

現代控制理論 HW3

104303206 黃筱晴

1.

學號1+0+4+3+0+3+2+0+6=19, $a=1, b=9$ 。(好像沒用到@@?)

(a)

明顯(0,0)是個平衡點，在這點 x_{dot} 為零。

$$\begin{aligned}\Delta x_{1_dot} &= (-12x_1^2 - x_2^2 + 4) \Delta x_1 + (1 - 2x_1x_2) \Delta x_2 \\ &= 4\Delta x_1 + \Delta x_2 \quad (\text{當 } x \text{ 趨近 } (0,0))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta x_{2_dot} &= (-1 - 8x_1x_2) \Delta x_1 + (-4x_1^2 - 3x_2^2 + 4) \Delta x_2 \\ &= -1\Delta x_1 + 4\Delta x_2 \quad (\text{當 } x \text{ 趨近 } (0,0))\end{aligned}$$

$$\Delta x_{\text{dot}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Delta x$$

$\Phi(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 17$ ，存在位於右半平面的特徵值，local unstable。

(b)

$$\text{令 } V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\begin{aligned}V_{\text{dot}}(x) &= x_1x_{1_dot} + x_2x_{2_dot} \\ &= -(x_1^2 + x_2^2)(4x_1^2 + x_2^2 - 4)\end{aligned}$$

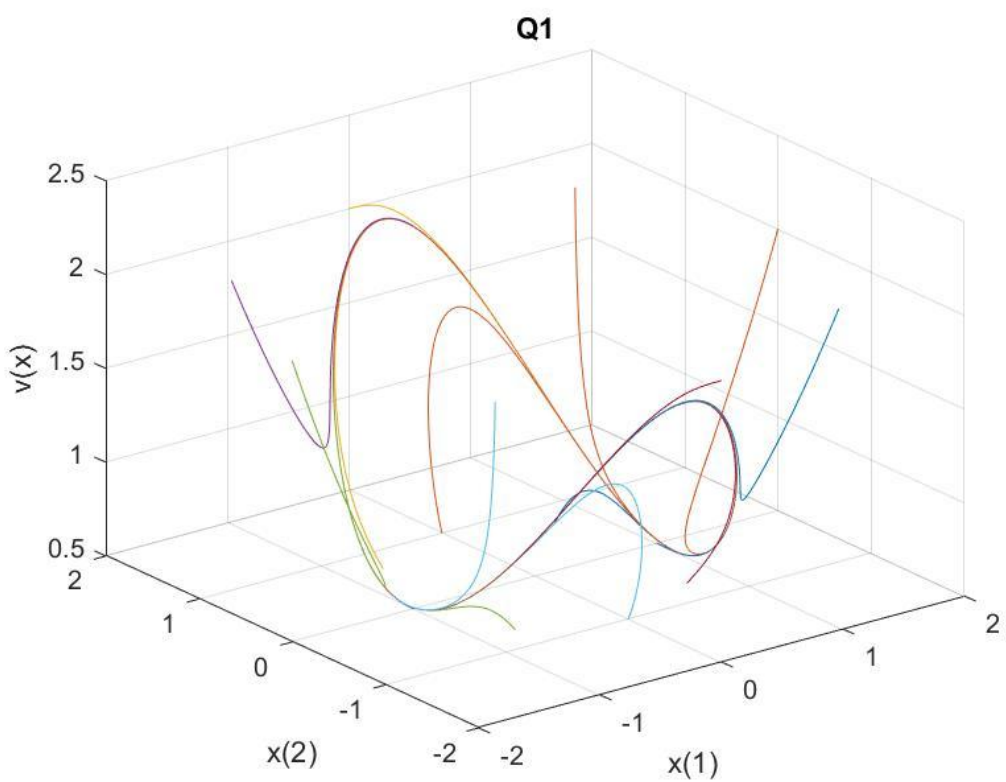
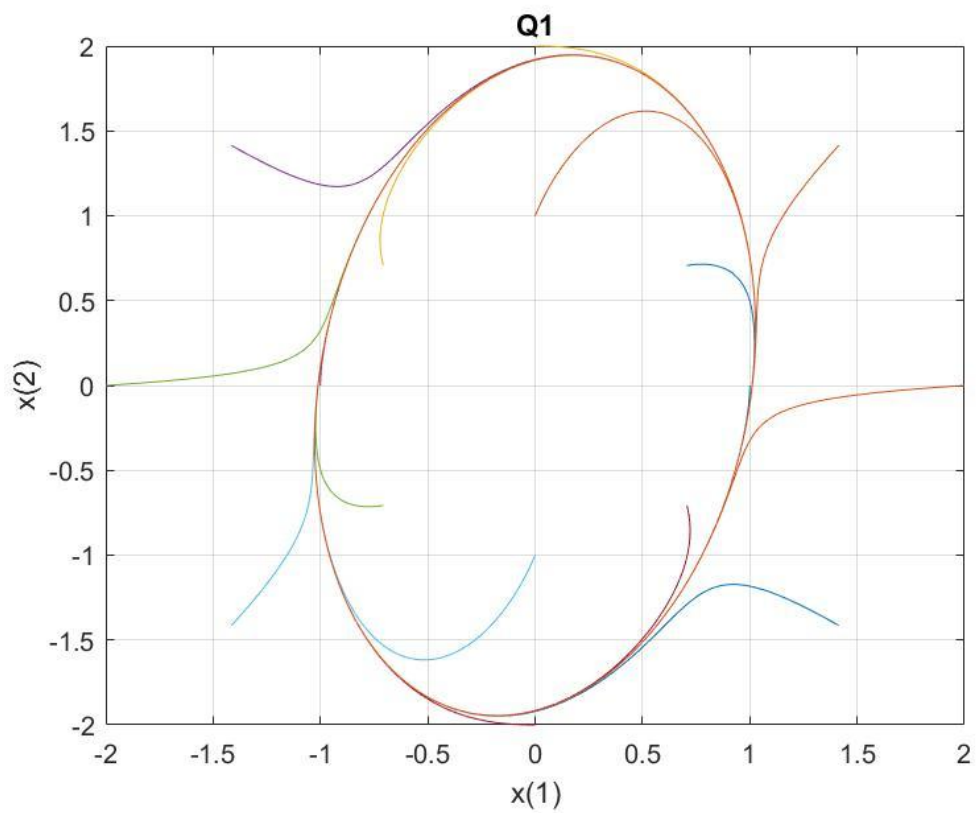
當 $(4x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0$ 時， V_{dot} 為零，為limit cycle。(橢圓形)

(c)

在limit cycle內 $(4x_1^2 + x_2^2 - 4 < 0)$ ， $V_{\text{dot}}(x) > 0$ ，不穩定。

在limit cycle外 $(4x_1^2 + x_2^2 - 4 > 0)$ ， $V_{\text{dot}}(x)$ 恆負，為Lyapunov穩定。

(d)



16 種初始值 $X_0 = [\cos\theta, \sin\theta]^T \cdot r$, θ 分別為: $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$ 。 r 為 1, 2。

2.

(1)

$$V=0.5(x_1^2+x_2^2)^2$$

$$\dot{V}$$

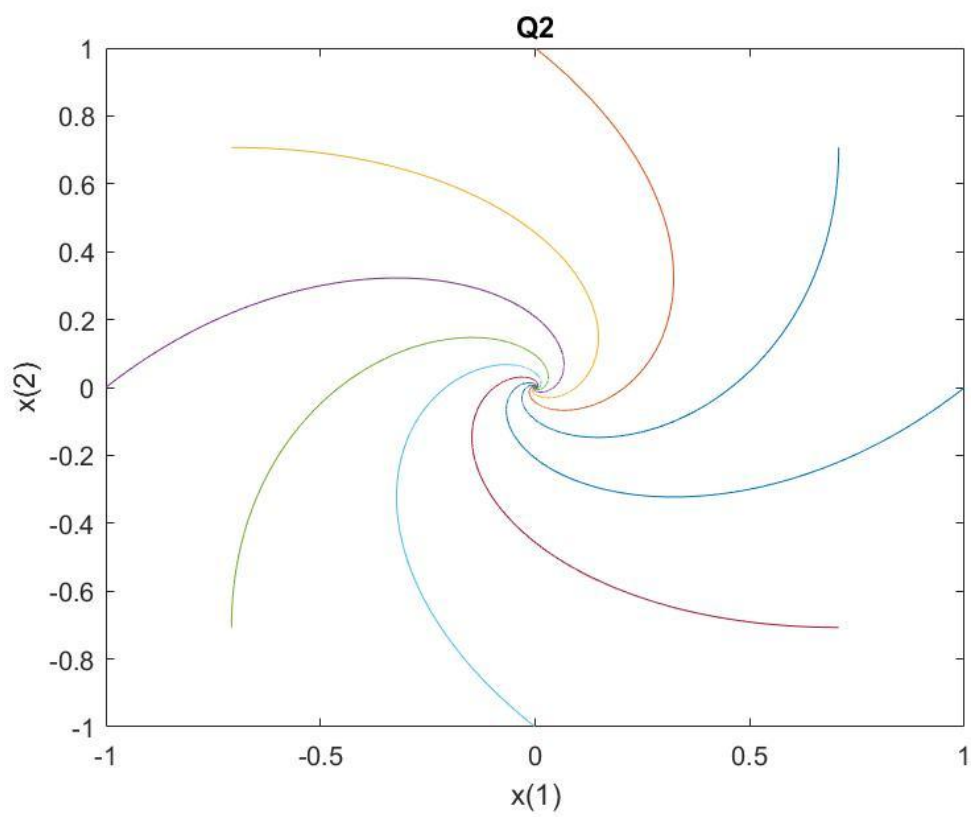
$$=x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$=x_1 x_2 - x_1^2(4x_1^2+x_2^2-4) + u x_1 - x_1 x_2 - x_2^2(4x_1^2+x_2^2-4) + u x_2$$

$$=-(4x_1^2+x_2^2-4)(x_1^2+x_2^2) + u(x_1^2+x_2^2)$$

設計 $u=(4x_1^2+x_2^2-4)-1$ 使 \dot{V} 恆為負

(2)



初始值 $X_0 = [\cos\theta, \sin\theta]^T$, θ 分別為： $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$ 。

Matlab code for Q1:

```
clear;clc;
num=8;
v=zeros(10000,3);
for n=1:2 %x(0) inside or outside of the limit cycle
    for j=1:num % 8 kinds of x(0)
        theta=j*(2*pi/num);
        x1array(1)=real(n*exp(1i*theta));
        x2array(1)=imag(n*exp(1i*theta));
    end
    for i=1:10000-1
        x(1)=x1array(i); x(2)=x2array(i);
        v(i)=0.5*(x(1)*x(1)+x(2)*x(2)); %v(x1,x2)=0.5(x1^2+x2^2)
        x1dot=x(2)-(4*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-4)*x(1);
        x2dot=-x(1)-(4*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-4)*x(2);
        x1array(i+1)=x(1)+x1dot*0.001;
        x2array(i+1)=x(2)+x2dot*0.001;
    end
end

xlabel('x(1)');
ylabel('x(2)');
zlabel('v(x)');
time=1:10000-1;
xt=x1array(time);
yt=x2array(time);
zt=v(time);
plot3(xt,yt,zt);
grid on;
title('Q1');
hold on;
end
end
```

Matlab code for Q2:

```
clear;clc;
num=8;
for j=1:num
    theta=j*(2*pi/num);
    x1array(1)=real(1*exp(1i*theta));
    x2array(1)=imag(1*exp(1i*theta));
    
    for i=1:10000
        x(1)=x1array(i); x(2)=x2array(i);
        u=((4*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-4)-1);
        x1dot=x(2)-(4*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-4)*x(1)+u*x(1);
        x2dot=-x(1)-(4*x(1)*x(1)+x(2)*x(2)-4)*x(2)+u*x(2);
        x1array(i+1)=x(1)+x1dot*0.001;
        x2array(i+1)=x(2)+x2dot*0.001;
    end
    
    xlabel('x(1)');
    ylabel('x(2)');
    plot(x1array,x2array);
    title('Q2');
    hold on;
end
```