第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘 k；③某一行乘 k 后加到另一行；

2. 求解 Ax=B：$(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\text{行阶梯形} \mid x)$

第二章 行列式

1. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

2. 某一行的展开式：$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\ldots,n)$　　列同理

3. 行列式变号：交换某两行

　不变：①转置；②某一行/列乘 k 后加到另一行/列

4. 八大类型行列式及其解法

箭型行列式、两三角型行列式、两条线型行列式、Hessenberg 型行列式、三对角型行列式、各行元素和相等型行列式、相邻两行对应元素相差 K 倍型行列式、副对角行列式、**范德蒙德型行列式：**

$$V_n=det\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & & x_n\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}=\Pi_{1\le j<i\subseteq n}(x_i-x_j)$$

解法：拆行法、升阶法、方程组法、累加消点法、累加法、递推法（特征方程法）、步步差法

5. 莫拉克法则：$D=det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, x_j=\frac{D_j}{D}, j=1,2,\ldots,n$

第三章 矩阵

1. 伴随矩阵：$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$　　$AA^*=A^*A=|A|E$

2. 逆矩阵：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$　　$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$　　$|A^*|=|A|^{n-1}$

3. n 维方阵 A 可逆

⇔|A|≠0

⇔A 为奇异矩阵

⇔R(A)=n

⇔A 的各列/行**线性无关**

⇔A^T可逆

⇔A 的列向量构成$\mathbb{R}^n$的

⇔0 不是 A 的特征值

⇔Ax=0 只有零解

⇔Ax=b 只有唯一解

4. 初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换得到的方阵

5. $(A \quad E)\xrightarrow{r}(E \quad A^{-1})$

　$(A \quad B)\xrightarrow{r}(E \quad X \quad)$

6.

第四章 向量组的线性相关性

1. 线性相关：|A|=0；　　线性无关：|A|≠0

2. 极大无关组：r 组线性无关，r+1 组线性相关

3. 坐标变换公式：$X=PY$或$Y=P^{-1}X$　　P 为过渡矩阵

4. $AX=0$的基础解系：对 A 初等行变换得到最简形

5. $AX=\beta$的通解：对$(A|\beta)$初等行变换得到最简形，通解=特解+基础解系

第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值：$|A-\lambda E|=0$

　特征方程：$(A-\lambda E)X=0$

　特征向量：对应λ的X

　$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$（迹）　　$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

2. A, A^{-1}, A^*, A^m有相同的特征向量

　$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m$是它们的特征值

3. 相似矩阵：$P^{-1}AP=B$

A、B 的行列式、秩、迹相等

4. 可相似对角化的充分必要条件：$R(A-\lambda_i E)=n-n_i$，λ_i是n_i重特征值

P 的求法：先解$|A-\lambda E|=0$，P 由基础解系构成

5. 向量正交⇔ $\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2$

6. 施密特正交化方法：$\beta_m=\alpha_m-\frac{[\alpha_m,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\alpha_m,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\alpha_m,\beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1},\beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$

7. 正交矩阵：$AA^T=E$ A 是正交矩阵⇔行/列向量组是**单位**正交向量组

8. 实对称矩阵化为对角阵：$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

①求出特征值λ；②求出特征向量，然后正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q

9.

5.

6.

7.

第六章 实二次型

1. 二次型：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$=X^TAX$ A 为实对称矩阵

标准型：只含有完全平方项

规范型：完全平方项前的系数为±1

2. 化实二次型为标准型

a) (可逆)线性变换：$X=CY$，C 为可逆矩阵

b) 配方法：

i. 二次型含有完全平方项:：例令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\ y_2=x_2+\frac{1}{2}x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$

ii. 二次型不含完全平方项：例令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\ x_2=y_1-y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$

c) 正交变换法：$C^TAC=B=B^T$

①求出特征值λ；②求出特征向量，然后正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q

3. 正定二次型：$\forall X\neq 0$，都有$f>0$

负定二次型：$\forall X\neq 0$，都有$f<0$

4. A 为正定矩阵⇔①A 特征值全为正

②各阶顺序主子式都为正值

A 为负定矩阵⇔奇数阶顺序主子式为负值，偶数得为正值