Ecole Marocaine des Sciences de l'Ingénieur de Casablanca, Maroc

Programmation Linéaire

Introduction générale

1- Définition :

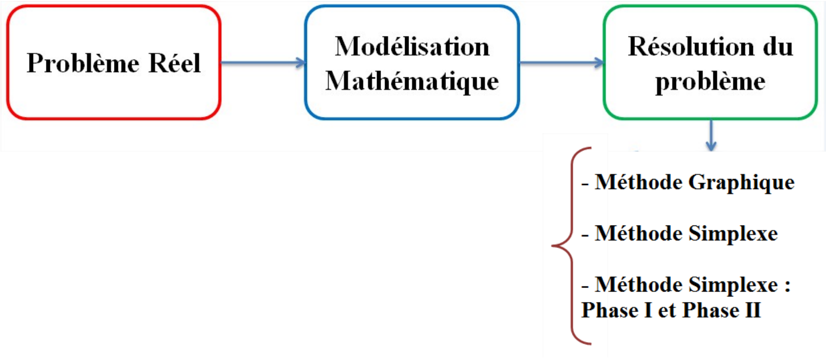
Définition 1 (Programmation linéaire) :
la programmation linéaire est une technique mathématique d'optimisation (maximisation ou minimisation) de fonction objectif linéaire sous des contraintes ayant la forme d'inéquations linéaires. Elle vise à sélectionner parmi différentes actions celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé. En outre c'est une méthode de détermination du meilleur plan d'action pour réaliser des objectifs donnés dans une situation où les ressources sont limitées.

3- Exemple d'un problème réel

Enoncé : *Une entreprise fabrique deux types de produits "A" et "B", en utilisant deux machines M_1 et M_2. Pour être fabriqué, le produit "A" a besoin d'une heure de fonctionnement de M_1 et 2 heures de fonctionnement de la machine M_2. Et le produit "B" a besoin de 2 heures de M_1 et 3 heures de M_2. La machine M_1 ne peut pas fonctionner plus que 10 heures par jour et la machine M_2 ne dépasse pas 15 heures par jour.*
La marge unitaire du produit "A" est 50 MAD, et celle de "B" est 75 MAD.

Question : *Combien d'unité de produits "A" et "B" doit produire la société pour maximiser le profit ?*

Démarche de la programmation linéaire



Chapitre I :
Modélisation linéaire
(Programmation linéaire)

Les étapes de la modélisation linéaire

Un problème de programmation linéaire peut être obtenu en exécutant les étapes suivantes :

Etape 1 : Déclaration des variables de décisions

Les variables d'une programmation linéaire sont souvent déclarées par l'affectation de certaines variables x_i ; $(x_1, x_2, ...)$ qui désignent le nombre d'unité, ou la quantité, à produire de l'article i.

x_i= Le nombre d'unité ou la quantité du produit i.

Les étapes de la modélisation linéaire

Etape 2 : Déclaration des contraintes :

Les contraintes d'un problème de programmation linéaire représente les réstrictions liées à la décision :

1. Les contraintes liées à la machine (Contraintes techniques) ;
2. Les contraintes liées au marché (Contraintes économiques) ;
3. Les contraintes de positivité.

Les étapes de la modélisation linéaire

Elles sont exprimées par un système d'inéquations ou équations :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... & \geq & b_2 \\ .... & & \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

Les étapes de la modélisation linéaire

Etape 3 : Déterminer la fonction objectif (fonction économique) :

Dans un problème réel, chaque variable d'état est associée à un coefficient représentant **le coût unitaire** (*problème de minimisation*), ou **le bénéfice unitaire** (*problème de maximisation*),

$$[c_i = \text{coût unitaire}].$$

On obtient alors, l'expression de la fonction objectif à optimiser (Maximiser ou Minimiser).

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$$

Les étapes de la modélisation linéaire

Etape 4 : Elaboration du modéle linéaire final :

Il s'agit d'expliciter le modèle linéaire à résoudre sous sa forme finale.

$$\begin{cases} maxZ = c_1x1 + c_2x_2 + ... & + & c_nx_n \\ Sujet\ à & & \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & \leq & b_1(ou \geq b_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & \leq & b_2(ou \geq b_2) \\ .... & & \\ a_{n1}x_1 + an2x_2 + ... + a_{1n}x_n & \leq & b_n(ou \geq b_n) \\ x_1 \geq; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; & ..... & x_n \geq 0 \end{cases}$$

Exemple d'application

Enoncé : *Une entreprise fabrique deux types de produits "A" et "B", en utilisant deux machines M_1 et M_2. Pour être fabriqué, le produit "A" a besoin d'une heure de fonctionnement de M_1 et 2 heures de fonctionnement de la machine M_2. Et le produit "B" a besoin de 2 heures de M_1 et 3 heures de M_2. La machine M_1 ne peut pas fonctionner plus que 10 heures par jour et la machine M_2 ne dépasse pas 15 heures par jour.*
La marge unitaire du produit "A" est 50 MAD, et celle de "B" est 75 MAD.

Question : *Combien d'unité de produits "A" et "B" doit produire la société pour maximiser le profit ?*

Exemple d'application - Modélisation

- Etape 1 : Déclaration des variables de décision :

$$\begin{cases} x_1\text{: Le nombre d'unité du produit A à fabriquer} \\ x_2\text{: Le nombre d'unité du produit B à fabriquer} \end{cases}$$

- Etape 2 : Déclaration des contraintes liées au modèle :

- Contraintes techniques (liées à la machine) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$

- Contraintes de positivité : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

- Etape 3 : Déterminer la fonction objectif :

D'après l'énoncé le bénéfice unitaire du produit A est 50 MAD et celui de B est 75 MAD, alors nous formulons la fonction objectif à maximiser suivante :

$$Z = 50x_1 + 75x_2$$

	x1	x2	Disponibilité
M1	*1*	*2*	*10*
M2	*2*	*3*	*15*
Profit unitaire	*50*	*75*	----

- Etape 4 : Elaboration du modèle :

Le modèle linéaire lié au problème est donné par :

$$\begin{cases} maxZ & = & 50x_1 + 75x_2 \\ \text{Sujet à} & & \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\ x_1 \geq 0 & et & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exercice d'application 1 (Agriculteur)

Enoncé : *Un agriculteur souhaite que son troupeau cosomme la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs A, B et C. Les exigences quotidiennes minimales sont de 16 pour A, 12 pour B et 18 pour C. L'agriculteur achète deux types d'aliments P et Q.*

Données :

- Une unité de P comprend 2 unités de A, 1 unité de B et 1 unité de C ; et elle coute 20 dhs.
- Une unité de Q comprend 1 unités de A, 1 unité de B et 3 unité de C ; et elle coute 40 dhs.

Question : *Qu'elle est la combinaison la moins couteuse des quantités de P et Q qui respectera l'exigence de consommation minimale d'élement nutritifs ?*

Exercice d'application (Production de peinture)

Enoncé : *Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M_1 et M_2.*

Données :

	Quantité utilisée par tonne Extérieure	Quantité utilisée par tonne Intérieure	Quantité disponible par jour
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires :
– Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.
– La production en peinture d'intérieur ne dépasser au maximum que d'une tonne celle d'extérieur.

Question : *Combien de tonnes de peinture d'intérieur et d'extérieur, doit la société produire, par jour, pour maximiser son bénéfice ?*