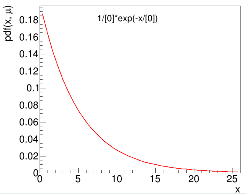
Stima della media nella *pdf* esponenziale

Considero una pdf_x esponenziale:

$$pdf_x(x,\mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$E[x] = \mu$$

$$Var[x] = \mu^2$$



Abbiamo visto la volta scorsa che lo stimatore ML per μ è la media campionaria:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \overline{x}$$

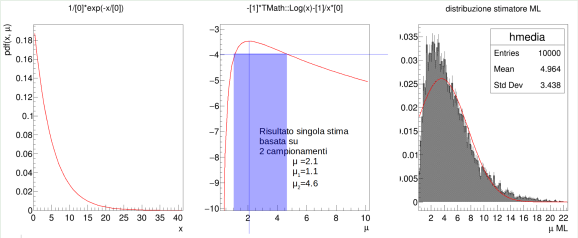
Immaginiamo di non sapere se lo stimatore della media campionaria sia biasato e quanto vale la sua varianza. Stimiamo entrambi con un toy-MC.

Si scrive un programma che faccia le seguenti operazioni

1. genera N numeri casuali estratti da una $pdf_x(x, \mu)$ esponenziale di cui ho scelto a priori il valore di μ (p.es. lo scelgo uguale alla mia stima sperimentale)
2. calcola la media aritmetica dei numeri estratti, $\overline{x}$
3. ripete i punti 1+2 un numero K di volte ottenendo K valori $\overline{x}_j$
4. determina il bias dello stimatore la media degli $\overline{x}_j$ è una valutazione della media dello stimatore di ML, se corrisponde a μ lo stimatore è privo di bias
5. la varianza degli $\overline{x}_j$ sarà la varianza del lo stimatore
6. se rappresento gli $\overline{x}_j$ in un'istogramma trovo la forma della *pdf* dello stimatore

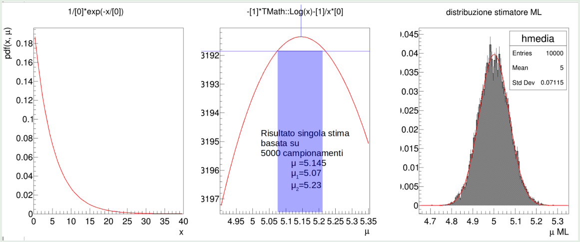
N.B. come si sceglie K: la ricetta è semplice, verificate che il risultato sia stabile !

$N = 2$ campionamenti $\mu = 5$



- $pdf(\hat{\mu}_{ML})$ è molto lontana da una gaussiana.
- $bias = E[\hat{\mu}_{ML}] - 5 = 4.964 - 5 = 0.036 \simeq 0$ è unbiased
- $Var[\hat{\mu}_{ML}] = 3.438^2 = 11.8$ è coerente con il valore atteso da MVB $= \mu^2/2 = 12.5$
- l'intervallo definito da $\mathcal{L}_{max} - \frac{1}{2}$ è asimmetrico $[1.1, 4.6] = 2.1^{+2.5}_{-1.0}$

$N = 5000$ campionamenti $\mu = 5$



- $pdf(\hat{\mu}_{ML})$ è gaussiana.
- $bias = E[\hat{\mu}_{ML}] - 5 \simeq 0$ è unbiased
- $Var[\hat{\mu}_{ML}] = 0.071^2 = 5.04 \cdot 10^{-3}$ è coerente con il valore atteso da MVB $= \mu^2/5000 = 5 \cdot 10^{-3}$
- l'intervallo definito da $\mathcal{L}_{max} - \frac{1}{2}$ è circa simmetrico $[5.07, 5.23] = 5.14^{+0.09}_{-0.07}$