

## 目录

第2章 线性系统的数学描述	1
第3章 线性系统的时域分析	1
第4章 根轨迹法	3

### 第2章 线性系统的数学描述

1. 电气系统: 电容:  $i = C \frac{dv}{dt}$ , 运算阻抗  $\frac{1}{Cs}$       电感:  $u = L \frac{di}{dt}$ , 运算阻抗  $Ls$   
机械系统:  $a = \omega^2 r$        $v = \omega r$       阻尼器  $F = -\mu v$
2. 理想运放:  $u_- = u_+, i = 0$
3. 拉氏变换:  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$   
基本定理: 线性、微分定理:  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$ 、  
积分定理:  $f(t)$  每积分一次,  $F(s)$  多乘  $\frac{1}{s}$   
初值定理  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 、终值定理: 相反
4. 传递函数:  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$   
特点: ①适用于线性定常系统; ②在零初始条件(输入量  $t \geq 0$  才起作用; 开始之前稳定)下定义的; ……
5. 典型环节传递函数 ①比例(放大):  $G(s) = K$ ;  
②惯性(非周期):  $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$  无震荡      ④积分:  $G(s) = \frac{K}{s}$  记忆  
③纯微分:  $G(s) = Ts$  预示。现实中有一定的惯性  $G(s) = \frac{Ts}{Ts+1}$   
⑤振荡:  $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$ ;      ⑥纯时间延时:  $G(s) = e^{-\tau s}$
6. 开环传递函数 =  $\frac{\text{反馈信号 } B(s)}{\text{偏差信号 } E(s)} = G(s)H(s)$       前向传递函数 =  $\frac{\text{输出量 } C(s)}{\text{偏差信号 } E(s)}$   
闭环传递函数  $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

第5章 频率响应法	4
第6章 线性系统的校正方法	5
第7章 线性离散系统分析与设计	6
第8章 非线性控制系统分析	6

7. 叠加原理:  $C(s) = C_R(s) + C_N(s)$        $R$  为参考输入量,  $N$  为扰动
8. 结构图的简化      等效原则  
①串联: 积;      ②并联: 和;      ③反馈回路:  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$ ;  
④相加点前移: 提取  $C(s) = G(s)R(s) \pm Q(s) = G(s) \left[ R(s) \pm \frac{Q(s)}{G(s)} \right]$ ;  
⑤相加点后移: 分配  $C(s) = G(s)[R(s) \pm Q(s)] = G(s)R(s) \pm G(s)Q(s)$ ;  
⑥分支点前移: 乘;      ⑦分支点后移: 除;  
⑧相邻相加/分支点之间移动: 不变      不能轻易交换
9. 梅逊公式  $P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k$        $P$ : 系统总增益,  $k$ : 前向通道数目,  $P_k$ : 第  $k$  条增益  
特征式:  $\Delta = 1 - \sum L_{(1)} + \sum L_{(2)} - \sum L_{(3)} + \cdots + (-1)^m \sum L_{(m)}$   
 $\sum L_{(1)}$ : 所有不同回路增益之和       $\Delta_k$ : 去除与第  $k$  条接触的后余下的特征式  
 $\sum L_{(2)}$ : 所有任意两个互不接触回路增益乘积之和  
 $\sum L_{(3)}$ : 所有任意三个互不接触回路增益乘积之和
- 10.

### 第3章 线性系统的时域分析

1. 典型输入信号:      ⑤正弦  $r(t) = A \sin \omega t, R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$   
①阶跃  $r(t) = \begin{cases} R \cdot 1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{R}{s}$ ;      ②斜坡(速度)  $r(t) = \begin{cases} Rt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{R}{s^2}$ ;  
③加速度  $r(t) = \begin{cases} \frac{Rt^2}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, R(s) = \frac{R}{s^3}$ ;      ④脉冲  $r(t) = \begin{cases} \frac{1}{h} & 0 < t < h \\ 0 & t \leq 0, t \geq h \end{cases}, R(s) = 1$ ;  
2. 线性定常系统的时间响应 = 稳态分量 + 暂态分量(带  $e$ )  
3. 动态性能指标:      延迟时间  $t_d$ : 到达稳态值一半;  
上升时间  $t_r$ : 无震荡, 稳态值的 10% 到 90%, 有震荡, 0 到稳态值;

峰值时间 $t_p$ : 到第一个峰值; 调节时间 $t_s$

振荡次数 $N$ : 0 到  $t_s$  最大超调量 $\sigma$

通常上升时间和峰值时间评价系统的响应速度;

超调量评价系统的阻尼程度;

调节时间反映响应速度和阻尼程度的综合指标;

#### 4. 一阶系统的时域分析

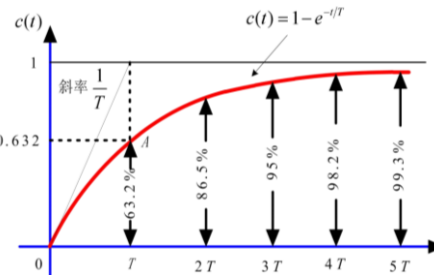
$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \rightarrow \Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

求导  
①单位阶跃响应 $c(t) = 1 - e^{-t/T}, t \geq 0 \rightarrow$

②单位脉冲响应 $c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, t \geq 0$

③单位斜坡响应 $c(t) = c_s(t) + c_t(t) = (t - T) + T e^{-t/T}, t \geq 0$

④单位加速度响应 $c(t) = \frac{1}{2} t^2 - T t + T^2 (1 - e^{-t/T}), t \geq 0$



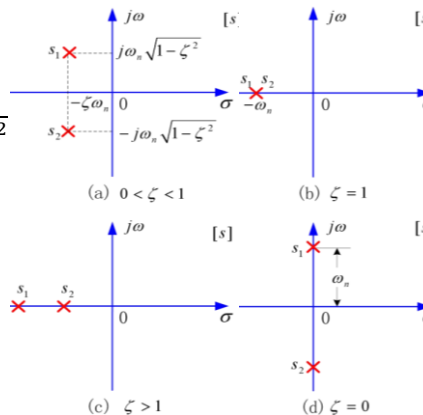
#### 5. 二阶系统的时域分析

$\zeta$ 为阻尼比,  $\omega_n$ 为自然振荡角频率

a) 标准形式:  $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2}{\tau s^2 + s + K_1 K_2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

惯性+积分环节

特征根(极点) $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



①欠阻尼( $0 < \zeta < 1$ )  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

②临界阻尼( $\zeta = 1$ )  $s_{1,2} = -\omega_n$

③过阻尼( $\zeta > 1$ )  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

④无阻尼( $\zeta = 0$ )  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

b) 单位阶跃响应:  $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$

①欠阻尼( $0 < \zeta < 1$ )  $C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi), t \geq 0$$

阻尼自振角频率 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$   $\varphi = \arctan(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)$

$$\text{振荡周期 } T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

一般希望 $0.4 < \zeta < 0.8$

②临界阻尼( $\zeta = 1$ ); ③过阻尼( $\zeta > 1$ ): 两个惯性环节的串联; ④无阻尼( $\zeta = 0$ )

c) 性能指标: 上升时间 $t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d}$  峰值时间 $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

最大超调量 $\sigma = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \Leftrightarrow \zeta = -\frac{\ln \sigma}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \sigma}} ???$  振荡次数 $N = \frac{t_s}{T_d} = \frac{t_s}{2t_p}$

调节时间 $t_s = \frac{1}{\zeta\omega_n} (\ln \frac{1}{\Delta} + \ln \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}})$   $\Delta = 5\%, t_s \approx \frac{3.5}{\zeta\omega_n}; \Delta = 2\%, t_s \approx \frac{4.4}{\zeta\omega_n} ?$

d) 结论: ① $\zeta$ 一定时,  $\omega_n$ 越大, 瞬态响应分量衰减越迅速

②一般希望 $0.4 < \zeta < 0.8$ , 最佳为 $0.707(\varphi = 45^\circ)$

③二阶系统的单位脉冲响应可以通过单位阶跃响应求导得到

#### 6. 高阶系统的时域分析

a)  $\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^q (s+p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}$

b) 单位阶跃响应:  $C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{s-s_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k(s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$

c) 结论: ③主导极点: 其实部为其他极点的 1/5

①高阶系统瞬态响应各分量的衰减快慢由指数衰减系数 $s_i$ 和 $-\zeta_k \omega_{nk}$ 决定

②偶极子(重合的零极点, 即 $s_i$ 和 $z_j$ 重合)对系统的瞬态响应几乎无影响

#### 7. 线性常微分方程的解=齐次微分方程的通解+非齐次微分方程的任一特解

= 零输入响应+零状态响应=自然响应+受迫响应

#### 8. 线性系统的稳定性分析

a) 充要条件: 极点均在复平面的左半部分

b) 零输入响应的稳定性: 内部稳定性;

零状态响应的稳定性: 外部稳定性

c) ★劳斯判据: 判定零输入/状态系统是否稳定

必要条件: 所有系数为正且不缺项

充分条件: 表中第一列全为正

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 a_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots \quad f_1 = a_n$$

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$s^2$	$d_1$	$d_2$	$d_3$		
$s^1$	$e_1$	$e_2$			
$s^0$	$f_1$				

## 第4章 根轨迹法

特殊情况：①表中某行第一个为0其余不全为0：用很小的正数代替0后计算

②表中某行全为0：用上一行构成辅助方程，后对s求导

$$9. \text{误差: } e(t) = c_r(t) - c(t) = r(t) - b(t) = c(\infty) - c(t)$$

输出的期望值和实际值 设定输入量与主反馈量 某些情况下

$$\text{稳态误差: } e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad \text{衡量系统控制精度的}$$

$$\text{稳态值: } c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)R(s) \quad \text{稳态性能指标主要指稳态误差}$$

$$10. \text{开环放大倍数 } K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\gamma G_o(s) \quad \gamma \text{ 为积分单元个数, 表示系统类型}$$

$$11. \star \text{系统的误差 } E(s) = E_r(s) + E_N(s) = \frac{1}{1+G_o(s)} R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1+G_o(s)} N(s)$$

=系统误差(跟踪输入的能力)+扰动误差(抑制扰动的能力)

$$E_r(s) = [R(s) - B(s)] \quad G_o(s) = G_1(s)G_2(s)H(s) \text{ 为开环传递函数}$$

$$\text{静态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\gamma}$$

$$\text{静态速度误差速度 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-1}}$$

$$\text{静态加速度误差系数 } K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-2}}$$

$$\text{单位阶跃输入 } e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}; \quad \text{斜坡输入 } e_{ss} = \frac{1}{K_v}; \quad \text{加速度输入 } e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

系统类型	静态误差系数			稳态误差 $e_{ss}$		
	$K_p$	$K_v$	$K_a$	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = t^2/2$
0型	$K$	0	0	$\frac{1}{K+1}$	$\infty$	$\infty$
I型	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
II型	$\infty$	$\infty$	$K$	0	0	$\frac{1}{K}$

结论：①输入为正弦信号时，不能使用终值定理

②减小系统误差的方法：增大K；提高系统型别数。但都会影响系统稳定性

12.

1. 根轨迹条件：幅值条件  $|G(s)H(s)| = 1$

(充要条件) 相角条件  $\angle G(s)H(s) = \arg[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ + i \cdot 360^\circ, i = 0, 1, \dots$

2. 根轨迹的绘制：根据开环增益绘制

$$\text{①写出特征方程 } 1 + G(s)H(s) = 0 \quad \text{②改成零极点增益形式 } 1 + \frac{KM(s)}{N(s)} = 0$$

③复平面上，极点开始，零点(or 无穷远)结束，分支数=极点数；

④实轴上，根轨迹右侧的零极点数之和为奇数

$$\text{⑤渐近线与实轴交点 } \sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m} \quad \text{与实轴正方向夹角 } \varphi_a = \frac{\pm 180^\circ(2q+1)}{n-m}$$

$n$  为极点数,  $m$  为零点数,  $q = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{⑥分离点: } \frac{dK}{ds} = 0 \text{ 或 } N(s)M'(s) - N'(s)M(s) = 0$$

$$\text{实轴上分离点的分离角恒为 } \pm 90^\circ \quad \sum \frac{1}{d-p_i} = \sum \frac{1}{d-z_i}$$

$$\text{⑦根轨迹与虚轴交点: } s = j\omega \rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0 \end{cases}$$

$$\text{⑧出射角 } \theta_{p_r} = \pm 180^\circ(2q+1) - \sum_{j=1 \neq r}^n \arg(p_r - p_j) + \sum_{i=1}^m \arg(p_r - z_i)$$

$$\text{入射角 } \theta_{z_r} = \pm 180^\circ(2q+1) + \sum_{j=1}^n \arg(z_r - p_j) - \sum_{i=1 \neq r}^m \arg(z_r - z_i)$$

对应于同一对极点(或零点)的出射角(或入射角)为相反数。

⑨根轨迹的根之和/积：

I 若  $n - m \geq 2$ ,

$$\text{则 } \sum(-p_i) = \sum(-s_i) = -a_1$$

$p_i$  为开环极点,  $s_i$  为闭环极点

II 原点存在开环极点,

$$\text{则 } K \prod z_j = \prod s_i = a_n \quad z_j \text{ 为开环零点}$$

3. 参数根轨迹：以非参数根轨迹绘制

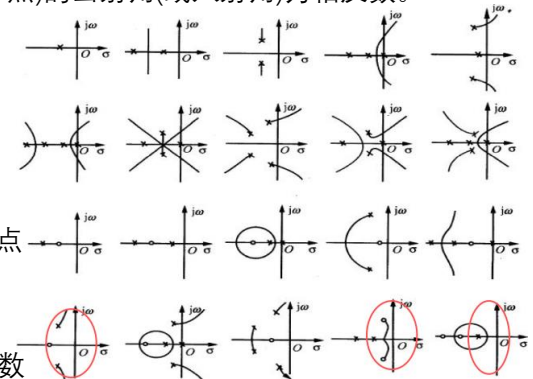
将特征方程改变为  $1 + \rho G_1(s) = 0$

其余不变,  $\rho G_1(s)$  为等效开环传递函数

4. 零度根轨迹：正反馈系统,  $1 - G(s)H(s) = 0$

5. 增加开环极点, 可使根轨迹改变并向右移, 降低系统相对稳定性, 增加调节时间;

增加开环零点, 可使根轨迹左移, 改善系统稳定性和动态性能



## 第5章 频率响应法

1. 频率特性:  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$  幅频特性  $A(\omega) = |G(j\omega)|$

相频特性  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ : 输入/出信号相角之差

$\varphi(\omega) > 0$  相角超前,  $\varphi(\omega) < 0$  相角滞后。

2. 幅频特性曲线:  $A(\omega)$  为纵坐标; 相频特性曲线:  $\varphi(\omega)$  为纵坐标

3. 典型环节的频率特性:

a) 比例  $G(j\omega) = K, \begin{cases} A(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = 0^\circ \end{cases}$  迟后  $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, \begin{cases} A(\omega) = 1 \\ \varphi(\omega) = \omega\tau \end{cases}$

b) 积分  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\omega} \\ \varphi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$  伯德图镜像

c) 微分  $G(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}, \begin{cases} A(\omega) = \omega \\ \varphi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$  伯德图镜像

d) 惯性  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}, \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T) \end{cases}$  伯德图镜像  
交接频率  $\omega = \frac{1}{T}$ , 对称中心  $\varphi = 45^\circ, \omega = \frac{1}{T}$   
频率特性互为倒数

e) 一阶微分  $G(j\omega) = 1 + j\omega T, \begin{cases} A(\omega) = \sqrt{1+(\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctan(\omega T) \end{cases}$   
高频放大, 抑制噪声能力的下降

f) 二阶振荡  $G(j\omega) = \frac{1}{(Tj\omega)^2 + 2\zeta Tj\omega + 1}, \begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2 T^2}) \end{cases}$

交接频率  $\omega = \frac{1}{T}$ , 对称中心  $\varphi = 90^\circ, \omega = \frac{1}{T}$

低频段:  $\omega T \ll 1, L(\omega) = 0$ ; 高频段  $\omega T \gg 1, L(\omega) = -40 \lg(\omega T) \text{ dB}$

4. 幅相特性曲线 (奈氏图): 极坐标图  $G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$  开环

步骤: ① 求出  $A(\omega)$  和  $\varphi(\omega)$ ; ② 计算  $\omega = 0$  和  $\infty$  时的  $G(j\omega)$ ;

③ 利用  $\begin{cases} \text{Im}[G(j\omega)] \\ \text{Re}[G(j\omega)] \end{cases}$  or  $\begin{cases} \varphi(\omega) = n \cdot 180^\circ \\ \varphi(\omega) = n \cdot 90^\circ \end{cases}$  计算  $\begin{cases} \text{实轴} \\ \text{虚轴} \end{cases}$  交点;

结论: ①  $v = 0, G(j0) = K \angle 0^\circ$   $v = 2, G(j0) = \infty \angle -180^\circ$   $n > m$   
 $G(j\infty) = 0 \angle -n90^\circ$   $G(j\infty) = 0 \angle -(n-m)180^\circ$

$v = 1, G(j0) = \infty \angle -90^\circ$   $v = 3, G(j0) = \infty \angle -270^\circ$   
 $G(j\infty) = 0 \angle -(n-m)90^\circ$   $G(j\infty) = 0 \angle -(n-m)270^\circ$

② 开环传函中分子含有一阶微分环节, 其开环奈氏图可能出现凹凸

5.  $G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$  奈氏图与虚轴交点  $(-\frac{KT_1 T_2}{T_1 + T_2}, j0), \omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

6. 对数频率特性 (伯德图): 横坐标按  $\lg \omega$  分度, 单位  $\text{rad/s}$  开环

对数幅频特性: 纵坐标  $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ , 单位是分贝 (dB)

步骤: ① 将传递函数写成典型环节 (常数为 1) 相乘;

② 求各典型环节的交接频率, 从小到大绘在  $\omega$  轴上

③ 低频渐近线过  $(20 \lg K), (K^{1/v}, 0)$   $v$  为系统阶数, 微分环节  $v$  取负值

④ 每经过一个交接频率改变一次斜率。  $G(s) = (1 + Ts)^{\pm 1}$ , 斜率改变  $\pm 20 \text{ dB}$ ; 二阶振荡环节, 斜率改变  $-40 \text{ dB}$

对数相频特性: 纵坐标按  $\varphi(\omega)$  线性分度, 单位是度

7. 最小相位传递函数: 传递函数极、零点在  $s$  平面左边 开环闭环都可

最小相位系统: 只包含比例、积分、微分、惯性、振荡。

对数幅频、相频一一对应

非最小相位系统: 存在迟后、不稳定的环节

8. 映射定理: 设  $s$  平面上的封闭曲线  $\Gamma$  包围了复变函数  $F(s)$  的  $P$  个极点和  $Z$  个零点  
且此曲线不经过  $F(s)$  的任一零点和极点, 则当复变量  $s$  沿封闭曲线顺时针方向移动一周时, 在  $F(s)$  平面上的映射曲线按逆时针方向包围坐标原点  $P - Z$  周。

9. 奈奎斯特稳定判据  $F(s) = 1 + G(s)H(s)$   $F(s)$  不经过奇点

闭环系统稳定的充要条件:  $N$  为逆时针包围周数,  $P$  为  $s$  平面右半部极点个数

表述一:  $Z = P - N = 0$ , 即  $F(s)$  在  $s$  平面右半部无零点

表述二:  $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty, G(j\omega)H(j\omega)$  逆时针包围点  $(-1, j0)$   $P$  周

虚轴上有开环极点:  $\omega: 0^- \rightarrow 0^+$   $v$  为积分环节数量

$\theta: -90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow +90^\circ$

$\varphi(\omega): 90v^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90v^\circ$  顺时针

10.  $\arctan a + \arctan b = \theta \rightarrow \arctan \frac{a+b}{1-ab} = \theta$

$-\alpha - \beta - \gamma = -180^\circ \rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$

11. 对数频率稳定判据 正穿越:  $\varphi(\omega)$  从  $-180^\circ$  下增加到上; 反之为负穿越

闭环系统稳定的充要条件:  $L(\omega) \geq 0$ , 正穿越次数 - 负穿越次数 =  $P/2$

12. 系统的相对稳定: 开环, 无右半平面的极点, 奈氏曲线离 $(-1, j0)$ 越远, 越稳定;  
经过 $(-1, j0)$ , 临界稳定。

13. 稳定裕度: 衡量闭环稳定系统稳定程度的指标, 常用的有相角裕度和幅值裕度  
相角裕度 $\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ)$

剪切频率 $\omega_c$ :  $L(\omega) = 0, A(\omega) = 1$

增益裕度 $K_g = \frac{1}{A(\omega_g)} \xrightarrow{\text{伯德图}} -L(\omega_g)$

$\varphi(\omega_g) = -180^\circ$

正增益裕度: 稳定系统,  $L(\omega_g) < 0$ ;

负增益裕度: 不稳定,  $L(\omega_g) > 0$

工程中, 一般 $\gamma = 30^\circ \sim 60^\circ$

$K_g \geq 2 \xrightarrow{\text{伯德图}} K_g \geq 6\text{dB}$

14. 开环频率特性估计闭环频率特性:  $-180^\circ$

设系统为单位反馈,  $H(j\omega) = 1$

低频时 $|G(j\omega)| \gg 1, \left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| \approx 1$ ; 高频时 $|G(j\omega)| \ll 1, \left|\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}\right| \approx G(j\omega)$

15. 频域性能指标

a) 截止频率(带宽频率) $\omega_b$ : 对数幅频特性下降到原来的 $1/\sqrt{2}$

b) 带宽 $BW$ :  $0 \sim \omega_b$ 的频率范围 反映系统对噪声的滤波特性; 愈大, 响应愈快

c) 谐振峰值 $M_r = |G(j\omega_r)|$ : 闭环幅频特性的最大值 反映系统的相对稳定

d) 谐振频率 $\omega_r$ : 对应 $M_r, \frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0$  反映暂态响应的速度; 愈大愈快

对于二阶系统:  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad 0 \leq \zeta \leq 0.707$

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{\sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2} + (1 - 2\zeta^2)}$$

16.

## 第6章 线性系统的校正方法

1. 校正的本质: 改变系统的零极点改变系统的性能

2. 时域性能指标: 超调量、调节时间、上升时间、稳态误差或开环增益

频域性能指标: 闭环——峰值比 $M_r/M_0$ 、峰值频率、带宽

开环——剪切频率、稳定裕度

复数域指标: 系统闭环极点在复平面的分布区域

3. 校正设计的方法 ②根轨迹法

①频率法: 原开环 Bode 图+校正环节 Bode 图+增益调整=校正后的开环 Bode 图

4. 基本控制规律:

a) P: 提高开环增益, 减小稳态误差, 提高控制精度, 但降低相对稳定性

b) PD:  $G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$

增加阻尼, 改善稳定性。增加一个 $-1/T_d$ 的开环零点, 使相角裕量增加, 改善动态性能。只对动态起作用, 而对常值稳态无影响, 对噪声敏感。

c) I: 提高系统的型别(无差度), 提高稳态性能的。增加了一个位于原点的开环极点, 使信号产生 $90^\circ$ 的相角滞后, 对系统稳定性不利。

d) PI:  $G_c(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$

增加一个位于原点的开环极点和 一个位于 $s$ 左半平面的开环零点。增加的极点可以系统型别提高一级, 减小系稳态误差, 改善稳态性能;

e) PID:  $G_c(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$

使系统的型别提高一级, 提供两个负实零点, 提高动态性能

5. 串联相位超前校正:  $G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \alpha > 1$

步骤: ①从给定指标确定开环增益 $K$

②绘制伯德图, 从 $\omega_{c1}$ 计算相角裕度 $\gamma_0$

③ $\varphi_m = \varphi_0 = \gamma - \gamma_0 + \varepsilon, \varepsilon = 15^\circ \sim 20^\circ$

④ $\alpha = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$ ; ⑤校正后剪切频率 $\omega_{c2} = \omega_m = -10 \lg \alpha$

⑥校正装置的转折频率 $\omega_1 = \frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}, \omega_2 = \frac{1}{T} = \omega_m \sqrt{\alpha} \quad \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha} T}$

⑦校正装置 $G_c(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2}$ 上大小

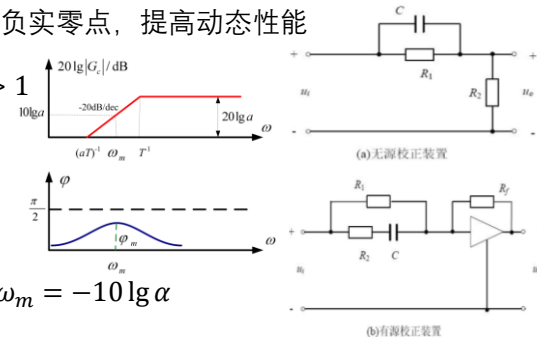
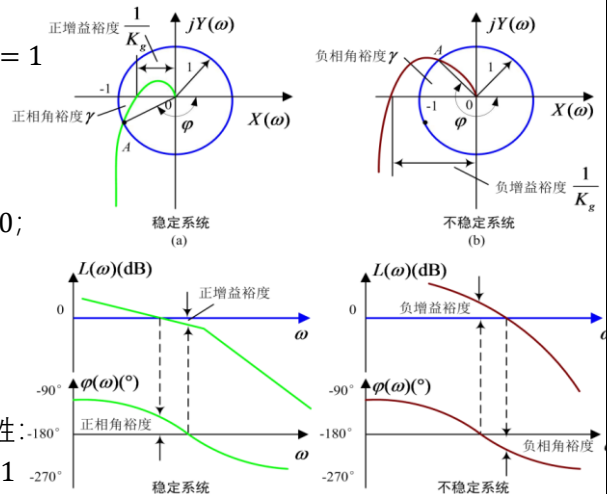
⑧重绘伯德图, 检验相角裕度

结论: ①PD 属于相位超前校正。

②增大相角裕度, 降低超调量。增加带宽, 加快响应速度。

6. 串联相位迟后校正:  $G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}, b < 1$

步骤: ①从给定指标确定开环增益 $K$ ②绘制伯德图, 从 $\omega_{c1}$ 计算相角裕度 $\gamma_0$





③  $\gamma_2 = \gamma + \varepsilon, \varepsilon = 15^\circ \sim 20^\circ$

④ 根据  $\gamma_2$  求出校正后剪切频率  $\omega_{c2}$

⑤ 令  $\omega_{c2} = 20 \lg b$ , 得  $b$

⑥ 校正装置的转折频率

$$\omega_1 = \frac{1}{bT}, \omega_2 = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} \omega_{c2} \sim \frac{1}{4} \omega_{c2}$$

⑦ 校正装置  $G_c(s) = \frac{1+s/\omega_2}{1+s/\omega_1}$  上小下大

⑧ 重绘伯德图, 检验相角裕度

结论: ① PI 属于相位滞后校正 ② 可解决提高稳态精度和振荡性之间的矛盾, 但会使频带变窄

7. 串联相位滞后-超前校正:

$$G_c(s) = \frac{(1+bT_1s)(1+aT_2s)}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad a > 1, b < 1, bT_1 > aT_2$$

8. (局部)反馈校正  $G_{2c}(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_c(s)}$

$$|G_2(s)G_c(s)| \ll 1, G_{2c}(s) \approx G_2(s)$$

$$|G_2(s)G_c(s)| \gg 1, G_{2c}(s) \approx 1/G_c(s)$$

9. 复合校正: 反馈控制回路 + 前馈通道

可保持系统稳定, 减小稳态误差,

可抑制几乎所有的可量测扰动。

a) 反馈与给定输入前馈复合校正: 开环控制

b) 反馈与扰动前馈复合校正: 开环控制

10.

## 第7章 线性离散系统分析与设计

1. 零阶保持器: 把  $nT$  的值保持到下一个采样时刻  $(n+1)T$

2. 采样定理:  $\omega_s \geq 2\omega_m$

$$3. Z \text{ 变换: } F(z) = z[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

性质: ① 线性定理:  $Z[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(z) + bF_2(z)$

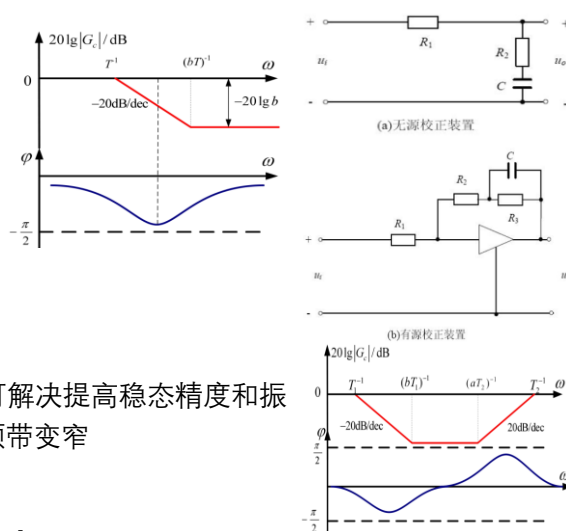
$$\text{② 实数位移定理: } Z[f(t - kT)] = z^{-k}F(z)$$

左移超前

$$Z[f(t + kT)] = z^k F(z) - z^k \sum_{n=0}^{k-1} f(nT)z^{-n}$$

右移滞后

$$\text{③ 复数位移定理: } Z[f(t)e^{\pm at}] = F(ze^{\pm at}) \quad \text{④ 初值定理 } f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$



$$\text{⑤ 终值定理 } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$$

$$\text{⑥ 卷积定理: } c(kT) = \sum_{n=0}^k g[(k-n)T]r(nT)$$

$$4. Z \text{ 反变换: } Z^{-1}[F(z)] = f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)$$

长除法、部分分式法、留数法

5. 采样拉氏变换性质: ① 周期性:  $G^*(s) = G^*(s + jk\omega_s)$

$$\text{② } [G(s)E^*(s)]^* = G^*(s)E^*(s) \rightarrow Z[G(s)E^*(s)] = G(s)E(s)$$

6. 开环脉冲传递函数: ① 中间有开关:  $G(z) = Z[G_1(s)]Z[G_2(s)] = G_1(z)G_2(z)$ ;

$$\text{② 中间无开关: } G(z) = Z[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z)$$

$$7. \text{ 闭环脉冲传递函数 } \Phi(z) = \frac{G(z)}{1+GH(z)} \xrightarrow{\text{有数字控制器 } D^*(s)} \frac{D(z)G(z)}{1+D(z)GH(z)}$$

8. 离散系统稳定性: 充要条件——所有特征根在  $z$  平面单位圆内

9. 离散系统稳态误差:

稳态位置误差系数

型别	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{t^2}{2}$
0 型	$\frac{1}{K_p}$	$\infty$	$\infty$
I 型	0	$\frac{T}{K_v}$	$\infty$
II 型	0	0	$\frac{T^2}{K_a}$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} [1 + G(z)]$$

稳态速度误差系数

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$$

稳态加速度误差系数

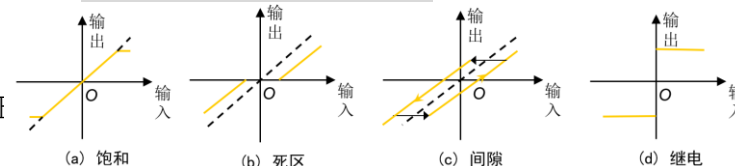
$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$$

10. 离散系统动态性能: 求出  $c(k)$  或  $c^*(t)$ , 求法与连续相同

11.

## 第8章 非线性控制系统分析

1. 非线性特性分类



2. 非线性系统的特征

① 稳定性分析复杂

② 稳定性分析复杂; ③ 可能存在自持振荡 (极限环) 现象; ④ 频率响应发生畸变

3. 非线性系统的分析与设计方法: 小范围线性近似法、逐段线性近似法、相平面法、描述函数法、李雅普诺夫法、计算机仿真

$$4. \text{ 描述函数: } N = \frac{Y_1}{X} e^{j\varphi_1}$$

- a) 奈氏判据:  $G(j\omega)$ 未包围 $-1/N$ , 稳定;  $G(j\omega)$ 包围 $-1/N$ , 不稳定  
     $-1/N$ 穿过 $G(j\omega)$ , 出现极限环
- b) 分析系统稳定性步骤: ①化成典型结构; ②求出 $N$ ; ③在复平面绘出 $G(j\omega)$   
    和 $-1/N$ 轨迹; ④判断系统是否稳定, 是否存在极限环; ⑤若存在极限环,  
    进一步分析极限环的稳定性, 确定它的频率和幅值;
- c) 自持振荡 (极限环) 分析: 若幅值 $A$ 的变化使得系统不能使其变化回去, 则  
    为不稳定的极限环; 否则为稳定的极限环  
    系统稳定 $\rightarrow$ 幅值 $A$ 减小; 系统不稳定 $\rightarrow$ 幅值 $A$ 增大

5.