Metody numeryczne 2021/2022: lista 6

1. (*kwadratury Newtona-Cotesa*) Zadana jest funkcja $f(x)$ ($x \in \langle a; b\rangle$). Wyrażenie $S(f) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ nazywamy kwadraturą, przy czym współczynniki A_i są uniwersalne i niezależne of f. Całkując wzory interpolacyjne Lagrange'a dla siatki jednorodnej $n+1$ punktów znajdź wartości A_i dla metod: *(a)* trapezów ($n = 1$), *(b)* Simpsona ($n = 2$), *(c)* "3/8" ($n = 3$), *(d)* Boole'a ($n = 4$).

2. Pokaż, że jeśli n jest liczbą parzystą, to kwadratura Newtona-Cotesa jest dokładna dla wszystkich wielomianów rzędu $n+1$. **Wskazówka:** przedstaw dowolny wielomian $W_{n+1}(x)$ stopnia $n+1$ jako $W_{n+1}(x) = C(x - \frac{a+b}{2})^{n+1} + W_n(x)$, gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia nie większego od n. Czy podobny rezultat można uzyskać dla nieparzystych n?

3. Przeanalizuj, jak zależy błąd kwadratury Newtona-Cotesa od $h \equiv (b-a)/n$ dla metod *(a-d)* z zad. 1. **Wskazówka:** wykorzystaj wzór na błąd interpolacji wielomianowej $f(x) - W_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$, gdzie $f^{(n+1)}(\xi)$ oznacza $n+1$ pochodną w punkcie $\xi \in (a; b)$, a $\omega_n(x) = \prod_i (x - x_i)$.

4. (*kwadratury złożone Newtona-Cotesa*) Przedział całkowania dzielimy na m podprzedziałów i do każdego z nich stosujemy jedną z kwadratur *(a-d)* z zad. 1. Oszacuj błąd całkowania w funkcji m.

5. (*metoda Romberga*) Niech $T_{0,i}$ oznacza całkę z funkcji F na przedziale $\langle a, b\rangle$ obliczoną metoda trapezów dla 2^i jednorodnych przedziałów. Przyjmij, że $\int dx f(x) - T_{0,i} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j h_i^{2j}$ dla pewnych współczynników c_j niezależnych od i. Zdefiniujmy $T_{m,i} \equiv T_{m-1,i+1} + (T_{m-1,i+1} - T_{m-1,i})/(2^{2m} - 1)$. Pokaż, że wiodący wkład do błędu kwadratury $\int dx f(x) - T_{m,i}$ zawiera czynnik $h_i^{2(m+1)}$.

6. **(Zadanie numeryczne NUM8)** Zaimplementuj dwie procedury biblioteczne obliczające całkę z zadanej funkcji f na przedziale $[a, b]$ z tolerancją bezwzględną ϵ, bazujące na

   (a) złożonej kwadraturze Newtona-Cotesa z $n = 2$ (wzór Simpsona),

   (b) metodzie Romberga.

   Wykorzystując swój program, oblicz następujące całki z dokładnością do 10 miejsc po przecinku: *(a)* $\int_0^1 dx \sin(x)$, *(b)* $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \ln(x^2 + y^3 + 1)$. Algorytm należy zaimplementować samodzielnie. Niezmiernie ważne jest takie zaprojektowanie algorytmów, żeby nie obliczać wielokrotnie wartości funkcji dla tego samego argumentu. Wynik sprawdź stosując wybrany pakiet algebry komputerowej lub bibliotekę numeryczną.

7. (*metody deterministyczne i całki wysokowymiarowe*) Oszacuj czas potrzebny do obliczenia całki z funkcji zależnej od 40 zmiennych określonej na 40-wymiarowym hipersześcianie, stosując iterowane całkowanie jednowymiarowe. Załóżmy, że mamy do dyspozycji (obecnie najszybszy na świecie wg rankingu TOP500) superkomputer Fugaku (RIKEN Center for Computational Science, Japonia), liczący 7630848 rdzeni i pobierający 29899 kW. Całkowitej moc obliczeniowa szacowana jest na 442.01 PFLOPS.