- Métodos computacionales I.
- Manuel Alejandro Segura D.

Contents

List of Figures

1 Derivada finita

1. (**Theoretical**) Demuestre la formula alternativa para la estimación de la segunda derivada discreta:

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_i) + f(x_{i-2})}{4h^2} \tag{1}$$

2. Usando la definición de derivada central (con $h = 0.05$) estime la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x^2}}}, \tag{2}$$

   a) En el intervalo $-10 \leq x \leq 10$.
   b) Para el intervalo anterior, estimar el error en cada punto nodal.

3. (**Machine Learning analogy**) El operador derivada central se puede definir a través de la operación de convolución usando un kernel muy específico. Sea M una máscara de convolución:

$$\mathbb{M} = [1, 0, -1] \tag{3}$$

   El operador derivada central queda expresado como la convolución discreta entre la función y la máscara M:

$$Df(x_n) = \frac{1}{2h} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M[m+1] f(x_{n-m}). \tag{4}$$

   Note que el kernel está centrado en $m = 0$, de modo que la sumas realmente van entre $m = -1$ hasta $m = 1$. Implemente este algoritmo para calcular la derivada de la función del punto 2).

4. Diseñe un kernel de convolución para expresar el operador segunda derivada.

   a) Dar la expresión matemática: $D^2 f(x) =?$.
   b) Implementar el cálculo de esta derivada a la función del punto 2).

5. (**Theoretical**) Show that the $D^4 f$ operator is given by:

$$D^4 f(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4} \tag{5}$$

   For this operator, what is the order ($\mathcal{O}(h^k)$) of the approximation?

2 Problema de aplicación

1. Calcular el campo de velocidades cerca de la superficie de un cilindro de radio $R = 2\ cm$. Para esta tarea realizar los siguientes pasos:

   a) Definir una discretización en los ejes x e y, donde la región es: $A \in [-4, 4]$ con 25 puntos en cada eje.

   b) Definir la función potencial del flujo dada por:

   $$\phi(x, y) = Vx\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) \tag{6}$$

   donde $V = 2\ cm/s$

   c) Calcule y guarde adecuadamente el campo de velocidades usando la definición de derivada parcial central como:

   $$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \tag{7}$$

   use $h = 0.001$. Note que al interior del cilindro el campo de velocidades debe ser igual a cero.

   d) Dibuje el campo de velocidades usando el método: `ax.quiver(x[i],y[j],Vx[i,j],Vy[i,j])`. Debería obtener algo como 1:

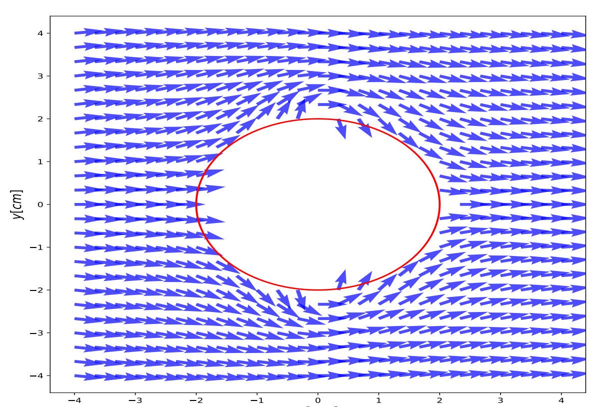

Figure 1: Campo de velocidades cerca de un cilindro sólido.