Лабораторная работа 6

Математическое моделирование

Ефремова Ангелина Романовна

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Цель работы

Цель шестой лабораторной работы - рассмотреть простейшую модель эпидемии на примере задачи об эпидемии.

2 Задание

2.1 Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) \leq I^*$.

2.2 Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) > I^*$.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретическая справка

1. Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

2. До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(0) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -\alpha S & I(0) > I^* \\ 0 & I(0) \le I^* \end{cases}$$

3. Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \alpha S - \beta I & I(0) > I^* \\ -\beta I & I(0) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности ☒, ☒, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

4. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени t = 0 нет особей с иммунитетом к болезни R(0)=0, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей I(0) и S(0) соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$.

3.2 Начальные условия

1. Зададим коэффициент заболеваемости (a), коэффициент выздоровления (b) и коэффициент общей численности популяции (N) (рис. @fig:001).

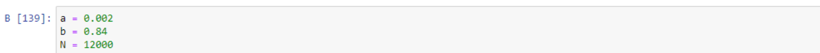

Рис. 3.1: Коэффициенты заболеваемости, выздоровления и общей численности популяции

2. Зададим коэффициент количества инфицированных особей в начальный момент времени (I0) и коэффициент количества здоровых особей с иммунитетом в начальный момент времени (R0) (рис. @fig:002).

```
В [140]: I0 = 212
         R0 = 12
```

Рис. 3.2: Коэффициент количества инфицированных и здоровых особей в начальный момент времени

3. Зададим количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени (S0) (рис. @fig:003).

```
В [141]: S0 = N - I0 - R0
```

Рис. 3.3: Количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени

4. x_0 задает количество групп S, I и R в момент времени 0 (рис. @fig:004).

```
В [142]: x0 = [S0, I0, R0]
```

Рис. 3.4: Количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени

5. Зададим интервал, на котором будем решать задачу и шаг. Задам интервал - [0 , 200] и шаг - 0,01 (рис. @fig:005)

```
В [179]: t = np.arange(0, 200, 0.01)
```

Рис. 3.5: Интервал и шаг

3.3 Составление систем дифференциальных уравнений и их решения

1. Напишем вектор-функцию dinamica1 для решения системы дифференциальных уравнений для случая $I(0) \leq I^*$ (рис. @fig:006).

```
В [180]: def dinamica1(x, t):
             u1_1 = 0
             u1_2 = - b*x[1]
             u1_3 = b*x[1]
             return u1_1, u1_2, u1_3
```

Рис. 3.6: Вектор-функция для решения уравнений для $I(0) \leq I^*$

2. Напишем вектор-функцию dinamica2 для решения системы дифференциальных уравнений для случая $I(0) > I^*$ (рис. @fig:007).

```
В [181]: def dinamica2(x, t):
             u2_1 = -a*x[0]
             u2_2 = a*x[0] - b*x[1]
             u2_3 = b*x[1]
             return u2_1, u2_2, u2_3
```

Рис. 3.7: Вектор-функция для решения уравнений для $I(0) > I^*$

3. Следующая строка считает решения дифференциальных уравнений для случая для случая $I(0) \leq I^*$. Решения уравнения с правой частью, заданной dinamica1, с начальным условием x0 на интервале t записываются в матрицу y1 (рис. @fig:008).

```
В [182]: y1 = odeint(dinamica1, x0, t)
```

Рис. 3.8: Расчет решений дифференциальных уравнений для случая $I(0) \leq I^*$

4. Следующая строка считает решения дифференциальных уравнений для случая $I(0) > I^*$. Решения уравнения с правой частью, заданной dinamica2, с начальным условием x0 на интервале t записываются в матрицу y2 (рис. @fig:009).

```
В [183]: y2 = odeint(dinamica2, x0, t)
```

Рис. 3.9: Расчет решений дифференциальных уравнений для случая $I(0) > I^*$

5. Посмотрим массив решений дифференциальных уравнений y1 для случая $I(0) \leq I^*$ (рис. @fig:010):

```
В [184]: y1
Out[184]: array([[ 1.17760000e+04,  2.12000000e+02,  1.20000000e+01],
                 [ 1.17760000e+04,  2.10226658e+02,  1.37733417e+01],
                 [ 1.17760000e+04,  2.08468150e+02,  1.55318496e+01],
                 ...,
                 [ 1.17760000e+04, -4.36758061e-14,  2.24000000e+02],
                 [ 1.17760000e+04, -4.36742222e-14,  2.24000000e+02],
                 [ 1.17760000e+04, -4.36726383e-14,  2.24000000e+02]])
```

Рис. 3.10: Массив решений для случая $I(0) \leq I^*$

6. Посмотрим массив решений дифференциальных y2 для случая $I(0) > I^*$ (рис. @fig:011):

```
В [185]: y2
Out[185]: array([[11776.        ,   212.        ,    12.        ],
                 [11775.76448236,   210.4611895 ,    13.77432814],
                 [11775.52896942,   208.93524638,    15.5357842 ],
                 ...,
                 [ 7894.16244188,    18.84048315,  4086.99707497],
                 [ 7894.00456021,    18.84010635,  4087.15533345],
                 [ 7893.84668169,    18.83972955,  4087.31358876]])
```

Рис. 3.11: Массив решений для случая $I(0) > I^*$

3.4 Построение графиков решений

1. Эти строки строят график изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) \leq I^*$. (рис. @fig:012)

```
В [205]: plt.plot(t, y1[:,0], label='S(t)', color="RosyBrown", linewidth = 3)
         plt.plot(t, y1[:,1], label='I(t)', color="darkKhaki", linewidth = 3)
         plt.plot(t, y1[:,2], label='R(t)', color="salmon", linewidth = 3)
         plt.title('$I(0) \leq I^{*}$', color="brown")
         plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left', borderaxespad=0.)
         plt.grid(axis='both')
```

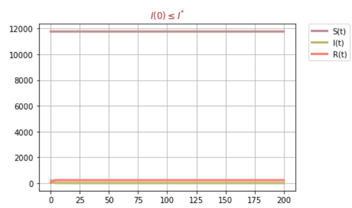

Рис. 3.12: Построение графика изменения числа людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) \leq I^*$

2. Эти строки строят график изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) > I^*$. (рис. @fig:013)

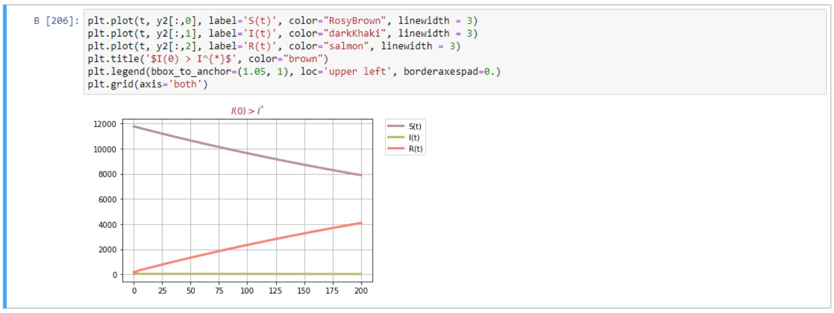

Рис. 3.13: Построение графика изменения числа людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) > I^*$

4 Выводы

В результате выполнения шестой лабораторной работы, я рассмотрела простейшую модель эпидемии на примере задачи об эпидемии.

В процессе выполнения лабораторной работы я научилась:

- строить графики изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) \leq I^*$.
- строить графики изменения числа особей в каждой из трех групп, а именно - людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, заболевших людей и имеющих иммунитет к болезни если $I(0) > I^*$.