第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘 k；③某一行乘 k 后加到另一行；

2. 求解 Ax=B：$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\text{行阶梯形} \mid x)$

第二章 行列式

1. 某一行的展开式：$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, (i = 1,2,\dots,n)$

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 列同理

2. 行列式变号：交换某两行

不变：①转置；②某一行/列乘 k 后加到另一行/列；

③某行所有元素为两个数之和，可以写成两个行列式之和

数乘：①某行的公因数 k 可以提到外面；②$|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

3. 八大类型行列式及其解法

箭型行列式、两三角型行列式、两条线型行列式、Hessenberg 型行列式、三对角型行列式、各行元素和相等型行列式、相邻两行对应元素相差 K 倍型行列式、副对角行列式、**范德蒙德型行列式：**

$$V_n = det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \Pi_{1\le j<i\subseteq n}(x_i - x_j)$$

解法：拆行法、升阶法、方程组法、累加消点法、累加法、递推法（特征方程法）、步步差法

4. 莫拉克法则：$D = det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1,2,\dots,n$

第三章 矩阵

1. 伴随矩阵：$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ $AA^* = A^*A = |A|E$

2. 逆矩阵：$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $(A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$ $|A^*| = |A|^{n-1}$

3. n 维方阵 A 可逆

⇔|A|≠0	⇔A 为奇异矩阵	⇔R(A)=n
⇔A 的各列/行**线性无关**	⇔A^T可逆	⇔A 的列向量构成$\mathbb{R}^n$的
⇔0 不是 A 的特征值	⇔Ax=0 只有零解	⇔Ax=b 只有唯一解

4. 初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵

5. 求逆：$(A \quad E) \xrightarrow{r} (E \quad A^{-1})$ 求解：$(A \quad B) \xrightarrow{r} (E \quad X)$

6. $max\{R(A), R(B)\} \le R(A|B) \le R(A) + R(B)$

$R(A + B) \le R(A) + R(B)$ $R(AB) \le min\,\{R(A), R(B)\}$

A为$m \times s$的矩阵,B为$s \times n$的矩阵,$AB = 0, R(A) + R(B) \le s$

7.

第四章 向量组的线性相关性

1. 线性相关：|A|=0； 线性无关：|A|≠0
2. 极大无关组：r 组线性无关，r+1 组线性相关
3. 坐标变换公式：$X = PY$或$Y = P^{-1}X$ P 为过渡矩阵
4. $AX = 0$的基础解系：对 A 初等行变换得到最简形
5. $AX = \beta$的通解：对$(A|\beta)$初等行变换得到最简形，通解=特解+基础解系

第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值：$|A - \lambda E| = 0$ 几何意义：伸缩比例

特征方程：$(A - \lambda E)X = 0$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}a_{ii}$（迹）$= |A|$

特征向量：对应λ的X 几何意义：矩阵对向量只发生伸缩变换

2. $\mathrm{A}, \mathrm{A}^{-1}, \mathrm{A}^*, \mathrm{A}^m$有相同的特征向量

$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m$是它们的特征值

3. 相似矩阵：$P^{-1}AP = B$ A、B 的行列式、秩、迹相等
4. 可相似对角化的充分必要条件：$R(A - \lambda_i E) = n - n_i$，$\lambda_i$是$n_i$重特征值

P 的求法：先解$|A - \lambda E| = 0$，P 由基础解系构成

5. 向量正交⇔ $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$
6. 施密特正交化方法：$\beta_m = \alpha_m - \frac{[\alpha_m,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_m,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_m,\beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$

7. 正交矩阵：$AA^T = E$　　A 是正交矩阵⇔行/列向量组是**单位**正交向量组
8. 实对称矩阵化为对角阵：$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

   ①求出特征值λ；②求出特征向量，然后正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q
9.

第六章 实二次型

1. 二次型：$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^TAX$　　A 为实对称矩阵

   $= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

   标准型：只含有完全平方项　　规范型：完全平方项前的系数为±1
2. 化实二次型为标准型方法

   a) (可逆)线性变换：$X = CY$，C 为可逆矩阵

   b) 配方法：

   i. 二次型含有完全平方项::例令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

   ii. 二次型不含完全平方项：例令$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

   c) 正交变换法：$C^TAC = B = B^T$

   ①求出特征值λ；②求出特征向量，然后正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q
3. 正定二次型：$\forall X \neq 0$，都有$f > 0$　　负定二次型：$\forall X \neq 0$，都有$f < 0$
4. A 为正定矩阵⇔①A 特征值全为正；②各阶顺序主子式都为正值

   A 为负定矩阵⇔奇数阶顺序主子式为负值，偶数得为正值
5.
6.
7.