Лабораторная работа 8

Математическое моделирование

Ефремова Ангелина Романовна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Цель восьмой лабораторной работы - рассмотреть модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

2.1 Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2.2 Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическая справка

Модель одной фирмы:

1. Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

2. Обозначим:

N – число потребителей производимого продукта.

S – доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

M – оборотные средства предприятия

⊠ – длительность производственного цикла

p – рыночная цена товара

p⊠ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

⊠ – доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

⊠ – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

3. Q(S/p) – функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$Q = q - k\frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p_{cr}})$,

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при $p = p_{cr}$ (критическая стоимость продукта) потребители отказываются от приобретения товара. Величина $p_{cr} = Sq/k$. Параметр k – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме является пороговой (то есть, Q(S/p) = 0 при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

4. Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M\delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M\delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma(-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть, предложению), а второй член – спросу.

Параметр ⊠ зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла ⊠. При заданном M уравнение описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

5. В этом случае уравнение можно заменить алгебраическим соотношением

$$-\frac{M\delta}{\tau\tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p_{cr}}) = 0$$

Из этого следует, что равновесное значение цены p равно

$$p = p_{cr}(1 - \frac{M\delta}{\tau\tilde{p}Nq})$$

Уравнение с учетом предыдущего приобретает вид

$$\frac{\partial M}{\partial t} = M\frac{\delta}{\tau}(\frac{p_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2(\frac{\delta}{\tau\delta p})^2\frac{p_{cr}}{Nq} - \kappa$$

Уравнение имеет два стационарных решения, соответствующих условию $\partial M/\partial t = 0$:

$$\tilde{M}_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

,

где

$$a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}\frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq\frac{(\tau\tilde{p})^2}{p_{cr}\delta^2}$$

6. Из этого следует, что при больших постоянных издержках (в случае $a^2 < 4b$) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако, как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, $b << a^2$) и играют роль, только в случае, когда оборотные средства малы. При b « a стационарные значения M равны

$$\tilde{M}_+ = Nq\frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p_{cr}})\tilde{p}, \tilde{M}_- = \kappa\tilde{p}\frac{\tau}{\delta(p_{cr} - \tilde{p})}$$

7. Первое состояние $\tilde{M}_+$ устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние $\tilde{M}_-$ неустойчиво, так что при $M < \tilde{M}_-$ оборотные средства падают ($\partial M/\partial t < 0$), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу $\tilde{M}_-$ соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр δ всюду входит в сочетании с τ. Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: $\delta = 1$, а параметр τ будем считать временем цикла, с учётом сказанного.

Конкуренция двух фирм:

1. Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.)

2. Уравнения динамики оборотных средств запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1} + N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2} + N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}})p - \kappa_2 \end{cases}$$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме, соответственно. Величины N_1 и N_2 – числа потребителей, приобретших товар первой и второй фирмы.

3. Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене p. Тогда

$$\begin{cases} \frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} = -N_1 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \\ \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} = -N_2 q(1 - \frac{p}{p_{cr}}) \end{cases}$$

где $\tilde{p}_1$ и $\tilde{p}_2$ – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

4. Представим уравнение выше в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = -\frac{M_1}{\tau_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_1}) - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = -\frac{M_2}{\tau_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}_2}) - \kappa_2 \end{cases}$$

Уравнение для цены,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2} - Nq(1 - \frac{p}{p_{cr}})$$

5. Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$p = p_{cr}(1 - \frac{1}{Nq}(\frac{M_1}{\tau_1 \tilde{p}_1} + \frac{M_2}{\tau_2 \tilde{p}_2}))$
Подставив это уравнение в предыдущее имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial t} = c_1 M_1 - b M_1 M_2 - a_1 M_1^2 - \kappa_1 \\ \frac{\partial M_2}{\partial t} = c_2 M_2 - b M_1 M_2 - a_2 M_2^2 - \kappa_2 \end{cases}$$

где

$$a_1 = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 Nq}, a_2 = \frac{p_{cr}}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, b = \frac{p_{cr}}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_2^2 Nq}, c_1 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1^2 \tilde{p}_1^2}, c_2 = \frac{p_{cr} - \tilde{p}_2}{\tau_2^2 \tilde{p}_2^2}$$

6. Исследуем систему выше в случае, когда постоянные издержки (κ_1, κ_2) пренебрежимо малы. И введем нормировку $t = c_1\theta$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} = M_1 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_1}{c_1} M_1^2 \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} = \frac{c_2}{c_1} M_2 - \frac{b}{c_1} M_1 M_2 - \frac{a_2}{c_1} M_2^2 \end{cases}$$

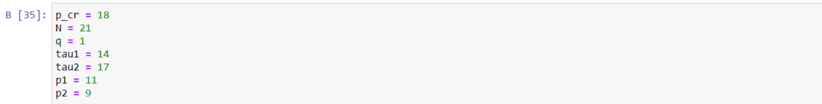
7. Чтобы решить систему, необходимо знать начальные условия. Зададим начальные значения M_0^1, M_0^2 и известные параметры: p_{cr}, τ_1, τ_2, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$, N, q

8. Замечание:

Значения $p_{cr}, \tilde{p}_{1,2}, N$, указаны в тысячах единиц, а значения $M_{1,2}$ указаны в млн. единиц.

3.2 Начальные условия

1. Зададим критическую стоимость продукта (p_cr), длительность производственного цикла фирмы 1 (tau1), себестоимость продукта у фирмы 1 (p1), длительность производственного цикла фирмы 2 (tau2), себестоимость продукта у фирмы 2 (p2), число потребителей производимого продукта (N), максимальную потребность одного человека в продукте в единицу времени (q) (рис. 3.1).



```
В [35]: p_cr = 18
        N = 21
        q = 1
        tau1 = 14
        tau2 = 17
        p1 = 11
        p2 = 9
```

Figure 3.1: Начальные параметры

2. Зададим коэффициенты a1, a2, в, c1, c2 для уравнений динамики изменения объемов продаж фирм (рис. 3.2).

```
В [36]: a1 = p_cr/(tau1*tau1*p1*p1*N*q)
        a2 = p_cr/(tau2*tau2*p2*p2*N*q)
```

```
В [37]: b = p_cr/(tau1*tau1*tau2*tau2*p1*p1*p2*p2*N*q)
```

```
В [50]: c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1)
        c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2)
```

Figure 3.2: Коэффициенты a1, a2, в, c1, c2

3. Зададим стационарные точки м1 и м2 (рис. 3.3).

```
В [51]: m1 = (a2*c1-b*c2)/(a1*a2-b*b)
        m2 = (a1*c2-b*c1)/(a1*a2-b*b)
```

Figure 3.3: Стационарные точки

3.3 Составление систем дифференциальных уравнений и их решения

1. Напишем вектор-функцию sluchai1 для решения системы дифференциальных уравнений для случая 1 (рис. 3.4).

```
В [65]: def sluchai1(x, t):
            sl1 = (c1/c1)*x[0] - (a1/c1)*x[0]*x[0] - (b/c1)*x[0]*x[1]
            sl2 = (c2/c1)*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1]
            return sl1, sl2
```

Figure 3.4: Уравнение для случая 1

2. Напишем вектор-функцию sluchai2 для решения системы дифференциальных уравнений для случая 2 (рис. 3.5).

```
В [66]: def sluchai2(x, t):
            sl1 = x[0] - (b/c1 + 0.00063)*x[0]*x[1] - (a1/c1)*x[0]*x[0]
            sl2 = (c2/c1)*x[1] - (b/c1)*x[0]*x[1] - (a2/c1)*x[1]*x[1]
            return sl1, sl2
```

Figure 3.5: Уравнение для случая 2

3. Зададим интервал, на котором будем решать задачу и шаг. Задам интервал - [0 , 20] и шаг - 0,01 (рис. 3.6).

```
В [67]: t = np.arange(0, 20, 0.01)
```

Figure 3.6: Интервал и шаг

4. Зададим начальное значение объема оборотных средств x1 и x2 (рис. 3.7).

```
В [68]: x0=[2.3, 1.6]
```

Figure 3.7: Объем оборотных средств

5. Следующая строка считает решения дифференциальных уравнений для случая 1 (рис. 3.8):

```
В [69]: u1 = odeint(sluchai1, x0, t)
```

Figure 3.8: Решения дифференциальных уравнений для случая 1

6. Следующая строка считает решения дифференциальных уравнений для случая 2 (рис. 3.9):

```
В [70]: u2 = odeint(sluchai2, x0, t)
```

Figure 3.9: Решения дифференциальных уравнений для случая 2

7. Посмотрим массив решений u1 (рис. 3.10):

```
В [71]: u1
Out[71]: array([[2.30000000e+00, 1.60000000e+00],
                [2.32307271e+00, 1.62081945e+00],
                [2.34637638e+00, 1.64190944e+00],
                ...,
                [1.25759658e+03, 1.60644696e+03],
                [1.25759660e+03, 1.60644696e+03],
                [1.25759661e+03, 1.60644696e+03]])
```

Figure 3.10: Массив решений u1

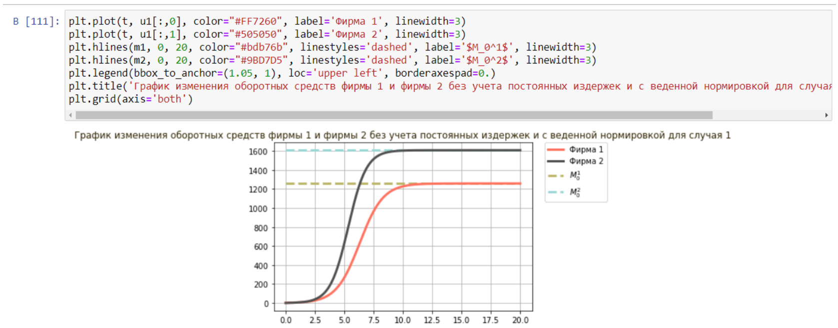
8. Посмотрим массив решений u2 (рис. 3.11):

```
В [72]: u2
Out[72]: array([[2.30000000e+00, 1.60000000e+00],
                [2.32304914e+00, 1.62081945e+00],
                [2.34632847e+00, 1.64190944e+00],
                ...,
                [6.43347000e+01, 1.60649713e+03],
                [6.42939983e+01, 1.60649713e+03],
                [6.42533431e+01, 1.60649714e+03]])
```

Figure 3.11: Массив решений u2

3.4 Построение графиков решений

1. Эти строки строят график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1 (рис. 3.12):



```
B [111]: plt.plot(t, u1[:,0], color="#FF7260", label='Фирма 1', linewidth=3)
plt.plot(t, u1[:,1], color="#505050", label='Фирма 2', linewidth=3)
plt.hlines(m1, 0, 20, color="#bdb76b", linestyles='dashed', label='$M_0^1$', linewidth=3)
plt.hlines(m2, 0, 20, color="#9BD7D5", linestyles='dashed', label='$M_0^2$', linewidth=3)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.title('График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая
plt.grid(axis='both')
```


Figure 3.12: График случая 1

2. Эти строки строят график изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2 (рис. 3.13):

```
B [112]: plt.plot(t, u2[:,0], color="#FF7260", label='Фирма 1', linewidth=3)
plt.plot(t, u2[:,1], color="#505050", label='Фирма 2', linewidth=3)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
plt.title('График изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая
plt.grid(axis='both')
```


Figure 3.13: График случая 2

4 Выводы

В результате выполнения восьмой лабораторной работы, я рассмотрела модель модель конкуренции двух фирм.

В процессе выполнения лабораторной работы я научилась:

- строить строить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
- строить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.