目录

第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘 k；③某一行乘 k 后加到另一行；

第二章 行列式

1. **某一行的展开式**：$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},(i=1,2,\dots,n)$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 列同理

2. 行列式变号：交换某两行

不变：①转置； ②某一行/列乘 k 后加到另一行/列；

③某行所有元素为两个数之和，可以写成两个行列式之和

数乘：①某行的公因数 k 可以提到外面；②$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$

3. 若 A 中无 0 且$R(A)=1,A^2=(列向量*行向量)^\wedge 2=lA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\,A,A^n=l^{n-1}A$

4. **范德蒙德型行列式：**

$$V_n=det\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&&x_n\\\vdots&&\ddots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix}1&x_1&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&&x_2^{n-1}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\1&x_n&\cdots&x_n^{n-1}\end{bmatrix}=\Pi_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

5. 莫拉克法则：$D=det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&&a_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},x_j=\frac{D_j}{D},j=1,2,\dots,n$

第三章 矩阵

1. n 维上/下三角方阵，$A^k=O,k\ge n$

2. **B**、**C** 分别为 m、n 阶，则$\begin{bmatrix}B&O\\O&C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1}&O\\O&C^{-1}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}O&B\\C&O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{bmatrix}$

3. 伴随矩阵：$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&&A_{n2}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$ 逆矩阵：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$AA^*=A^*A=|A|E$ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$ $|A^*|=|A|^{n-1}$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

4. 二阶方阵求逆：$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

5. A、B 可交换：$AB=BA$ 反对称矩阵：$A=-A^T$

6. **A、B 等价**：存在可逆矩阵 P 和 Q，使得$B=PAQ$ ⇔ $R(A)=R(B)$

几何意义：两个有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过**初等行/列变换**后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

7. n 维方阵 A 可逆 ⇔A 与 E 等价

⇔|A|≠0 ⇔A 为非奇异矩阵 ⇔R(A)=n

⇔A 的各列/行**线性无关** ⇔A^T可逆 ⇔A 的列向量构成$\mathbb{R}^n$的

⇔0 不是 A 的特征值 ⇔Ax=0 只有零解 ⇔Ax=b 只有唯一解

8. 初等矩阵：$\boldsymbol{E}$经过一次初等变换 左乘⇔行变换，右乘⇔列变换

$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\nk&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k^n&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{2n-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

9. 求逆：$(A\quad E)\xrightarrow{r}(E\quad A^{-1})$ $(E+B)^{-1}=(BB^{-1}+B)^{-1}$

求解：$(A\quad B)\xrightarrow{r}(E\quad X)$

10. ①$max\{R(A),R(B)\} \le R(A|B) \le R(A)+R(B)$

②$R(A+B) \le R(A)+R(B)$　　③$R(AB) \le min\{R(A),R(B)\}$

④A为$m\times s$的矩阵,B为$s\times n$的矩阵,$AB=O,R(A)+R(B)\le s$

⑤A 可逆，则$R(AB)=R(BA)=R(B)$　　⑥$R\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=R(A)+R(B)$

⑦$R(A^*)=\begin{cases}n,\ R(A)=n\\ 1,\ R(A)=n-1\\ 0,\ R(A)<n-1\end{cases}$

11. $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$

12. 非齐次线性方程组：$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1}\neq 0$　　齐次线性方程组：$\beta_{m\times 1}=0$

结论：①$Ax=0$的解的线性组合仍为其解

②a,b为$Ax=b$的解，则$a-b$为导出组$Ax=0$的解

13.

第四章 向量组的线性相关性

1. $k_1\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$

线性相关：|A|=0　⇔$k_1\sim k_n$不全为 0 ⇔不满秩　⇔$AX=0$有解

线性无关：|A|≠0　⇔$k_1\sim k_n$全为 0　⇔满秩　⇔$AX=0$无解

结论：①n+1 个 n 维度向量必线性相关

②任何部分相关⇒整体相关；整体无关⇒任何部分无关

③线性无关⇒延伸无关；线性相关⇒缩短相关

④向量组 A 两两正交且非零，则其线性无关

2. 线性组合/表出/表示：$\beta=\boldsymbol{AX}=k_1\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$有解

$$\Leftrightarrow R(A)=R(A|\beta)\begin{cases}=n,\text{唯一解}\\ <n,\text{无穷多解}\end{cases}$$

结论：①向量组(I)线性无关，$(I|\beta)$线性相关，则β可由向量组(I)线性表示，且表示方法唯一

3. 极大无关组：r 组线性无关，r+1 组线性相关　计算: 初等行变换化为行最简形

4. 向量组等价：两个向量组可以相互线性表示⇔$\boldsymbol{R(I)=R(I|II)=R(II)}$**(缺一不可)**

结论：①多数向量能用少数向量线性表示，多数向量一定线性相关

②向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则$R(I)\le R(II)$

5. 过渡矩阵：$B=AC$　　坐标变换公式：$X=CY$

6. ★$Ax=0$的基础解系：本质：一个极大无关组，　**构成：$\boldsymbol{n-R(A)}$个解**

计算方法：对 A 初等行变换得到最简形

结论：①只有零解 ⇔ $R(A)=n$

有非零解⇔$r(A)<n$ ⇔ A 的**列**向量线性相关

②$\boldsymbol{\eta_1,\eta_2}$为$\boldsymbol{Ax=0}$的两个解，其线性组合也是$\boldsymbol{Ax=0}$的解

7. ★$Ax=\beta$的通解：对$(A|\beta)$初等行变换得到最简形，通解=特解+基础解系

结论：①有无穷多解，则$R(A)=R(A|\beta)<n$

②$\boldsymbol{\alpha,\beta}$为$\boldsymbol{Ax=\beta}$的两个解，$\boldsymbol{\alpha-\beta}$为$\boldsymbol{Ax=0}$的解

③$\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{Ax=\beta}$的解，$\boldsymbol{\eta}$为$\boldsymbol{Ax=0}$的解，$\boldsymbol{\alpha+\eta}$为$\boldsymbol{Ax=\beta}$的解，即通解=特解+基础解系

④$Ax=\beta$无解 ⇔ $R(A)\neq R(A|\beta)$

注意：若 X 为矩阵，求通解时每列都独立成向量看待，且若 X 阶数很小，可**直接假设**矩阵中的每一个数为一个变量进行求解

8. 同解方程组结论：A 经过初等行变换后与 A 同解

9. 求公共解：方法一：联立两个方程直接求　　例 4.19

方法二：求出两个方程的通解后相等

方法三：将一个通解带入另一个方程

求同解：不能直接联立，注意解的数量(无穷多、唯一)必须相同，可将一个通解带入另一个方程

证明同解：分别证明一个方程的解满足另一个方程

区别：同解是两个方程的解集完全相同，公共解是两个解集的公共部分

10.

第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值：$|A-\lambda E|=0$　　几何意义：伸缩比例

特征方程：$(A-\lambda E)X=0$　　$\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n a_{ii}$（迹）　$\boldsymbol{\prod_{i=1}^n\lambda_i=|A|}$

特征向量：对应λ的X　　几何意义：矩阵对向量只发生伸缩变换

结论：①不同λ对应的特征向量线性无关

②$|A|=0$，则 0 为 A 的特征值

③同一特征值对应的特征向量的线性组合还是特征向量

2. $\mathrm{A},\mathrm{A}^{-1},\mathrm{A}^*,\mathrm{A}^{\mathrm{m}}$有相同的特征向量　$\lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{|A|}{\lambda},\lambda^m$是它们的特征值

3. **A、B 相似**：$P^{-1}AP=B$　　记作$A\sim B$

几何意义：一个有限维向量空间的同一个线性变换

判断相似步骤：①判断是否可相似对角化；②特征值是否相同

结论：①$P^{-1}A^nP=B^n$　　②$P^{-1}EP=E$

③$P^{-1}AP$的特征值为λ_A，特征向量是$P^{-1}X_A$

④A、B 的**行列式、秩、迹、特征值**相等，$X_A=PX_B$

⑤两个矩阵都是对称矩阵，相似的充要条件是特征值相同

4. n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 有 n 个线性无关的特征向量

5. 可相似对角化，即$A\sim\Lambda$ $\Leftrightarrow$ $R(A-\lambda_iE)=n-n_i$，λ_i是n_i重特征值

$\Leftrightarrow$ λ_i是n_i重特征值，则λ_i有n_i个线性无关的特征向量

P 的求法：先解$|A-\lambda E|=0$，P 由基础解系构成

结论：P是A的特征向量，Λ是A的特征值

6. 向量正交$\Leftrightarrow \|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2 \Leftrightarrow$ **$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$内积为 0** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0}$

7. 施密特正交化方法：　　使用前提：重根的特征向量

$$\beta_m=\alpha_m-\frac{[\alpha_m,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_m,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_m,\beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$$

8. **正交**矩阵：$AA^T=E$ $\Leftrightarrow$行/列向量组是**单位正交**向量组$\Leftrightarrow |A|^2=1\Leftrightarrow A^T=A^{-1}$

9. 实对称矩阵化为对角阵：$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$　　实对称矩阵必可相似对角化

步骤：①求出特征值λ；②求出特征向量，正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q

结论：①实对称矩阵 A 的不同λ_1,λ_2对应的特征向量必正交

10. 利用**正交求特征向量**：

a) 若有 3 个不同的特征向量，已知其中两个，可求第三个

b) 若特征值有重根，已知单根的特征向量，可求重根的所有特征向量

例如，三阶方阵，$\lambda=2\rightarrow\alpha=[1\ 0\ 1]^T$，求$\lambda_1=\lambda_2=1$的特征向量　P154

11. 实例：①若$AB-kB=O$，则k为A的特征值

②若$A^2-kA=O$，则k or 0 为A的特征值

12.

第六章 实二次型

1. 二次型：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\cancel{X^TBX}=X^TAX$

$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

A 必须为实对称矩阵　B 改成实对称矩阵方法：$a_{ii}=b_{ii},a_{ij}=\frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji})$

标准型：只含有完全平方项　（不唯一，且坐标变换也不唯一）

规范型：完全平方项前的系数为±1，与特征值的正负号保持一致

（唯一，但坐标变换不唯一）

计算方法：求出 A 的特征值 or 其他方法

2. (可逆)线性变换：$X=CY$，C 为可逆矩阵　　也叫坐标变换公式

3. 化实二次型为标准型方法　$f=x^TAx=y^T\Lambda y$

~~a)~~ 配方法：　前提：必须满足坐标变换　　~~不靠谱!~~

i. 二次型含有完全平方项：将非平方项提取公因式然后配成完全平方项，

例如$f=(x_1-x_2+x_3)^2-4\left(x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2+4x_3^2$，令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\ y_2=x_2+\frac{1}{2}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$

ii. 二次型不含完全平方项：例$f=x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3$，令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$

b) 正交变换法步骤：　必存在 Q

①求出特征值λ；②求出特征向量，正交化，单位化，构成正交矩阵 Q

4. 正惯性指数p：**标准型**中正平方项的个数；　　负惯性指数q：负平方项的个数

5. A、B **合同**：$C^TAC=B$，C可逆　$\Leftrightarrow$　X^TAX和X^TBX有相同的正、负惯性指数

几何意义：**一个**有限维向量空间的同一个双线性函数 or 内积

性质：①如果 A 为对称矩阵，B 也是对称矩阵；②$R(A)=R(B)$；③传递性

6. 正定二次型：$\forall X\neq0$，都有$f>0$　　负定二次型：$\forall X\neq0$，都有$f<0$

7. A 为正定矩阵$\Leftrightarrow$前提：对称矩阵

①A 特征值全为正；②各阶顺序主子式都为正值

③正惯性指数$p=n$；④A、E 合同；⑤A^{-1}正定

A 为负定矩阵$\Leftrightarrow$奇数阶顺序主子式为负值，偶数得为正值

8. 等价、相似、合同的关系

a) 相似$\Rightarrow$等价，合同$\Rightarrow$等价

b) 实对称矩阵 A 与 B 相似$\Rightarrow$A 与 B 合同

9.