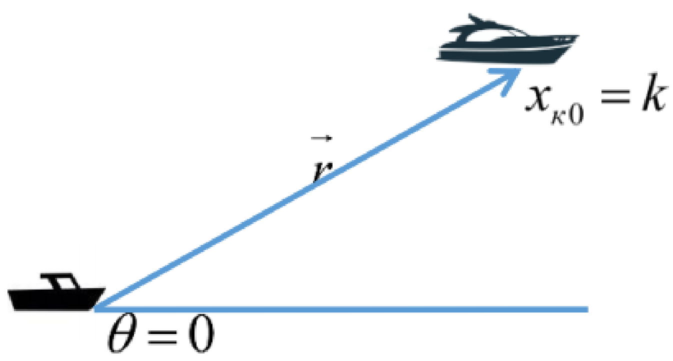

Figure 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не

окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k-x$ (или $k+x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{2v}$ (во втором случае $\frac{x+k}{2v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{k-x}{2v}$ в первом случае или $\frac{x}{v} = \frac{k+x}{2v}$ во втором. Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3}$ и $x_2 = k$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. (рис. 3.2)

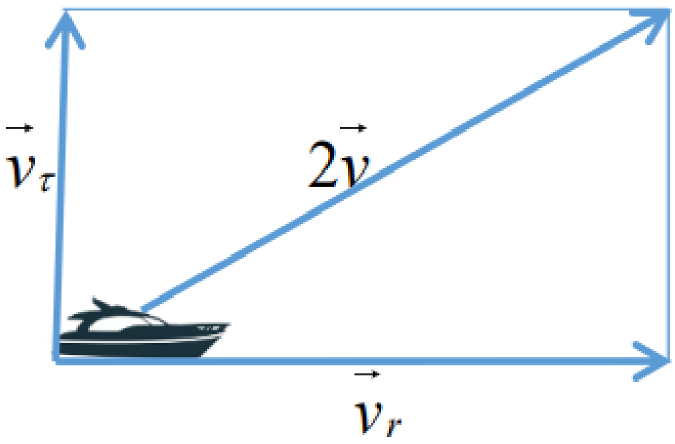

Figure 3.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$. Из рисунка видно: $v_\tau = \sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}v$. 6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v \\ r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}v \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$. Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}$ Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, вы получите траекторию движения катера в полярных координатах.

3.2 Построение траектории движения катера и лодки для двух случаев и точки пересечения

Для начала задам расстояние своего варинта k=6.3 и константу $fi = \frac{3\pi}{4}$. (рис. 3.3)

```
В [56]: import math
        import numpy as np
        from scipy.integrate import odeint
        import matplotlib.pyplot as plt

В [57]: k=6.3

В [58]: fi=3*math.pi/4
```

Figure 3.3: Начало кода

Следующие строки описывают движение береговой охраны. (рис. 3.4)

```
В [59]: def dr(r, tetha):
            dr = r/math.sqrt(4.29)
            return dr
```

Figure 3.4: Движение береговой охраны

Для первого случая зададим r1_0 и решим дифференциальное уравнение. (рис. 3.5)

```
В [60]: r1_0=k/1.3

В [61]: tetha1_0 = np.arange(-math.pi, 2*math.pi, 0.01)

В [62]: r1_1 = odeint(dr,r1_0,tetha1_0)
```

Figure 3.5: Случай 1

А тут мы видим массив решений уравнения для первого случая.(рис. 3.6)

```
В [63]: r1_1

Out[63]: array([[  4.84615385],
               [  4.86960797],
               [  4.89317551],
               [  4.91685716],
               [  4.9406533 ],
               [  4.96456461],
               [  4.9885917 ],
               [  5.01273508],
               [  5.03699532],
               [  5.06137296],
               [  5.08586859],
               [  5.11048277],
               [  5.13521607],
               [  5.16006908],
               [  5.18504237],
               [  5.21013652],
               [  5.23535212],
               [  5.26068975],
               [  5.28615001],
               [  5.31173349],
```

Figure 3.6: Массив решений случая 1

Рассмотрим случай 2. Зададим r1_2 и решим дифференциальное уравнение.(рис. 3.7)

```
В [64]: r1_2=k/3.3

В [65]: tetha1_1 = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)

В [66]: r1_3 = odeint(dr,r1_2,tetha1_1)
```

Figure 3.7: Случай 2

И выводим массив решений дифференциального уравнения для 2 случая.(рис. 3.8)

```
В [67]: r1_3

Out[67]: array([[ 1.90909091],
                [ 1.91833039],
                [ 1.92761456],
                [ 1.93694371],
                [ 1.94631795],
                [ 1.95573755],
                [ 1.96520276],
                [ 1.97471379],
                [ 1.98427085],
                [ 1.99387417],
                [ 2.00352396],
                [ 2.01322045],
                [ 2.02296388],
                [ 2.03275446],
                [ 2.04259242],
                [ 2.05247799],
                [ 2.06241141],
                [ 2.0723929 ],
                [ 2.0824227 ],
                [ 2.09250104],
```

Figure 3.8: Массив решений случая 2

Следующие строки описывают движение браконьеров. (рис. 3.9)

```
В [68]: def f2(t):
            xt=math.tan(fi)*t
            return xt

В [79]: t = np.arange(0, 100, 1)
```

r = √ (x2 + y2)

θ = tan^-1 (y / x)

Figure 3.9: Движение браконьеров

Теперь мы переводим декартовые координаты в полярные (рис. 3.10)

```
В [80]: r2_0 = np.sqrt(t*t + f2(t)*f2(t))

В [81]: tetha2_0 = (np.tan(f2(t)/t))**-1

<ipython-input-81-d36dd09a334c>:1: RuntimeWarning: invalid value encountered in true_divide
  tetha2_0 = (np.tan(f2(t)/t))**-1
```

Figure 3.10: Перевод координат

И в завершение, строим графики. Этот график описывает движение охраны и браконьеров для первого случая. (рис. 3.11)

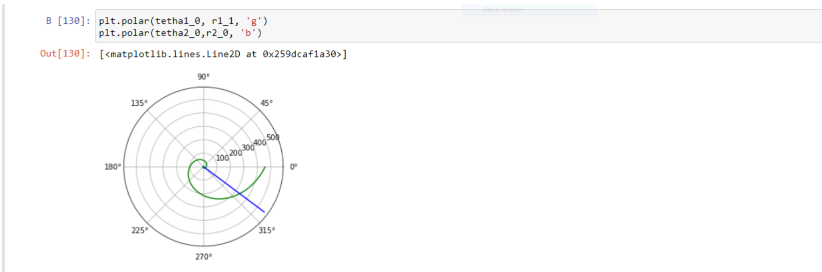

Figure 3.11: График для первого случая

А этот - движение охраны и браконьеров для второго случая. (рис. 3.12)

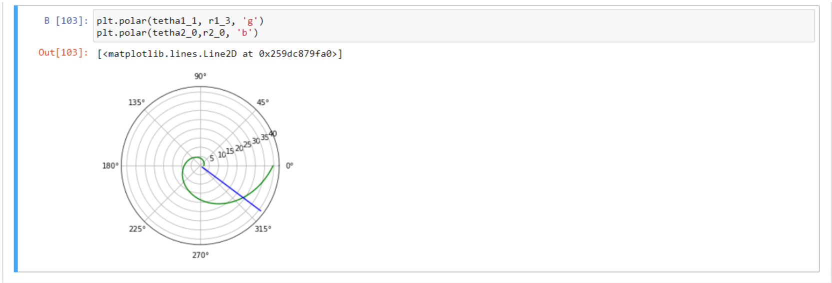

Figure 3.12: График для второго случая

4 Выводы

В результате выполнения второй лабораторной работы, я рассмотрела один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска и научилась определять по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтобы нагнать лодку.