Лабораторная работа 5

Математическое моделирование

Ефремова Ангелина Романовна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель пятой лабораторной работы - рассмотреть простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

2 Задание

2.1 Построить график зависимости численности хищников от численности жертв и графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 11, y_0 = 16$.

2.2 Найти стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическая справка

1. Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

- Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
- В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
- Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
- Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

2.

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

3. Математический анализ жесткой модели показывает (рис. 3.1), что имеется стационарное состояние (A), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B. Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей x(0), y(0). Колебания совершаются в противофазе.

В [115]:

```
chastota1 = math.sqrt(8);
zatuxanie1 = 0.00;
```

Figure 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

4. При малом изменении модели

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon \ll 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например, конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 (рис. 3.2)

```
В [116]:
chastota2 = math.sqrt(4);
zatuxanie2 = 1.50;
```

Figure 3.2: Мягкая модель борьбы за существование

5. В случае 1 равновесное состояние A устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием A с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния A приводит не к малым колебаниям около A, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды. Возможны и другие структурно устойчивые сценарии (например, с несколькими периодическими режимами).

6. Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

В случае модели Лотки-Вольтерры для суждения о том, какой же из сценариев 1-3 (или иных возможных) реализуется в данной системе, совершенно необходима дополнительная информация о системе (о виде малых поправок f и g в нашей формуле). Математическая теория мягких моделей указывает, какую именно информацию для этого нужно иметь. Без этой информации жесткая модель может привести к качественно ошибочным предсказаниям. Доверять выводам, сделанным на основании жесткой модели, можно лишь тогда, когда они подтверждаются исследованием их структурной устойчивости.

3.2 Условия моего варианта

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -0.17x(t) + 0.046x(t)y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 0.37y(t) - 0.034x(t)y(t) \end{cases}$$

1. Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв и графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 11, y_0 = 16$
2. Найдите стационарное состояние системы.

3.3 Начальные условия

1. Зададим коэффициент естественной смертности хищников (estSmertXishn) и коэффициент увеличения числа хищников (uvelichXishn) (рис. 3.3)

```
В [117]:
chastota3 = math.sqrt(3);
zatuxanie3 = 3.00;
```

Figure 3.3: Коэффициенты естественной смертности и увеличения числа хищников

2. Зададим коэффициент естественного прироста жертв (estPrirZhertv) и коэффициент смертности жертв (smertnZhertv) (рис. 3.4):

```
В [118]:
def func1(t1):
    func1 = 0
    return func1
```

Figure 3.4: Коэффициенты естественного прироста и смертности жертв

3.4 Составление систем дифференциальных уравнений и их решения

1. Напишем вектор-функцию u для решения системы дифференциальных уравнений (рис. 3.5)

```
В [119]:
def func2(t2):
    func2 = 0
    return func2
```

Figure 3.5: Вектор-функция для решения уравнений

2. Зададим начальные значения x и y (популяция хищников и популяция жертв). Они были заданы в условии для моего варианта - [11 , 16] (рис. 3.6)

```
В [176]:
def func3(t3):
    func3 = np.sin(0.5*t3)
    return func3
```

Figure 3.6: Начальные значения x и y

3. Зададим интервал, на котором будем решать задачу и шаг. Задам интервал - [0 , 100] и шаг - 0,1 (рис. 3.7)

B [198]:

```
def ostsilator1(u1, t1):
    dx1_1 = u1[1]
    dx1_2 = - chastota1*chastota1*u1[0] - 2*zatuxanie1*u1[1] - func1(t1)
    return dx1_1, dx1_2
```

Figure 3.7: Интервал и шаг

4. Следующая строка считает решения дифференциальных уравнений. Решения уравнения с правой частью, заданной u, с начальным условием x0 на интервале t записываются в матрицу y. (рис. 3.8)

B [199]:

```
def ostsilator2(u2, t2):
    d2_1 = u2[1]
    d2_2 = - chastota2*chastota2*u2[0] - 2*zatuxanie2*u2[1] - func2(t2)
    return d2_1, d2_2
```

Figure 3.8: Расчет решений дифференциальных уравнений

5. Переписываем отдельно y в Zhertvi, y' в Xishniki (рис. 3.9):

B [200]:

```
def ostsilator3(u3, t3):
    d3_1 = u3[1]
    d3_2 = - chastota3*chastota3*u3[0] - 2*zatuxanie3*u3[1] - func3(t3)
    return d3_1, d3_2
```

Figure 3.9: Переписывание

3.5 Построение графиков решений

1. Эти строки строят график зависимости численности хищников от численности жертв от времени с начальными данными. Розовым цветом показан график колебаний изменения числа популяции хищников, а цветом хаки - гарфик колебаний изменения числа популяции жертв. (рис. 3.10)

```
В [201]:
x0_1 = np.array([-1 , 0])

В [202]:
x0_2 = np.array([-1 , 0])

В [203]:
x0_3 = np.array([-1 , 0])
```

Figure 3.10: Построение графика зависимости численности хищников от численности жертв

2. Лиловым цветом представлен график зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями x=11, y=16. Так же выделены точки начального состояния (красным цветом) и стационарного состояния (цветом хаки) системы. (рис. 3.11)

```
В [204]:
t1 = np.arange(0, 45, 0.05)

В [205]:
t2 = np.arange(0, 45, 0.05)

В [206]:
t3 = np.arange(0, 45, 0.05)
```

Figure 3.11: Построение графика изменения численности хищников от изменения численности жертв

4 Выводы

В результате выполнения пятой лабораторной работы, я рассмотрела простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры.

- строить график зависимости численности хищников от численности жертв.
- строить графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 11, y_0 = 16$.
- искать стационарное состояние системы.