

目录

第一章 线性方程组的解法	1
第二章 行列式	1
第三章 矩阵	1
第四章 向量组的线性相关性	2
第五章 矩阵的相似对角化	2
第六章 实二次型	3

第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换: ①交换两行; ②某一行乘 k ; ③某一行乘 k 后加到另一行;

第二章 行列式

1. 某一行的展开式: $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, (i = 1, 2, \dots, n)$
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 列同理

2. 行列式变号: 交换某两行
不变: ①转置; ②某一行/列乘 k 后加到另一行/列;
③某行所有元素为两个数之和, 可以写成两个行列式之和
数乘: ①某行的公因数 k 可以提到外面; ② $|kA| = k^n |A|$

3. 若 A 中无 0 且 $R(A) = 1, A^2 = (\text{列向量} * \text{行向量})^2 = lA = \sum_{i=1}^n a_{ii} A, A^n = l^{n-1} A$

4. 八大常见类型的行列式及其解法

5. 范德蒙德型行列式:

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

6. 莫拉克法则: $D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \dots, n$

第三章 矩阵

1. n 维上/下三角方阵, $A^k = O, k \geq n$

2. B, C 分别为 m, n 阶, 则 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$

3. 伴随矩阵: $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ 逆矩阵: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

$$AA^* = A^*A = |A|E \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

4. 二阶方阵求逆: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

5. A, B 可交换: $AB = BA$ 反对称矩阵: $A = -A^T$

6. A, B 等价: 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $B = PAQ \Leftrightarrow R(A) = R(B)$

几何意义: 两个有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过初等行/列变换后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

7. n 维方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的列向量构成 \mathbb{R}^n 的向量空间

$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow A$ 为非奇异矩阵 $\Leftrightarrow R(A) = n$

$\Leftrightarrow A$ 的各列/行线性无关 $\Leftrightarrow A^T$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 与 E 等价

$\Leftrightarrow 0$ 不是 A 的特征值 $\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow Ax=b$ 只有唯一解

8. 初等矩阵: E 经过一次初等变换 左乘 \Leftrightarrow 行变换, 右乘 \Leftrightarrow 列变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ nk & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. 求逆: $(A \ E) \xrightarrow{r} (E \ A^{-1}) \quad (E+B)^{-1} = (BB^{-1} + B)^{-1}$

求解: $(A \ B) \xrightarrow{r} (E \ X)$

10. ① $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A|B) \leq R(A) + R(B)$

② $R(A+B) \leq R(A) + R(B)$ ③ $R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$

④ A 为 $m \times s$ 的矩阵, B 为 $s \times n$ 的矩阵, $AB = O, R(A) + R(B) \leq s$

⑤ A 可逆, 则 $R(AB) = R(BA) = R(B)$ ⑥ $R\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R(A) + R(B)$

⑦ $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$

11. $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$

12. 非齐次线性方程组: $A_{m \times n} X_{n \times 1} = \beta_{m \times 1} \neq 0$ 齐次线性方程组: $\beta_{m \times 1} = 0$

结论: ① $Ax = 0$ 的解的线性组合仍为其解

② a, b 为 $Ax = b$ 的解, 则 $a - b$ 为导出组 $Ax = 0$ 的解

13.

第四章 向量组的线性相关性

1. $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0$

线性相关: $|A|=0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$ 不全为 0 \Leftrightarrow 不满秩 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 有解

线性无关: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$ 全为 0 \Leftrightarrow 满秩 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 无解

结论: ① $n+1$ 个 n 维度向量必线性相关

② 任何部分相关 \Rightarrow 整体相关; 整体无关 \Rightarrow 任何部分无关

③ 线性无关 \Rightarrow 延伸无关; 线性相关 \Rightarrow 缩短相关

④ 向量组 A 两两正交且非零, 则其线性无关

2. 线性组合/表出/表示: $\beta = AX = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n$ 有解

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A|\beta) \begin{cases} = n, \text{唯一解} \\ < n, \text{无穷多解} \end{cases}$$

结论: ① 向量组(I)线性无关, $(I|\beta)$ 线性相关, 则 β 可由向量组(I)线性表示, 且表示方法唯一

3. 极大无关组: r 组线性无关, $r+1$ 组线性相关 计算: 初等行变换化为行最简形

4. 向量组等价: 两个向量组可以相互线性表示 $\Leftrightarrow R(I) = R(I|II) = R(II)$ (缺一不可)

结论: ① 多数向量能用少数向量线性表示, 多数向量一定线性相关

② 向量组(I)可由向量组(II)线性表示, 则 $R(I) \leq R(II)$

5. 过渡矩阵: $B = AC$ 坐标变换公式: $X = CY$

6. $\star Ax = 0$ 的基础解系: 本质: 一个极大无关组, 构成: $n - R(A)$ 个解

计算方法: 对 A 初等行变换得到最简形

结论: ① 只有零解 $\Leftrightarrow R(A) = n$

有非零解 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ 的列向量线性相关

② η_1, η_2 为 $Ax = 0$ 的两个解, 其线性组合也是 $Ax = 0$ 的解

7. $\star Ax = \beta$ 的通解: 对 $(A|\beta)$ 初等行变换得到最简形, 通解=特解+基础解系

结论: ① 有无穷多解, 则 $R(A) = R(A|\beta) < n$

② α, β 为 $Ax = \beta$ 的两个解, $\alpha - \beta$ 为 $Ax = 0$ 的解

③ α 为 $Ax = \beta$ 的解, η 为 $Ax = 0$ 的解, $\alpha + \eta$ 为 $Ax = \beta$ 的解, 即通解=特解+基础解系

④ $Ax = \beta$ 无解 $\Leftrightarrow R(A) \neq R(A|\beta)$

注意: 若 X 为矩阵, 求通解时每列都独立成向量看待, 且若 X 阶数很小, 可直接假设矩阵中的每一个数为一个变量进行求解

8. 同解方程组结论: A 经过初等行变换后与 A 同解

9. 求公共解: 方法一: 联立两个方程直接求 例 4.19

方法二: 求出两个方程的通解后相等

方法三: 将一个通解带入另一个方程

求同解: 不能直接联立, 注意解的数量(无穷多、唯一)必须相同, 可将一个通解带入另一个方程

证明同解: 分别证明一个方程的解满足另一个方程

区别: 同解是两个方程的解集完全相同, 公共解是两个解集的公共部分

10.

第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值: $|A - \lambda E| = 0$

几何意义: 伸缩比例

特征方程: $(A - \lambda E)X = 0$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (迹) $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$

特征向量: 对应 λ 的 X

几何意义: 矩阵对向量只发生伸缩变换

结论: ① 不同 λ 对应的特征向量线性无关

② $|A| = 0$, 则 0 为 A 的特征值

③ 同一特征值对应的特征向量的线性组合还是特征向量

2. A, A^{-1}, A^*, A^m 有相同的特征向量 $\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m$ 是它们的特征值

3. A、B 相似: $P^{-1}AP = B$ 记作 $A \sim B$

几何意义: 一个有限维向量空间的同一个线性变换

判断相似步骤: ①判断是否可相似对角化; ②特征值是否相同

结论: ① $P^{-1}A^n P = B^n$ ② $P^{-1}EP = E$

③ $P^{-1}AP$ 的特征值为 λ_A , 特征向量是 $P^{-1}X_A$

④ A、B 的行列式、秩、迹、特征值相等, $X_A = PX_B$

⑤ 两个矩阵都是对称矩阵, 相似的充要条件是特征值相同

4. n 阶方阵 A 可对角化 \Leftrightarrow 有 n 个线性无关的特征向量

5. 可相似对角化, 即 $A \sim \Lambda \Leftrightarrow R(A - \lambda_i E) = n - n_i$, λ_i 是 n_i 重特征值

$\Leftrightarrow \lambda_i$ 是 n_i 重特征值, 则 λ_i 有 n_i 个线性无关的特征向量

P 的求法: 先解 $|A - \lambda E| = 0$, P 由基础解系构成

结论: P 是 A 的特征向量, Λ 是 A 的特征值

6. 向量正交 $\Leftrightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ 内积为 0 $\Leftrightarrow \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = 0$

7. 施密特正交化方法: 使用前提: 重根的特征向量

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{[\alpha_m, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_m, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_m, \beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]} \beta_{m-1}$$

8. 正交矩阵: $AA^T = E \Leftrightarrow$ 行/列向量组是单位正交向量组 $\Leftrightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

9. 实对称矩阵化为对角阵: $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ 实对称矩阵必可相似对角化

步骤: ①求出特征值 λ ; ②求出特征向量, 正交化, 再单位化, 构成正交矩阵 Q

结论: ①实对称矩阵 A 的不同 λ_1, λ_2 对应的特征向量必正交

10. 利用正交求特征向量:

a) 若有 3 个不同的特征向量, 已知其中两个, 可求第三个

b) 若特征值有重根, 已知单根的特征向量, 可求重根的所有特征向量

例如, 三阶方阵, $\lambda = 2 \rightarrow \alpha = [1 \ 0 \ 1]^T$, 求 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量 P154

11. 实例: ①若 $AB - kB = O$, 则 k 为 A 的特征值

②若 $A^2 - kA = O$, 则 k 或 0 为 A 的特征值

12.

第六章 实二次型

1. 二次型: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T B X = X^T A X$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

A 必须为实对称矩阵 B 改成实对称矩阵方法: $a_{ii} = b_{ii}, a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$

标准型: 只含有完全平方项 (不唯一, 且坐标变换也不唯一)

规范型: 完全平方项前的系数为 ± 1 , 与特征值的正负号保持一致 (唯一, 但坐标变换不唯一)

计算方法: 求出 A 的特征值 or 其他方法

2. (可逆)线性变换: $X = CY$, C 为可逆矩阵 也叫坐标变换公式

3. 化实二次型为标准型方法 $f = x^T A x = y^T \Lambda y$

a) 配方法: 前提: 必须满足坐标变换 不靠谱!

i. 二次型含有完全平方项: 将非平方项提取公因式然后配成完全平方项,

$$\text{例如 } f = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 4x_3^2, \text{ 令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\text{ii. 二次型不含完全平方项: 例 } f = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3, \text{ 令 } \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

b) 正交变换法步骤: 必存在 Q

①求出特征值 λ ; ②求出特征向量, 正交化, 单位化, 构成正交矩阵 Q

4. 正惯性指数 p: 标准型中正平方项的个数; 负惯性指数 q: 负平方项的个数

5. A、B 合同: $C^T AC = B$, C 可逆 $\Leftrightarrow X^T A X$ 和 $X^T B X$ 有相同的正、负惯性指数

几何意义: 一个有限维向量空间的同一个双线性函数 or 内积

性质: ①如果 A 为对称矩阵, B 也是对称矩阵; ② $R(A) = R(B)$; ③传递性

6. 正定二次型: $\forall X \neq 0$, 都有 $f > 0$ 负定二次型: $\forall X \neq 0$, 都有 $f < 0$

结论: 正定二次型若能围成曲面, 必为封闭曲面, 例椭圆面

7. A 为正定矩阵 \Leftrightarrow 前提: 对称矩阵

①A 特征值全为正; ②各阶顺序主子式都为正值

③正惯性指数 $p = n$; ④A、E 合同; ⑤ A^{-1} 正定

A 为负定矩阵 \Leftrightarrow 奇数阶顺序主子式为负值, 偶数得为正值

8. 等价、相似、合同的关系

a) 相似 \Rightarrow 等价, 合同 \Rightarrow 等价

b) 实对称矩阵 A 与 B 相似 \Rightarrow A 与 B 合同

9.