

第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘 k；③某一行乘 k 后加到另一行；

第二章 行列式

1. 某一行的展开式： $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, (i = 1, 2, \dots, n)$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{列同理}$$

2. 行列式变号：交换某两行

不变：①转置；②某一行/列乘 k 后加到另一行/列；

③某行所有元素为两个数之和，可以写成两个行列式之和

数乘：①某行的公因数 k 可以提到外面；② $|kA| = k^n |A|$

3. 若 A 中无 0 且 $R(A) = 1, A^2 = (\text{列向量} * \text{行向量})^2 = lA = \sum_{i=1}^n a_{ii} A, A^n = l^{n-1} A$

4. 八大类型行列式及其解法

箭型行列式、两三角型行列式、两条线型行列式、Hessenberg 型行列式、三对角型行列式、各行元素和相等型行列式、相邻两行对应元素相差 K 倍型行列式、副对角行列式、范德蒙德型行列式：

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

解法：拆行法、升阶法、方程组法、累加消点法、累加法、递推法（特征方程法）、步步差法

$$5. \text{莫拉克法则: } D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \dots, n$$

第三章 矩阵

1. n 维上/下三角方阵， $A^k = O, k \geq n$

$$2. \mathbf{B}, \mathbf{C} \text{ 分别为 } m, n \text{ 阶, 则 } \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$3. \text{伴随矩阵: } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{逆矩阵: } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

$$AA^* = A^*A = |A|E \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

4. **A, B 等价**：存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 $B = PAQ$

几何意义：两个有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过**初等行/列变换**后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

5. n 维方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 与 E 等价

$$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow A \text{ 为非奇异矩阵} \quad \Leftrightarrow R(A) = n$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的各列/行线性无关} \quad \Leftrightarrow A^T \text{ 可逆} \quad \Leftrightarrow A \text{ 的列向量构成 } \mathbb{R}^n \text{ 的}$$

$$\Leftrightarrow 0 \text{ 不是 } A \text{ 的特征值} \quad \Leftrightarrow Ax=0 \text{ 只有零解} \quad \Leftrightarrow Ax=b \text{ 只有唯一解}$$

6. 初等矩阵：**E** 经过一次初等变换 左乘 \Leftrightarrow 行变换，右乘 \Leftrightarrow 列变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ nk & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7. \text{求逆: } (A \quad E) \xrightarrow{r} (E \quad A^{-1}) \quad (E+B)^{-1} = (BB^{-1} + B)^{-1}$$

$$\text{求解: } (A \quad B) \xrightarrow{r} (E \quad X)$$

8. ① $\max\{R(A), R(B)\} \leq R(A|B) \leq R(A) + R(B)$

$$\text{② } R(A+B) \leq R(A) + R(B) \quad \text{③ } R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$$

$$\text{④ } A \text{ 为 } m \times s \text{ 的矩阵, } B \text{ 为 } s \times n \text{ 的矩阵, } AB = O, R(A) + R(B) \leq s$$

$$\text{⑤ } A \text{ 可逆, 则 } R(AB) = R(BA) = R(B) \quad \text{⑥ } R \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R(A) + R(B)$$

$$\text{⑦ } R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$$

$$9. (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$10. \text{非齐次线性方程组: } A_{m \times n} X_{n \times 1} = \beta_{m \times 1}, \beta_{m \times 1} \neq 0 \quad \text{齐次线性方程组: } \beta_{m \times 1} = 0$$

第四章 向量组的线性相关性

- $k_1\alpha_1 + k\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$
线性相关: $|A|=0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$ 不全为 0 \Leftrightarrow 不满秩
线性无关: $|A| \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$ 全为 0 \Leftrightarrow 满秩
结论: ① $n+1$ 个 n 维度向量必线性相关
② 任何部分相关 \Rightarrow 整体相关; 整体无关 \Rightarrow 任何部分无关
③ 线性无关 \Rightarrow 延伸无关; 线性相关 \Rightarrow 缩短相关
- 线性组合/表出/表示: $\beta = k_1\alpha_1 + k\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$
- 极大无关组: r 组线性无关, $r+1$ 组线性相关
- 坐标变换公式: $X = PY$ 或 $Y = P^{-1}X$ P 为过渡矩阵
- $AX = 0$ 的基础解系: 对 A 初等行变换得到最简形
- $AX = \beta$ 的通解: 对 $(A|\beta)$ 初等行变换得到最简形, 通解=特解+基础解系

第五章 矩阵的相似对角化

- 特征值: $|A - \lambda E| = 0$ 几何意义: 伸缩比例
特征方程: $(A - \lambda E)X = 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (迹) $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$
特征向量: 对应 λ 的 X 几何意义: 矩阵对向量只发生伸缩变换
- A, A^{-1}, A^*, A^m 有相同的特征向量
 $\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m$ 是它们的特征值
- A、B 相似:** $P^{-1}AP = B$ $A、B$ 的行列式、秩、迹、特征值相等
几何意义: 一个有限维向量空间的同一个线性变换
 $P^{-1}A^nP = B^n$ $P^{-1}EP = E$
- 可相似对角化的充分必要条件: $R(A - \lambda_i E) = n - n_i$, λ_i 是 n_i 重特征值
 P 的求法: 先解 $|A - \lambda E| = 0$, P 由基础解系构成
- 向量正交 $\Leftrightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow \alpha, \beta$ 内积为 0
- 施密特正交化方法: $\beta_m = \alpha_m - \frac{[\alpha_m, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_m, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \dots - \frac{[\alpha_m, \beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]} \beta_{m-1}$
- 正交矩阵:** $AA^T = E \Leftrightarrow$ 行/列向量组是单位正交向量组 $\Leftrightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$
- 实对称矩阵化为对角阵: $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$
① 求出特征值 λ ; ② 求出特征向量, 然后正交化, 再单位化, 构成正交矩阵 Q
-

第六章 实二次型

- 二次型: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX$ A 为实对称矩阵
 $= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$
标准型: 只含有完全平方项 规范型: 完全平方项前的系数为 ± 1
- 化实二次型为标准型方法
a) (可逆)线性变换: $X = CY$, C 为可逆矩阵
b) 配方法:
i. 二次型含有完全平方项: 例令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$
ii. 二次型不含完全平方项: 例令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$
c) 正交变换法步骤:
① 求出特征值 λ ; ② 求出特征向量, 正交化, 单位化, 构成正交矩阵 Q
- A、B 合同:** $C^T AC = B$
几何意义: 一个有限维向量空间的同一个双线性函数 or 内积
性质: ① 如果 A 为对称矩阵, B 也是对称矩阵; ② $R(A) = R(B)$; ③ 传递性
- 正定二次型: $\forall X \neq 0$, 都有 $f > 0$ 负定二次型: $\forall X \neq 0$, 都有 $f < 0$
- A 为正定矩阵 \Leftrightarrow ① A 特征值全为正; ② 各阶顺序主子式都为正值
 A 为负定矩阵 \Leftrightarrow 奇数阶顺序主子式为负值, 偶数得为正值
-
-
-