現代控制理論 HW2

104303206 黃筱晴

1.

學號1+0+4+3+0+3+2+0+6=19,　a=1,b=9。

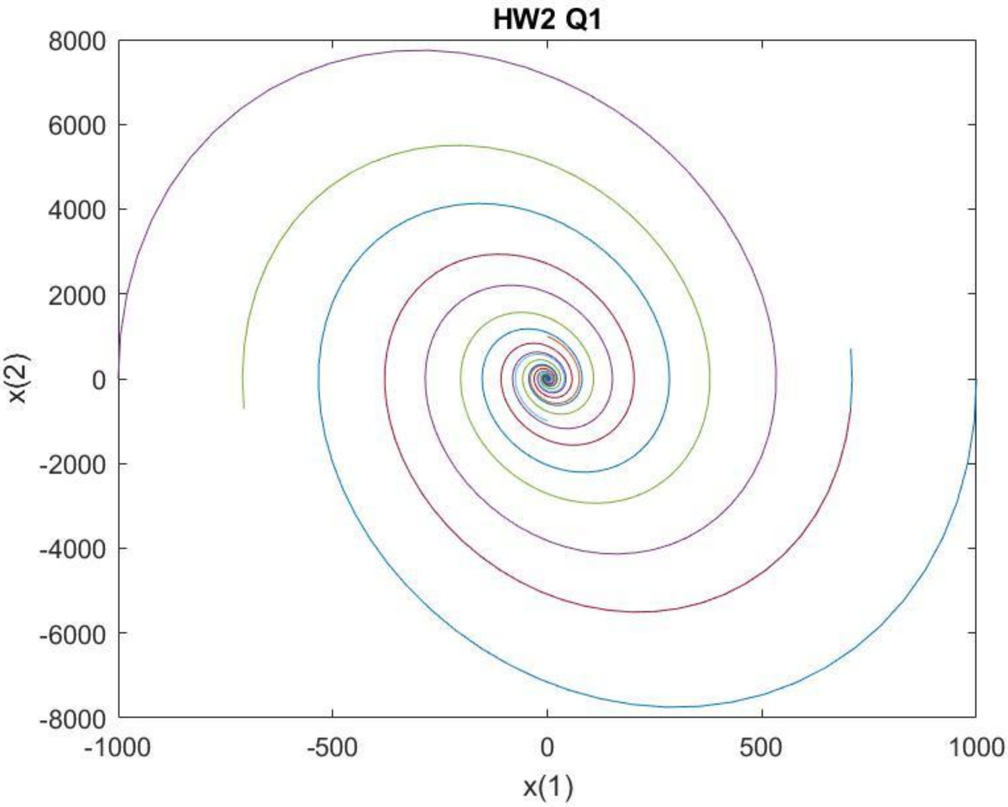
目標極點位置: -2±10j

A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,令K=[k_1　k_2]

det($\lambda I-(A-BK)$)=det($\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1+k\_1 & \lambda-9+k\_2 \end{bmatrix}$)=$\lambda^2$+(-9+k_2)λ +(1+k_1)

λ^2+(-9+k_2)λ +(1+k_1)=λ ^2+4λ +104，經比較係數得k_1=103,k_2=13。

使用HW1的程式模擬結果：



初始值 X_0 = [cosθ , sinθ]*1000，θ 分別為：0,π /4, π /2, 3π /4, π , 5π /4, 3π /2, 7π /4。

2.

目標極點位置: -2,-3,-4。 $(s+2)(s+3)(s+4)=s^3+9s^2+26s+24$

$G(s)=\frac{s-4}{s^2-2s+9}\equiv\frac{B(s)}{A(s)}$。

設計$C(s)=\frac{Q(s)}{R(s)}$使轉移函數$T(s)=\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}=\frac{\frac{Q}{R}*\frac{B}{A}}{1+\frac{Q}{R}*\frac{B}{A}}=\frac{Q(s)B(s)}{R(s)A(s)+Q(s)B(s)}$,

其中$R(s)A(s)+Q(s)B(s)= s^3+9s^2+26s+24$

令$R(s)=s+r_0$,$Q(s)=q_1s+q_0$,經比較係數得$r_0=\frac{268}{17}$,$q_0=\frac{501}{17}$,$q_1=\frac{-81}{17}$

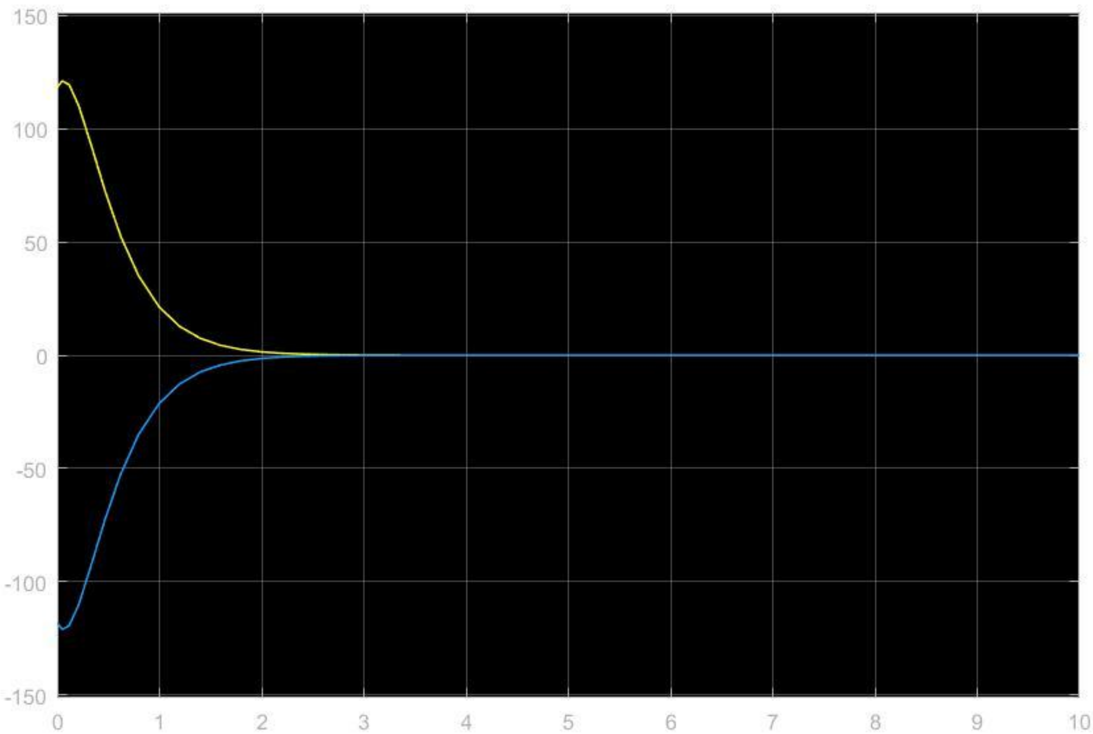
$T(s)=\frac{-4.7647s^2+48.5294s-117.8824}{s\hat{}3+9s\hat{}2+26s+24}$

以相位變數表示，選擇輸出y(t)和其各階微分項為狀態變數。

$$\begin{bmatrix} x1\_dot \\ x2\_dot \\ x3\_dot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix} -117.8824 & 48.5294 & -4.7647 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

使用simulink模擬結果：



兩個初值分別為$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

3.

A=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$,B=$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,Q=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,R=1,令P=$\begin{bmatrix} P11 & P12 \\ P12 & P22 \end{bmatrix}$

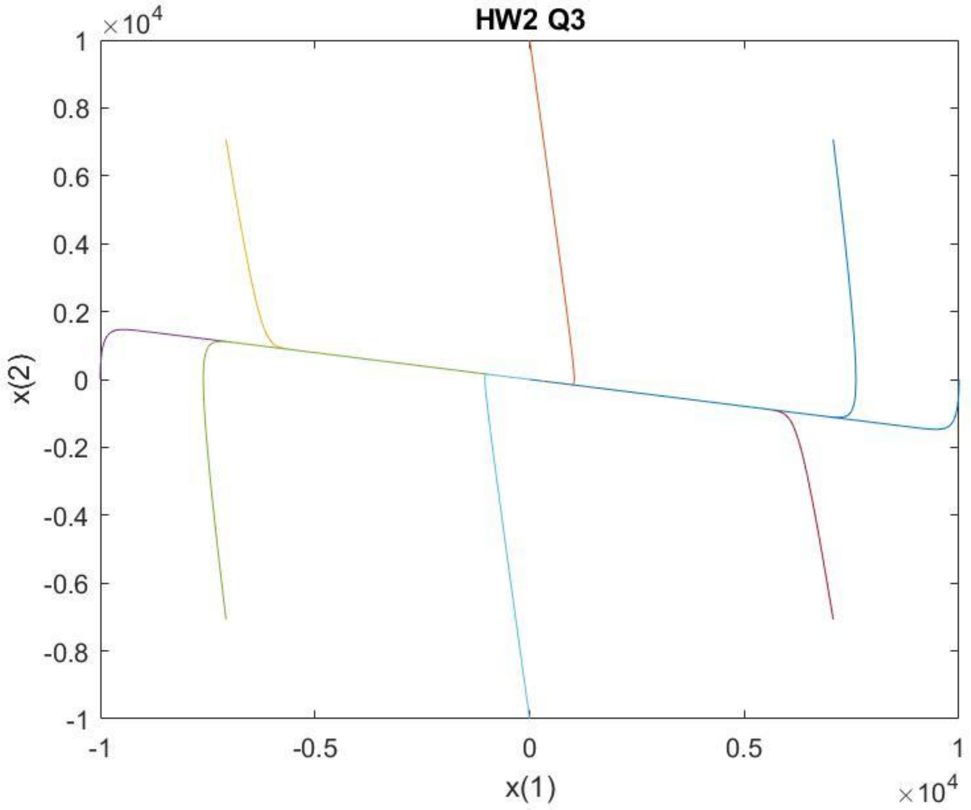
帶入Riccati equ.

$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$

解得 P_{11}= 21.8708,P_{12}=0.4142,P_{22}=18.1010

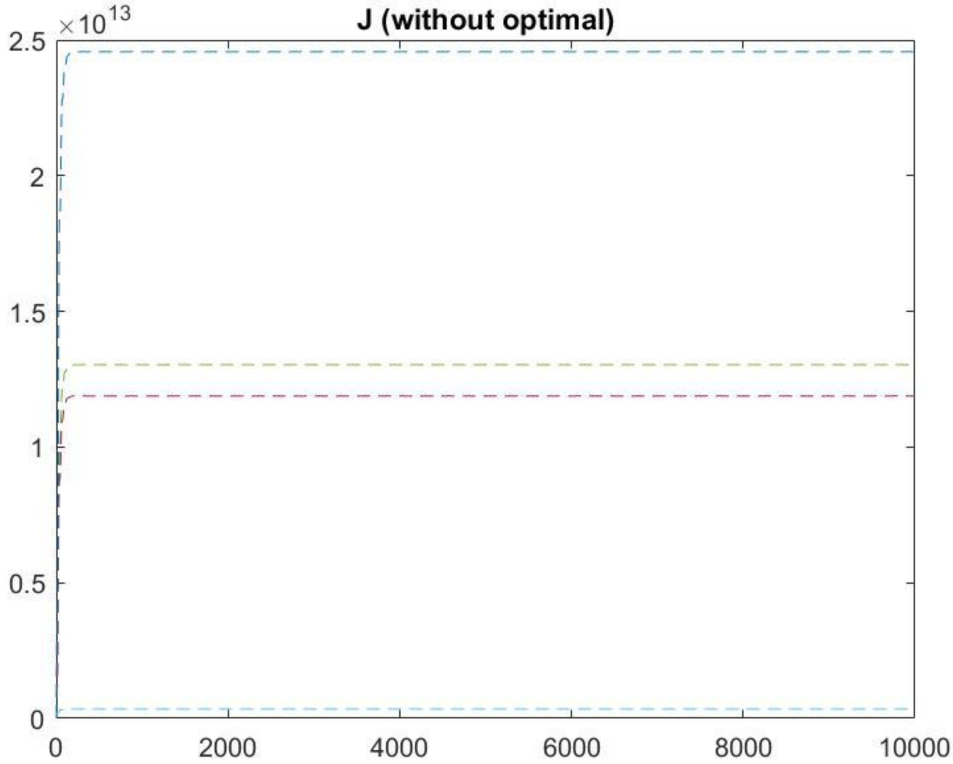
K_optimal=$R^{-1}B^TP$=[0.4142 18.1010]

使用和第一題相同的程式模擬一下，不同初值皆收斂到原點，系統穩定。

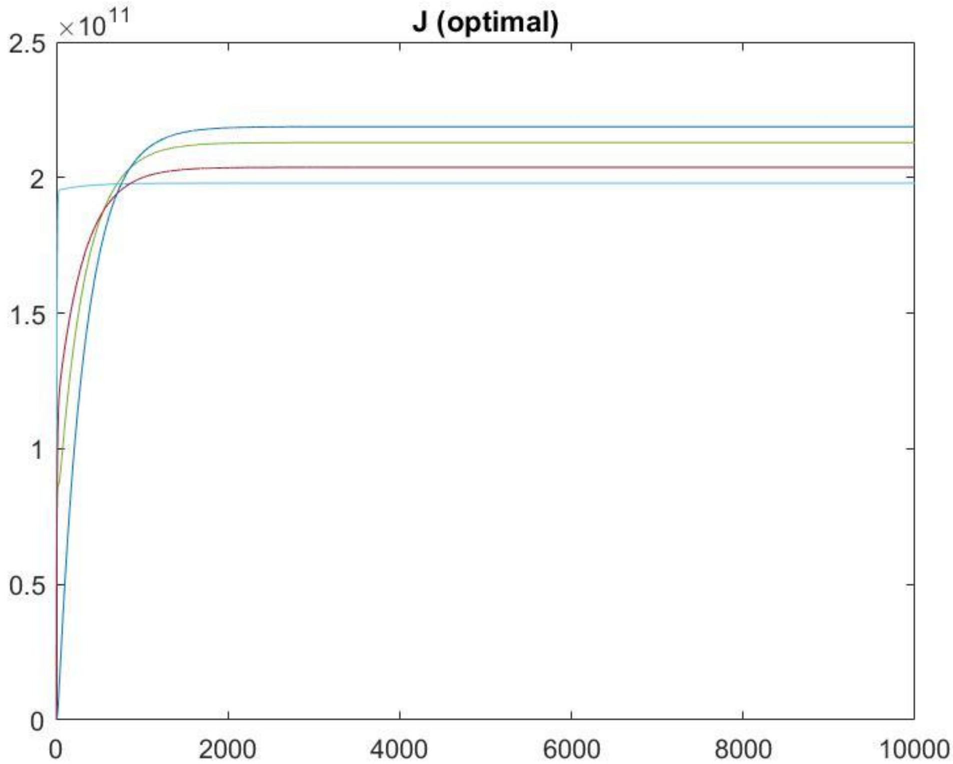


初始值 X_0 = [cosθ , sinθ]*1000，θ 分別為：0,π /4, π /2, 3π /4, π , 5π /4, 3π /2, 7π /4。

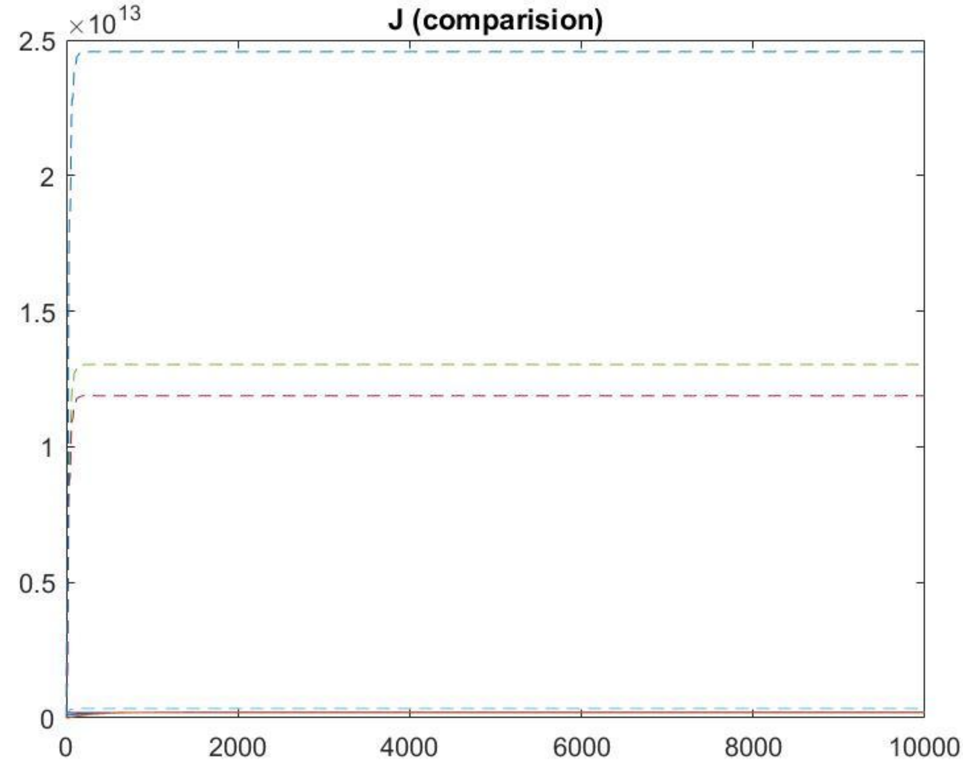
接著討論成本函數，J = int_0^inf (x’ *Q*x + u*R*u) dt，Q= I, R=1。
第一題算出之K，在不同初值下的之成本變化。



最佳化的K，在不同初值下的之成本變化。



將以上兩張圖畫成一張做比較，最佳化控制器(實線)的成本遠低於另一個(虛線)，在圖中幾乎看不到了。



第三題J函數程式碼：

```
clear;clc;
A=[0 1;-1 9];%ID:104303206 ----> a=1,b=9
B=[0;1];
Q=[1 0;0 1];
R=1;
[K_optimal,P]=lqr(A,B,Q,R);
num=8;theta=pi/4; %different initial condition
datasize=10000;
J(num,datasize)=zeros;%init.

for k=1:2
    if k==1
        K=[103 13];%the ans of Q1
    else
        K=K_optimal;
    end
    A_=A-B*K;%feedback control
    
    for j=1:num %different initial condition
        theta=j*(2*pi/num);
        x1array(1)=real(datasize*exp(1i*theta));
        x2array(1)=imag(datasize*exp(1i*theta));

        for i=1:(datasize-1) %simulation
            x(1)=x1array(i); x(2)=x2array(i);
            xNext=RungeKutta(x,0.01,A_);
            x1array(i+1)=xNext(1);
            x2array(i+1)=xNext(2);
            
            tmp=x*(Q+K'*R*K)*x';%J=int_0^inf( x'*Q*x+u*R*u)dt
            J(j,i+1)=J(j,i)+tmp;
        end

        if k==1
            plot(J(j,:),'--');%without optimal
        else
            plot(J(j,:));%optimal
```

```
        end
        hold on;
    end
    title('J (comparision)');
end
```

模擬程式碼(同HW1)：

```
clear;clc;
A=[0 1;-1 9];
B=[0;1];
Q=[1 0;0 1];
R=1;
[K_optimal,P]=lqr(A,B,Q,R);
A_=A-B*K_optimal;

num=8;theta=0; %total of the different kind of initial condition
datasize=10000;
for j=1:num
    theta=j*(2*pi/num);
    x1array(1)=real(datasize*exp(1i*theta));
    x2array(1)=imag(datasize*exp(1i*theta));

    for i=1:(datasize-1)
        x(1)=x1array(i); x(2)=x2array(i);
        xNext=RungeKutta(x,0.01,A_);
        x1array(i+1)=xNext(1);
        x2array(i+1)=xNext(2);
    end

    xlabel('x(1)');
    ylabel('x(2)');
    title('HW2 Q3');
    plot(x1array,x2array);
    hold on;
end
```

副函式(同HW1)：

```
function xNew=RungeKutta(x_0,delta,A)
k1=[0 0]';
k2=k1;k3=k1;k4=k1;tmp=k1;xNew=k1;

k1(1)=A(1,1)*x_0(1)+A(1,2)*x_0(2);
k1(2)=A(2,1)*x_0(1)+A(2,2)*x_0(2);
tmp(1)=x_0(1)+k1(1)*(delta/2);
tmp(2)=x_0(2)+k1(2)*(delta/2);
k2(1)=A(1,1)*tmp(1)+A(1,2)*tmp(2);
k2(2)=A(2,1)*tmp(1)+A(2,2)*tmp(2);
tmp(1)=x_0(1)+k2(1)*(delta/2);
tmp(2)=x_0(2)+k2(2)*(delta/2);
k3(1)=A(1,1)*tmp(1)+A(1,2)*tmp(2);
k3(2)=A(2,1)*tmp(1)+A(2,2)*tmp(2);
tmp(1)=x_0(1)+k3(1)*(delta);
tmp(2)=x_0(2)+k3(2)*(delta);
k4(1)=A(1,1)*tmp(1)+A(1,2)*tmp(2);
k4(2)=A(2,1)*tmp(1)+A(2,2)*tmp(2);

xNew(1)=x_0(1)+delta*(k1(1)+2*k2(1)+2*k3(1)+k4(1))/6;
xNew(2)=x_0(2)+delta*(k1(2)+2*k2(2)+2*k3(2)+k4(2))/6;
return;
```