Yehor Kovalenko 248677 Rok akademicki 2023/24
Andrei Pivavarau 248678 Poniedziałek, 16:00

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2– Rozwiązywanie układu N równań liniowych z N niewiadomymi

Opis rozwiązania

Nasze zadanie polegało na zaimplementowaniu metody iteracyjnej Jacobiego(iteracja prosta). Metoda Jacobiego pozwala obliczyć układ N równań liniowych z N niewiadomymi(Ax = b).

Wektor x^0 będący początkowym przybliżeniem rozwiązania układu złożony z samych zer. Kolejne przybliżenia będziemy obliczać według następującego wzoru:

$$x^{n+1} = Mx + Nb \tag{1}$$

(indeksy n oznaczają tutaj numer iteracji).

Macierz A można przedstawić jako sumę trzech macierzy A = L + D + U, gdzie L jest macierzą w której znajdują się elementy których numer wiersza jest większy od numeru kolumny, D to macierz diagonalna z elementami tylko na głównej przekątnej, a U to macierz, w której znajdują się elementy których numery wiersza są mniejsze od numerów kolumny. Można to zapisać następująco:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Dla znalezienia M ze (1) stosujemy wzór M = -N(L+U) (2), gdzie N = D^{-1}. W implementacji najpierw obliczamy M i N. Te dwie macierzy pozwalają nam na liczenie kolejnych przybliżeń rozwiązań układu równań. Wykorzystujemy tu wzór (1).

Warunkiem stopu w obudwóch algorytmach może być albo wybrana przez użytkownika liczba iteracji algorytmów, albo wybrana przez użytkownika dokładność ε, gdzie algorytm kończy działanie jak tylko $|a - b| < \varepsilon$

Uwaga: Przed przystąpieniem do obliczeń należy sprawdzać czy podana macierz spełnia warunki zbieżności. Dla metody Jacobiego to:

1. Macierz A jest nieredukowalna. Macierz A jest nieredukowalna, jeżeli poprzez przestawienie wierszy i kolumn nie można jej sprowadzić do postaci blokowej górnej trójkątnej.
2. Macierz A jest diagonalnie dominująca. Macierz A o wymiarze n x n nazywamy diagonalnie dominującą, jeśli dla i=1, 2, ... , n zachodzi nierówność:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, dla\ j \neq i \tag{2}$$

Wyniki

Układ równań 1:

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Tabela 1: Wyniki działania programu dla układu równań 1.

Dokładne rozwiązania	Rozwiązanie dla 20 iteracji	Rozwiązanie dla dokładności 0.0001
x_1= 1	x_1= 0.9986949379681345	x_1= 1.0000297675531842
x_2= 2	x_2= 2.0016225623485173	x_2= 1.9999629638455891
x_3= 3	x_3= 2.9983617782733143	x_3= 3.000037383297749

Układ równań 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & -0.3 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.8 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

Tabela 2: Wyniki działania programu dla układu równań 2.

Dokładne rozwiązania	Rozwiązanie dla 20 iteracji	Rozwiązanie dla dokładności 0.0001
x_1= 1	x_1= 1.0000000000002538	x_1= 1.00001625
x_2= 1	x_2= 0.9999999999997266	x_2= 0.9999825
x_3= 1	x_3= 1.0000000000000195	x_3= 1.00000125

Układ równań 3:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.0625 & 0.1875 & 0.0625 \\ -0.0625 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1875 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 0.0625 & 0 & 0.125 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.625 \\ 1 \\ 0.4375 \end{bmatrix}$$

Tabela 3: Wyniki działania programu dla układu równań 3.

Dokładne rozwiązania	Rozwiązanie dla 20 iteracji	Rozwiązanie dla dokładności 0.0001
x_1= 2	x_1= 1.9990316428131198	x_1= 1.9999739054067447
x_2= -3	x_2= -2.999826179558744	x_2= -2.999995318037093
x_3= 1.5	x_3= 1.4986878539021378	x_3= 1.4999646559366593
x_4= 0.5	x_4= 0.4987112050081034	x_4= 0.4999652713908145

Wnioski

- Metoda Jacobiego jak i każda metoda iteracyjna jest tym bardziej dokładną, im więcej iteracji zostało wykonano
- W metodzie Jacobiego każda iteracja wykorzystuje wynik iteracji poprzedniej
- Metoda nie jest uniwersalna, rozwiązuje tylko macierze które spełniają warunek zbieżności