

## 沿岸域における風波成分波間の非線形エネルギー伝達

小松 幸生<sup>\*1</sup>・増田 章<sup>\*2</sup>

### Nonlinear energy transfer among wind waves in coastal region

Kosei KOMATSU<sup>\*1</sup> and Akira MASUDA<sup>\*2</sup>

**Abstract** It is necessary for accurate wind-wave forecasts in coastal region to develop an efficient scheme for calculating nonlinear energy transfer among resonance wind-waves in finite-depth water. In previous works, however, it was reported that the straightforward extension of a representative efficient scheme for deep water (the RIAM method) to finite-depth water tends to yield a ragged distribution of nonlinear energy transfer for depths a few times smaller than the wavelength of dominant waves. In addition, extraordinary fine resolution is required to obtain a smooth and stable nonlinear transfer function. In this paper a new scheme was developed by improving and generalizing the deep-water RIAM method, by virtue of which quite smooth nonlinear energy transfer functions were obtained even with coarse resolution.

**Key word:** wind-wave spectrum, nonlinear resonance interaction, finite depth water

#### はじめに

海洋表層の混合層は風や波が起こす乱流混合の過程で形成され維持される。混合層は生物活動の中心であり、その発達を記述する数値モデルとしては、乱流による混合過程を大気海洋間の浮力と運動量の交換比率で径数化するのが一般的であるが(例えば, Mellor and Yamada (1982), Large et al. (1994) など), これらは大気と海洋の境界面における波浪の影響を無視している。波浪は、砕波の際にエネルギーを乱流に輸送し、また波と乱流とで相互にエネルギーを交換し合うなど、乱流の物理過程を記述する上で無視できない。特に、風の作用によってしばしば海洋表層に誘起される Langmuir 循環は、卵稚仔やプランクトンなどを集積する効果を持つことがよく知られており (Lalli and Parsons, 1996), D'Asaro and Dairiki (1997) による現場観測では混合層内の乱流強度を高める効果も指摘されている。

従って、表層混合層の生物過程についてその実態を

理解し、生態系モデルによる精度の高い予測を実現するためには、波浪の挙動を正確に把握しておく必要がある。特に生物の生産活動が活発で砕波の影響が無視できない沿岸域では、波浪のより厳密な記述が必要であり、そのためには有限水深域における風波の非線形エネルギー伝達を高精度かつ効率的に計算する手法の確立が不可欠である。今回、深海波を対象とした RIAM 法 (Komatsu and Masuda, 1996) をもとにして有限水深域における高精度な計算法を新たに開発した。そして、これを用いて有限水深域における風波の非線形エネルギー伝達の特性を調べた。

スペクトル波浪予報モデルでは、第1近似として波浪を無限に多くの成分波の重ね合わせで表現し、各成分波は線形分散関係を満足しながら各々独立に伝播することを仮定するが、高次の非線形項を考慮に入れると、各成分波は弱いながらも相互作用を通して互いにエネルギーを交換するようになり、各々の振幅は時間的に変化する (Phillips, 1960)。この成分波間の共鳴相互作用は、Hasselmann (1963) により非線形エネルギー伝達関数として定式化され、以後、いくつかの

2001年8月20日受理 (Accepted on August 20, 2001)

水産総合研究センター業績 A 第2号 (Contribution No.A 2 from Fisheries Research Agency)

<sup>\*1</sup>中央水産研究所 〒236-8648 神奈川県横浜市金沢区福浦2-12-4 (National Research Institute of Fisheries Science, Fukuura, Kanazawa, Yokohama 236-8648, Japan)

<sup>\*2</sup>九州大学応用力学研究所 〒816-8580 福岡県春日市春日公園6-1 (Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Kasuga-koen, Kasuga 816-8580, Japan)

計算法が提案されたが (e. g., Longuet-Higgins, 1976; Webb, 1978), 精度の悪さや, 結果の不一致もあって非線形エネルギー伝達の解釈をめぐって混乱した状況がしばらく続いた。こうした中 Masuda (1980) は特別な仮定や近似を導入しない計算法 (以後 Masuda 法と呼ぶ) を新たに開発し, 精度良い計算を行ってこの混乱した状況を解決した。Masuda (1980) 以後, 積分変数の配置を工夫したり, 相互作用の対称性を利用することによって, Hasselmann (1963) と Webb (1978) のそれぞれの方法を効率化した Hasselmann and Hasselmann (1981, 1985) や Resio and Perrie (1991) の方法などが開発され (e. g. Young et al., 1987; Young and Van Vledder, 1993), 現在では, 非線形伝達は風波エネルギースペクトルの自己相似的な発達に際し,

- (1) スペクトルピークの低周波への遷移,
- (2) 自己相似なスペクトル形の維持,
- (3) スペクトル方向分布の周波数依存性

に対して重要な役割を果たしていると考えられている。

しかし, これらの計算法はあくまで特定のスペクトルに対して理論計算を行うために開発されたもので実用的ではなく, そのため旧来の予報モデルでは非線形伝達を直接扱えず, 特に風が複雑に変動する場合に予報精度が著しく低下するという欠点を持っていた (SWAMP, 1985)。そこで, この問題を解決すべく開発された第3世代の WAM モデル (WAMDI Group, 1988) では, 離散相互作用近似法 (Hasselmann et al., 1985) を採用して非線形伝達を計算し, まずまずの成功を収めている。ただ, この近似法は, 連続的に無限に存在する共鳴4波の配置を唯1組 (鏡像を入れて2組) で代表させるものであるが, スペクトル形に敏感に依存する非線形伝達の特性ゆえ (Masuda, 1980), 現実的な波数分解能で数千組ある共鳴配置の効果を唯1組で賄うのは無理があり, 実際, この近似法は周波数あるいは波向について集中度の高いスペクトルや双峰性スペクトル, あるいは標準的な JONSWAP スペクトル (Hasselmann et al., 1973) に対してさえ著しく精度が悪い (Komatsu and Masuda, 1996)。このように, 特別な仮定や近似を設ける方法は新世代の予報モデルに組み込むべき計算法としては, 適切であるとはいえない。かといって, 厳密計算法を予報モデルに直接組み込むことは現時点の電算機能力では不可能である。そこでわれわれは, 厳密計算に近い精度と汎用性を有しつつ, かつ可能な限り効率的な計算法を新たに開発することが必要と判断し, まず, 精度が良く

安定性に優れた Masuda 法をもとにして効率的な非線形伝達計算法である RIAM 法を開発し (Komatsu and Masuda, 1996), 非線形伝達のより詳細な特性を調べるとともに, 続いて, この特性を利用して実用的な簡便法 S-RIAM 法を開発した。この S-RIAM 法の開発により, 非線形伝達の高精度かつ簡便な実用的計算法の開発という, 波浪予報モデルの精度向上における重要課題は, 深海波に限ればほぼ解決できたと考えられる。

しかし, 有限水深波については非線形伝達の高精度かつ実用的な計算法は開発されていない。そのため, 沿岸域の波浪予報では, 深海波の非線形伝達に水深に依存した強調因子を施すだけの径数法による扱いが主流である (WAMDI Group, 1988)。準厳密法としては, Hasselmann and Hasselmann (1981) の計算法, Masuda 法に基づく Polnikov (1997) の計算法, RIAM 法を有限水深域に拡張した Hashimoto et al. (1998) の計算法があり, また, Zakharov (1968) の表現に基づくものとして, Lin and Perrie (1997, 1999) の計算法があるが, これらは精度が悪く滑らかな解が得られない, 安定した解を得るのに非常に細かい波数分解能を要する, 互いの解が一致しない, など解決すべき問題点がいくつかある。

本論文では, 以上の問題点の解決並びに高精度な簡便法の開発を視野に入れて, (準) 厳密計算法の中でも高い計算効率を持ち汎用性と数値安定性に優れた RIAM 法について, これを有限水深域に拡張し, 改良を加えて高精度な有限水深版の非線形伝達計算法を新たに開発した。以下では, まず, この計算法の計算手順について述べ, 続いてその性能と, 様々なスペクトル形を与えて得られた有限水深域の非線形伝達の特徴について述べる。

## 有限水深域における非線形エネルギー伝達の数値計算法

### 基礎方程式

一般に, 成分波間の非線形相互作用は, 線形解の重ね合わせに対する摂動によって取り扱われる。水面重力波の場合, 3次のオーダーで初めて位相速度の変化が起こり, 以下のような4波共鳴条件

$$\left. \begin{aligned} k_1 + k_2 &= k_3 + k_4 = k_a \\ \omega_1 + \omega_2 &= \omega_3 + \omega_4 = \omega_a \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

を満足する成分波間でエネルギー交換が起こる。ここで,  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は成分波の波数ベクトル,  $\omega_i$  は角周波数 (周波数) であり, 線形分散関係式  $\omega_i = \sqrt{gk_i \tanh k_i d}$  で関係づけられている。ただし,  $g$

は重力加速度で、 $d$  は水深である。また  $k_i = |k_i|$  であり、成分波の進行方向（波向）を  $\theta_i$  として、 $k_i = (k_i \cos \theta_i, k_i \sin \theta_i)$  である。

共鳴 4 波によって構成される波数配置を適切に表現するものとして Longuet-Higgins の 4 波相互作用の図がある（Fig. 1）。つまり、 $k_3$  と  $k_4$  が決まると、 $k_1$  と  $k_2$  は自由度を一つ残して  $\gamma$  = 一定の曲線上に決まる。ただし、 $k_a = |k_a|$  として、

$$\gamma = \frac{\sqrt{gk_a \tanh(k_a d/2)}}{\omega_a} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

である。

風波は連続なエネルギー Spektrum を持つので、Fig. 1 に見るように共鳴 4 波の組は無数に存在する。それゆえ、全体として平衡状態にない限り、成分波相互のエネルギー伝達が起こる。この共鳴相互作用により単位時間に各成分波に渡されるエネルギーを非線形エネルギー伝達関数と呼び、本論文では  $T$  と記す。水面重力波に対するエネルギー伝達関数を最初に導いたのは Hasselmann (1962, 1963) であり、それは粒子衝突と類似の Boltzmann 積分を用いて以下のように表される：

$$\begin{aligned} T(k_4) = & \omega_4 \int \dots \int dk_1 dk_2 dk_3 G(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ & \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ & \times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $F(k_i)$  および  $n_i = n(k_i) = F(k_i)/\omega_i$  は、それぞれ波数成分  $k_i$  に対する 2 次元エネルギー Spektrum（密度）と作用（密度）であり、デルタ関数  $\delta$  は、共鳴条件<sup>(1)</sup>を満足する成分波間で相互作用が生じることを意味する。また、 $G$  は相互作用係数で以下のように定義される 6 次の斉次関数である：

$$G = \frac{9\pi g^2 D^2(k_1, k_2, k_3, k_4)}{4\rho^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \quad (4)$$

ただし、 $\rho$  は水の密度であり、 $D$  は付録に示す。

以下では、Masuda (1980) の式変形を有限水深域に拡張する。まず、 $k_1$  および  $k_2$  に関する対称性を利用して、 $\omega_1 \leq \omega_2$  の条件のもとに、非線形エネルギー伝達関数<sup>(3)</sup>を  $k_2 (= k_3 + k_4 - k_1)$  について積分する。このとき、実際の予報モデルでは伝達関数を  $T(k)$  より  $T(\omega, \theta)$  で表現する場合が多いことを考慮して、結局<sup>(3)</sup>を次のように書き換える：

$$T(\omega_1, \theta_4) = 2 \iint d\omega_3 d\theta_3 \iint d\omega_1 d\theta_1 \left( \frac{k_1 k_3}{C_{g1} C_{g3}} G \right)$$

$$\times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$$

$$\times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \quad (5)$$

ただし、群速度を

$$C_{gi} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k_i} = \frac{g \tanh k_i d \operatorname{sech}^2 k_i d}{2\omega_i} \quad (6)$$

として、

$$dk_i = \frac{k_i}{C_{gi}} d\omega_i d\theta_i \quad (7)$$

の関係を用いた。

前述のように 4 波共鳴条件のもとでは、 $k_3$  と  $k_4$  が決まれば、 $k_1$  と  $k_2$  が自由度を一つ残して決まる。この残った自由度を表現する径数として、 $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_a$  を採用する。すると、共鳴条件より、

$$\omega_a = \omega_1 + \omega_2$$

$$= (gk_1 \tanh k_1 d)^{1/2} + (gk_2 \tanh k_2 d)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} &= (gk_1 \tanh k_1 d)^{1/2} + \left( g \sqrt{k_a^2 + k_1^2 - 2k_1 k_a \cos \tilde{\theta}_1} \right. \\ &\quad \left. \times \tanh \left( \sqrt{k_a^2 + k_1^2 - 2k_1 k_a \cos \tilde{\theta}_1} d \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

であり、これから分散関係式を用いて  $\omega_1$  を得る。

このとき、条件  $k_1 \leq k_2$  により、 $\omega_1$  は一意に決まり、 $\underline{\theta} = \cos^{-1}(k_a/2k_1)$  とすると、 $\gamma < 0$  に対して  $\tilde{\theta}_1$  の領域も次のように制限される：

$$\underline{\theta} \leq |\tilde{\theta}_1| \leq \pi \quad (9)$$

そして、<sup>(5)</sup>を  $\omega_1$  について積分し、変数変換

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\theta}_1 &= \theta_1 - \theta_a, \quad \tilde{\theta}_3 = \theta_3 - \theta_4, \\ \tilde{\theta}_2 &= \theta_2 - \theta_a, \quad \Omega = \ln \omega_3, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を施すと、 $T(\omega_1, \theta_4)$  は最終的に次のようになる：

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \theta_4) = & 2 \int_0^\pi d\tilde{\theta}_3 \int_0^\infty d\Omega \int_0^\pi d\tilde{\theta}_1 \sum_{\pm} \sum_{\pm} \sum_{\pm} \left( \frac{\omega_3 k_1 k_3}{C_{g1} C_{g3}} \cdot \frac{G}{S} \right) \\ & \times \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、

$$\int_{-\pi}^\pi d\tilde{\theta}_3 \int_{-\infty}^\infty d\Omega \int_{-\pi}^\pi d\tilde{\theta}_1$$

は次のように置き換えられている：

$$\int_0^\pi d\tilde{\theta}_3 \int_0^\infty d\Omega \int_0^\pi d\tilde{\theta}_1 \times \sum_{\pm} \sum_{\pm} \sum_{\pm}$$

ただし、条件  $k_1 \leq k_2$  によって、3平面  $\tilde{\theta}_3 = \pi$ 、 $\omega_3 = \omega_4$ 、 $\tilde{\theta}_1 = 0$  と曲面  $\tilde{\theta}_1 = \underline{\theta}(\tilde{\theta}_3, \Omega)$  によって囲まれた領域は除外される。

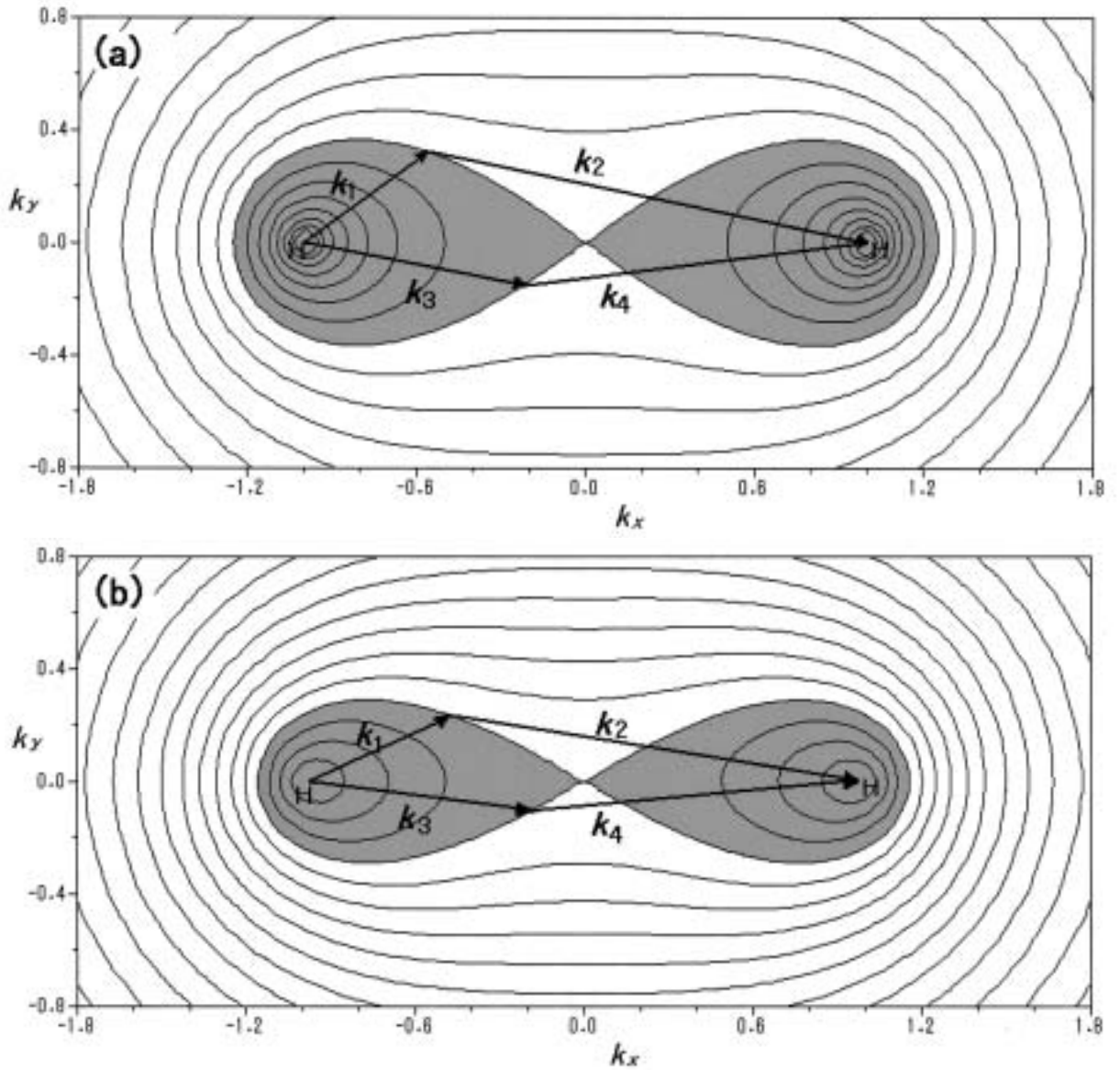
さて、分母  $S$  は、 $\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$  により生じたもので、次のように与えられる：

$$S = \left| \frac{\partial}{\partial \omega_1} (\omega_1 + \omega_2 - \omega_a) \right| = \left| 1 + \frac{\partial \omega_2}{\partial \omega_1} \right|$$

$$= \left| 1 + \frac{C_{g2}}{C_{g1}} \frac{\partial k_2}{\partial k_1} \right| = \left| 1 \pm \frac{C_{g2}}{C_{g1}} \sqrt{1 - \frac{k_a^2}{k_2^2} \sin^2 \tilde{\theta}_1} \right| \quad (12)$$

ただし、 $\omega_1 = \omega_2$  かつ  $\tilde{\theta}_1 = 0$  のとき、 $S = 0$  になる。すなわち、特異点は平面  $\tilde{\theta}_1 = 0$  上の曲線  $\gamma = 0$  に沿って位置する。

Masuda 法ではこの特異点付近の積分を解析的かつ適切に処理することで数値不安定を防いでいた。同じ手法を RIAM 法にも適用したが、後で述べるように今回開発した有限水深波の計算法では共鳴4波の周波数に関して  $\omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2$  の大小関係を設けたので、特異点処理は不要である。なお、 $\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_2$



**Fig. 1.** Figure of eight representing the conditions for the four-wave resonance : contours of  $\gamma$  defined in (2) for (a) deep water ( $k_p d = \infty$ ) and for (b) finite-depth water ( $k_p d = 0.8$ ). These figures show that a pair of wavenumbers  $k_1$  and  $k_2$  resonate with another pair of  $k_3$  and  $k_4$  such that  $k_1 + k_2 = k_3 + k_4 = k_a$ , only when they lie on the same contour of  $\gamma$ . In both figures contour interval is 0.05, shaded regions indicate positive  $\gamma$ , and  $k_x$  and  $k_y$  are wavenumbers relative to the peak wavenumber  $k_p$  which is set at the value equal to  $|k_a|/2$ .

の特異点からの寄与分は、深海波の RIAM 法と同様に計算する必要はない。後述の「箱」による扱いをした場合、この特異点は共鳴 4 成分波が同一の箱の中にある状況を示し、その箱の中の授受は相殺されるからである。

#### 有限水深版 RIAM 法の計算手順

深海波を対象にした RIAM 法では、計算効率を上げるために Hasselmann and Hasselmann (1981, 1985) や Resio and Perrie (1991) と同様に共鳴相互作用の対称性を利用していた。ただし、ここでの対称性は以下の 2 種類に区別される。

第 1 種の対称性は、Boltzmann 積分によって表現される共鳴成分波間の相互作用の性質自体に基づくものである。RIAM 法では、式(3)で成立する作用の保存則

$$-\frac{\delta n_1}{\delta t} dk_1 = -\frac{\delta n_2}{\delta t} dk_2 = \frac{\delta n_3}{\delta t} dk_3 = \frac{\delta n_4}{\delta t} dk_4 \quad (13)$$

を利用して、共鳴 4 波が周波数に関して

$$\omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2 \quad (14)$$

の大小関係を設けることで、計算時間を 1/4 に短縮している。ここで、 $\delta n_i / \delta t$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は特定の共鳴 4 成分波の作用  $n$  が、それらの成分波間の共鳴によって単位時間当たりに増える割合を表す。このとき、共鳴条件(1)から、エネルギーの交換は周波数が  $\omega_1$  の波と  $\omega_2$  の波が構成する外側共鳴対と  $\omega_3$  の波と  $\omega_4$  の波が構成する内側共鳴対との間で行われるので (Masuda, 1986), 特定の共鳴 4 波を決めている場合、この組み合わせの共鳴によって内側対の高周波側成分 ( $\omega_4, \theta_4$ ) の波が得るエネルギー伝達  $\delta T^{HI}(\omega_4, \theta_4)$  だけを求めれば他の成分がこの組み合わせの共鳴から得るエネルギー伝達  $\delta T^{LI}(\omega_3, \theta_3)$ ,  $\delta T^{LO}(\omega_1, \theta_1)$ ,  $\delta T^{HO}(\omega_2, \theta_2)$  は、改めて計算しなくても相互作用の対称性(13)を用いて同時に得られるというわけである。ただし、LO, LI, HI, HO は、それぞれ、外側対の低周波側成分、内側対の低周波側成分、内側対の高周波側成分、外側対の高周波側成分を表す。特定の成分波 ( $\omega, \theta$ ) は、上のどの成分になることもあるので、その全てを加えると、正味の非線形エネルギー伝達が次のように書ける：

$$T(\omega, \theta) = T^{LO}(\omega, \theta) + T^{LI}(\omega, \theta) + T^{HI}(\omega, \theta) + T^{HO}(\omega, \theta) \quad (15)$$

なお、深海波版の RIAM 法では共鳴対について(14)とは逆に周波数  $\omega_3$  と  $\omega_4$  の波を外側共鳴対、 $\omega_1$  と  $\omega_2$

の波を内側共鳴対としていた。そして、外側高周波成分 ( $\omega_4, \theta_4$ ) に相対的に  $\theta_3, \omega_3, \theta_1$  を与えて、残る成分  $\omega_1, \omega_2, \theta_2$  を決めていた。しかし、後述のように、RIAM 法を直接適用すると、 $k_p d$  ( $k_p$  はスペクトルピークの波数) の値によっては結果の凹凸が目立ち、計算の安定性に欠け精度が悪い (Hashimoto et al., 1998)。この問題点を解決するため、各成分からの寄与分  $\delta T^{HI}, \delta T^{LI}, \delta T^{HO}, \delta T^{LO}$  を詳細に調べた。その結果、これは、有限水深域では共鳴配置の「8 の字 (Fig. 1)」が扁平になり、内側共鳴対で与えた  $\theta_1$  の変化に対して、式(14)で決まる  $\omega_1$  の変化が大きくなることに起因することが分かった。そこで、この影響を緩和するために、共鳴 4 波の周波数における大小関係を(14)として、周波数  $\omega_1$  の波を内側でなく外側の共鳴対の低周波成分としたのである。また、あらかじめ与える内側共鳴対の波数成分とは異なり、外側共鳴対の波数成分は波数格子点上にはない。深海波版 RIAM 法では最寄りの格子点で単純に置き換えても精度の劣化は見られなかったが、ここでは波数空間上の周囲 4 点で代表させる方式を採用し、精度の向上を図った。

第 2 種の対称性は、以下に挙げる共鳴配置の幾何学的な対称性によるものである (Masuda, 1980)：

- (a) ある共鳴 4 波の組み合わせと鏡像関係にある組み合わせも共鳴 4 波を成し、相互作用係数  $G$  も同じである、
- (b) 共鳴 4 波の組み合わせを任意角度だけ回転させてもやはり共鳴が起こり、相互作用係数は変化しない、
- (c) 深海波の場合、共鳴 4 波の波数にスケール変換を施しても、共鳴が生じ、相互作用係数はスケール比の冪を変換前の相互作用係数に掛けるだけで得られる。

有限水深波の場合でも、上記(c)以外の対称性は利用できる。上に挙げた 2 種類の対称性を利用するために、( $\omega, \theta$ ) 空間を非一様で有限な波数領域 (箱、または bin) に分割する (Hasselmann and Hasselmann, 1981; Resio and Perrie, 1991)。

もし、ある 4 つの箱の組み合わせが共鳴条件を満足するとしたら、その組み合わせに対して (i) 鏡像変換、(ii) 回転変換、を施した組み合わせも共鳴条件を満足する。この 2 種類の変換に関して相似な共鳴 4 波の組み合わせは全て同じ共鳴配置を有すると定義するのである。

結局、非線形エネルギー伝達関数を求めるための RIAM 法の手順を概念的に表現すれば次のように計算される：

$$T = \sum_{cnf} \sum_{rot} (\delta T^{LO} + \delta T^{LL} + \delta T^{HL} + \delta T^{HO}) \quad (16)$$

ここで、径数  $cnf$ ,  $rot$  はそれぞれ配置、回転変換(鏡像変換を含む)を示す。

深海波の場合、共鳴配置とそれに関連した  $(\omega_4, \theta_4)$  に相対的な他の3つの共鳴波の波数成分を始め、 $G$ ,  $S$  といった核径数はあらかじめ唯一度計算するだけでよかった。しかし、有限水深波の場合は核径数は水深  $d$  に依存し、しかも深海波のようなスケール変換ができない。そのため、核径数は  $d$  の変化に応じて各空間格子点上で、各  $\omega_4$  について計算する必要がある。結局、有限水深域の非線形伝達は1つのスペクトルについて、 $k_p d$  の値に依存するが、深海波の場合の30倍(wsHP735で30秒)程度の計算時間を要する。なお、具体的な計算手順は以下の通りである。

(計算手順)

### 1. 環境設定

一時ファイル、結果出力ファイルの設定などを行う。

### 2. 計算に必要な諸径数の設定

ここで、周波数および波向の格子は以下のように設定する。

まず、周波数格子  $\omega_k$  は格子数を  $K$  として最小周波数  $\omega_{\min} \equiv \omega_{k=1}$  から最大周波数(あるいは切断周波数)  $\omega_{\max} \equiv \omega_{k=K}$  まで比  $R_\omega \equiv 1 + \Delta(\ln \omega) = (\omega_{\max}/\omega_{\min})^{1/(K-1)}$  を一定にして対数的に配置する：

$$\omega_{k+1} = R_\omega \cdot \omega_k \quad (17)$$

なお、このとき、分散関係式より  $\omega_k$  に対応する波数  $k_k$  と群速度  $C_{gk}$  を求めておく。

一方、波向格子  $\theta_m$  は、格子数を  $M$  として、幅  $\Delta\theta = 2\pi/M$  で等間隔に配置する：

$$\theta_{m+1} = \theta_m + \Delta\theta \quad (18)$$

ただし、周波数格子、波向格子の代表値は、各箱の中央値をとるものとする。

### 3. エネルギースペクトルの設定

スペクトル  $F(k, m)$  を読みとり、作用  $n = F(k, m) C_{gk} / \omega_{gk} k_k$  に換算しておく。

### 4. 内側対高周波成分波の周波数の設定

内側対高周波成分  $(k_4, m_4)$  の周波数  $k_4$  を  $\omega_{\min}$  から始めて  $\omega_{\max}$  まで変えていき、その各々に対して以下の処理を行う。

### 5. 核径数の計算

径数を  $\tilde{\theta}_3, \Omega, \tilde{\theta}_1$  とする。このとき、鏡像を利用するために、

$$0 \leq \tilde{\theta}_3 \leq \pi, \quad \underline{\theta} \leq \tilde{\theta}_1 \leq \pi \quad (19)$$

とする。ただし、ここでは  $\theta_1$  が波向格子点に来るように径数  $\tilde{\theta}_1$  は変化させる。なお、 $\tilde{\theta}_3$  および  $\tilde{\theta}_1$  の格子数は  $[M/2] + 1$  である。ただし、 $[\cdot]$  は実数  $\cdot$  を越えない整数を表す。これにより、記憶すべき配置の数は  $1/4$  に減る。この3つの径数の全てにつき各々以下の演算を行う。

- (a) 条件(14)を満足させながら式(8)を解いて  $\omega_1$  を求め、共鳴条件を利用して  $\omega_2, \tilde{\theta}_2$  を求める。この段階で共鳴4波全ての(絶対)周波数  $\omega_i$  とその格子番号  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) が決まる。
- (b) 核関数  $K (= 2\omega_3 k_1 k_3 G / (C_{g1} C_{g3} S))$  を求める。
- (c) 内側対高周波成分 HI に相対的な、他の共鳴波数成分の波向の格子番号  $\tilde{m}_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を求め(鏡像も含めて)、核関数  $K$  とともに、これらと4波による可能な配置との対応付けをしておく。

### 6. 上で決まった配置毎に非線形伝達の計算

各配置について以下の計算を行う。

- (a) あらかじめ求めておいた情報を作業領域に読み込む。
  - (b) HI の波向  $m_4$  を  $\theta_{m=1}$  から始めて  $\theta_{m=M}$  まで変えていき、その各々に対して以下の処理を行う。
  - (c) HI と共鳴する他の成分の波向の格子番号  $m_j = \tilde{m}_j + m_4$  を求める。
  - (d) 作用  $n(k, m)$  を読みとり、各波の波数成分に対する作用  $n_i = n(k_i, m_i)$  を求め、被積分関数  $K \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\}$  を計算し、この共鳴によって生じる作用の変化率  $\delta n_i$  とする。このうち  $\delta n_1$  については  $\omega_1$  が必ずしも格子点上にないので周波数空間で  $\omega_1$  を挟む両隣の格子点上の  $n_1$  を用いて計算した  $K$  から線形補間して求め、 $\delta n_2$  については  $\omega_2, \theta_2$  双方とも格子点上にないので、波数空間で  $(\omega_2, \theta_2)$  を囲む4つの格子点上の  $n_2$  を用いて計算した  $K$  から双線形補間して求める。この  $\delta n_i$  を、全ての共鳴によって生じる作用の変化率を表す変数  $\Delta n_i(k_i, m_i)$  に加算し記憶していく。
- ただし、高周波側で、最大周波数(あるいは切断周波数)より高周波側の成分波とのエネルギー交換を考慮しなくてはならない場合は、 $\omega > \omega_{\max}$  の2次元スペクトルを与えておく。ここでは、 $\omega^{-4}$  に比例

すると仮定して、WAM モデルと同じく、

$$F(\omega, \theta) = F_1(\omega_{\max}) S(\omega_{\max}, \theta) \left( \frac{\omega}{\omega_{\max}} \right)^{-4} \quad (20)$$

と外挿している。

配置の種類全てにつき上の処理が済んだ段階で得られる  $\Delta n$  が、対応する波数成分における正味の非線形エネルギー伝達を示す。

## 結 果 と 考 察

はじめに、計算の対象とした周波数スペクトルや方向分布などについての表記を定義しておく。

2次元スペクトル  $F(\omega, \theta)$  は周波数スペクトル  $F_1(\omega)$  と方向分布関数  $S(\omega, \theta)$  によって

$$F(\omega, \theta) = F_1(\omega) S(\omega, \theta) \quad (21)$$

と書ける。ただし、方向分布関数は規格化条件  $\int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega, \theta) d\theta = 1$  を満足する。本論文では、扱う周波数スペクトル  $F_1$  として代表的な JONSWAP 型を与える (Hasselmann et al., 1973) :

$$F_1(\omega) = F_J(\omega; \gamma) \\ \equiv \alpha g^2 \omega^{-5} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \right] \gamma^{\exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right]} \quad (22)$$

ここで、 $\omega_p$ 、 $\alpha$ 、 $\gamma$  はそれぞれスペクトルのピーク周波数、Phillips 定数、周波数集中度径数であり、

$$\sigma = \begin{cases} 0.07, & \omega \leq \omega_p \\ 0.09, & \omega > \omega_p \end{cases} \quad (23)$$

である。なお、Pierson-Moskowitz スペクトル (以後 PM スペクトルと略記) および標準 JONSWAP スペクトルはそれぞれ  $\gamma = 1$ 、 $\gamma = 3.3$  に相当する。

一方、方向分布  $S$  については、 $\cos^2 \theta$  型と Mitsuyasu-Hasselmann 型 (Mitsuyasu et al., 1975; 以後 M-H 型と略記) を考える。 $\cos^2 \theta$  型は、

$$S(\omega, \theta) = \begin{cases} \hat{S}(2) \cos^2(\theta - \bar{\theta}), & 0 \leq |\theta - \bar{\theta}| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (24)$$

である。一方、M-H 型は、

$$S(\omega, \theta) = \hat{S}(s) \cos^{2s} \left( \frac{\theta - \bar{\theta}}{2} \right) \quad (25)$$

であり、このとき、方向集中度  $s$  は周波数  $\omega$  に依存し、

$$s = 10^{0.99} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^b, b = \begin{cases} 4.06, & \omega < \omega_p \\ -2.34, & \omega \geq \omega_p \end{cases} \quad (26)$$

である。なお、 $\hat{S}(\cdot)$  は規格化因子、 $\bar{\theta}$  は平均波向で、ここでは  $\bar{\theta} = 0^\circ$  とする。

また、以下では非線形エネルギー伝達  $T(\omega, \theta)$  の簡便化した 1 次元表示として、

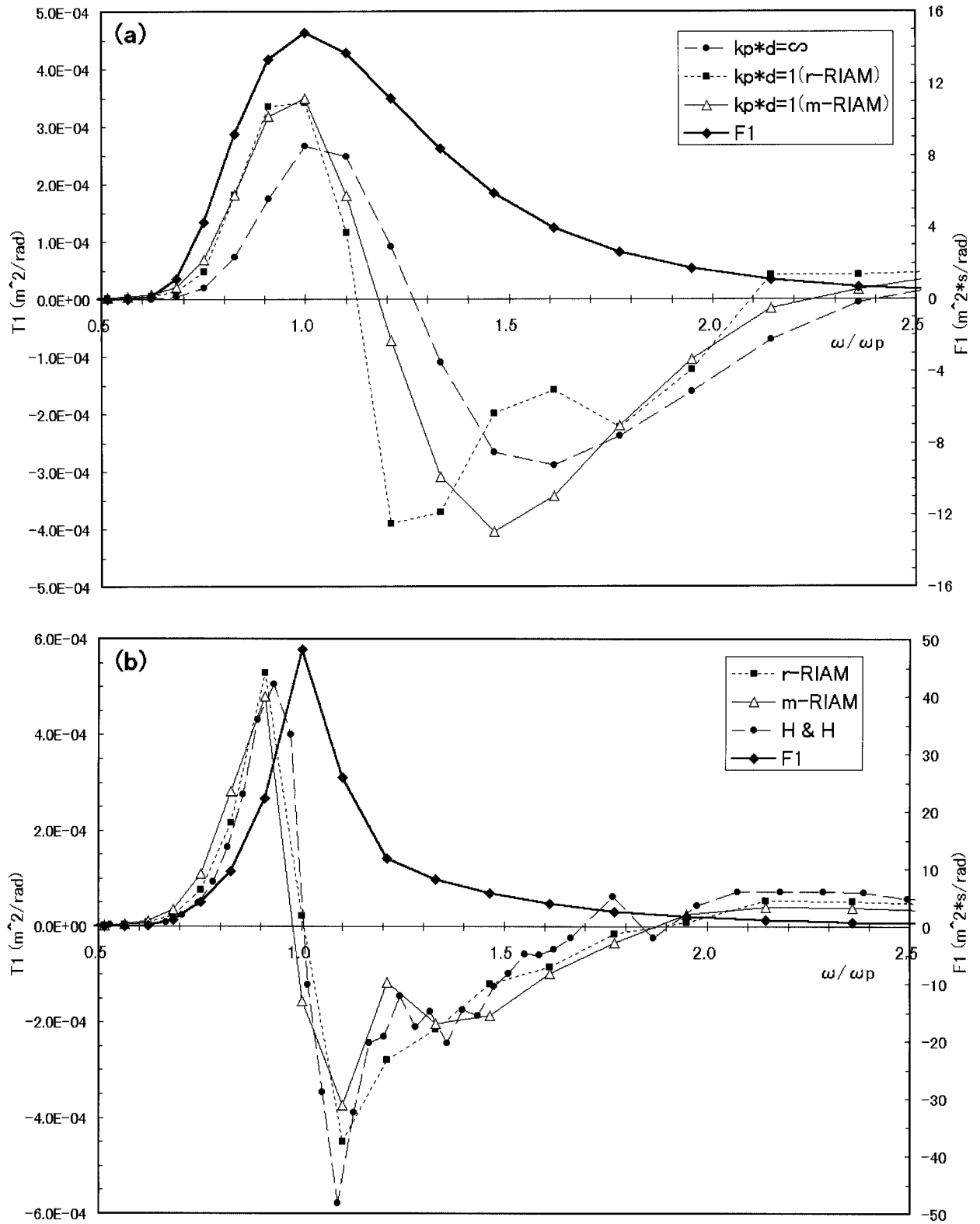
$$T_1(\omega) = \int_{-\pi}^{+\pi} T(\omega, \theta) d\theta \quad (27)$$

を使用する。

## 有限水深版 RIAM 法の性能

他の計算法と比較する前に、まず、RIAM 法を単純に直接有限水深に拡張した計算法とその後改良を図った計算法とを比較する。なお、ここでは簡単のため前者を r-RIAM 法、後者の完成版を m-RIAM 法と呼ぶ。Fig. 2.(a) は、PM スペクトル  $F_J(\omega; 1.0)$  に対して、例として  $k_p d = 1$  の場合について r-RIAM 法、m-RIAM 法で計算した非線形エネルギー伝達  $T_1(\omega)$  である。ここで、スペクトルの方向分布は M-H 型とした。また、以下では周波数分解能、波向分解能はそれぞれ  $R_\omega = 1.1$ 、 $\Delta\theta = 10^\circ$  を採用した。Fig. 2.(a) を見ると、RIAM 法は深海波 ( $k_p d = \infty$ ) に対しては計算の精度と安定性に優れているが、有限水深波に対しては、 $k_p d$  の値にもよるが、これを単純に有限水深に拡張した方法では凹凸が目立ち、精度が悪いことが分かる。

続いて、Hasselmann and Hasselmann (1981) の方法 (以後、H & H 法と略記) を比較の対象として、 $k_p d = 1$  の場合について標準 JONSWAP スペクトル  $F_J(\omega; 3.3)$  (M-H 型方向分布) に対する  $T_1(\omega)$  を Fig. 2.(b) に示す。計算法相互を比較すると、強度はそれぞれ同程度であるが、H & H 法による  $T_1$  の分布は凹凸が目立つ。これは H & H 法の特異点処理が不適切であることに起因すると考えられる。また、r-RIAM 法では  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_p = 1.2$  付近の第 2 極大値が再現されていない。r-RIAM 法は、Fig. 2.(a) のように分布の広い PM スペクトルや周波数分解能が粗い場合に特に精度の劣化が著しい。これは、共鳴波成分の  $\omega_1$  や  $\omega_2$  を求める際に隣接格子点の周波数で無理矢理代表させたことに起因すると考えられる。一方、m-RIAM 法は、波数分解能に対する依存性は小さく、 $T$  の強度と分布は安定している。



**Fig. 2.** One-dimensional nonlinear energy transfer functions  $T_1(\omega)$  for the standard spectra  $F_1(\omega)$  with the M-H type spreading function in finite-depth water ( $k_p d = 1$ ) obtained by two versions of the extended RIAM methods, that is, the row version (r-RIAM) and the modified one (m-RIAM). (a)  $T_1$  for the P-M spectrum. As reference  $T_1$  in deep water obtained by the original RIAM method is shown. (b)  $T_1$  for the JPNSWAP spectrum compared with the scheme of Hasselmann and Hasselmann (H & H 1981). Here and henceforth the spectral peak frequency  $\omega_p$  is 0.062 (rad/s), and resolution indices are  $R_o = 1.1$  and  $\Delta\theta = 10^\circ$ .



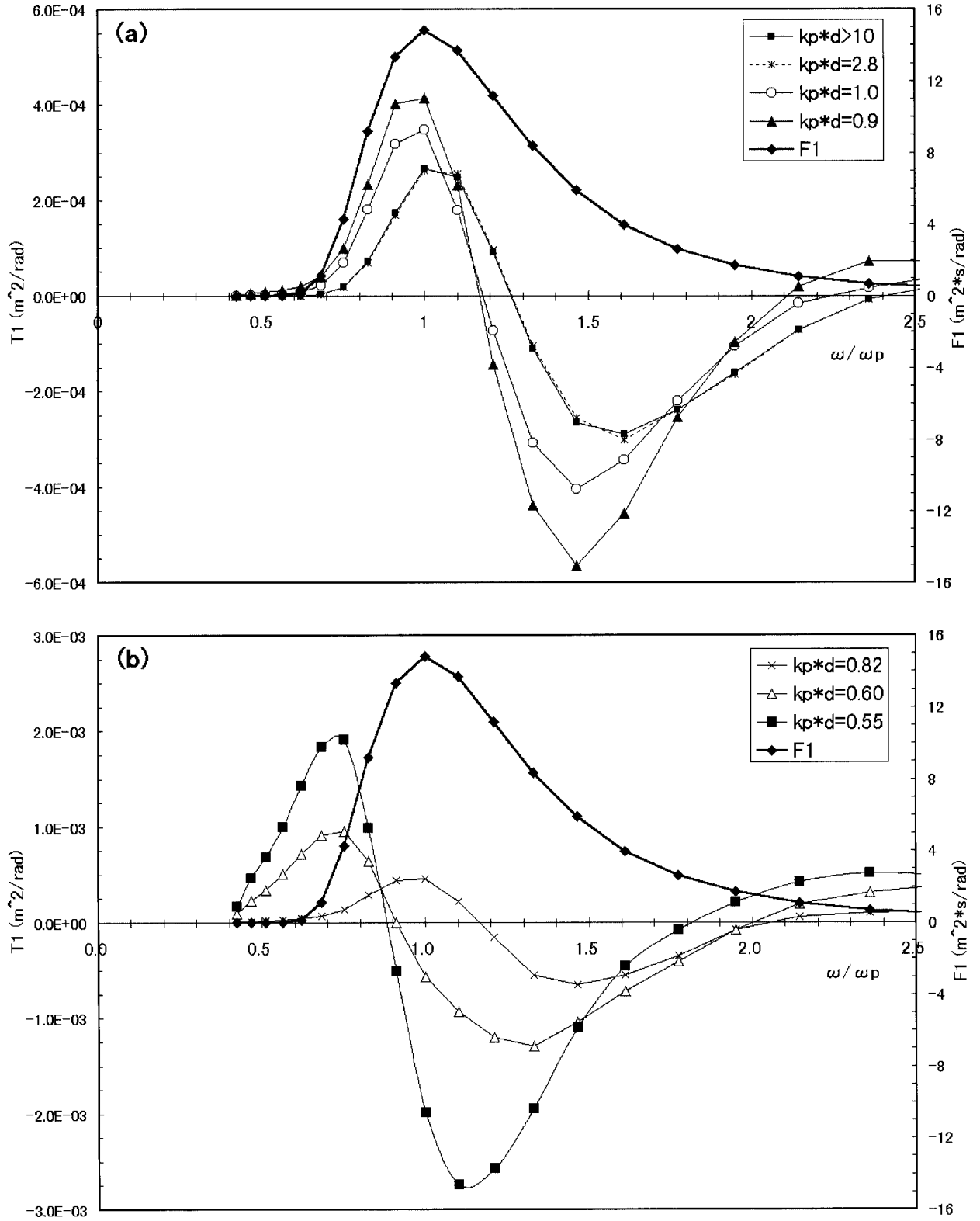


Fig. 3. One-dimensional nonlinear energy transfer functions  $T_1(\omega)$  for the P-M spectrum  $F_1(\omega)$  in several depths for (a)  $k_p d \geq 0.9$ , (b)  $k_p d < 0.9$ . Here and henceforth the spectral spreading function is the  $\cos^2 \theta$  type.

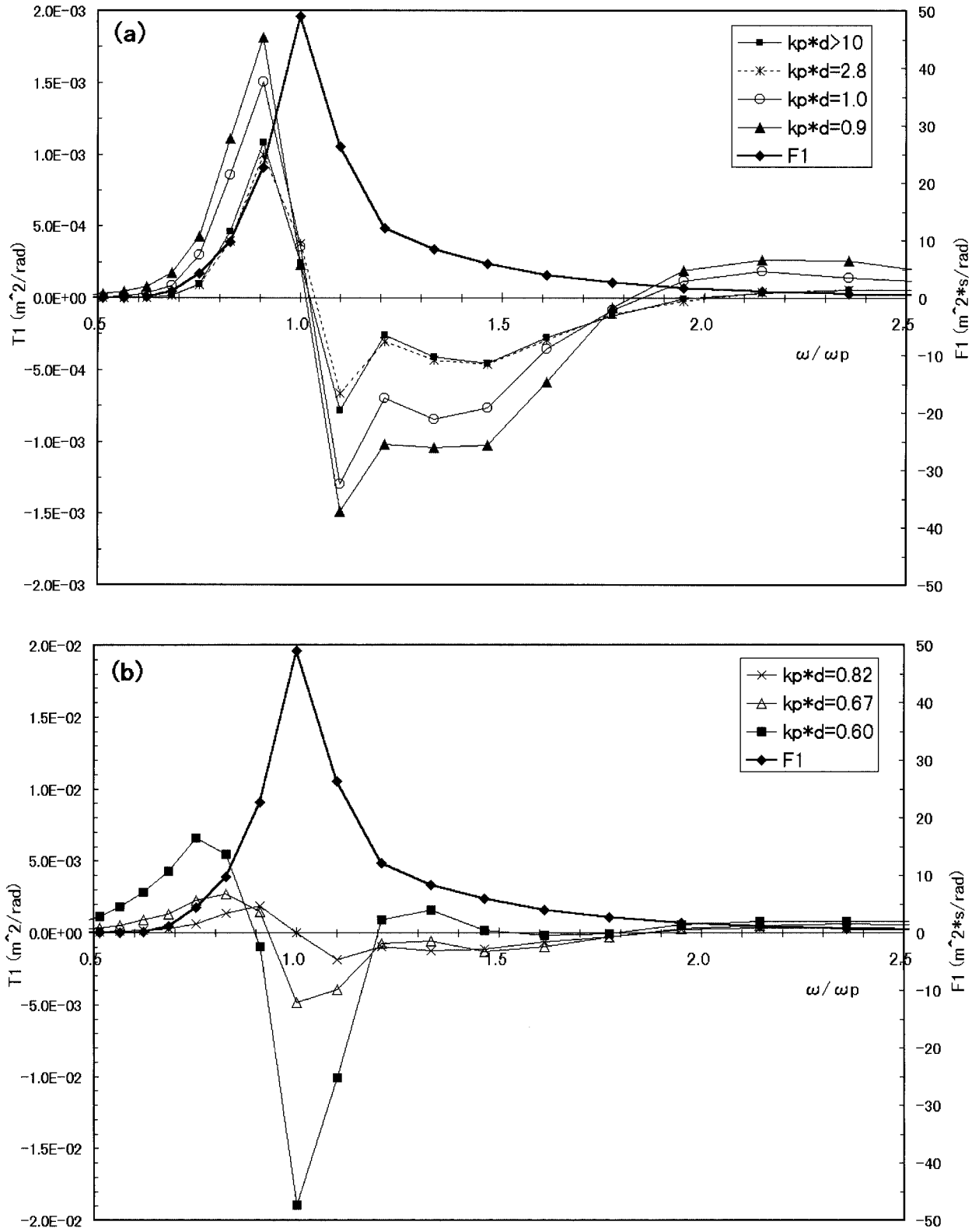
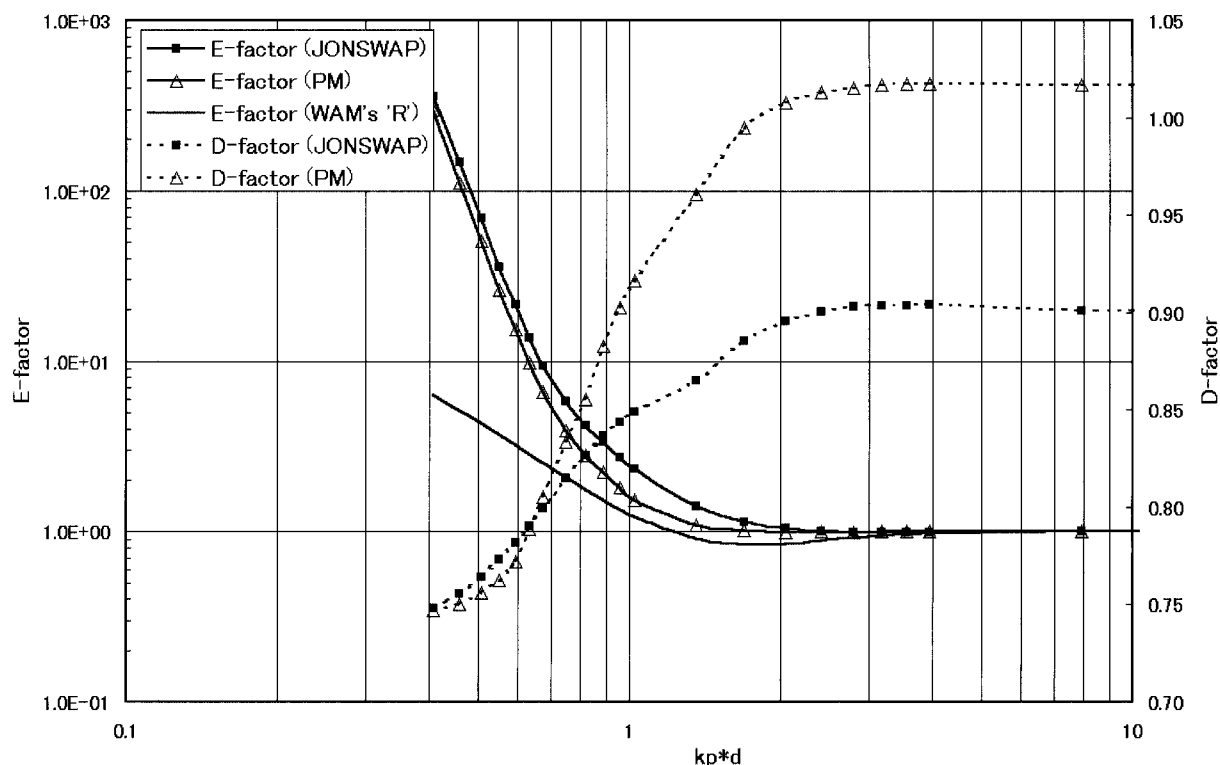


Fig. 4. One-dimensional nonlinear energy transfer functions  $T_1(\omega)$  for the JONSWAP spectrum  $F_1(\omega)$ .



**Fig. 5.** Enhancement factors denoted by 'E-factor' for the JONSWAP and the P-M spectra which are defined by the ratio of the maximum of nonlinear transfer for finite-depth waves to that for deep water waves. As reference enhancement scaling parameter 'R' adopted in the WAM model (WAMDI, 1988) is shown. In addition downshift factors denoted by 'D-factor' are shown which are defined by the ratio of the frequency of transfer maximum for finite-depth waves to that for deep water waves.

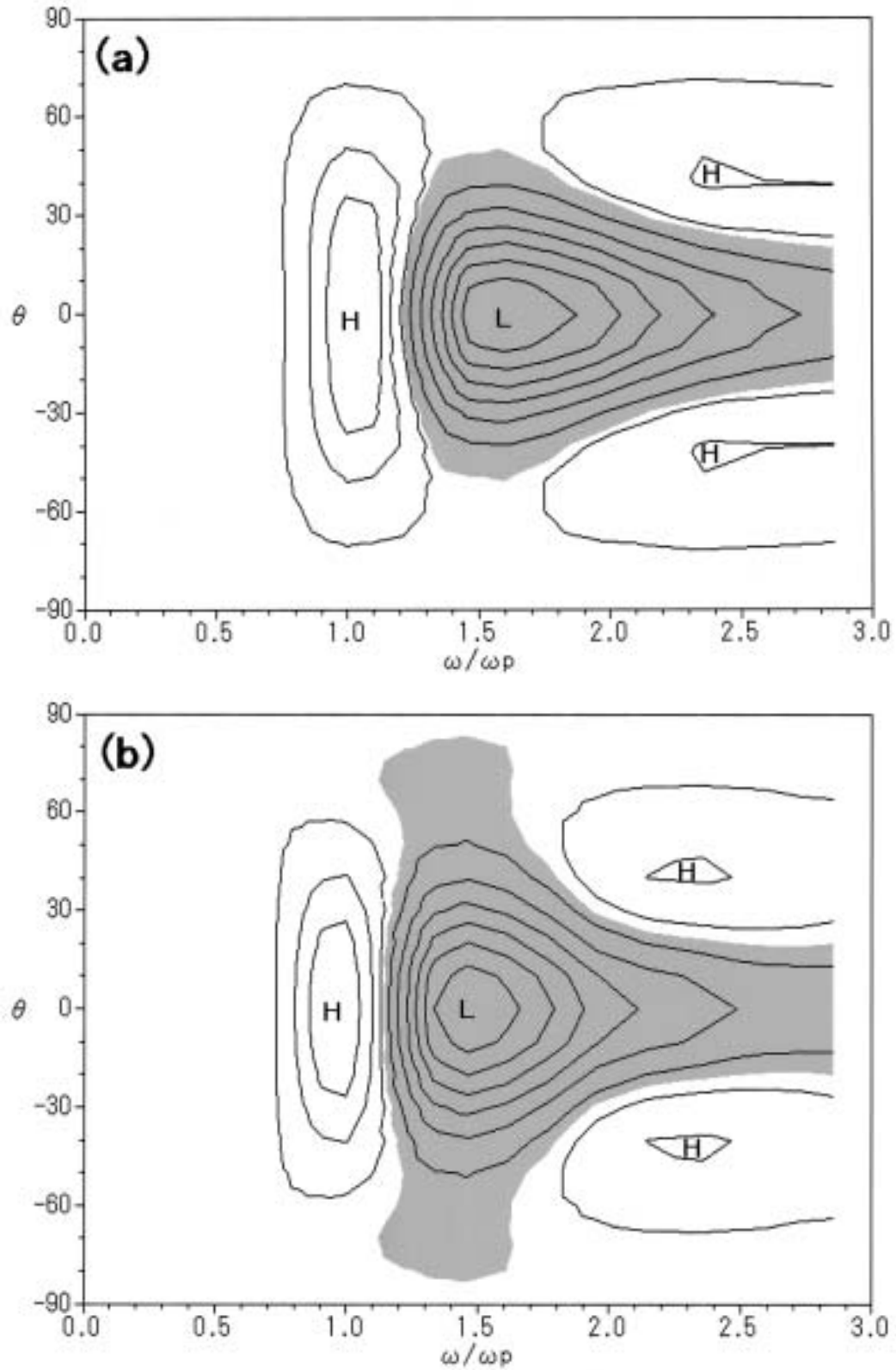
#### 非線形伝達の水深依存特性

PM 型と JONSWAP 型双方のスペクトルに対して  $k_p d$  を系統的に変化させて非線形伝達  $T$  を計算した。それぞれの  $T_1$  を Fig. 3 と Fig. 4 に示す。なお、このときスペクトルの方向分布は  $\cos^2 \theta$  型を与えた。結果は Hasselmann and Hasselmann (1981) や Hashimoto et al. (1998) に比べて、 $k_p d$  の値の大小に関わらず非常に滑らかな分布を示している。Fig. 5 は、 $k_p d$  に対する非線形伝達強度の増強径数とスペクトルピークの低周波遷移の効果径数を示したものである。ここで、前者は深海波に対する  $T_1$  の正の極大値  $T_{1p}$  と有限水深波に対する  $T_{1p}$  との比であり、後者はスペクトルのピーク周波数  $\omega_p$  に対する  $T_{1p}$  の周波数である。 $k_p d$  の値を減らしていくと、 $k_p h > 10$  までは  $T_1$  の強度と分布にほとんど変化は見られないが、 $k_p d = 2 \sim 3$  で  $T_1$  の強度が一度わずかに減少した後は、 $k_p h < 1$  で強度が急増し、分布も PM 型、JONSWAP 型双方とも低周波側の正の極大値が低周波側に移行している。また、Fig. 5 には WAM モデル (WAMDI Group, 1988) で採用している有限水深の非線形伝達の増強径数も示した。ここで計算した値に比べて、 $k_p d = 1 \sim 3$  における減少が大きく、 $k_p d < 1$

での増加が小さい。

また、 $T_1$  の分布について見ると、PM 型の場合 (Fig. 3)、深海波では  $T_1$  の正の極大値はピーク周波数付近にあり、非線形伝達はスペクトルピークを持ち上げる効果を持っていたが、 $k_p h < 1$  の場合には JONSWAP 型に対する  $T_1$  と同様にスペクトルピークを低周波側に移すように働いている。一方、JONSWAP 型の場合 (Fig. 4)、 $T_1$  は  $k_p d < 0.6$  では、 $T_1$  はスペクトルピークを挟んで正、負、正の分布になっており、 $T_1$  の効果はスペクトルピークを低周波側に移す効果から周波数分布を広げる効果へと変化している。

最後に、 $T$  の方向分布について見る。Fig. 6 に、 $\cos^2 \theta$  型方向分布の PM スペクトルについて深海波と有限水深波 ( $k_p d = 0.8$ ) 双方の場合の非線形伝達  $T$  の分布図を示す。前述の通り、 $T$  の極大値は深海波ではピーク周波数の真上にあるが、有限水深波ではピーク周波数のやや低周波側にある。また、有限水深波の場合、深海波に比べて方向分布が全周波数にわたって狭く、特に高周波側での強度の減少が著しい。以上の結果は、共鳴配置の「8の字」の中心 (特異点) 周辺で相互作用が強くなるという非線形伝達の特性を考えれば明らかである。有限水深では共鳴配置は扁平



**Fig. 6.** Contours of the two-dimensional nonlinear energy transfer  $T(\omega, \theta)$  for the P-M spectrum in deep water (a) and in finite-depth water (b) calculated by the new scheme in this paper (m-RIAM). The contour interval is  $(T_{\max} - T_{\min})/10$  and shaded regions denote negative  $T$ , where maximum and minimum values of  $T$  are  $T_{\max} = 1.66 \times 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{rad)}$ ,  $T_{\min} = -3.43 \times 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{rad)}$  in (a) and  $T_{\max} = 3.46 \times 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{rad)}$ ,  $T_{\min} = -6.47 \times 10^{-4} \text{ (m}^2/\text{rad)}$  in (b).

になっており (Fig. 1参照), 相互作用の強い4波の組み合わせは互いの波向が深海波の場合に比べてより近いものに集中するからである。

## 結 言

有限水深域における風波成分波間の非線形エネルギー伝達の計算法を新たに開発した。この計算法は, 深海波を対象とした RIAM 法を有限水深域へ拡張し改良を図ったもので, 実際の予報モデルで使用されるような粗い波数分解能でも高い計算精度を有し計算の安定性に優れている。しかも, 精度と安定性はスペクトル形や水深に依存しない高い汎用性を持つ。計算速度は, 1つのスペクトルにつき深海波の場合の30倍, wsHP735で30秒程度であり, 準厳密計算法の中では最速の部類に入る。勿論, これをそのまま波浪予報モデルに組み込むことはできないが, fetch-limited あるいは duration-limited の場合だと十分使用に耐える。精度を落とさずこれを簡単化することが今後の課題である。

今回開発した計算法により有限水深域における非線形伝達の特徴を詳細に調べることができ, 水深が浅くなるに従って非線形伝達の強度とスペクトルピークの低周波遷移の効果が増強される様子がより明瞭になった。この効果は波浪の予測を精度良く行う上で重要であり, 計算法の実用化が急がれる。また, D'Asaro and Dairiki (1997) も指摘しているように, 海面の波浪は混合層内の乱流強度を高める効果が指摘されており, 本論文の成果をもとに海面波浪の効果を陽に組み込むことで, 表層混合層モデルの高精度化が見込まれる。そして, 将来的には現在進行中の農林水産省の現場即応研究「我が国周辺海域における漁業資源の変動予測技術の開発」において, 卵稚仔魚等の物質の輸送過程や低次生態系の変動機構を把握するための海洋表層流動場の監視システムや3次元生態系モデルの開発に資するものと期待される。

## 謝 辞

本研究を遂行するに当たり, 九州大学応用力学研究所の草場忠夫博士には沿岸域の波浪の発達過程について, 中央水産研究所の友定彰博士には沿岸域の生物過程と波浪との関連性について, 有益な助言を頂いた。また, 中央水産研究所の川崎清, 廣江豊の両博士を始め, 応用力学研究所の丸林賢次氏, 石橋道芳氏, 池末あけみさんには, 多大なる援助と協力を頂いた。以上の方々に深く感謝申し上げます。

なお, 本研究は文部省の科学研究費 (基盤研究 B

2, 課題番号09559013) と農林水産省の現場即応研究「産卵場形成と幼稚仔魚の輸送環境の変化が加入量変動に及ぼす影響の解明 (FRECS)」で行われた研究の一部である。

## 文 献

- D'Asaro E. A. and Dairiki G. T., 1997 : Turbulence intensity measurements in a wind-driven mixed layer. *J. Phys. Oceanogr.*, 27, 2009 - 2022 .
- Hashimoto N., Tsuruya H., and Nakagawa Y., 1998 : Numerical computations of the nonlinear energy transfer of gravity-wave spectra in finite water depths. *Coastal Eng. J. Jpn.*, 40, 23 - 40 .
- Hasselmann K., 1962 : On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.*, 12, 481 - 500 .
- Hasselmann K., 1963 : On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems ; wave-particle analogy ; irreversibility. *J. Fluid Mech.*, 15, 273 - 281 .
- Hasselmann K., Barnett T. P., Bouws H., Carlson H., Cartright D. E., Enke K., Ewing J. A., Gineapp H., Hasselmann D. E., Kruseman P., Meerburg A., Muller P., Olbers D. J., Richter K., Sell W., and Walden H., 1973 : Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Dtsch. Hydrogr. Z., Suppl.*, A8(12) 95pp.
- Hasselmann S. and Hasselmann K., 1981 : A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum. *Hamb. Geophys. Einzelschriften, Reihe A : Wiss. Abhandl.*, 52, 138pp.
- Hasselmann S. and Hasselmann K., 1985 : Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I : A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral. *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1369 - 1377 .
- Hasselmann S., Hasselmann K., Allender J. H., and Barnett T. P., 1985 : Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part II : Parameterizations of the nonlinear energy transfer for application in wave models. *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1378 - 1391 .
- Herterich K., and Hasselmann K., 1980 : A similarity relation for the nonlinear energy transfer in a finite depth gravity-wave spectrum. *J. Fluid Mech.*, 97, 215 - 224 .
- Komatsu K. and Masuda A., 1996 : A new scheme of nonlinear energy transfer among wind waves : RIAM method. Algorithm and performance , *J. Oceanography*, 52, 509 - 537 .
- Lalli C. M. and Parsons R., 1996 : 生物海洋学入門 (關

- 文蔵 監訳), 講談社, 東京, pp.46 - 47 .
- Large W., McWilliams J. and Doney S., 1994 : Oceanic vertical mixing : A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization. *Rev. Geophys.*, 32(4) 363 - 403 .
- Lin R. Q. and Perrie W., 1997 : A new coastal wave model. Part III : Nonlinear wave-wave interaction. *J. Phys. Oceanogr.*, 27, 1813 - 1826 .
- Lin R. Q. and Perrie W., 1999 : Wave-wave interactions in finite depth water. *J. Geophys. Res.*, 104, 11193 - 11213 .
- Longuet-Higgins M. S., 1976 : On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum : A simplified model. *Proc. Roy. Soc. London*, A347, 311 - 328 .
- Masuda A., 1980 : Nonlinear energy transfer between wind waves. *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 2082 - 2092 .
- Masuda A., 1986 : Nonlinear energy transfer between random gravity waves, in "Wave Dynamics and Radio Probing of the Ocean Surface" (ed. by Phillips O. M. and Hasselmann K.) Plenum Press, New York, pp.41 - 57 .
- Mellor G. L. and Yamada T., 1982 : Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 20, 851 - 875.
- Mitsuyasu H., Tasai F., Suhara T., Mizuno S., Ohkusu M., Honda T., and Rikiishi K., 1975 : Observations of the directional spectra of ocean waves using a cloverleaf bouy. *J. Phys. Oceanogr.*, 5, 750 - 760 .
- Polnikov V. G., 1997 : Nonlinear energy transfer through the spectrum of gravity waves for the finite depth case. *J. Phys. Oceanogr.*, 27, 1481 - 1491 .
- Phillips O. M., 1960 : On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. *J. Fluid Mech.*, 9, 193 - 217 .
- Resio D. and Perrie W., 1991 : A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions. *J. Fluid Mech.*, 223, 603 - 629 .
- The SWAMP Group (24 Authors), 1985 : Ocean Wave Modeling, Plenum Press, New York, 256pp.
- The WAMDI Group (13 Authors), 1988 : The WAM model A third generation ocean wave prediction model. *J. Phys. Oceanogr.*, 18, 1378 - 1391 .
- Webb D. J., 1978 : Non-linear transfers between sea waves. *Deep-Sea Res.*, 25, 279 - 298 .
- Young I. R. and Van Vledder G. Ph., 1993 : A review of the central role of nonlinear interactions in wind-wave evolution. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A342, 505 - 524 .
- Zakharov V. E., 1968 : Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid. *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 3(2), 80 - 94 .

## 付 録

式(4)の $D$ は Hasselmann (1962, 1963) と Herterich and Hasselmann (1980) による修正版から以下のように求める。

$$D = D_{\substack{+- \\ k_3, k_4, -k_1}} = D_{\substack{+- \\ k_3, k_4, -k_2}} = D_{\substack{+- \\ k_1, k_2, -k_4}} = D_{\substack{+- \\ k_1, k_2, -k_3}}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \hat{D}_{\substack{++- \\ k_3, k_4, -k_1}} + \hat{D}_{\substack{++- \\ k_4, -k_1, k_3}} + \hat{D}_{\substack{++- \\ -k_1, k_3, k_4}} \right)$$

ここで, ( ) の中は以下の式から各々求める。

$$\hat{D}_{\substack{++- \\ k_3, k_4, -k_1}} = \frac{-1}{\omega_{4-1}^2 - (\omega_4 - \omega_1)^2} \left[ (\omega_4 - \omega_1) \{ k_4 k_1 \tanh k_4 d \tanh k_1 d - (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{k}_1) \} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_4 k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} + \frac{-\omega_1 k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} \right) \right]$$

$$\times \left[ 2(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) \left\{ \frac{\omega_3^2 \omega_{4-1}^2}{g^2} - \mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \right\} - \frac{\omega_3 |\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1|^2}{\cosh^2 (|\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1| d)} - \frac{(\omega_4 - \omega_1) k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} \right] + \frac{\omega_3}{g^2} (\omega_3^2 + \omega_{4-1}^2)$$

$$\times \left[ (\omega_4 - \omega_1) \{ k_4 k_1 \tanh k_4 d \tanh k_1 d - (\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{k}_1) \} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_4 k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} + \frac{-\omega_1 k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2g} \left\{ (\mathbf{k}_4 \cdot -\mathbf{k}_1) + \frac{1}{g^2} \omega_4 \omega_1 (\omega_4^2 + \omega_1^2 - \omega_4 \omega_1) \right\} \left\{ \frac{\omega_3^3 (\omega_4 - \omega_1)}{g} - g \mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) - \frac{g k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} \right\} \\
& + \frac{\omega_3}{2g^2} (\mathbf{k}_4 \cdot -\mathbf{k}_1) \left\{ (\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) (\omega_4^2 + \omega_1^2) - \omega_4 \omega_1 (\omega_4 - \omega_1) \right\} - \frac{\omega_3 \omega_4^2 k_1^2}{2g^2} (\omega_3 + \omega_4 - 2\omega_1) - \frac{\omega_3 \omega_1^2 k_4^2}{2g^2} (\omega_3 + 2\omega_4 - \omega_1) \\
\hat{D}_{-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}^{++} & = \frac{-1}{\omega_{3+4}^2 - (\omega_3 - \omega_4)^2} \\
& \times \left[ (\omega_3 + \omega_4) \{ k_3 k_4 \tanh k_3 d \tanh k_4 d - (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) \} + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_3 k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} + \frac{\omega_4 k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} \right) \right] \\
& \times \left[ 2(-\omega_1 + \omega_3 + \omega_4) \left\{ \frac{\omega_1^2 \omega_{3+4}^2}{g^2} - (-\mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \right\} + \frac{\omega_1 |\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4|^2}{\cosh^2 (|\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4| d)} - \frac{(\omega_3 + \omega_4) k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} \right] + \frac{-\omega_1}{g^2} (\omega_1^2 + \omega_{3+4}^2) \\
& \times \left[ (\omega_3 + \omega_4) \{ k_3 k_4 \tanh k_3 d \tanh k_4 d - (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) \} - \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_3 k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} + \frac{\omega_4 k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} \right) \right] \\
& + \frac{1}{2g} \left\{ (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) + \frac{1}{g^2} \omega_3 \omega_4 (\omega_3^2 + \omega_4^2 + \omega_3 \omega_4) \right\} \left\{ -\frac{\omega_1^3 (\omega_3 + \omega_4)}{g} - g(-\mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) - \frac{g k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} \right\} \\
& - \frac{\omega_1}{2g^2} (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4) \left\{ (-\omega_1 + \omega_3 + \omega_4) (\omega_3^2 + \omega_4^2) + \omega_3 \omega_4 (\omega_3 + \omega_4) \right\} + \frac{\omega_1 \omega_3^2 k_4^2}{2g^2} (-\omega_1 + \omega_3 + 2\omega_4) + \frac{\omega_1 \omega_4^2 k_3^2}{2g^2} (-\omega_1 + 2\omega_3 - \omega_4) \\
\hat{D}_{\mathbf{k}_4, -\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3}^{+-} & = \frac{-1}{\omega_{-1+3}^2 - (-\omega_1 + \omega_3)^2} \\
& \times \left[ (-\omega_1 + \omega_3) \{ k_1 k_3 \tanh k_1 d \tanh k_3 d - (-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) \} - \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_1 k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} + \frac{\omega_3 k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} \right) \right] \\
& \times \left[ 2(\omega_4 - \omega_1 + \omega_3) \left\{ \frac{\omega_4^2 \omega_{-1+3}^2}{g^2} - \mathbf{k}_4 \cdot (-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) \right\} - \frac{\omega_4 |-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|^2}{\cosh^2 (|-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3| d)} - \frac{(-\omega_1 + \omega_3) k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} \right] + \frac{\omega_4}{g^2} (\omega_4^2 + \omega_{-1+3}^2) \\
& \times \left[ (-\omega_1 + \omega_3) \{ k_1 k_3 \tanh k_1 d \tanh k_3 d - (-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) \} - \frac{1}{2} \left( -\frac{\omega_1 k_3^2}{\cosh^2 k_3 d} + \frac{\omega_3 k_1^2}{\cosh^2 k_1 d} \right) \right] \\
& \times \frac{1}{2g} \left\{ (-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) - \frac{1}{g^2} (-\omega_1) \omega_3 (\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_1 \omega_3) \right\} \left\{ \frac{\omega_4^2 (-\omega_1 + \omega_3)}{g} - g \mathbf{k}_4 \cdot (-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3) - \frac{g k_4^2}{\cosh^2 k_4 d} \right\} \\
& + \frac{\omega_4}{2g^2} (-\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3) \left\{ (\omega_4 - \omega_1 + \omega_3) (\omega_1^2 + \omega_3^2) - \omega_1 \omega_3 (-\omega_1 + \omega_3) \right\} - \frac{\omega_4 \omega_1^2 k_3^2}{2g^2} (\omega_4 - \omega_1 - 2\omega_3) - \frac{\omega_4 \omega_3^2 k_1^2}{2g^2} (\omega_4 - 2\omega_1 + \omega_3)
\end{aligned}$$

