Introduction aux Arbres de Décision
Rappel : Indice de Gini
Exemple : Deux Attributs
Conclusion
Apprentissage par Ensemble : Random Forest
Conclusion sur les Random Forests
Exercice d'Application : Construction d'une Forêt Aléa

Chapitre III : Arbres de Décision et Forêts Aléatoires

I : Arbres de Décision - Indice de Gini

Arbres de Décision : Une Approche de Classification Supervisée

Définition : Les **arbres de décision** sont des modèles d'apprentissage supervisé permettant de prédire une valeur cible en appliquant une séquence de tests sur les attributs des données.

- Ils sont particulièrement utilisés en **classification**, où ils attribuent une classe à une observation en suivant un chemin dans l'arbre.
- Ils sont également adaptés à la **régression**, où ils prédisent une valeur numérique en moyenne sur les feuilles.
- L'apprentissage se fait en construisant un arbre qui divise les données de manière optimale en minimisant l'impureté (ex. Indice de Gini ou Entropie).

Types de Problèmes : Classification et Régression

Arbres de Décision :

- **Classification supervisée** :
  - Les classes sont qualitatives (exemple : Oui/Non, chat/chien, ...).
  - Les feuilles de l'arbre indiquent la classe la plus probable.
- **Régression supervisée** :
  - La sortie est une variable numérique (exemple : un prix, un salaire, ...).
  - Les feuilles indiquent en général la *moyenne* des valeurs de la cible.

Méthode Générale

Quel que soit le type (classification ou régression), l'arbre effectue des **tests sur les attributs** successifs pour partitionner au mieux les données, jusqu'à aboutir à des **feuilles cohérentes**.

Qu'est-ce qu'un Arbre de Décision ?

Définition :

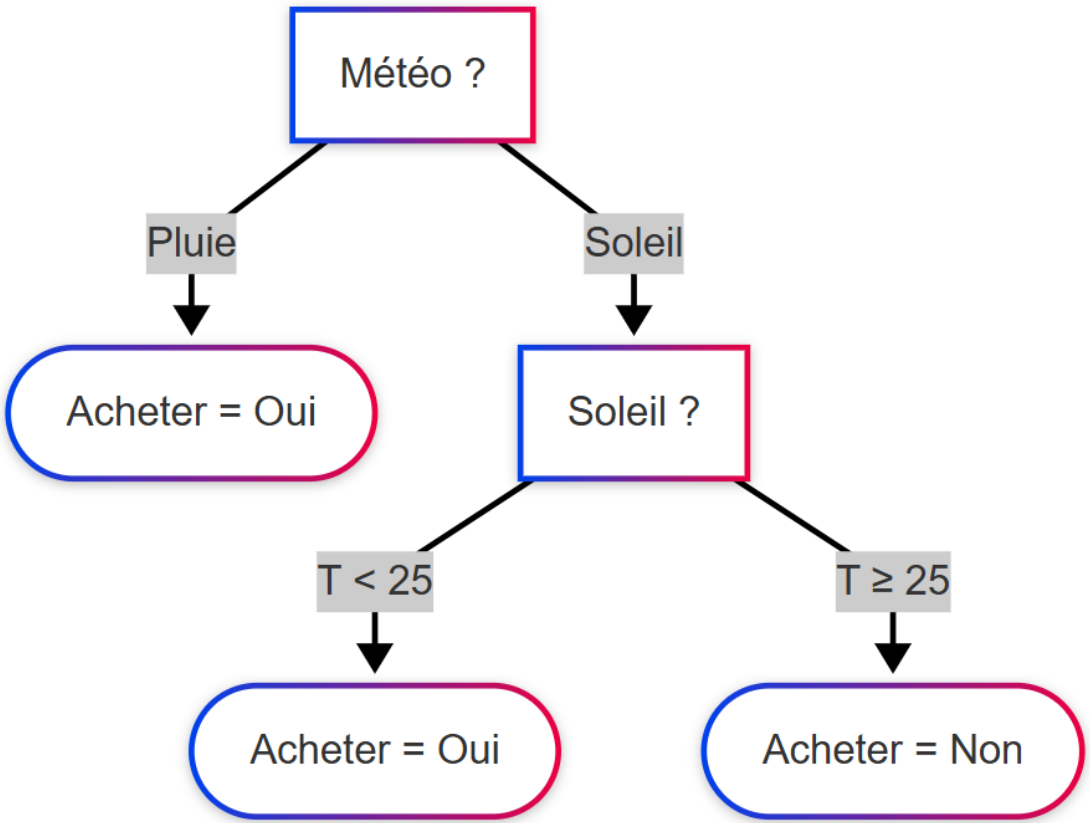
- Un **arbre de décision** est une structure en forme d'arbre où chaque **nœud** représente un **test** sur un attribut (par exemple, Météo=Pluie ?).
- Chaque **branche** correspond à un résultat possible de ce test (oui, non, ou d'autres valeurs).
- Les **feuilles** indiquent la décision finale ou la classe prédite (par exemple, "Acheter=Oui").

Caractéristiques principales

- **Facile à interpréter** : la décision se lit depuis la racine jusqu'à la feuille.
- **Gère** aussi bien des attributs numériques que qualitatifs.

Arbre de Décision : Acheter ou non un parapluie

Exemple :



L'Indice de Gini : Détails et Sélection d'Attribut

Définition : L'Indice de Gini mesure l'**impureté** d'un ensemble de données S.

$$Gini(S) = 1 - \sum_{i=1}^{C} (p_i)^2$$

- S : ensemble d'exemples.
- C : nombre de classes (ex. Oui / Non).
- p_i : proportion d'exemples de la classe i dans S.

Interprétation

Plus le Gini est **faible**, plus l'ensemble est **pur** (c.-à-d. dominé par une seule classe).

Calcul de l'indice $Gini_{après}$ d'un attribut A :

$$Gini_{\text{après}}(A) = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{|S_k|}{|S|} \times Gini(S_k) \right)$$

- S_k : sous-ensemble des données où la valeur de l'attribut A prend une certaine modalité (ou se trouve dans un certain intervalle).
- $|S_k|$: nombre d'exemples dans le sous-ensemble S_k.

Gain de Gini :

$$\text{Gain}(A) = Gini(S) \; - \; Gini_{\text{après}}(A)$$

Quand choisir l'attribut ?

On choisit l'attribut A qui **maximise le Gain de Gini**, c'est-à-dire celui qui **réduit le plus l'impureté**.

Exemple : Prédire "Acheter un Parapluie" ?

Données (8 exemples, 2 attributs) :

Météo	**Température (°C)**	**Acheter ? (Oui/Non)**
Soleil	35	Non
Soleil	28	Non
Soleil	20	Oui
Pluie	18	Oui
Pluie	22	Oui
Nuage	19	Oui
Pluie	16	Oui
Nuage	25	Non

- **Attributs** :
  - **Météo** : {Soleil, Pluie, Nuage}
  - **Température** : valeur numérique (de 16° à 35°, ici).
- **Classe** : Acheter *Parapluie* ? (Oui ou Non).

Étape 1 : Gini de l'Ensemble Global

Total : 8 exemples

$$\text{Classe Oui} = 5 \quad (\text{Soleil} : 1, \text{Pluie} : 3, \text{Nuage} : 1)$$

$$\text{Classe Non} = 3 \quad (\text{Soleil} : 2, \text{Nuage} : 1)$$

$$p(\text{Oui}) = \frac{5}{8} = 0.625, \quad p(\text{Non}) = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$Gini(S) = 1 - \left(0.625^2 + 0.375^2\right) = 0.46875$$

Impureté initiale

Le Gini vaut ≈ 0.47. Nous devons **réduire** cette impureté en choisissant un bon attribut.

Étape 2 : Division par la Météo (1/2)

Sous-ensembles :

- **Soleil** (3 exemples) :

$$\{(35, Non), (28, Non), (20, Oui)\} \Rightarrow 2 \text{ Non}, 1 \text{ Oui}$$

- **Pluie** (3 exemples) :

$$\{(18, Oui), (22, Oui), (16, Oui)\} \Rightarrow 3 \text{ Oui}, 0 \text{ Non}$$

- **Nuage** (2 exemples) :

$$\{(19, Oui), (25, Non)\} \Rightarrow 1 \text{ Oui}, 1 \text{ Non}$$

Étape 2 : Division par la Météo (2/2)

Calcul des Gini de chaque sous-ensemble de l'attribut Météo :

$$Gini(\text{Soleil}) = 1 - \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right) = 1 - (0.11 + 0.44) = 0.45$$

$$Gini(\text{Pluie}) = 1 - (1^2 + 0^2) = 0$$

$$Gini(\text{Nuage}) = 1 - \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right) = 1 - (0.25 + 0.25) = 0.5$$

$$\boxed{Gini_{\text{après}}(\text{Météo}) = \frac{3}{8} \times 0.45 + \frac{3}{8} \times 0 + \frac{2}{8} \times 0.5 = 0.29375}$$

Gain(Météo) = 0.46875 - 0.29375 = 0.175

Conclusion : Le Gini baisse à ≈ 0.29. Le gain est de 0.175.

Étape 3 : Division par la Température (1/2)

Testons un seuil **Température** < 21, on aura deux groupes S_1 et S_2 :

$$S_1 = \{(Soleil, 20, Oui), (Pluie, 18, Oui), (Pluie, 16, Oui), (Nuage, 19, Oui)\}$$

$$S_2 = \{(Soleil, 35, Non), (Soleil, 28, Non), (Pluie, 22, Oui), (Nuage, 25, Non)\}$$

Étape 3 : Division par la Température (2/2)

$$Gini(S_1) = 1 - \left(\left(\frac{4}{4}\right)^2 + \left(\frac{0}{4}\right)^2\right) = 0$$

$$Gini(S_2) = 1 - \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 0.375$$

$$\boxed{Gini_{\text{après}}(\text{Temp}) = \frac{4}{8} \times 0.375 + \frac{4}{8} \times 0 = 0.1875}$$

Gain(Temp<21) = 0.46875 - 0.1875 = 0.2812

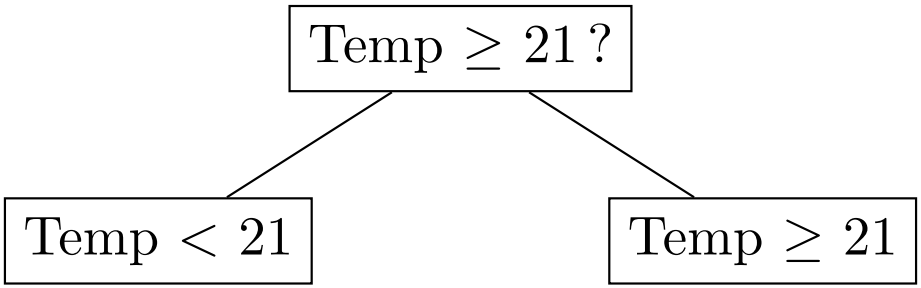
Conclusion : Le gain est plus grand (0.2812) qu'avec Météo (0.175).

Meilleur attribut pour la racine

$$\textbf{Gain(Mété)} = 0.175, \quad \textbf{Gain(Temp<21) = 0.2812}$$

Décision

Température maximise le gain en Gini : c'est donc l'attribut choisi pour la **racine** de l'arbre.



Branche "temp < 21"

- $\mathbf{S_1}$ (temp < 21) :

  $\{(\text{Soleil}, 20, \mathit{Oui}), (\text{Pluie}, 18, \mathit{Oui}), (\text{Pluie}, 16, \mathit{Oui}), (\text{Nuage}, 19, \mathit{Oui})\}$

  $\Rightarrow 100\,\%$ «Oui» $\Rightarrow$ Feuille = «Oui».

$$\mathit{Gini}(S_1) = 1 - \left(\left(\tfrac{4}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{0}{4}\right)^2\right) = 0$$

Remarque

Les feuilles pures, pas besoin de séparation par Météo !

Branche "temp ≥ 21"

$\mathbf{S_2}$ (temp ≥ 21) :

$\{(\text{Soleil}, 35, Non), (\text{Soleil}, 28, Non), (\text{Pluie}, 22, Oui), (\text{Nuage}, 25, Non)\}$

$$Gini(S_2) = 1 - \left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right) = 0.375$$

Remarque

On doit **poursuivre** la séparation par la Météo.

Branche «temp ≥ 21» : séparation par Météo

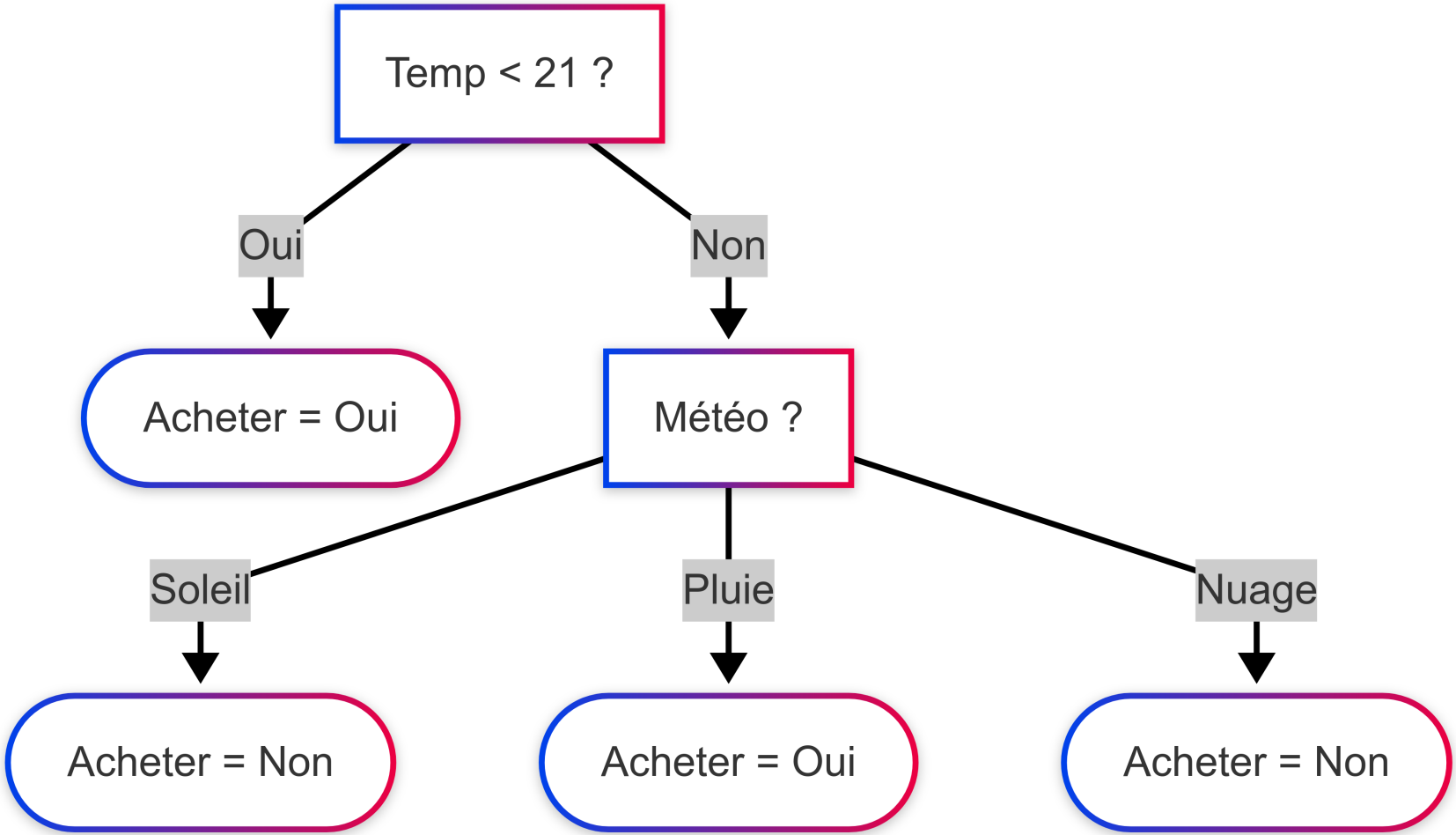
S_2 contient 4 exemples :

$(\text{Soleil}, 35, Non),\ (\text{Soleil}, 28, Non),\ (\text{Pluie}, 22, Oui),\ (\text{Nuage}, 25, Non).$

Test Météo :

- Soleil : 2 exemples → 2 Non ⇒ Gini=0, Feuille=«Non».
- Pluie : 1 exemple → 1 Oui ⇒ Gini=0, Feuille=«Oui».
- Nuage : 1 exemple → 1 Non ⇒ Gini=0, Feuille=«Non».

Arbre de Décision Final



Conclusion

- Les **arbres de décision** classent en testant successivement les attributs (Météo, Température, etc.).
- L'**Indice de Gini** mesure la pureté : on choisit à chaque nœud l'attribut qui **réduit** le plus l'impureté (maximisation du gain).
- Lorsque toutes les données d'une branche appartiennent à la même classe (Gini=0), on obtient une **feuille** et on arrête la division.

Bilan de cet exemple :

- La température est le premier attribut choisi (meilleur gain).
- Météo affine la séparation dans la branche "temp ≥ 21".

Exercice : Construire un Arbre de Décision

Objectif : Construire un arbre de décision basé sur un jeu de données simplifié en utilisant l'**indice de Gini** pour choisir les meilleurs attributs de séparation.

Données :

Temps	**Vent**	**Sortie Vélo ?**
Ensoleillé	Faible	Oui
Nuageux	Fort	Non
Pluie	Faible	Oui
Pluie	Fort	Non
Nuageux	Faible	Oui
Ensoleillé	Fort	Oui
Ensoleillé	Faible	Oui
Pluie	Fort	Non

Table – Données d'observation météo et décision de sortie en vélo