第一章 实分析概要

第一节 集合及其运算

- **例 1.5** 证明 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  证 先证明包含关系：$(A\cup B)\cap C \subset (A\cap C)\cup(B\cap C)$

  设 $x \in (A\cup B)\cap C$，则 $x \in (A\cup B)$，且 $x \in C$。从而 $x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \in C$。这就是说，$x \in A$ 且 $x \in C$，或 $x \in B$ 且 $x \in C$，故 $x \in A\cap C$，或 $x \in B\cap C$，所以 $x \in (A\cap C)\cup(B\cap C)$。

  再证明相反的包含关系：$(A\cap C)\cup(B\cap C) \subset (A\cup B)\cap C$

  设 $x \in (A\cap C)\cup(B\cap C)$，则 $x \in A\cap C$，或 $x \in B\cap C$。从而 $x \in A$ 且 $x \in C$，或 $x \in B$ 且 $x \in C$。这就是说，$x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \in C$。故 $x \in A\cup B$ 且 $x \in C$，因此 $x \in (A\cup B)\cap C$。

- **定理 1.1** X 为基本集，为任意集组，则①$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha\in I} (A_\alpha)^C$； ② $\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha\in I} (A_\alpha)^C$

第二节 实数的完备性

- 定理 2.1 (区间套定理) 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为实数轴上的任一闭区间套, 其中 a_n 与 b_n 都是实数, 那么存在唯一的一个实数 ξ 属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 即 $\xi \in \bigcap_{n=1} [a_n, b_n]$, 并且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$
- **命题 2.1** 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的充要条件是$\{x_n\}$ 的每一个子列都收敛而且有相同的极限值 a

  证明　充分性是显然的，只要证明必要性。
  因为 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 所以 $\forall\varepsilon > 0$, 必 $\exists N \in N^*$ 使得 $n > N$ 时，有$|x_n - a| < \varepsilon$

  取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时，必有 $n_k > n_K \geq N$, 从而$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$，即$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$
- **定理 2.2 （列紧性定理）** 任何有界数列必有收敛子列

  证明 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，则必存在两个数 a 与 b，使得

  $$a \le x_n \le b, n = 1, 2, \cdots$$

  (1) 将区间 $[a,b]$ 等分为两个子区间，那么，其中至少有一个子区间含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，即该子区间为 $[a_1,b_1]$。（若两个子区间同时含有无穷多项，则可任取其一作为 $[a_1,b_1]$）

(2) 在将$[a_1,b_1]$二等分，即其中的含有无穷多个x_n的子区间为$[a_2,b_2]$.如此继续下去，就得到一个闭子区间列$\{[a_k,b_k]\}$，

它显然满足：1）是渐缩的；2）$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k}=0$，有康托区间套定理，比有唯一的实数$\xi$属于一切$[a_k,b_k]$，并且有$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$

由于每个子区间都含有$\{x_n\}$的无穷多项，故可在子区间$[a_1,b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记作x_{n_1}；在子区间$[a_2,b_2]$中取$\{x_n\}$的一项，记作x_{n_2}，并且使$n_2>n_1$.如此继续下去，可以得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$：

$$a_k\le x_{n_k}\le b_k$$

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$，故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{nk}=\xi$，这就是说，$\{x_{nk}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子列。

- **基本/柯西数列**：任何正数ε, 都存在一正整数N, 当$m,n>N$时，$|x_m-x_n|<\varepsilon$成立
- **定理 2.3 柯西(Cauchy)收敛原理 (完备性定理)** 数列x_n收敛的充分必要条件是， 它是一个基本数列。

证明 必要性　设$x_n\to a$，则对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$m,n>N$时

$$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而
$$|x_m-x_n|\le|x_m-a|+|x_n-a|<\varepsilon$$

充分性　设$\{x_n\}$是一个基本数列，则$\{x_n\}$必是有界数列，事实上，取$\varepsilon=1$，必有正整数N_0，当$m,n>N_0$时，

$$|x_m-x_n|<1$$

取$m=N_0+1$，则当$n>N_0$时

$$|x_{N_0+1}-x_n|<1$$

从而当$n>N_0$时，
$$|x_n|\le|x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}-x_n|<|x_{N_0+1}|+1$$

而数列$\{x_n\}$的前N_0项是$\{x_1,x_2,\cdots,x_{N_0}\}$有限的，因此，数列$\{x_n\}$是有界的.

根据定理 2.2 ，$\{x_n\}$中必有收敛子列$\{x_{nk}\}$，设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{nk}=a$，则任意的$\varepsilon>0$，存在正整数$K$，当$k>K$时，

$$|x_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

已知为$\{x_n\}$为基本数列，故存在正整数N_1，当 $k>N_1$ （从而$n_k\ge k>N_1$） 时，

$$|x_k-x_{n_k}|<\frac{\varepsilon}{2}$$

令$N=\max(K,N_1)$，则当$k>N$时

$$|x_k-a|\le|x_k-x_{nk}|+|x_{nk}-a|<\varepsilon$$

这就说明 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$.

- **定理 2.4 (单调收敛定理)** 单调有界数列（即单调增有上界数列或单调减有下界数列）必然收敛

证明： **反证法：**不妨设$\{x_n\}$为单调增有上界数列，若$\{x_n\}$不收敛，则由定理 2.3，存在$\varepsilon_0>0$，对于任意正整数N，不等式

$$|x_m - x_n| < \varepsilon_0$$

不能对一切大于或等于N的m,n成立，因而，当取$N=1$时，必有$m_1,n_1\ge 1$，使得

$$|x_{m_1} - x_{n_1}| \ge \varepsilon_0$$

不妨设$m_1>n_1$，取$N=m_1+1$，又必有$m_2,n_2\ge m_1+1$，使得

$$|x_{m_1} - x_{n_1}| \ge \varepsilon_0$$

不妨设$m_2>n_2$。如此继续下去，可得正整数列

$$n_1<m_1<n_2<m_2<\cdots<n_k<m_k<\cdots$$

使不等式

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| \ge \varepsilon_0 \qquad k=1,2,\cdots$$

成立。已知$\{x_n\}$为单调增数列，故有$x_{m_k}>x_{n_k}$，从而

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = x_{m_k} - x_{n_k} \ge \varepsilon_0$$

于是

$$x_{m_k} \ge x_{n} + \varepsilon_0 \ge x_{m_{k-1}} + \varepsilon_0 \ge x_{n_{k-1}} + 2\varepsilon_0 \ge \cdots \ge x_{n_1} + k\varepsilon_0$$

因此，当k充分大时，x_{m_k}可以大于任意给定的正数，这与假设$\{x_n\}$有上界相矛盾。

类似可证，单调减有下界数列也是收敛的。

- 定理2.5 确界存在定理　由上（下）界的数集必有上（下）确界
- 定理 2.6 （有限覆盖定理）若闭区间 $[a,b]$ 被区间族$\mathcal{A}$覆盖，则能从 A 中选出有限个开区间覆盖 $[a,b]$
- 从定理2.1 (区间套定理) $\rightarrow$ 定理 2.2 （列紧性定理）$\rightarrow$定理 2.3 柯西（Cauchy）收敛原理 (完备性定理) $\rightarrow$ 定理 2.4 (单调收敛定理)$\rightarrow$定理 2.5 确界存在定理 $\rightarrow$ 定理 2.6 （有限覆盖定理）

第三节 可数集与不可数集

第四节 直线上的点集与连续函数

- 定义 4.2 设 E 是直线 R 上的任一点集， a 是直线上的任意一点(不一定属于 E)。如果 a 的任一邻域 (α,β) 中含有 E 中不同于 a 的点, 则称 a 为 E 的**极限点**（或聚点）
- 定义 4.3 设 E 为直线上的点集，由 E 的所有极限点构成的集称为 E 的**导集**，记作 E'，

  称集 $E\cup E$ 为 E 的**闭包**，记作 $\bar{E}$

  若集 E 的**余集** $E^c=R\backslash E$ 为开集，则称 E 为**闭集**.
- **定理 4.2** 点 a 是集 E 的极限点的**充要**条件是存在 E 中的点列 $\{a_n\}\ (a_n\neq a)$, 使$\lim_{n\to\infty}a_n=a$

证明：　**必要性**

设 a 是集 E 的极限点，对于每个正整数 n，做 a 的邻域 $(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$。由定义可知，必存在 E 中的点 $a_n, a_n \neq a, a_n \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$，从而得一点列 $\{a_n\}$，满足

$$|a_n - a| < \frac{1}{n}$$

因此　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

充分性： 设 (α,β) 为 a 的一个邻域，取 $\varepsilon>0$，使 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$。因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n \neq a$，故存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n - a|<\varepsilon$，即当 $n>N$ 时，$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$，

因此 a 为 E 的极限点。

- 定理 4.3 非空集 E 是闭集的**充要**条件是 $E' \subset E$
- 定义 4.6 设 $f(x)$ 定义在点集 $E \subset R$ 上，如果对于任意 $\varepsilon>0$, 都能找到 $\delta(\varepsilon)>0$ (注意 $\delta(\varepsilon)$ 与点 x 无关), 使得对于 E 中的任意两点 x_1 与 x_2, 只要 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$成立，则称函数 $f(x)$ 在集 E 上**一致连续**
- **定理 4.4** 集合 E 为闭集的**充要**条件是 $E=\bar{E}$ 。

  证明：必要性　设 E 是闭集，由定理 4.3,　$E' \subset E$。故 $\bar{E}=E\cup E=E$.
  　　　充分性　设 $E=\bar{E}$, 则由 $E' \subset \bar{E}=E$ 及定理 4.3 知 E 是闭集。
- **例 4.4** 设 $f(x)=\frac{1}{x}, E=(0,1)$, 则 $f(x)$ 在 E 上连续但不一致连续。

  证明：$\forall x_0 \in E$，由$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，得$\frac{1}{x_0}-\varepsilon<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+\varepsilon$

  当 $\frac{1}{x_0}-\varepsilon<0$ 时，只要考虑右边的不等式，得$x-x_0>-\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$

  当 $\frac{1}{x_0}-\varepsilon>0$ 时，则有$\frac{x_0}{1-\varepsilon x_0}>x>\frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}$

  故$\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}>x-x_0>-\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$。因此，只要取$\delta=\min\left(\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}, \frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right)=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$

  当 $|x-x_0|<\delta$ 时，就有不等式 (1.14) $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$成立，从而得知 $f(x)$ 在 E 上处处连续。但由于 δ 与 x_0 有关，因此 $f(x)$ 在 E 上不一致连续。
- **例 4.5** 考察函数列 $f_n(x)=x^n, x\in(0,1), n=1,2,\cdots$, 显然, 当 $n\to\infty$ 时, $f_n(x)\to 0$ 。对于任给的 $\varepsilon>0$, 由不等式$|x^n-0|=x^n<\varepsilon$

  容易解得 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$ (这里 $[a]$ 表示数 a 的不大于 a 得整数部分) 它既与 ε 相关，又与 x 相关，可以看成是 ε 与 x 的函数。
- **例 4.6** 证明函数列$f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$　$n=1,2,\cdots$，在 $E=[0,1]$ 上一致收敛于 0 。

  事实上，由于　$0\le f_n(x)=\frac{1}{2n}\bullet\frac{2nx}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{2n}$

  因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N(\varepsilon)=[\frac{2}{\varepsilon}]$，就有

  $$|f_n(x)-0|<\varepsilon, \qquad x\in[0,1]$$

  故 $f_n(x)$ 在[0，1]上一致收敛于 0。
- 定义 4.7 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在点集 $E\subset R$ 上的函数列。如果存在 E 上的函数 $f(x)$, 对于任意 $\varepsilon>0$，都能找到正整数 $N(\varepsilon)$, 使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，不等式$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，对于所有 $x\in E$ 的成立，那么就称 $f_n(x)$ 在集 E 上的一致收敛于 $f(x)$ 。
- **定理 4.9** 定义在点集 $E\subset R$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 的**充要**条件是: 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in N^*$, 使得当 $m,n>N(\varepsilon)$ 时，不等式$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$对于所有 $x\in E$ 的成立.

证明：必要性 设$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，使得当$n>N(\varepsilon)$时，对于所有的$x\in E$都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$$

故当$m,n>N(\varepsilon)$时，不等式

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对于所有的$x\in E$都成立。

充分性 假定定理的条件成立。由定理 2.3，对于任何固定的点$x\in E$，数列$\{f_n(x)\}$都收敛，设其极限为$f(x)$，现在证明$\{f_n(x)\}$在上一致收敛于$f(x)$。由已知，对于任给的$\varepsilon>0$，取$m=n+k(k=1,2,\cdots)$，对于所有的$x\in E$及k，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

此即

$$|f(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

所以当$n>N(\varepsilon)$时，不等式

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对于所有的$x\in E$都成立，故$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$。

第五节 点集的勒贝格测度与可测函数

第六节 勒贝格积分

- 定理 6.6 (勒贝格控制收敛定理） 设 $mE<\infty$， $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，并且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)(\text{ a.e. })$, 若存在一个 E 上的勒贝格可积函数 $g(x)$, 使得在 E 上
$$|f_n(x)|\le g(x)(\text{ a.e. }), n=1,2,\cdots$$
则 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积，并且
$$\int_E f(x)dm=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dm$$
- 定理 6.7 设 $mE<\infty, f(x)$ 与 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上的非负可测函数， 并且 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)(a.e.)$， 则$\int_E f(x)dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dm$
- **例 6.1** 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 试计算 R 积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 的值.

  因为$\ln x=\ln[1-(1-x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n},\quad x\in(0,1)$
  所以 $\frac{\ln x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n},\quad x\in(0,1)$

  在区间[0,1]内，上面级数的每一项都是非负的，利用定理 6.7，可得

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

- **例 6.2** 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx$

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx=0,\quad x\in(0,1)$$

$$\left|\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right|\le\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\le\frac{nx^{1/2}}{2nx}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x(0,1)$$

而 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在区间[0,1]上 R 可积，从而 L 可积，因此，根据勒贝格控制收敛定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx=0$$

- **例6. 3** 设 $f(t)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的 L 可积函数，称$\tilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\pi}f(t)dt$为函数 $f(t)$ 的富里哀变换，试证1）$\tilde{f}(x)$ 是上$(-\infty,+\infty)$的连续函数；　2）$\tilde{f}(x)=-\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{it}f(t)dt$

证 1）　因为

$$\tilde{f}(x+h)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h)}f(t)dt$$

而且 $|e^{it(x+h)}f(t)|=|f(t)|$ 是 L 可积的，由勒贝格控制收敛定理立即可得

$$\lim_{h\to0}\tilde{f}(x+h)=\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h)}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=\tilde{f}(x)$$

因此 $\tilde{f}(x)$ 是连续函数.

2）　根据导数的定义：

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{it}f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}\right]f(t)dt$$

而

$$\left|\left[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}\right]f(x)\right|\le\left|\frac{e^{-ith}-1}{it}\right||f(t)|=\left|\frac{2\sin\frac{h}{2}t}{t}\right||f(t)|\le|h||f(t)|$$

因此，当 $|h|\le1$ 时，被积函数为 $|f(t)|$ 所控制，由勒贝格控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{it}f(t)dt&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}\right]f(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-itx}-1}{it}\right)f(t)dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=-\tilde{f}(x)\end{aligned}$$

第二章 距离空间

第一节 距离空间的基本概念

- 距离满足条件：1) 非负性, $\rho(x,y)\ge0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
  2) 对称性, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;　3) 三角不等式，对任意的 $x,y,z\in X$, 有$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$
- **例 1.2** 连续函数空间 $C[a,b]$
  令 $C[a,b]=\{x(t)\mid x(t)$ 为 [a, b] 连续函数 $\}$
  在 $C[a,b]$ 上定义$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$

现在我们来证明 $\rho(x,y)$ 是距离。条件 1），2）显然满足，只需验证三角不等式就够了。

设 $x(t), y(t), z(t) \in C[a,b]$，因为对任何 $t \in [a,b]$ 均有

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\le |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| \\ &\le \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)| + \max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)| \\ &= \rho(x,z)+\rho(y,z) \end{aligned}$$

从而有

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

故 $C[a,b]$ 按距离(2.6)是距离空间。 ■

- **例 1.3** 有界数列空间 m 。
  设 m 表示所有的有界数列$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$(其中 $|\xi_i| \le k_x, i=1,2,\cdots,$ k_x 是常数) 所构成的集合。如果 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in m$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in m$， 定义$\rho(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|$
  类似于例 1.2, 容易验证 $\rho(x,y)$ 是距离，从而 m 按这个距离构成距离空间。
- 例 1.4 离散距离空间 $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\neq y\end{cases}$
- 例 1.5 空间 $L^p(E)(p\ge 1)$。$L^p[a,b]=\{f(x)\mid (\int_a^b|f(x)|^p)^{1/p}<\infty\}$
  $\rho(x,y)=\left(\int_E|x(t)-y(t)|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$
- 例 1.6 l^p 空间 $(p\ge 1)$。令$l^p=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\cdots)\,|\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^p<+\infty\}$
  如 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\cdots)$， $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n,\cdots)\in l^p$， $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^\infty|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

第二节 距离空间中的开集、闭集与连续映射

- **定理 2.5** 设 X,Y 都是距离空间， $T:X\to Y$， 则下列命题是等价的。
  1) T 在 $x_0\in X$ 连续;
  2) 对于 Tx_0 的任一邻域 $s(Tx_0,\varepsilon)$, 必存在 x_0 的邻域 $s(x_0,\delta)$, 使得$T(S(x_0,\delta))\subset S(Tx_0,\varepsilon)$
  3) 对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\to x_0$, 则必有$Tx_n\to Tx_0$

证明： $1)\Rightarrow 2)$，由在 x_0 连续的定义，这是显然的。

$2)\Rightarrow 3)$，设 $\{x_n\}\subset X$，且 $x_n\to x_0$，则对于 $\delta>0$，必存在 N，当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$，即当 $n>N$ 时，$x_n\in S(x_0,\delta)$，从而有 $Tx_n\in S(Tx_0,\varepsilon)$，也就是说当 $n>N$ 时，$\rho_1(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$。故

$$Tx_n\to Tx_0$$

$3)\Rightarrow 1)$，用**反证法**，设 T 在 x_0 不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任何的 $\delta>0$，都存在 x 满足 $\rho(x,x_0)<\delta$，但

$$\rho_1(Tx_n,Tx_0)\ge\varepsilon_0$$

这就是说 $x_n\to x_0$，但 Tx_n 不趋近于 Tx_0，与假设矛盾。

第三节 距离空间的可分性与完备性

- 定义 3.3 设 x 为距离空间
  1) 如点列 $\{x_n\}\subset X$, 满足 $\lim_{m,n\to\infty}\rho(x_m,x_n)=0$, 即任取 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $m,n>N$ 时， 有 $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为基本列或柯西列。
  2) 若 x 中的每个基本列都收敛，则称 X 为完备的距离空间。
- **例3.4** $\mathrm{C}[a,b]$ 是完备的距离空间

设 $\{x_n\} \subset C[a,b]$ 是基本列。故任取 $\varepsilon > 0$，必存在正整数 N，使得当 $m > N, n > N$ 时有

$$\rho(x_n, x_m) = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

即当 $m > N, n > N$，对每一个 $t \in [a,b]$ 有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

由第一章定理 4.9，存在 $x(t)$，使 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$，又由第一章定理 4.10，得 $x(t) \in C[a,b]$，即存在 $x \in C[a,b]$，使 $x_n \to x$，故 $C[a,b]$ 是完备的。 ■

第四节 压缩映射原理及其应用

- 定理 4.1 设 X 是完备的距离空间, $T: X \to X$ 是压缩映射。则 T 在 X 中存在唯一的不动点 $\tilde{x}$, 即有 $\tilde{x} = T\tilde{x}$
- **推论 4.1** 设 X 是完备的距离空间, $T: X \to X$, 如 T 在闭球 $\bar{S}(x_0, r)$ 上是压缩映射，并且 $\rho(Tx_0, x_0) \leq (1-\alpha)r$, 则 T 在 $\bar{S}$ 中存在唯一的不动点。

  证明: 只要能证明在上述迭代过程中，每个 x_n 都在闭球 $\bar{s}$ 中，则定理 4.1 的证明都适用。为此，只要证明 $\bar{T}\bar{\subset} \subset \bar{S}$ 就够了。设 $x \in \bar{S}$, 即 $\rho(x, x_0) \leq r$, 则 $\rho(Tx, x_0) \leq \rho(Tx, Tx_0) + \rho(Tx_0, x_0) \leq \alpha\rho(x, x_0) + (1-\alpha)r \leq \alpha r + (1-\alpha)r = r$

  故$Tx \in \bar{S}$
- **推论 4.2** 设 X 是完备的距离空间， $T: X \to X$。如存在常数 $\alpha(0 \leq \alpha < 1)$ 及正整数n_0, 使对任何 $x, y \in X$ 都有$\rho(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \leq \alpha\rho(x, y)$，则 T 存在唯一的不动点。

  证明：因 T^{n_0} 是压缩映射，故 T^{n_0} 存在唯一的不动点 $\tilde{x}$，即 $T^{n_0}\tilde{x} = \tilde{x}$，但是

  $$T^{n_0}(T\tilde{x}) = T^{n_0+1}\tilde{x} = T(T^{n_0}\tilde{x}) = T\tilde{x}$$

  这说明 $T\tilde{x}$ 也是 T^{n_0} 的不动点，**由 T^{n_0} 不动点的唯一性**，得到

  $$\tilde{x} = T\tilde{x}$$

  这就是说 $\tilde{x}$ 也是 T 的不动点。

  再证唯一性。如 T 有另一个不动点 $\tilde{x}_1$，即 $\tilde{x}_1 = T\tilde{x}_1$，则

  $$T^{n_0}\tilde{x}_1 = T^{n_0-1}(T\tilde{x}_1) = T^{n_0-1}\tilde{x}_1 = \cdots = \tilde{x}_1$$

  所以 $\tilde{x}_1$ 也是 T^{n_0} 的不动点，从而

  $$\tilde{x} = \tilde{x}_1$$
- **例 4.2** 微分方程解的存在性与唯一性。

  考察微分方程的初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y|_{x_0} = y_0 \end{cases}$

  设 $f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且关于 y 满足立普希茨（Lipschitz）条件 $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$

  则有满足初始条件的唯一解。

  证明：问题(2.24)等价于积分方程

  $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

的求解。取 $\delta > 0$，使 $K\delta < 1$。考虑连续函数空间 $C[x_0-\delta, x_0+\delta]$，定义映射 $T: C[x_0-\delta, x_0+\delta] \to C[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 如下：

$$(Ty)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

则

$$\begin{aligned}
\rho(Ty_1, Ty_2) &= \max_{|x-x_0|\le\delta}\left|\int_{x_0}^{x}[f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]dt\right| \\
&\le \max_{|x-x_0|\le\delta}\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|dt\right| \\
&\le \max_{|x-x_0|\le\delta}\left|\int_{x_0}^{x}K|y_1(t)-y_2(t)|dt\right| \\
&\le K\max_{|x-x_0|\le\delta}|y_1(t)-y_2(t)||x-x_0| \\
&\le K\rho(y_1,y_2)\delta = K\delta\rho(y_1,y_2)
\end{aligned}$$

由于 $K\delta < 1$，故 T 是压缩映射，由定理 4.1 存在 T 的唯一不动点，即存在唯一的 $y(x) \in C[x_0-\delta, x_0+\delta]$，使得

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

这个 $y(x)$ 是连续可微的，它就是问题(2.24)的唯一解。但它又定义于 $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ 上，重复利用定理 4.1，可将它延拓到整个数轴上去。

- **例 4.3** 线性代数方程解的存在性与唯一性。

  设有线性方程组 $x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

  如对每个 i，$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \le \alpha < 1$，则该方程组有唯一解。

证明：在空间 R^n 中定义距离

$$\rho_1(x,y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$$

（其中 x_i 与 y_i 分别是 x 与 y 的第 i 个分量）则 R^n 按照距离 ρ_1 是一个距离空间，且是完备的（读者不妨自己验证）。在这个空间中，定义 $T: R^n \to R^n$，$y = Tx$ 由下式确定：

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

如令 $Tx^{(1)} = y^{(1)}, Tx^{(2)} = y^{(2)}$，则有

$$\begin{aligned}
\rho(Tx^{(1)}, Tx^{(2)}) = \rho(y^{(1)}, y^{(2)}) &= \max_{1\le i\le n}|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| \\
&= \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})\right| \\
&\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})| \\
&\le \max_{1\le j\le n}|(x_j^{(1)} - x_j^{(2)})|\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|
\end{aligned}$$

由条件(2.26)可得

$$\rho(Tx^{(2)}, Tx^{(2)}) \le \alpha\rho(x^{(2)}, x^{(2)})$$

即 T 是压缩映射，从而它有唯一的不动点，即方程(2.25)有唯一解且可用迭代方法求得。

第三章 巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子

第一节 线性赋范空间与巴拿赫空间

- 范数公理：1) $\|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x = \theta$ 时, 才有 $\|x\| = 0$;
  2) $\|\alpha x\| =|\ \alpha \|x\|$； 3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- 设 X 和 Y 为两个线性空间（同为实的或复的）, 如果存在从 x 到 Y 上的某个 $\mathbf{1}-\mathbf{1}$ 映射 φ, 使对任意 $x_1, x_2 \in X$, 及任意 λ, 成立 $\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$ $\varphi(\lambda x_1) = \lambda\varphi(x_1)$

  则称 X 与 Y 是**线性同构**的，映射 φ 称为 X 到 Y 的线性同构映射。
- **线性赋范空间** = 线性空间 + 范数

  巴拿赫空间：完备的线性赋范空间
- **定理 1.3** 线性赋范空间 X 中的球是凸集

  证明： 设 $\bar{S}(x_0, r)$ 为 X 中以 x_0 为中心，r 为半径的闭球。任取 $x_1, x_2 \in \bar{S}(x_0, r)$, 令 $y = ax_1 + (1-a)x_2 \quad (0 \leq a \leq 1)$ ，则有

$$\begin{aligned}\|y - x_0\| &= \|ax_1 + (1-a)x_2 - x_0\| \\ &= \|ax_1 + (1-a)x_2 - [ax_0 + (1-a)x_0]\| \\ &\leq a\|x_1 - x_0\| + (1-a)\|x_2 - x_0\| \\ &\leq ar + (1-a)r = r\end{aligned}$$

  即 $y \in \bar{S}(x_0, r)$, 故 $\bar{S}(x_0, r)$ 为凸集，由于 x_0, r 的任意性，证明了 X 中任意闭球是凸集。 ∎

  对开球 $S(x_0, r)$，只要把最后的"≤"改为"<"同样可证出。

第二节 有界线性算子与有界线性泛函

- **线性算子** ： $T(x_1+x_2) = Tx_1 + Tx_2$
  $T(\alpha x_1) = \alpha T x_1$

  连续算子 ：若对任意 $x_n, x \in D$, $x_n \to x$, 有 $Tx_n \to Tx$

  有界算子 ： $\|Tx\| \leq M\|x\|$
- **T 的范数**：设 $T: D \to Y$ 为有界线性算子，则$\|T\| = \inf\{M \mid \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in D\}$
- **定理 2.3** 有界线性算子 T 的范数有下列性质：

  1) $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$, $\forall x \in D$； 2) $\|T\| = \sup_{\substack{|x| \leq | \\ x \in |}} \|Tx\| = \sup_{\substack{|x|=1 \\ x \in D}} \|Tx\| = \sup_{x \in D} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

证明：1）由定义直接推得。

2）若 $\|x\|\le 1$，则 $\|Tx\|\le\|T\|\|x\|\le\|T\|$，故

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|\le\|T\| \tag{3.28}$$

由 $\|T\|$ 的定义，任取 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in D$，使

$$\|Tx'\|>(\|T\|-\varepsilon)\|x'\|$$

$x'\neq\theta$，令 $$x_1=\frac{x'}{\|x'\|}\in D\quad,\qquad \|x_1\|=1$$

则 $$\|Tx_1\|=\frac{1}{\|x'\|}\|Tx'\|>\frac{1}{\|x'\|}(\|T\|-\varepsilon)\|x'\|=\|T\|-\varepsilon$$

所以 $$\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|\ge\|Tx_1\|>\|T\|-\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$， $$\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|\ge\|T\| \tag{3.29}$$

综合式（3.29）和（3.28）即得 $\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|=\|T\|$ ∎

- **例2.3** 设算子 T 的定义如下 $Tx(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt=y(s)$

其中 $K(s,t)$ 为二元函数，T 称为以 $K(s,t)$ 为核的弗莱德霍姆(Fledholm)算子。

1)若 $K(s,t)$ 在 $a\le s,t\le b$ 上连续，则 T 可看作是由 $C[a,b]$ 映到 $C[a,b]$ 的算子。T 为线性算子是明显的，**现证 T 是有界的**。事实上，对任意 $x(s)\in C[a,b]$，有

$$\begin{aligned}\|Tx(s)\|&=\max_{a\le s\le b}\left|\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right|\\&\le\max_{a\le s\le b}\int_a^b|K(s,t)|dt\cdot\max_{a\le s\le b}|x(t)|\\&=M\cdot\|x\|\end{aligned}$$

其中 $M=\max_{a\le s\le b}\int_a^b|K(s,t)|dt$。由范数的定义

$$\|T\|\le\max_{a\le s\le b}\int_a^b|K(s,t)|dt$$

进一步还可证明 $$\|T\|=\max_{a\le s\le b}\int_a^b|K(s,t)|dt$$

一般情况下，计算算子的范数往往是比较困难的，由于篇幅的限制，证明从略。

2）若 $K(s,t)$ 在 $a\le s,t\le b$ 上平方可积，即

$$\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)dsdt=M^2<\infty$$

则 T 可看作是由 $L^2[a,b]$ 映到 $L^2[a,b]$ 的算子。T 为线性算子同样是明显的，现证 T 是有界的。事实上，

$$\begin{aligned}\|Tx(s)\|^2&=\int_a^b y^2(s)ds=\int_a^b\left(\int_a^b K(s,t)x(t)dt\right)^2ds\\&\le\int_a^b\left[\left(\int_a^b K^2(s,t)dt\right)^{1/2}\left(\int_a^b x^2(t)dt\right)^{1/2}\right]^2ds\\&=\int_a^b\int_a^b K^2(s,t)dtds\cdot\int_a^b x^2(t)dt\\&=M^2\|x\|^2\end{aligned}$$

即 $$\|Tx\|\le M\|x\|$$

因而 $$\|T\| \le M = \left[\int_a^b \int_a^b K^2(s,t)dsdt\right]^{1/2}$$

且还有 $$\|T\| = \left[\int_a^b \int_a^b K^2(s,t)dsdt\right]^{1/2}$$ （证明从略）

- **例2.4** 设算子 T 的定义$

  因为有
  $T(\alpha x_1(s) + \beta x_2(s)) = s \cdot (\alpha x_1(s) + \beta x_2(s)) = \alpha (s x_1(s)) + \beta (s x_2(s)) = \alpha T x_1(s) + \beta T x_2(s)$
  所以，T 为线性算子。

  算子 T 可以看作是定义在不同空间、值域为不同空间的线性算子。譬如

  $$T:\quad \begin{array}{l} C[a,b] \to C[a,b] \\ L^2[a,b] \to L^2[a,b] \\ C[a,b] \to L^2[a,b] \end{array}$$

  不难证明，他们都是有界的。

  以第三个线性算子为例证明。

  $$\begin{aligned} \|Tx(s)\|_{L^2}^2 &= \int_a^b s^2 x^2(s) ds \le \int_a^b s^2 \left(\max_{a\le s\le b}|x(s)|\right)^2 ds \\ &= \left(\max_{a\le s\le b}|x(s)|\right)^2 \int_a^b s^2 ds \\ &= \frac{(b^3 - a^{3})}{3}\|x(s)\|_C^2 \end{aligned}$$

  即 $$\|Tx\|_{L^2} \le \frac{\sqrt{b^3 - a^3}}{\sqrt{3}}\|x\|_C$$

  T 有界，且 $$\|T\| \le \frac{\sqrt{b^3 - a^3}}{\sqrt{3}}$$ ■

- 线性算子空间：$\mathrm{B}(X, Y)$ = 有界线性算子 + 线性运算 + 范数

  加法算子：$\|(T_1 + T_2)x\| \le \|T_1 x\| + \|T_2 x\| \le (\|T_1\| + \|T_2\|) \mid x\|$ $\|T_1 + T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$
  数乘算子：$\|\lambda T_1 x\| = |\lambda \|T_1 x\| \le |\lambda| \cdot \|T_1\| \cdot \|x\|$ $\|\lambda T_1\| \le |\lambda| \cdot \|T_1\|$

- 设 x 为以 R (或 C)为数域的线性赋范空间，以 R (或 C)为值域的算子称为 X 的**泛函**。若 $f: X \to R($或$C)$ 是有界、线性的，称 f 为**有界线性泛函**

- **例 2.7** l^p 空间 $(p > 1)$ 的共轭空间。
  设 $x = \{\xi_i\} \in l^p$，$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$，$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$ 。任取 $y = \{\eta_i\} \in l^q$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，设$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$，则 f 为 l^p 上的有界线性泛函。

第三节 内积空间与希尔伯特空间

- 内积空间：1）$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$；2）$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

  3）$\langle x, x\rangle \ge 0$；当且仅当 $x = \theta$ 时，，有 $\langle x, x\rangle = 0$；4）$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle + \bar{\beta}\langle x, z\rangle$

  希尔伯特空间：完备的内积空间

- 许瓦尔兹不等式：$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$

- **性质 3.1** 设 H 为希尔伯特空间，H 中的内积 $\langle x, y\rangle$ 为 x, y 的连续函数，即若$x_n \to x, y_n \to y$，则 $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$

  证明：
  $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to 0$

- **性质 3.2** H 中的内积与范数有下列关系：
  若 H 为实希尔伯特空间时，$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$

  若 H 为复希尔伯特空间时，$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right)$

证明：利用内积导出的范数定义$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$。可以参考性质3.3的证明

- **性质 3.3** H 中的范数满足下列的平行四边形公式$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$

  证明：
  $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\langle x+y, x+y\rangle+\langle x-y, x-y\rangle=\langle x, x+y\rangle+\langle y, x+y\rangle+\langle x, x-y\rangle-\langle -y, x-y\rangle$

  $=[\langle x, x+y\rangle+\langle x, x-y\rangle]+[\langle y, x+y\rangle-\langle y, x-y\rangle]=2\|x\|^2+2\|y\|^2$