Лабораторная работа 7

Математическое моделирование

Ефремова Ангелина Романовна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель седьмой лабораторной работы - рассмотреть модель эффективности рекламы.

2 Задание

2.1 Построить график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

$\frac{dn}{dt} = (0.99 + 0.00012n(t))(N - n(t))$.

2.2 Построить график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

$\frac{dn}{dt} = (0.000067 + 0.38n(t))(N - n(t))$.

2.3 Построить график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

$\frac{dn}{dt} = (0.6sin(4t) + 0.1cos(2t)n(t))(N - n(t))$.

2.4 Определить в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

2.5 Ответить на вопросы к лабораторной работе.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическая справка

1. Организуется рекламная кампания нового товара или услуги. Необходимо, чтобы прибыль будущих продаж с избытком покрывала издержки на рекламу. Вначале расходы могут превышать прибыль, поскольку лишь малая часть потенциальных покупателей будет информирована о новинке. Затем, при увеличении числа продаж, возрастает и прибыль, и, наконец, наступит момент, когда рынок насытиться, и рекламировать товар станет бесполезным.

2. Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь n покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих

3. Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$ - скорость изменения со временем числа потребителей, узнав-

ших о товаре и готовых его купить, t - время, прошедшее с начала рекламной кампании, n(t) - число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, это описывается следующим образом: $\alpha_1(t)(N-n(t))$, где N - общее число потенциальных платежеспособных покупателей, $\alpha_1(t)>0$ - характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени). Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной $\alpha_2(t)n(t)(N-n(t))$, эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре. Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)n(t)(N-n(t))$

4. При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. 3.1):

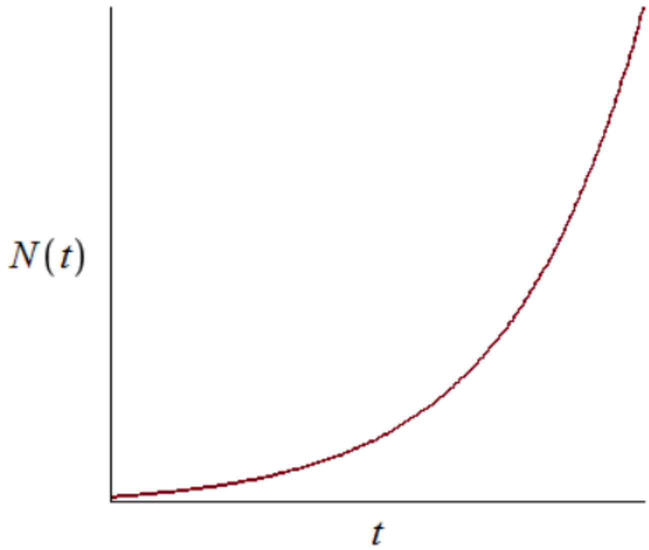

Figure 3.1: График решения уравнения модели Мальтуса

5. В обратном случае, при $\alpha_1(t) \ll \alpha_2(t)$ получаем уравнение логистической кривой (рис. 3.2):

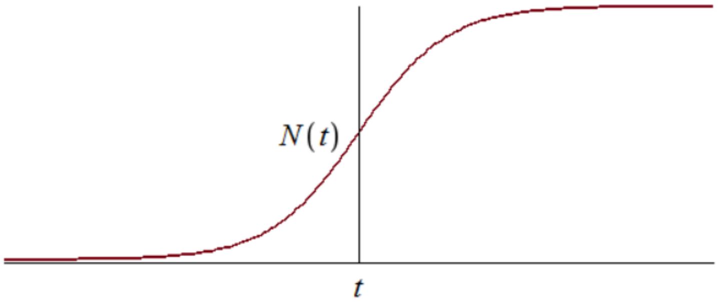

Figure 3.2: График логистической кривой

3.2 Начальные условия

1. Зададим количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени (x0) (рис. 3.3).

```
В [91]: x0 = 1
```

Figure 3.3: Количество людей, знающих о товаре в начальный момент времени

2. Зададим максимальное количество людей, которых может заинтересовать товар (N) (рис. 3.4).

```
В [92]: N = 777
```

Figure 3.4: Максимальное количество людей, которых может заинтересовать товар

3. Зададим длительность рекламной компании (t) (рис. 3.5).

```
В [288]: t = np.arange(0, 12, 0.01)
```

Figure 3.5: Длительность рекламной компании

3.3 Составление систем дифференциальных уравнений и их решения

1. Напишем функции, отвечающие за платную рекламу для 1-го случая (platRek1), 2-го (platRek2) и 3-го (platRek3) и дополнительную для задания функцию platRek4 (рис. 3.6).

```
В [289]: def platRek1(t):
             g = 0.99
             return g

         def platRek2(t):
             g = 0.000067
             return g

         def platRek3(t):
             g = 0.6*np.sin(4*t)
             return g

         def platRek4(t):
             g = 0.0006
             return g
```

Figure 3.6: Функции, отвечающие за платную рекламу для 4 случаев

2. Напишем функции, отвечающие за сарафанное радио для 1-го случая (sarafRad1), 2-го (sarafRad2) и 3-го (sarafRad3) и дополнительную для задания функцию sarafRad4 (рис. 3.7).

```
В [290]: def sarafRad1(t):
             v = 0.00012
             return v

         def sarafRad2(t):
             v = 0.38
             return v

         def sarafRad3(t):
             v = 0.1*np.cos(2*t)
             return v

         def sarafRad4(t):
             v = 0.11
             return v
```

Figure 3.7: Функции, отвечающие за сарафанное радио для 4 случаев

3. Запишем уравнения, описывающие распространение рекламы для 1-го случая (raspRek1), 2-го случая (raspRek2) и 3-го случая (raspRek3). Также, напишем уравнения в случае, когда платная реклама равна нулю (raspRek4) и когда сарафанное радио равно нулю (raspRek5) (рис. 3.8).

```
В [291]: def raspRek1(x, t):
             rr1 = ( platRek1(t) + sarafRad1(t)*x )*( N - x )
             return rr1

         def raspRek2(x, t):
             rr2 = ( platRek2(t) + sarafRad2(t)*x )*( N - x )
             return rr2

         def raspRek3(x, t):
             rr3 = ( platRek3(t) + sarafRad3(t)*x )*( N - x )
             return rr3

         def raspRek4(x, t):
             rr4 = ( sarafRad4(t)*x )*( N - x )
             return rr4

         def raspRek5(x, t):
             rr5 = platRek4(t) *( N - x )
             return rr5
```

Figure 3.8: Уравнения, описывающие распространение рекламы

4. Посчитаем решения обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнения распространения рекламы для 1-го случая raspRek1 (u1), 2-го случая raspRek2 (u2) и 3-го случая raspRek3 (u3). Также, посчитаем решения уравнения в случае, когда платная реклама равна нулю raspRek4 (u4) и когда сарафанное радио равно нулю raspRek5 (u5) (рис. 3.9).

```
В [292]: u1 = odeint(raspRek1, x0, t)
         u2 = odeint(raspRek2, x0, t)
         u3 = odeint(raspRek3, x0, t)
         u4 = odeint(raspRek4, x0, t)
         u5 = odeint(raspRek5, x0, t)
```

Figure 3.9: Решения ОДУ

5. Посмотрим массив решений u1 (рис. 3.10):

```
В [293]: u1

Out[293]: array([[  1.        ],
                 [  8.64895089],
                 [ 16.2294585 ],
                 ...,
                 [776.99801607],
                 [776.99803743],
                 [776.99805856]])
```

Figure 3.10: Массив решений u1

Посмотрим массив решений u2 (рис. 3.11):

```
В [294]: u2

Out[294]: array([[  1.        ],
                 [ 18.72137608],
                 [249.48549917],
                 ...,
                 [777.        ],
                 [777.        ],
                 [777.        ]])
```

Figure 3.11: Массив решений u2

Посмотрим массив решений u3 (рис. 3.12):

```
В [295]: u3
Out[295]: array([[  1.        ],
                 [  2.29400064],
                 [  5.37132105],
                 ...,
                 [777.00000011],
                 [777.00000011],
                 [777.00000011]])
```

Figure 3.12: Массив решений u3

Посмотрим массив решений u4 (рис. 3.13):

```
В [296]: u4
Out[296]: array([[  1.        ],
                 [  2.34659006],
                 [  5.49364752],
                 ...,
                 [777.        ],
                 [777.        ],
                 [777.        ]])
```

Figure 3.13: Массив решений u4

Посмотрим массив решений u5 (рис. 3.14):

```
В [297]: u5
Out[297]: array([[1.        ],
                 [1.00465599],
                 [1.00931194],
                 ...,
                 [6.55326635],
                 [6.55788902],
                 [6.56251166]])
```

Figure 3.14: Массив решений u5

3.4 Построение графиков решений

1. Эти строки строят график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио для случая 1, то есть случая $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.99 + 0.00012n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.15):

```
В [298]: plt.plot(t, u1, label='${dn}/{dt}=(0.99+0.00012n(t))(N-n(t))$', color="RosyBrown", linewidth=2)
         plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
         plt.grid(axis='both')
         plt.title('Случай 1 для ${dn}/{dt}=(0.99+0.00012n(t))(N-n(t))$', color="brown")
Out[298]: Text(0.5, 1.0, 'Случай 1 для ${dn}/{dt}=(0.99+0.00012n(t))(N-n(t))$')
```

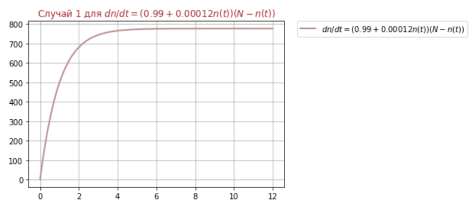

Figure 3.15: График случая 1

2. Эти строки строят график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио для случая 2, то есть случая $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.000067 + 0.38n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.16):

```
В [299]: plt.plot(t, u2, label='${dn}/{dt}=(0.000067+0.38n(t))(N-n(t))$', color="darkKhaki", linewidth=2)
         plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
         plt.grid(axis='both')
         plt.title('Случай 2 для ${dn}/{dt}=(0.000067+0.38n(t))(N-n(t))$', color="brown")
Out[299]: Text(0.5, 1.0, 'Случай 2 для ${dn}/{dt}=(0.000067+0.38n(t))(N-n(t))$')
```

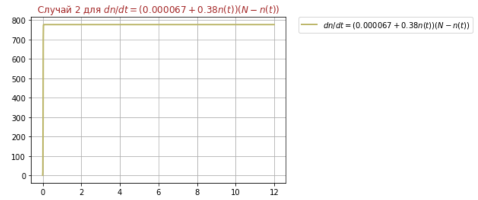

Figure 3.16: График случая 2

3. Тут выводится момент времени с максимальной скоростью (рис. 3.17):

```
В [300]: t[np.argmax(u2[1:].reshape(1,1199)/t[1:]) + 1]
Out[300]: 0.03
```

Figure 3.17: Момент времени с максимальной скоростью

4. Эти строки строят график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио для случая 3, то есть случая $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.6sin(4t) + 0.1cos(2t)n(t))(N - n(t))$ (рис. 3.18):

```
В [301]: plt.plot(t, u3, label='${dn}/{dt}=(0.6sin(4t)+0.1cos(2t)n(t))(N-n(t))$', color="salmon", linewidth=2)
         plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
         plt.grid(axis='both')
         plt.title('Случай 2 для ${dn}/{dt}=(0.6sin(4t)+0.1cos(2t)n(t))(N-n(t))$', color="brown")
Out[301]: Text(0.5, 1.0, 'Случай 2 для ${dn}/{dt}=(0.6sin(4t)+0.1cos(2t)n(t))(N-n(t))$')
```

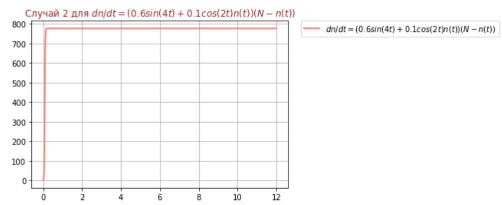

Figure 3.18: График случая 3

5. Эти строки строят график распространения информации о товаре с учетом платной рекламы и с учетом сарафанного радио для всех 3-х случаев (рис. 3.19):

```
В [302]: plt.plot(t, u1, label='${dn}/{dt}=(0.99+0.00012n(t))(N-n(t))$', color="RosyBrown")
plt.plot(t, u2, label='${dn}/{dt}=(0.000067+0.38n(t))(N-n(t))$', color="darkKhaki")
plt.plot(t, u3, label='${dn}/{dt}=(0.6sin(4t)+0.1cos(2t)n(t))(N-n(t))$', color="salmon")
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.title('Общий график для случаев 1, 2 и 3', color="brown")
plt.grid(axis='both')
```

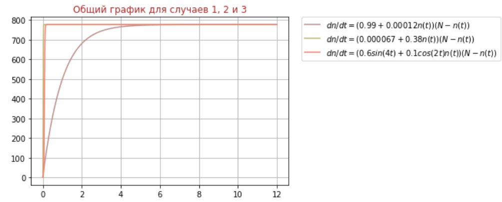

Figure 3.19: График всех 3-х случаев

6. А эти строки - график, когда нет ни платной рекламы, ни сарафанного радио (рис. 3.20):

```
В [305]: plt.plot(t, u4, label='Сарафанное радио', color="darkKhaki")
plt.plot(t, u5, label='Платная реклама', color="salmon")
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.title('График для случая, когда вначале нет ни платной рекламы, ни сарафанного радио', color="brown")
plt.grid(axis='both')
```

Figure 3.20: График без платной рекламы и сарафанного радио

4 Ответы на вопросы

1. $\frac{\partial N}{\partial t} = rN$, тут N - исходная численность населения, r - коэффициент пропорциональности (r=b-d, b - коэффициент рождаемости, d - коэффициент смертности), t - время.

Широко используется в популяционной экологии как первый принцип популяционной динамики, позволяет проследить динамику популяции на довольно большом промежутке времени T, последовательно вычисляя численность популяции через каждый интервал времени dt. Изменения численности популяций растительного и животного мира нельзя описать простым законом Мальтуса, на динамику роста влияют многие взаимосвязанные причины - в частности, размножение каждого вида саморегулируется и видоизменяется так, чтобы этот вид сохранялся в процессе эволюции.

2. Исходные предположения для вывода уравнения при рассмотрении популяционной динамики выглядят следующим образом:

- скорость размножения популяции пропорциональна её текущей численности, при прочих равных условиях;
- скорость размножения популяции пропорциональна количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях. Таким образом, второй член уравнения отражает конкуренцию за ресурсы, которая ограничивает рост популяции.

Обозначая через P численность популяции (в экологии часто используется обозначение N), а время — t, модель можно свести к дифференциальному уравнению $\frac{\partial P}{\partial t} = rP(1 - \frac{P}{K})$, тут r — скорость размножения, K — поддерживающая ёмкость среды.

Исходя из названия коэффициентов, в экологии часто различают две стратегии поведения видов:

r-стратегия предполагает бурное размножение и короткую продолжительность жизни особей;

K-стратегия — низкий темп размножения и долгую жизнь.

3. a1 - интенсивность рекламной кампании, зависящая от затрат, a2 - интенсивность рекламной кампании, зависящая от сарафанного радио.

4. Получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет вид (рис. 4.1):

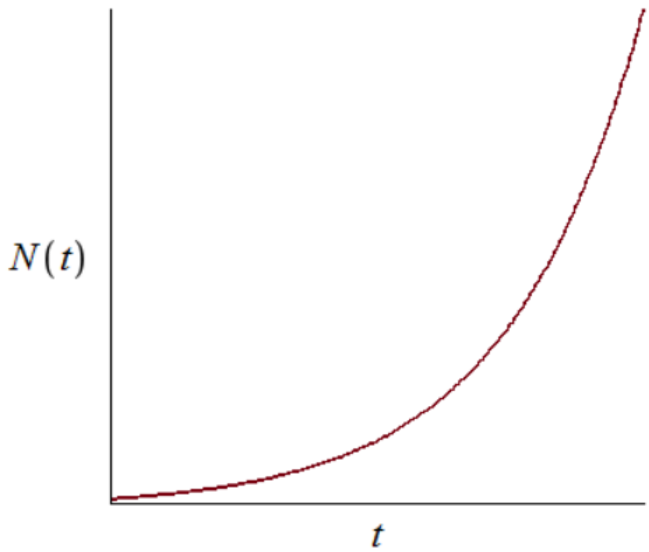

Figure 4.1: График решения уравнения модели Мальтуса

5. В обратном случае, получаем уравнение логистической кривой (рис. 4.2):

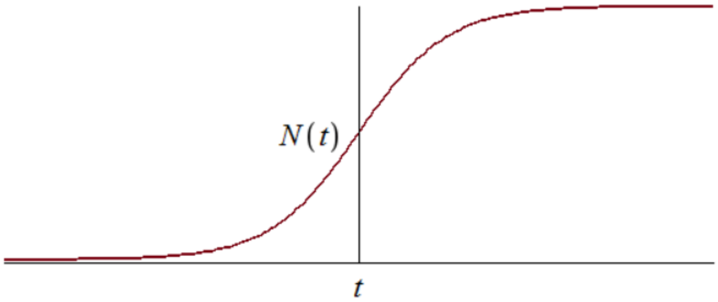

Figure 4.2: График логистической кривой

5 Выводы

В результате выполнения седьмой лабораторной работы, я рассмотрела модель эффективности рекламы.

В процессе выполнения лабораторной работы я научилась:

- строить графики распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.99+0.00012n(t))(N-n(t))$.
- строить графики распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.000067 + 0.38n(t))(N-n(t))$.
- строить графики распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = (0.6sin(4t) + 0.1cos(2t)n(t))(N-n(t))$.
- определять в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.