Chapitre III :
Résolution par la méthode simplexe

Introduction et Motivation

Les limites de la méthode graphique

- En présence de trois variables, nous devons faire appel à une représentation graphique dans l'espace ;
- Quand le nombre des contraintes est grand, la méthode graphique s'avère de plus en plus difficile à mettre en œuvre ;
- Dans la pratique, les programmes linéaires comportent plusieurs dizaines de variables et de contraintes.

Introduction et Motivation

Méthode de Gauss

Dans le cas d'un d'un problème avec un nombre de variable supérieur à 2, on doit utiliser une méthode algébrique basée sur la simulation d'un algorithme qui nous permet de faire un balayage virtuel des solutions remarquables (sommets de la région réalisable), susceptible d'être des solutions optimales. Un tel algorithme est appelé **Algorithme du Simplexe** qui est basé sur le calcul de pivotage de Gauss.

Forme canonique et standard d'un modèle linéaire

Définition 3 (Forme canonique) : Un programme linéaire est dit en **forme canonique** s'il est formulé sous la forme d'un problème de **maximisation**, sous des **contraintes d'inégalités** ($Ax \leq b$), et avec des **variables non négatives** ($x \geq 0$).

Définition 4 (Forme standard) : Un programme linéaire est dit en **forme standard** s'il est formulé sous la forme d'un problème de **maximisation** (ou transformable en maximisation), sous des **contraintes d'égalité** ($Ax = b$), et avec des **variables non négatives** ($x \geq 0$).

Exemple

Forme Canonique du problème précédent :

$$\begin{cases} maxZ & = & 50x_1 + 75x_2 \\ \text{Sujet à} & & \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 15 \\ x_1 \geq 0 & et & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forme Standard du problème précédent :

$$\begin{cases} maxZ & = & 50x_1 + 75x_2 \\ \text{Sujet à} & & \\ x_1 + 2x_2 + e_1 & = & 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 & = & 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, & e_1 \geq 0 & \text{et } e_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les étapes de l'algorithme du Simplexe

Étape 1. Initialisation

- Écrire le programme linéaire sous standard : Ajouter les variables d'écart.
- Définir une solution de base de départ ; préciser les variables de base et les variables hors base de cette solution. Généralement, les variables d'écart sont pris comme variables de base et les variables de décision comme variables hors base.

Étape 2. Test d'optimalité Une solution de base est optimale si tous les coefficients de la fonction objectif des variables hors base sans **négatifs ou nuls**.

Étape 3. Changement de base
Choix de la variable entrante :

- Exprimer la fonction objectif z en fonction des seules variables hors base. Puis choisir comme variable entrante la variable hors base affectée du **coefficient positif le plus élevé**.
- Si tous les coefficients de z sont négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête. La solution courante est optimale.

Choix de la variable sortante :

- La variable de sortie est choisie comme étant la variable de base avec **le plus petit rapport positif** entre la colonne des contraintes et la colonne correspondante à la variable d'entrée.

Exemple de base

Considérons le Programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} maxZ & = & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujet à} & & \\ x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 9 \\ x_1 \geq 0 & et & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Déterminant alors la solution optimale associés en utilisant **la méthode du Simplexe**.

Etape 1 : Ecrire le modèle sous sa **forme standard.**

Le Programme linéaire sous forme standard :

$$\begin{cases} maxZ & = & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujet à} & & \\ x_1 + x_2 + e_1 & = & 7 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 & = & 9 \\ x_1 \geq 0 & et & x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solution initiale : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $e_1 = 7$ et $e_2 = 9$ Avec :

$$\begin{cases} x_1 \text{ et } x_2 & \text{Variables hors base} \\ e_1 \text{ et } e_2 & \text{Variables de base} \end{cases}$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	Contraintes	Rapport
e_1	1	1	1	0	7	
e_2	2	1	0	1	9	
Z	3	2	0	0	0	

Question : Peut on améliorer la fonction objectif Z ?

Réponse : Oui. Car les coefficients de la fonction Z ne sont pas tous négatifs ou nuls.

	x_1	x_2	e_1	e_2	Contraintes	Rapport
e_1	**1**	**1**	**1**	**0**	**7**	7
e_2	**2** *Pivot*	**1**	**0**	**1**	**9**	$\frac{9}{2} = 4.5$
Z	**3**	**2**	**0**	**0**	**0**	

Le choix du pivot :

1. **Choix de la colonne du pivot :** On choisit le coefficient de Z le plus positif.
2. **Choix de la ligne du pivot :** On calcule les rapports (contraintes/colonne pivot) On choisit le plus petit rapport positif.

- **On divise** la ligne du pivot **par le pivot**.
- Dans la colonne du pivot tout les éléments à part le pivot **seront nuls**.
- On applique **la méthode du rectangle** pour les autres cases.

	x_1	x_2	e_1	e_2	Contraintes	Rapport
e_1	1 − 1 ×	1	1	0	7	7
e_2	2 ÷	1	0	1	9	9/2
Z	3	2	0	0	0	

A part le pivot c'est 0

On divise la ligne le pivot

Question : Peut on améliorer la fonction objectif Z ?
Réponse : Oui. Car les coefficients de la fonction Z ne sont pas tous négatifs ou nuls.

	x_1	x_2	e_1	e_2	Contraintes	Rapport
e_1	0	$\frac{1}{2}$ Pivot	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{5}{2}$	5
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	9
Z	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-27}{2}$	

	x_1	x_2	e_1	e_2	Contraintes	Rapport
x_2	0	1	2	-1	5	
x_1	1	0	-1	1	2	
Z	0	0	-1	-1	-16	

Question : Peut on améliorer la fonction objectif Z ?
Réponse : Non. Car tout les coefficients de la fonction Z sont négatifs.

$\rightarrow$ **La fin de l'algorithme.**

La solution optimale est $(x_1; x_2) = (2; 5)\,;\; Z = 16$

Avec $e_1 = 0$ et $e_2 = 0$ il n'y a pas d'écart ! Les ressources sont consommés totalement.

Exercice d'application

On considère le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max\ z = 300x_1 + 500x_2 & \\ x_1 \leqslant 4 & (1) \\ 2x_2 \leqslant 12 & (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 & (3) \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 & (4) \end{cases}$$

Déterminer la solution optimale on utilisant la méthode Simplexe.