

# Systemy cyfrowe i podstawy elektroniki

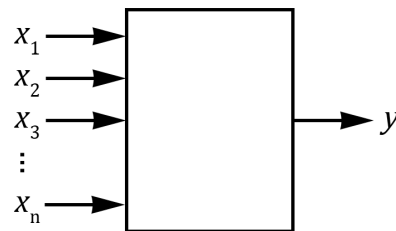
Adam Szmigielski

aszmigie@pjawst.edu.pl

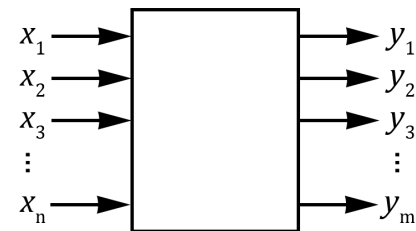
materiały: *ftp(public) : //aszmigie/SYC*

# Kombinacyjne bloki funkcjonalne - wykład 8

## Funkcja Boolowska a kombinacyjny blok funkcjonalny



funkcja  
boolowska



kombinacyjny  
blok funkcjonalny

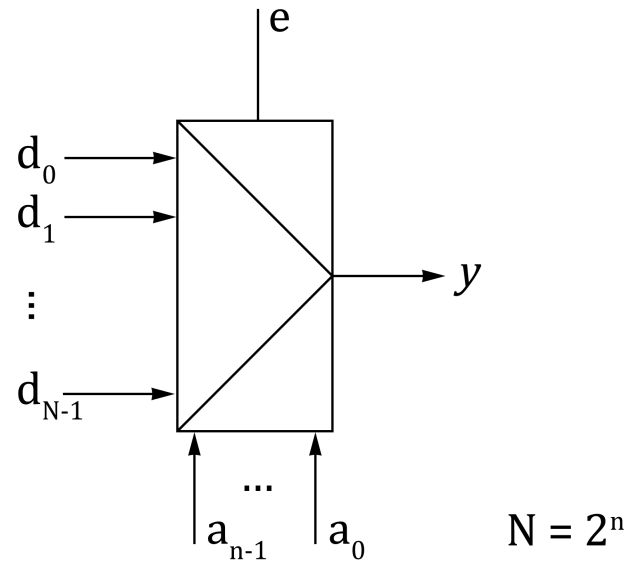
- *Kombinacyjny blok funkcjonalny* w technice cyfrowej jest układem kombinacyjnym złożonym z  $n$  wejściami i  $m$  wyjściami, gdzie  $m, n = 1, 2, \dots$  są liczbami naturalnymi.
- *Funkcja Boolowska* jest szczególnym przypadkiem *kombinacyjnego bloku funkcjonalnego* - posiada tylko jedno wyjście  $m = 1$ .

## Kombinacyjne bloki funkcjonalne

Przykłady *kombinacyjnych bloków funkcjonalnych*

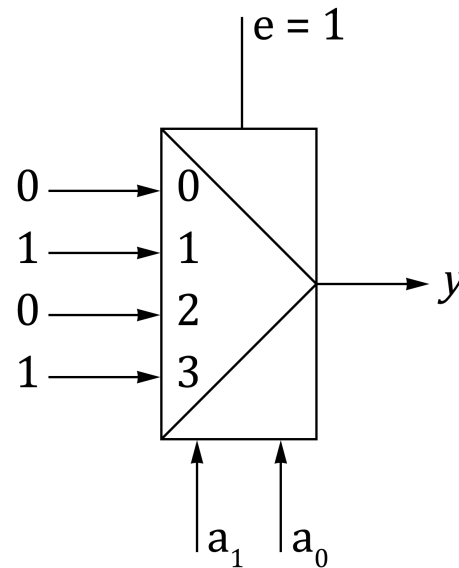
- układy komutacyjne:
  - multipleksery MUX,
  - demultipleksery DMUX,
  - konwertery kodów, dekodery DEC,
- układy arytmetyczne:
  - sumatory,
  - komparatory,
  - ...
- inne.

## Multiplexer (MUX)



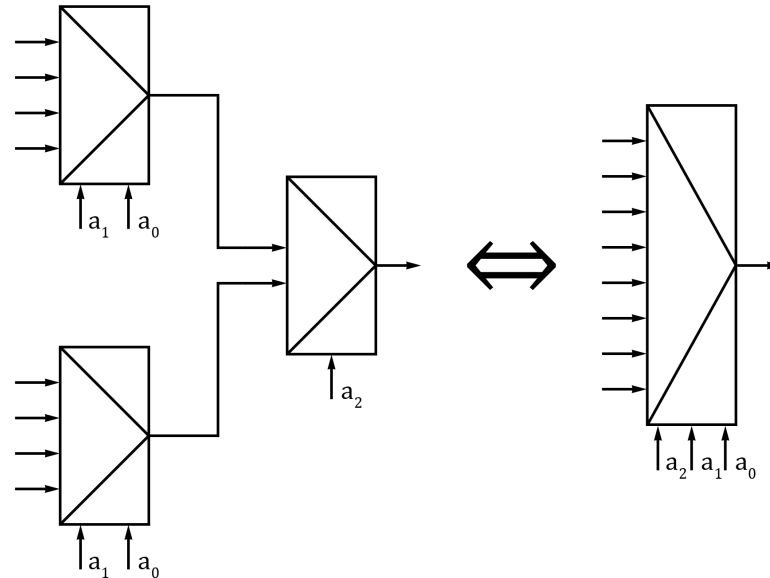
- W multiplekserze wyróżnia się dwa rodzaje wejść - *wejścia adresowe* i *wejścia informacyjne*,
- *Multiplexer* to funkcjonalny blok kombinacyjny, w którym jest  $n$  wejść adresowych i  $N = 2^n$  wejść informacyjnych, wyjście oraz wejście zezwolenia (enable).

## Multiplexer jako przełącznik



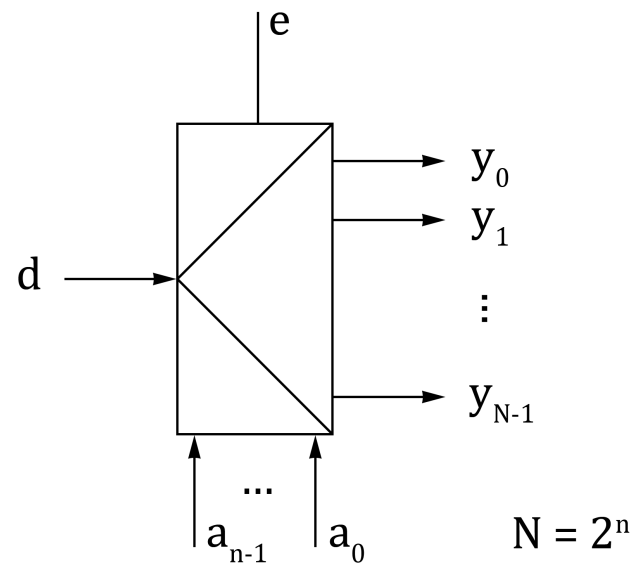
- Multiplexer pracuje jako przełącznik,
- Dany multiplexer realizuje funkcję  $y = \overline{a_1}a_0 + a_1a_0$
- Multiplexer wypisze na wyjściu taki sygnał jaki jest na wejściu informacyjnym wybranym przez wejścia adresowe.

## Kaskadowe łączenie multiplexerów



- Liczba wejść informacyjnych multiplexera rośnie wykładniczo dlatego nie realizuje się bezpośrednio multiplexerów o dużej liczbie wejść adresowych,
- Większe multiplexery można budować z mniejszych.

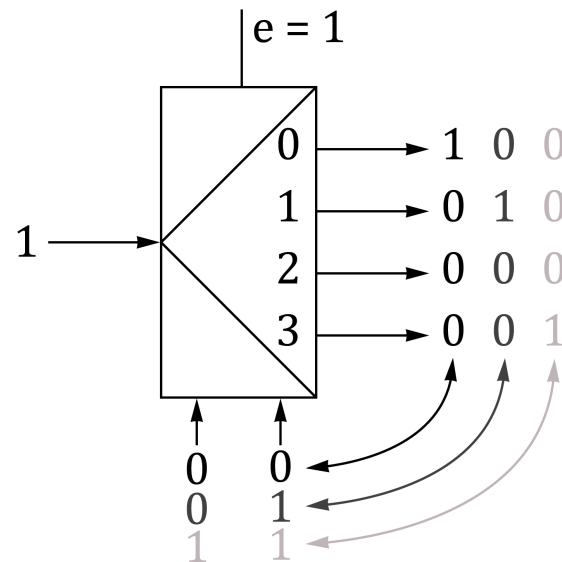
## Demultiplekser (DMUX)



- *Demultiplekser* to układ kombinacyjny o jednym wejściu informacyjnym o  $n$  wejść adresowych i  $N = 2^n$  wyjściach oraz wejściu zezwalającym .

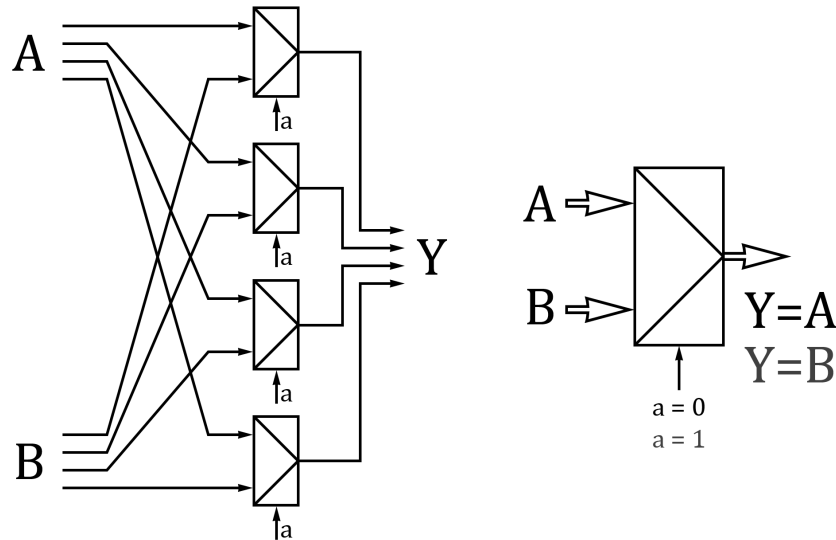


## Demultiplekser jako przełącznik



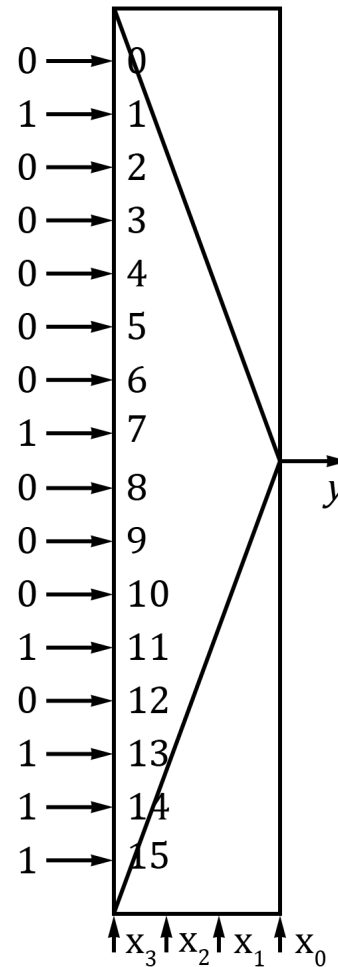
- Demultiplekser pracuje jako przełącznik,
- Demultiplekser wypisze sygnał z wejścia na wyjście wskazane przez stan wejść adresowych.

## Multiplexery i demultiplexery grupowe



- Realizacja bloków komutacyjnych, czyli elementów umożliwiających proste przełączanie sygnałów, jest najczęściej grupowa,
- Multiplexer grupowy (w tym przypadku 4-bitowy) może być dołączane do szyny w zależności od stanu wejścia adresowego .

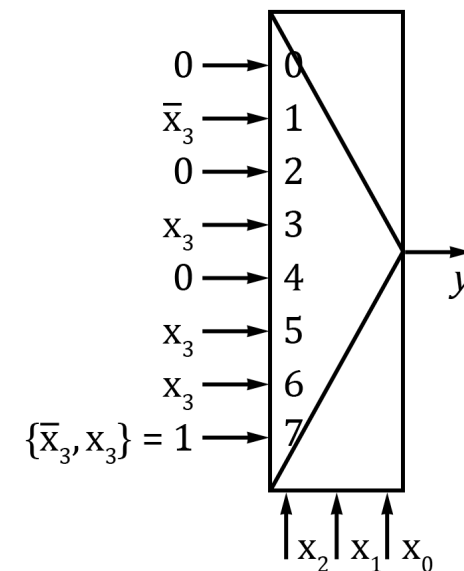
## Realizacja funkcji Boolowskiej za pomocą multipleksera



$$y = \Sigma(1, 7, 11, 13, 14, 15)$$

## Realizacja funkcji Boolowskiej za pomocą multipleksera o trzech wejściach adresowych - cd.

$y$	$x_3$	$x_2x_1x_0$	$x_2x_1x_0$
1	0	001	1
7	0	111	7
11	1	011	3
13	1	101	5
14	1	110	6
15	1	111	7

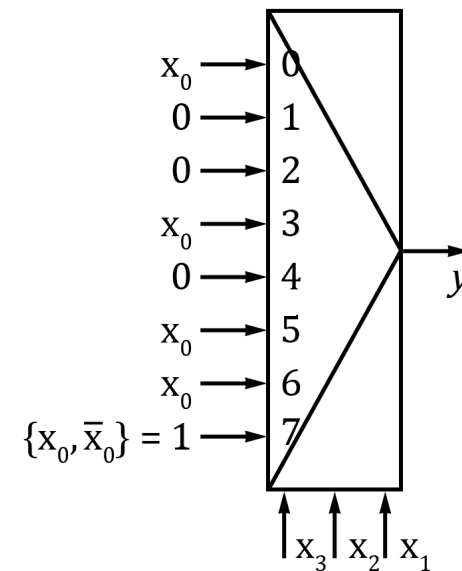


- $y = \sum(1, 7, 11, 13, 14, 15)$
- Na 1 wejściu MUX pojawia się  $\bar{x}_3$  - potrzebna negacja.

## Realizacja funkcji Boolowskiej za pomocą multipleksera o trzech wejściach adresowych - wybór zmiennych sterujących

$y$	$x_3x_2x_1$	$x_0$	$x_3x_2x_1$
1	000	1	0
7	011	1	3
11	101	1	5
13	110	1	6
14	111	0	7
15	111	1	7

- $y = \sum(1, 7, 11, 13, 14, 15)$
- Tym razem negacja jest niepotrzebna.



## Realizacja funkcji Boolowskiej za pomocą multipleksera o dwóch wejściach adresowych

$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

- $y = \sum(1, 7, 11, 13, 14, 15)$
- Jak wybrać wejścia adresowe ?

## cd. - Wybór zmiennych adresowych

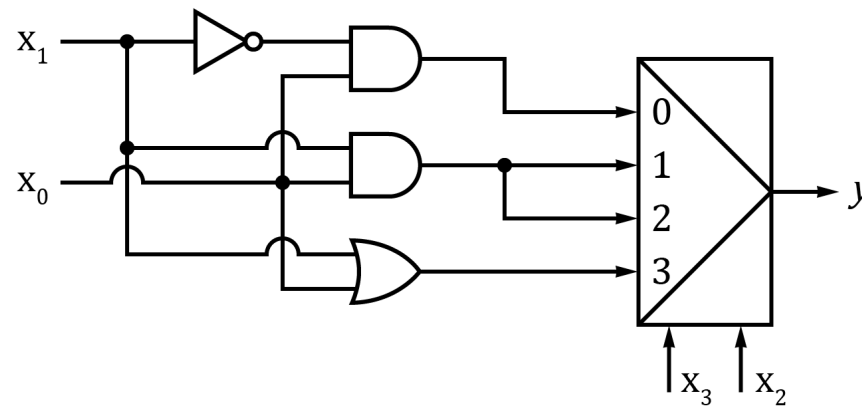
$x_3x_2 \backslash x_1x_0$	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

Na wejście adresowe wybraliśmy  $x_3x_2$  wówczas na wejścia informacyjne podajemy wyjście funkcji  $f(x_1, x_0)$  opisane poprzez odpowiednie wiersze mapy Karnough-a

- $x_3x_2 = 00 \implies f(x_1, x_0) = \overline{x_1}x_0$
- $x_3x_2 = 01 \implies f(x_1, x_0) = x_1x_0$
- $x_3x_2 = 11 \implies f(x_1, x_0) = x_1 + x_0$
- $x_3x_2 = 10 \implies f(x_1, x_0) = x_1x_0$

## cd. - Realizacja

- $x_3x_2 = 00 \implies f(x_1, x_0) = \overline{x_1}x_0$
- $x_3x_2 = 01 \implies f(x_1, x_0) = x_1x_0$
- $x_3x_2 = 11 \implies f(x_1, x_0) = x_1 + x_0$
- $x_3x_2 = 10 \implies f(x_1, x_0) = x_1x_0$





# Układy arytmetyczne i logiczne

## Popularne kody liczbowe używane w technice cyfrowej

- **Kod dwójkowy** - to pozycyjny system liczbowy, w którym podstawą jest liczba 2.
- **Kod 1 z N** - sposób kodowania, w którym słowa binarne o długości  $n$  bitów zawierają zawsze tylko jeden bit o wartości 1.
- **HEX** - kod szesnastkowy
- **Kod Graya** - dwójkowy kodem bezwagowy niepozycyjny.
- **kod BCD** (dziesiętny zakodowany dwójkowo) – sposób zapisu liczb polegający na zakodowaniu kolejnych cyfr dziesiętnych liczby dwójkowo przy użyciu czterech bitów.
- **kod ZM** - Znak Moduł
- **kod U1** - uzupełnień do 1
- **kod U2** - uzupełnień do 2

**Kod dwójkowy - Naturalny kod binarny (NKB)**

pozycja:	7	6	5	4	3	2	1	0
wartość:	$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
wartość:	128	64	32	16	8	4	2	1
bity:	$b_7$	$b_6$	$b_5$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$

- System pozycyjny o podstawie systemu 2
- Liczby określone są bez znaku
- Wartość liczby binarnej (N- długość słowa kodowego)  
$$Wartosc = \sum_{i=0}^{N-1} 2^i \cdot b_i$$
- Wartość cyfry zależy od pozycji  $b_i = 2^i$  (numerowanie od zera)
- $2^N$  różnych wartości kodu (kod pełny)

## Kod 1 z N

Wartość dziesiętna	Wartość binarna	Kod 1 z 10
0	0000	0000000001
1	0001	0000000010
2	0010	0000000100
3	0011	0000001000
4	0100	0000010000
5	0101	0000100000
6	0110	0001000000
7	0111	0010000000
8	1000	0100000000
9	1001	1000000000

## Kod BCD

Cyfra dziesiętna	zapis binarny cyfry
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

- np. Liczba 123 składa się z trzech cyfr. Kodując każdą cyfrę binarnie otrzymujemy kod BCD: 0001 0010 0011.
- Kod niepełny,
- Używany ze względu na prostotę konwersji liczb zapisanych dziesiętnie.

## Reprezentacja “znak-moduł” ZM

Najstarszy bit słowa  $b_{N-1}$  (MSB - ang. *Most Significant Bit*) pełni rolę znaku (tj. jeśli  $b_{N-1} = 1$  to liczna jest ujemna, gdy  $b_{N-1} = 0$  dodatnia) np.:

$$-24_{10} = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$118_{10} = 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$-14_{10} = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0$$

$$wrtosc = (-1)^{b_{N-1}} \cdot \sum_{i=0}^{N-2} 2^i \cdot b_i$$

- Ze względu na najstarszy bit kod nie jest wagowy,
- zakres kodu  $< -(2^{N-1} - 1), 2^{N-1} - 1 >$ ,
- $2^N - 1$  kombinacji - zero posiadałoby dwie reprezentacje (kombinacja 10000000 (minus zero) jest zabroniona),

## kod uzupełnień do 1 (U1) (ang. *1's complement*)

- W zapisie tym najbardziej znaczący bit jest także bitem znaku (0 – liczba dodatnia, 1 – liczba ujemna), ale w zależności od jego wartości dalsze bity zapisu mają różne znaczenie,
  - Jeśli bit znaku jest 0 (liczba dodatnia), to dalsze bity reprezentują liczby dodatnie w ZM,
  - Natomiast gdy bit znaku jest 1 (liczba ujemna), to dalsze bity reprezentują moduł liczby ujemnej, w taki sposób, że zanegowane ich wartości odpowiadają modułowi tej liczby w kodzie ZM,
- Zapis U1 dla liczb dodatnich jest taki sam jak zapis ZM,
- Różnice w zapisie występują jedynie dla liczb ujemnych,
- Zakres liczb tego zapisu jest taki sam jak dla zapisu ZM.

## Kod uzupełnień do 1

- W zapisie U1 występują także dwie reprezentacje zera:  
000000...00 i 111111...11,
- Sposób przeliczenia liczby ujemnej w zapisie ZM na zapis U1:  
Zanegować bity oznaczające moduł liczby (bit znaku pozostaje 1). Np. dla liczb 8-bitowych:

zapis ZM: 11010110 (dziesiętnie -86)

zapis U1: 10101001



## Kod uzupełnień do 2 (U2) (ang. *2's complement*)

Najstarszy bit MSB ma wartość ujemną pozostałe bity są dodatnie:

$$wartosc = -2^{N-1} \cdot b_{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} 2^i \cdot b_i$$

- Najstarszy bit identyfikuje czy liczba jest dodatnia czy ujemna,
- Zakres kodu:  $\langle -2^{N-1}, 2^{N-1} - 1 \rangle$ ,
- $2^N$  kombinacji (kod pełny), zero ma tylko jedną reprezentację,
- Liczby dodatnie z przedziału  $\langle 0, 2^{N-1} - 1 \rangle$  mają identyczną reprezentację w U2 co w NKB, tj.:  
$$(0, b_{N-2}, \dots, b_1, b_0)_{U2} = \sum_{i=0}^{N-2} 2^i \cdot b_i$$
- kod wagowy, najstarszy bit na wartość ujemną. Liczby ujemne można interpretować jako sumę:

$$(1, b_{N-2}, \dots, b_1, b_0)_{U2} = -2^{N-1} + \sum_{i=0}^{N-2} 2^i \cdot b_i$$

- wada kodu  $U2$ : zakres kodu jest niesymetryczny, negacja liczby  $-2^{N-1}$  prowadzi do błędu (np. dla  $N = 128$  liczba  $-128$  mieści się w zakresie, ale  $128$  już nie),
- Przekroczenie zakresu przy sumowaniu, np. dla  $N = 8$ :  
 $(127)_{U2} + (4)_{U2} = (-125)_{U2}$  - błąd,
- Inkrementacja liczby  $127$  daje wynik  $-128$ .

## Negowanie liczb w kodzie U2

$$-(wartosc)_{U2} = \overline{(wartosc)_{U2}} + 1$$

Aby obliczyć liczbę przeciwną do danej w kodzie  $U2$  należy zanegować wszystkie bity i do wyniku dodać jedynkę np.:

$7_{10}$	(00000111)	
negacja bitów	(11111000)	
dodać bit	+	(00000001)
wynik $-7_{10}$	=	(11111001) $_{U2}$

## Dodawanie i odejmowanie w kodzie U2

- **Dodawanie** wykonywane jak w NKB, niezależnie od znaków argumentów
- **Wartość przeniesienia z najstarszego bitu jest ignorowana,**
- **Przekroczenie zakresu** może wystąpić w dwóch przypadkach:
  - gdy suma dwóch liczb dodatnich przekracza zakres,
  - gdy suma dwóch liczb ujemnych przekracza zakres,
- **Odejmowanie w U2** - dodanie negacji odjemnika tj.:

$$a - b = a + (-b)$$

- wystarczą operacje negowania i dodawania.

## Odejmowanie w kodzie U2 - przykłady

- Sumowanie liczby dodatniej i ujemnej - wynik dodatni,

$$25 + (-1) :$$

$$25 : \quad 00011001$$

$$-1 : \quad + \quad 11111111$$

---


$$(c_7 = 1) : \quad = \quad 00011000_{U2} = 24_{10}$$

- Sumowanie liczby dodatniej i ujemnej - wynik ujemny

$$25 + (-56) :$$

$$25 : \quad 00011001$$

$$-56 : \quad + \quad 11001000$$

---


$$(c_7 = 0) : \quad = \quad 11100001_{U2} = -31_{10}$$

## Dodawanie w kodzie U2 - przykłady

- Sumowanie dwóch liczb dodatnich bez przekroczenia zakresu,

$$25 + 1 :$$

$$25 : \quad 00011001$$

$$+1 : \quad + \quad 00000001$$

---


$$(c_7 = 0) : \quad = \quad 00011010_{U2} = 26_{10}$$

- Sumowanie dwóch liczb ujemnych bez przekroczenia zakresu,

$$(-25) + (-56) :$$

$$-25 : \quad 11100111$$

$$-56 : \quad + \quad 11001000$$

---


$$(c_7 = 1) : \quad = \quad 10101111_{U2} = -81_{10}$$

## Przekroczenie zakresu w kodzie U2 - przykłady

- Sumowanie dwóch liczb dodatnich z przekroczeniem zakresu,

$$112 + 113 :$$

$$112 : \quad 01110000$$

$$113 : \quad + \quad 01110001$$

---


$$(c_7 = 0, c_6 = 1) : \quad = \quad 11100001 - \text{przekroczeniem zakresu}$$

- Sumowanie dwóch liczb ujemnych z przekroczeniem zakresu,

$$(-75) + (-56) :$$

$$-75 : \quad 10110101$$

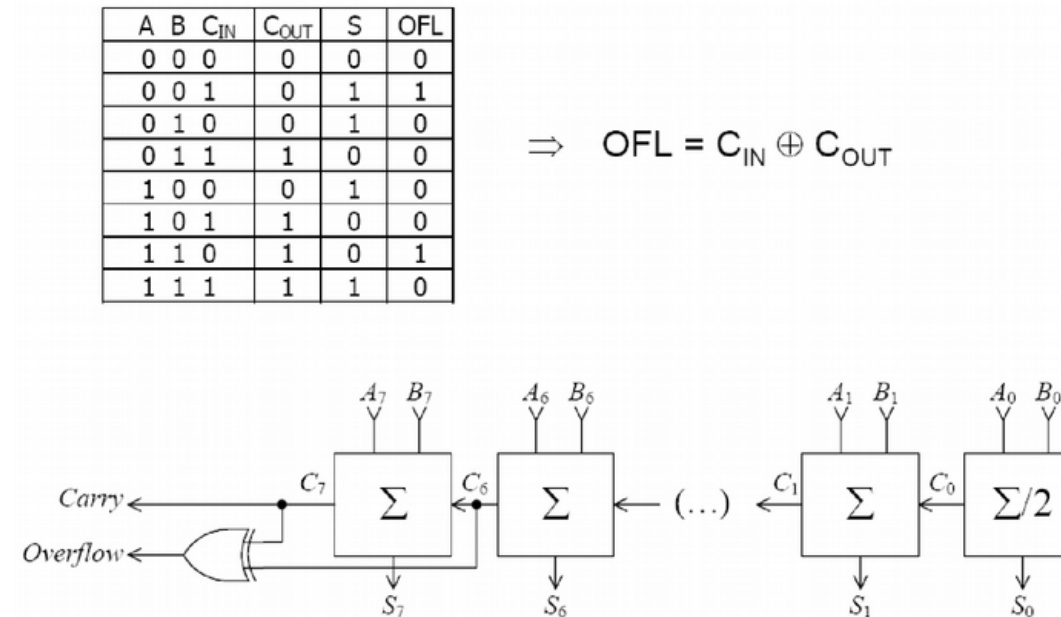
$$-56 : \quad + \quad 11001000$$

---


$$(c_7 = 1, c_6 = 0) : \quad = \quad 01111101 - \text{przekroczeniem zakresu}$$

## Sprzętowe wykrywanie przekroczenia zakresu w $U2$

- Przekroczenie zakresu w  $U2$  można zidentyfikować analizując przeniesienia:  
przychodzące  $C_{IN}$  i generowane  $C_{OUT}$  przez najstarszy bit,



- Przekroczenie zakresu występuje wtedy i tylko wtedy, gdy oba przeniesienia  $C_{IN}$  i  $C_{OUT}$  są przeciwnego znaku.



## Reprezentacja liczb rzeczywistych

- Reprezentacja stałoprzecinkowa (ang. *fixed point*)
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa (ang. *floating point*)

## Reprezentacja stałoprzecinkowa

- W sposób arbitralny przyjmuje się, że część słowa jest *częścią całkowitą*, a pozostała część słowa *część ułamkową*,
- Przykładowo, dla słowa ośmiobitowego przyjmijmy część całkowitą jako 5 bitów a część ułamkową jako 3 bity:

pozycja:	7	6	5	4	3	2	1	0
wartość:	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$
wartość:	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
bity:	$b_7$	$b_6$	$b_5$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$

## Reprezentacja stałoprzecinkowa

- Liczby stałoprzecinkowe można również interpretować w kodach  $U1$ ,  $U2$  czy  $ZM$  - najstarszy bit będzie miał znaczenie jak w tych kodowaniach,
- Kodowanie stałoprzecinkowe może powodować błąd,
- Dokładność kodowania zależna jest od długości słowa,
- Niektóre liczby całkowite i wymierne nie mają swojej dokładnej reprezentacji w skończonym kodowaniu,
- Liczby niewymierne zawsze kodowane są z błędem.

## Reprezentacja stałoprzecinkowa - przykład

Podtrzymując założenie że, 5 najstarszych bitów przeznaczone jest na *część całkowitą* a pozostałe 3 bity na *część ułamkową*.

Dodatkowo przyjmujemy, że liczba jest zapisana w kodzie U2:

wartość:	$-2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{-1}$	$2^{-2}$	$2^{-3}$
wartość:	-16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

- Przykładowy ciąg bitów 11001110 jest wówczas równy:  
 $-16 + (8 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = -6\frac{1}{4},$
- Zakres reprezentowanych liczb mieści się w przedziale  
 $< -16, 15\frac{7}{8} > ,$
- Liczby rzeczywiste są reprezentowane z błędem nie większym od  
 $\frac{1}{8}.$

## Reprezentacja zmiennoprzecinkowa

eksponent	mantysa
-----------	---------

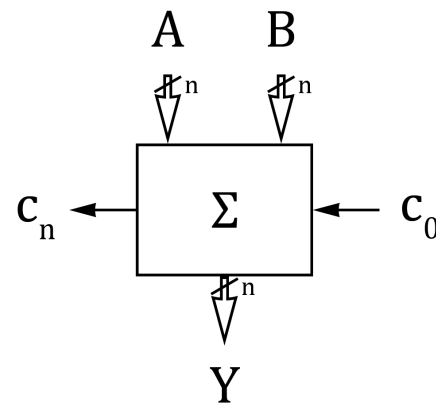
- Liczba zmiennoprzecinkowa jest reprezentowana jako *mantysa* i *eksponent* przy podstawie 2:

$$\text{mantysa} \cdot 2^{\text{wykładnik}}$$

- *Mantysa* może mieć różne interpretacje (co może być przyczyną nieporozumień),
- *Eksponent* jest liczbą całkowitą dodatnią albo ujemną.

# Dekoder

**Dekoder** zamienia kod  $NKB$  na  $1 \text{ z } N$ .



- Szczególnym przypadkiem demultipleksera jest dekodery, w którym przyjmuje się, że do wejścia  $d$  zawsze jest dołączony sygnał o wartości logicznej 1. Wejście to nie jest dostępne na zewnątrz układu.

## Sumowanie

$76_{10}$		0	1	0	0	1	1	0	0
$188_{10}$	+	0	1	1	1	0	1	1	0
<hr/>									
$194_{10}$	=	1	1	0	0	0	0	1	0
przeniesienie		0	1	1	1	1	1	0	0

- Sumowanie dwóch  $a, b$  bitów:

$$a_i, b_i, c_i \Rightarrow s_i, c_{i+1}$$

( $c$  - przeniesienie,  $s$  - wynik sumowania)

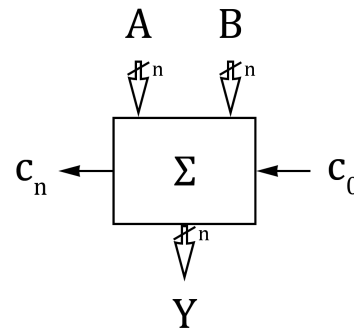
## Przekroczenie zakresu

$152_{10}$		1	0	0	1	1	0	0	0
$118_{10}$	+	0	1	1	1	0	1	1	0
<hr/>									
$14_{10} ?$	=	0	0	0	0	1	1	1	0
przeniesienie	$\boxplus$	1	1	1	0	0	0	0	

- Przeniesienie z najstarszego bitu ( $c_{N-1} = 1$ ) oznacza przekroczenie zakresu dla słowa  $N$ -bitowego,
- Alternatywnie: Wystąpienie przeniesienia oznacza, że wynik jest liczbą bitową o długości  $N + 1$ . Przeniesienie bitu należy wówczas traktować jako  $N + 1$  bit wyniku.

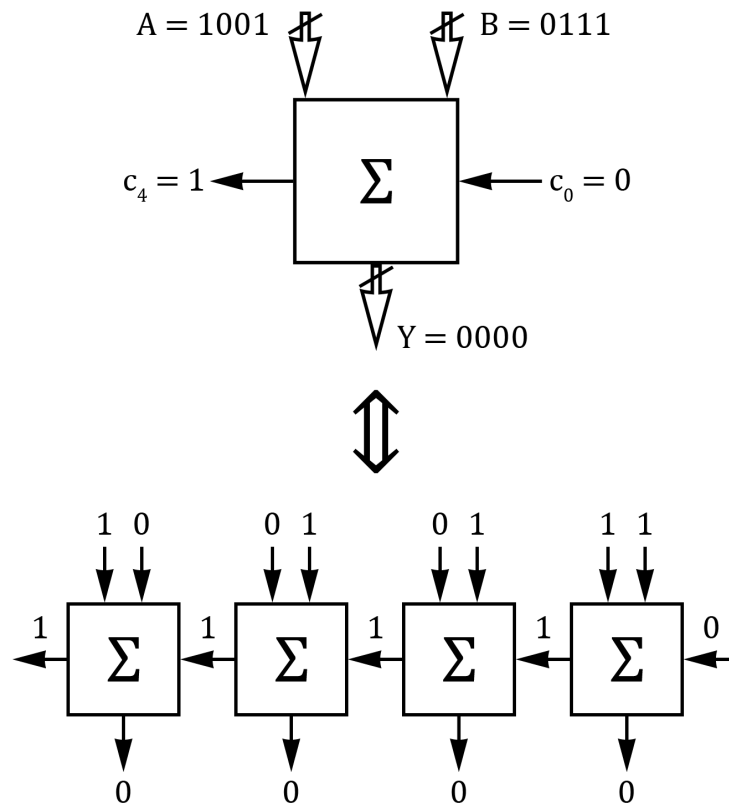


## Układy arytmetyczne - sumator



- Operację sumowania arytmetycznego  $Y = A + B + c_0$  realizuje sumator. Na wyjściu sumatora powstaje suma  $n$ -bitowych liczb binarnych  $A$  i  $B$ .
- Przypadek przekroczenia zakresu sygnalizowany jest sygnałem przeniesienia  $c_n$ .
- Bit przeniesienia można traktować jako najstarszy bit wyniku.

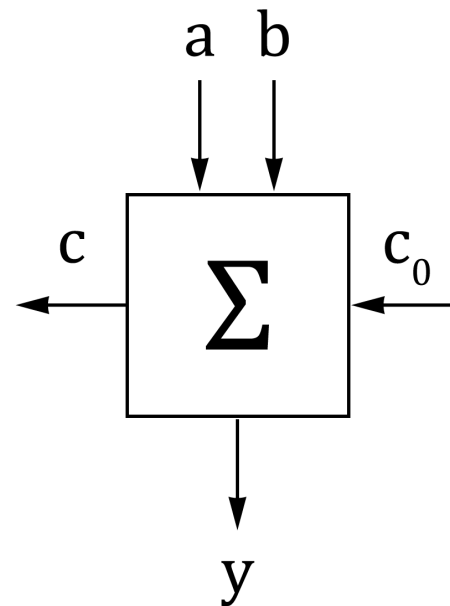
## Budowa kaskadowa sumatora



- W najprostszej realizacji sumator jest zbudowany z kaskadowo połączonych sumatorów jednobitowych, o wejściach  $a_i$ ,  $b_i$  i  $c_i$ , wyjściach  $y_i$  i  $c_{i+1}$ .

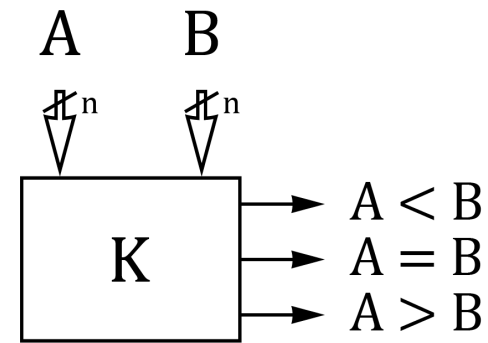
## Budowa sumatora jednobitowego

a	b	$c_o$	c	y
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



- $y = a \oplus b \oplus c_o$
- $c = ab + ac + bc_o$

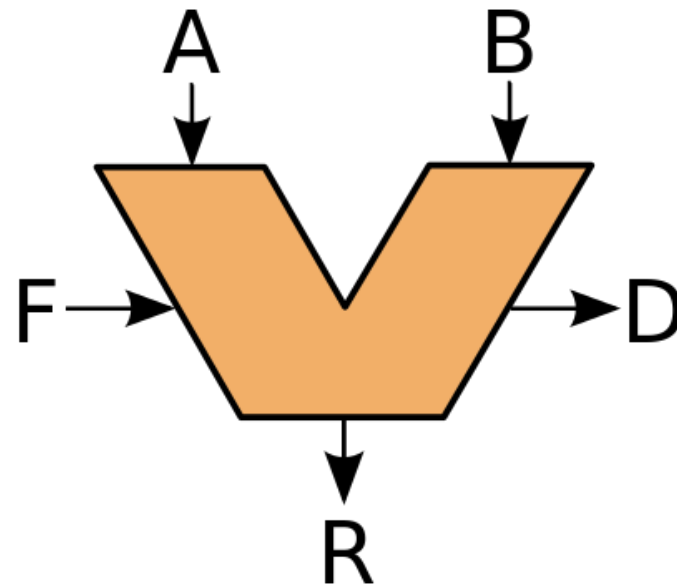
## Komparator



- Komparator umożliwia porównanie dwóch liczb  $n$ -bitowych i określenie czy są sobie równe, a także która z liczb jest większa, a która mniejsza.

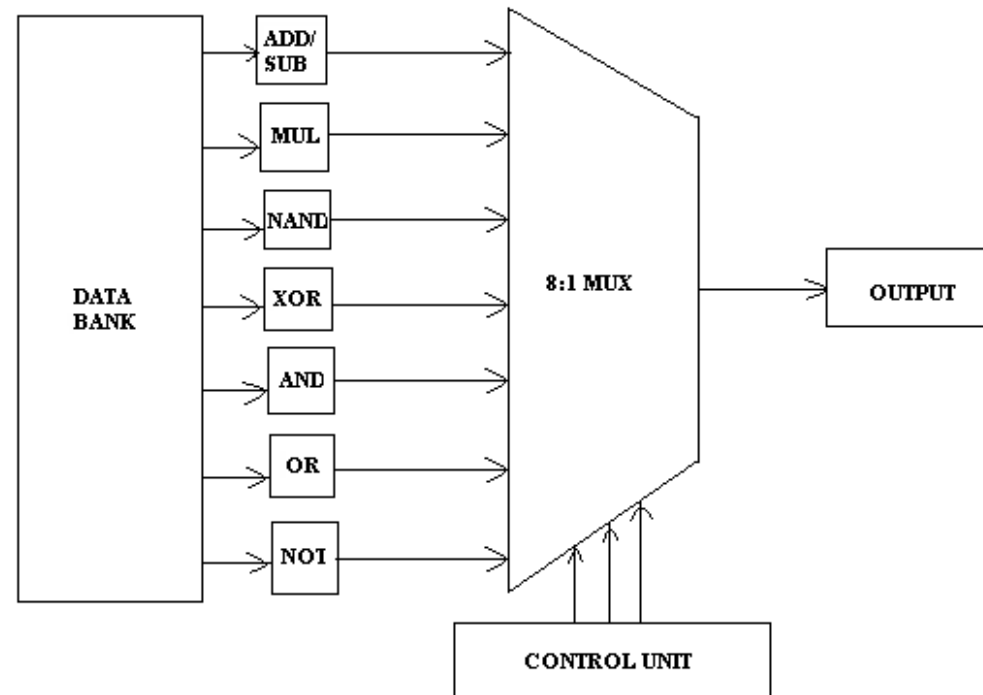
## Jednostka arytmetyczno - logiczna ALU

ALU jest układem cyfrowym kombinacyjnym, służącym do wykonywania operacji arytmetycznych, operacji logicznych pomiędzy dwiema liczbami lub operacji jednoargumentowych.



A i B - dane; R - wyjście; F - wybór operacji; D - status wyjścia

## Realizacja ALU na multiplexerze



## Zadania na ćwiczenia

1. Za pomocą multipleksera o czterech wejściach adresowych zrealizuj daną funkcję.
2. Za pomocą multipleksera o trzech wejściach adresowych i co najwyżej jednego negatora zrealizuj daną funkcję.
3. Zrealizuj układ identyfikujący przekroczenie zakresu dla liczb 4-bitowych w kodzie U2.
4. Zrealizuj 4-bitowe ALU wykonujący 4 działania. Kody operacji:  
00 - ADD - suma arytmetyczna,  
01 - NEG - negacja arytmetyczna,  
10 - XOR,  
11 - AND.  
ALU dodatkowo powinno ustawiać flagi:  
Z=1, gdy wynik operacji wynosi zero,  
C=1, gdy przekroczenia zakresu w kodzie U2.