Savchenko Yehor, Metody Numeryczne, zadanie NUM 9

Instrukcja do programy:

1. Zainstalować python: **https://www.python.org/downloads/**
2. Zainstalować biblioteki NumPy: **pip install numpy**
3. Wpisać do terminalu: **python "FileName"**

Wstęp:

Musiałem znaleźć numerycznie pierwiastek $\mathbf{x}^*$ równań f(x) = 0 i g(x) = 0 dla

(a) f(x) = sin(x) – 0.37,

(b) g(x) = $f(x)^2 = (\sin(x) - 0.37)^2$,

Miałem przedział x ∈ [0, $\frac{\pi}{2}$] z dokładnością 10^{-6} metodami:

(a) bisekcji (połowienia, równego podziału),

(b) Falsi,

(c) Siecznych,

(d) Newtona (stycznych).

Bisekcji

Żeby skorzystać z metody bisekcji w przedziale [a, b] funkcja musi spełniać poniższe warunki:

1. Funkcja f(x) **określona**.
2. Funkcja f(x) **ciągła.**
3. Funkcja f(x) na krańcach przedziału [a, b] przyjmuje **różne znaki**.

Jeżeli funkcja spełnia powyższe warunki, to w przedziale [a, b] istnieje pierwiastek i możemy go wyszukać algorytmem **bisekcji**:

W każdym przybliżeniu algorytm wyznacza środek x_0 przedziału [a, b] $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Dalej sprawdzamy, czy odległość x_0 od krańców przedziału jest mniejsza od założonej dokładności. Jeśli tak, to zwracamy x_0.

Jeśli nie x_0 dzielimy przedział [a, b] na dwie równe połowy: [a, x_0] i [x_0, b]. Za nowy przedział [a, b] przyjmuję tę połówkę, w której funkcja zmienia znak na krańcach i kontynuujemy wyznaczanie pierwiastka funkcji.

Falsi

Żeby skorzystać z metody falsi w przedziale [a, b] funkcja musi spełniać poniższe warunki:

4. Funkcja f(x) **określona**.
5. Funkcja f(x) **ciągła.**
6. Funkcja f(x) na krańcach przedziału [a, b] przyjmuje **różne znaki**.

Falsi jest bardzo podobna do metody bisekcji. Metoda ta wykorzystuje interpolację liniową funkcji, której zero jest poszukiwane. Prosta ta przechodzi przez punkty graniczne obszaru poszukiwań.

Wzór rekurencyjny:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}}\right) f_n$$

Nowy obszar poszukiwań jest wyznaczany tak jak było w metodzie bisekcji.

Siecznych

Żeby skorzystać z metody siecznych w przedziale [a, b] funkcja musi spełniać poniższe warunki:

1. Funkcja f(x) **określona**.
2. Funkcja f(x) **ciągła.**
3. Funkcja f(x) na krańcach przedziału [a, b] przyjmuje **różne znaki**.
4. Dodatkowo w przedziale [a, b] pierwsza pochodna f '(x) jest różna od zera

W falsi sprawdzamy, aby funkcja f(x) zawsze miała różne znaki na krańcach przedziału. Bo różne znaki gwarantują nam istnienie pierwiastka w tym przedziale. Ale w metodzie siecznych taki wymóg nie jest konieczny.

W celu obliczenia przybliżenia x_{i+1} korzystamy z dwóch wcześniej wyznaczonych punktów: x_i i x_{i-1}. Wzór określający ciąg przybliżeń jest następujący:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Newtona

Żeby skorzystać z metody newtona w przedziale [a, b] funkcja musi spełniać poniższe warunki:

1. Funkcja f(x) **określona**.
2. Funkcja f(x) **ciągła.**
3. Funkcja f(x) na krańcach przedziału [a, b] przyjmuje **różne znaki**.
4. Dodatkowo w przedziale [a, b] pierwsza pochodna f '(x) jest **różna od zera.**

Zaczynamy obliczenia od punktu x_0 , który jest blisko poszukiwanego pierwiastka funkcji.
W przedziale [x_0, x*], gdzie x* - docelowy pierwiastek pierwsza pochodna funkcji musi być niezerową. Pożądane, żeby druga pochodna w punkcie x_0 miała ten sam znak co i funkcja. Bo w innym przepadku metoda Newtona ucieknie od punktu pierwiastka zamiast tego, żeby zbliżać się do niego.
Wyznaczamy punkt x_0 wykorzystując ostatnio wyliczony. Liczymy dopóki nie zbliżymy się do pierwiastka funkcji używając precison, który wyznamy(różnica pomiędzy dwoma kolejno wyznaczonymi pierwiastkami będzie dostatecznie mała).
Wzór na metodę newtona:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Wyniki:

Bisekcji:

f(x) = **0.379009**35178652406 | iteracji = 21
g(x) = Funkcja nie spełnia założeń | iteracji = 0

Falsi:

f(x) = **0.379009**09123943294 | iteracji = 6
(x) = Funkcja nie spełnia założeń | iteracji = 0

Siecznych:

f(x) = **0.379009**02069595077 | iteracji = 6
g(x) = **0.379007**7341527496 | iteracji = 28
u(x) = **0.379009**02069390163 | iteracji = 5

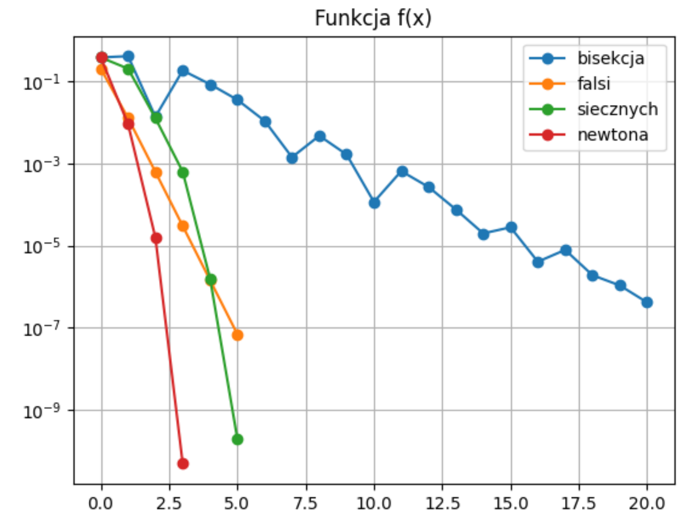
Newtona:

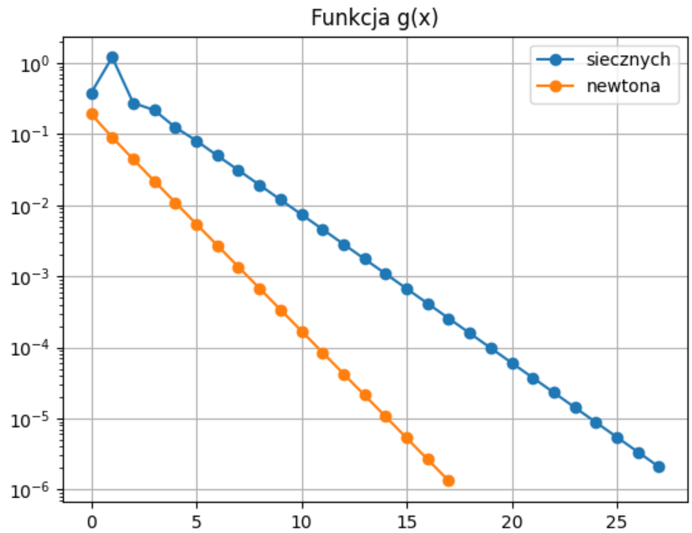
f(x) = **0.379009**0206959508 | iteracji = 4

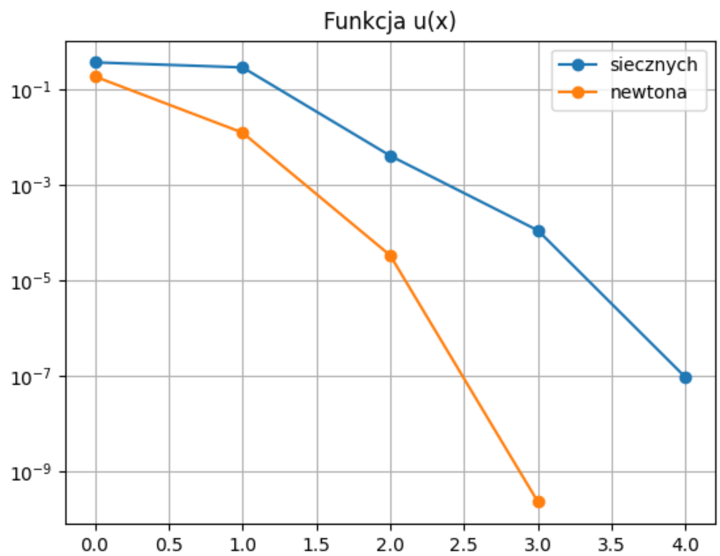
g(x) = **0.379009**684416199 | iteracji = 18

g(x) = **0.379009**0206959508 | iteracji = 4

Dokładna wartość = 0206959508







Przedyskutowanie wyników:

Z wyników widać, że metoda **Bisekcji** potrzebuje najwięcej iteracji, żeby otrzymać wyniki. Metoda **Falsi** jest w większości przypadków szybciej zbieżna od metody bisekcji. No i metody **Siecznych** i **Newtona** potrzebują mniej iteracji, żeby zbiegnąć. Także widać, że funkcja **g(x)** nie spełnia warunki metody **Bisekcji** i **Falsi**, które były podane wyżej. Usprawnienie zadania przez funkcję $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}$ potrzebuje mniej iteracji niż funkcja **g(x)** w tych metodach.