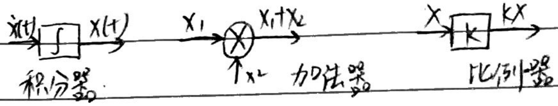
第二章

1. 系统的状态空间模型（线性定常系统）
$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$$
A: 系统矩阵，B: 输入矩阵，C: 输出矩阵，D: 直联矩阵（前馈矩阵）

2. 非线性时变系统
$$\begin{cases}x'=f(x,u,t)\\ y=g(x,u,t)\end{cases}$$
非线性系统
$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ y=g(x,u)\end{cases}$$
线性时变系统
$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+B(t)u\\ y=C(t)x+D(t)u\end{cases}$$

3. 系统结构图中的三种基本元件



4. 高阶常微分方程建立状态空间模型

① 微分方程中不包含输入量的导数项，传递函数无零点：
$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=bu$$
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\b\end{bmatrix}u \qquad y=[1\ 0\ \cdots\ 0\ 0]x$$

② ……包含……，……有零点。

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=b_0u^{(n)}+\cdots+b_nu$$
$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n&-a_{n-1}&-a_{n-2}&\cdots&-a_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_{n-1}\\\beta_n\end{bmatrix}u \qquad y=[1\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0]x+\beta_0u$$

$\beta_0=b_0$

$\beta_1=b_1-\alpha_1\beta_0$

$\beta_2=b_2-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_0$ …… $\beta_n=b_n-\alpha_1\beta_{n-1}-\cdots-a_{n-1}\beta_1-a_n\beta_0$

5. 传递函数建立状态空间模型

① 极点互异 $G(s)=\dfrac{b_0 s^n+b_1 s^{n-1}+\cdots+b_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}=\dfrac{k_1}{s-s_1}+\dfrac{k_2}{s-s_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{s-s_n}$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} s_1 & & & & \\ & s_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & s_{n-1} & \\ & & & & s_n \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{bmatrix}x$$

② 有重极点：假设有三极重极点和二极重极点 $s_1、s_1、s_1、s_4、s_5、s_5$

$$G(s)=\frac{k_{11}}{(s-s_1)^3}+\frac{k_{12}}{(s-s_1)^2}+\frac{k_{13}}{s-s_1}+\frac{k_{41}}{s-s_4}+\frac{k_{51}}{(s-s_5)^2}+\frac{k_{52}}{s-s_5}$$

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{ccc|c|cc} s_1 & 1 & & & & \\ & s_1 & 1 & & & \\ & & s_1 & & & \\ \hline & & & s_4 & & \\ \hline & & & & s_5 & 1 \\ & & & & & s_5 \end{array}\right]x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{41} & k_{51} & k_{52}\end{bmatrix}x$$

6. 系统方框图建立状态空间模型

7. 状态空间模型的线性变换 $x=P\tilde{x}$ or $\tilde{x}=P^{-1}x$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=P^{-1}AP\tilde{x}+P^{-1}Bu\\ y=CP\tilde{x}+Du\end{cases}$$

定理：线性定常系统特征值对线性变换具有不变性

8. 化状态空间模型为对角线规范形 $\dot{x}=Ax+Bu \xrightarrow{x=P\tilde{x}} \dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u$

方法一：$\tilde{A}=P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1\ \lambda_2 \cdots \lambda_n\} \leftarrow P=[p_1\ p_2 \cdots p_n]$ n个线性无关特征向量

$(\lambda_i I-A)p_i=0$ 求得 p_i 从而得到 P

方法二：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}$$ 即为友矩阵 则 $$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

9. 约旦矩阵：例

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|cc|c} -1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right]$$

10. 状态方程的约旦规范型（经相似变换）

$\tilde{A}=P^{-1}AP$ $\quad P=\left[P_1 \ \frac{\partial P_1}{\partial \lambda_1} \ \frac{\partial^2 P_1}{\partial \lambda_1^2} \cdots \frac{\partial^{m-1} P_1}{\partial \lambda_1^{m-1}} \ \vdots \ P_{m+1} \cdots P_n\right]$ m为这个特性值重复的数量

例：若 $\lambda_1=-1$ $\quad \underset{m=2}{\lambda_2=\lambda_3=-2}$ 则 $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\lambda_2 \end{bmatrix}$

11. 由状态空间表达式求传递函数

$G=C(SI-A)^{-1}B+D$ $\quad (SI-A)^{-1}=\mathrm{adj}(sI-A)/|sI-A|$

↓线性变换

$\tilde{G}(s)=\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}+D$ 证明传递函数阵对状态变换有不变性

第三章 线性系统的时域分析

自招

1. 齐次方程的解为 $x(t)=e^{At}x_0=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]x_0 \xleftarrow{解} \dot{x}=AX$ ｛级数展开法 / 拉氏变换法

2. 非齐次方程的解 $x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \xleftarrow{解} \dot{x}=AX+Bu$ ｛直接求解法 / 拉氏变换法

注：状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 即为 e^{At} → 第一部分为系统的零输入响应，第二部分为系统的零状态响应

$$y(t)=\underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{初始状态引起的自由运动}}+\underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{输入引起的系统强迫运动}}+\underbrace{Du(t)}_{\text{直联引起的前馈响应}}$$

3. 状态转移矩阵性质

求逆 ① $[\Phi(t_2-t_1)]^{-1}=\Phi[-(t_2-t_1)]=\Phi(t_1-t_2)$

② 方阵 A, B, AB=BA 时 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$

4. 状态转移矩阵计算方法

① 拉氏反变换：$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

② 级数求和 $e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{A^kt^k}{k!}+\cdots$

③ 约旦规范形 / 对角线规范形：用对应的方法求 P（见上），$\tilde{A}=P^{-1}AP$，得 e^{At}

第四章 线性系统的能观性 & 能控性

1. 线性定常连续系统的 $\overset{\text{状态}}{\text{能}}$控性判别

① Gram矩阵判据：$W=\int_0^T (e^{-At}B)(e^{-At}B)^T$ 满秩

② 代数判据 $Q_c=[B\ \ AB\ \ \cdots\ \ A^{n-1}B]$ 满秩

③ 模态判据（线性定常系统经线性变换后状态能控性保持不变）

Ⅱ $\text{rank}[\lambda I-A\ \ B]=n$

Ⅰ A中的每个 λ_i 只有一个约旦块，则其对应的B中的分量的最后一行不全为0

…… 有多个约旦块，则 …… 线性无关

$\lambda=-4$ 有2个约旦块

例 $\rightarrow \dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}u$

2. …… 输出能控性 ……

$\text{rank}[CB\ \ CAB\ \ CA^{n-1}B\ \ D]=m$ → 输出变量向量的维数

3. …… 状态能观性 ……

① 代数判据 $Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{bmatrix}$ $\text{rank}\,Q_o=n$

② 模态判据（…… 能观性 ……）

Ⅱ $\text{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-A\\ C\end{bmatrix}=n$

Ⅰ …… 只有一个约旦块，…… C的第一列不全为0

…… 有多个约旦块，…… 线性无关

4. 对偶性原理

$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}\tilde{u}\\ \tilde{y}=\tilde{C}\tilde{x}\end{cases}$ $\tilde{A}=A^T$ $\tilde{B}=C^T$ $\tilde{C}=B^T$ $\tilde{G}(s)=G(s)^T$

特征方程和特征值相同

5. 能控性分解（系统不完全能控）：$\text{rank}\,Q_c=n_c<n$ $\xrightarrow[\text{变换}]{\text{线性}}$ $\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ 0\end{bmatrix}u$ $y=[\hat{C}_1\ \ \hat{C}_2]\hat{x}$

变换矩阵 P的前 n_c 列来自 Q_c 的 n_c 个线性无关列，其余列自选（只要能保证 P满秩）

6. 能观性分解（系统不完全能观）：$\text{rank}\,Q_o=n_o<n$ $\longrightarrow$ $\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & 0\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}\hat{B}_1\\ \hat{B}_2\end{bmatrix}u$ $y=[\hat{C}_1\ \ 0]\hat{x}$

P的逆矩阵 P^{-1} 的前 n_o 行来自 Q_o 的 n_o 个线性无关行，其余行自选（保证满秩）

7 能控能观性分解（系统不完全能控 不完全能观） 分成四个子系统

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_p \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \hline 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = [\tilde{C}_1 \ \ 0 \ \ \tilde{C}_2 \ \ 0]\,\tilde{x}$$

不完全能控 不完全能观

$$P_{co} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_{nc,o} \end{bmatrix} = P_c \begin{bmatrix} P_{c,o} & 0 \\ 0 & P_{nc,o} \end{bmatrix} = P_o \begin{bmatrix} P_{o,c} & 0 \\ 0 & P_{no,c} \end{bmatrix}$$

先能控分解　　能控子系统的能观分解　　不能控子系统的能观分解

8. 零极点相消定理：完全能控完全能观 ⇌ 无零极点相消

9. 能控规范Ⅰ型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [\beta_1 \ \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_{n-1} \ \ \beta_n]$$

一定完全能控（反过来也要成立）

10 能控规范Ⅱ型

$A =$ 的转置　　$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　　$C = [b_n \ \ b_{n-1} \ \ b_{n-2} \ \cdots \ b_1]$

能控规范Ⅰ型求解：变换矩阵 $T_{c1} = Q_c = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$

…… Ⅱ ……：$T_{c2}^{-1} = [T_1 \ \ T_1A \ \cdots \ T_1A^{n-1}]^T$

$T_1 = [0 \cdots 0 \ \ 1][B \ \ AB \cdots A^{n-1}B]^{-1}$（取 Q_c^{-1} 的最后一行）

11. 能观规范Ⅰ型：$A =$（和能控规范Ⅱ型的一样）　$C = [1 \ \ 0 \cdots 0 \ \ 0]$　$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$

和能控规范Ⅰ型对偶！

变换矩阵 $T_{o1}^{-1} = Q_o = [C \ \ CA \ \cdots \ CA^{n-1}]^T$

12. …… Ⅱ型：$A =$（…… Ⅰ ……）　$C = [0 \ \ 0 \cdots 0 \ \ 1]$　$B = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$

和能控规范Ⅱ型对偶！

……　$T_{o2} = [R_1 \ \ AR_1 \cdots A^{n-1}R_1]$　$R_1 = Q_o^{-1} \cdot [0 \ \ 0 \cdots 1]^T$（取 Q_o^{-1} 的最后一列）

13 最小实现 ⇌ 能控又能观

第五章 李雅普诺夫稳定性分析

1. 动态系统 $\dot{x}=f(x,t)$ 的平衡态：$f(x,t)\equiv 0$

2. 稳定：球域 $S(x_e,\delta)$ 出发，不超出球域 $S(x_e,\varepsilon)$

3. 渐近稳定：$\lim_{t\to\infty} x(t)=x_e$

4. 正定函数：当且仅当 $x=0$，才有 $V(x)=0$；其余 $V(x)>0$

负定 … ； … ； … $V(x)<0$

非负定（半正定）：… $V(x)\geq 0$

非正定（半负定） … $V(x)\leq 0$

不定函数：原点的邻域内，$V(x)$ 可正可负

× 5. 实二次型函数：$V(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^TPx$ $\quad P=\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \cdots & \frac{a_{2n}}{2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{1n}}{2} & \frac{a_{2n}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

看书上例题 11-2 11-4

6. 李雅普诺夫稳定性定理

① 稳定：$\dot{V}(x)$ 非正定（半负定）→ 注意：有些算出来是非正定的，其实取不到 =0，例 PPT 5-2 的 14 页

② 渐近稳定：$\dot{V}(x)$ 负定

③ 大范围渐近稳定：$\dot{V}(x)$ 负定，且 $\|x\|\to\infty$，$V(x)\to\infty$

7. 系统的一个李雅普诺夫函数 $\Longleftrightarrow V(x)=x^TPx \leftarrow PA+A^TP=-Q$ 补：或者 P 为正定（P 的各阶主子行列式均大于 0）

在 $x_e=0$ 处渐近稳定 证明 （Q 为正定矩阵，一般取 I）

$\dot{V}(x)=(x^TPx)'=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=(Ax)^TPx+x^TPAx=x^T(A^TP+PA)x=-x^TQx$ 非负定

第六章 线性系统综合

1. 输出反馈：$(u=-Hy+v)$ $\begin{cases}\dot{x}=(A-BHC)x+Bv \\ y=Cx\end{cases}$ $\quad G_H(s)=C[sI-A+BHC]^{-1}B$ 不改变能观性

2. 状态反馈：$(u=-kx+v)$ $\begin{cases}\dot{x}=(A-Bk)x+Bv \\ y=Cx\end{cases}$ $\quad G_k(s)=C[sI-A+Bk]^{-1}B$

3. 闭环系统的状态能控性（模态判据） （能观性应该一样）

$$\mathrm{rank}[\lambda I-(A-Bk),B]$$

必考 4. SISO 极点配置方法：即求 k 见PPT 6.2-6.3 的10页，例6-2

☆→ ① 方法一（直接求） Ⅰ.由已知的闭环极点，得闭环特征多项式 $f^*(s)$ （也要判断开环系统能控性）

Ⅱ 令 $|sI-(A-Bk)|=f^*(s)$，求得 k

⊗ ② 方法二：Ⅰ 判断开环系统能控性

Ⅱ 求能控规范Ⅱ形，得开环特征多项式 $f(s)$

Ⅲ 令闭环特征多项式 $f^*(s)=f(s)$，求得 k

× 5. 镇定问题：通过状态反馈（or 输出反馈）使闭环系统渐近稳定。

☆ 6. 状态观测器：$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+G(y-\hat{y})=(A-GC)\hat{x}+Bu+Gy$

全维

且 $\dot{x}-\dot{\hat{x}}=(A-GC)(x-\hat{x})$ G 为输出反馈矩阵

① 任意极点配置：（化为能观规范Ⅱ型）令 $|sI-(\tilde{A}-\tilde{G}\tilde{C})|=f^*(s)$

② 带状态观测器的闭环控制系统：（即求 k 和 G）先判断能控、能观性

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-Bk & Bk\\ 0 & A-GC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}v \qquad y=\begin{bmatrix}C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{x}\end{bmatrix}$$

误差 ← $\tilde{x}=x-\hat{x}$

7. 最优控制问题概论：$J=\int_0^{\infty}[x^TQx+u^TRu]dt$ → 只需了解指标含义

具体见书P266

Zephyr

补充:

第二章

1. SISO线性定常离散系统差分方程

$$y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_ny(k)=b_0u(k+n)+\cdots+b_nu(k)$$

传递函数 $G(z)=\dfrac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$

离散系统状态空间模型 $\begin{cases}x(k+1)=Gx(k)+Hu(k)\\ y(k)=Cx(k)+Du(k)\end{cases}$ 建立方法与连续的一样

2. 由离散的状态空间模型求传递函数

$$G(z)=C(zI-G)^{-1}H+D$$

第三章

1. 线性定常连续系统的离散化 $G(T)=\Phi(T)=e^{AT}$

$$H(T)=\left[\int_0^T\Phi(t)\,dt\right]B=\left[\int_0^Te^{At}\,dt\right]B$$

2. 线性定常离散系统状态方程的解

① 递推法: $x(k)=G^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{j=k_0}^{k-1}G^{k-j-1}Hu(j)$

or

$x(k)=G^{k-k_0}x(k_0)+\sum_{j=0}^{k-k_0-1}G^{j}Hu(k-j-1)$

状态转移矩阵 $\Phi(k)=G^k$

② Z变换法: $G^k=Z^{-1}\left[(zI-G)^{-1}\cdot z\right]$

第四章

1. (离散)能控性判据: $Q_c=[H\ \ GH\ \ \cdots\ \ G^{n-1}H]$ 满秩

2. ……观……: $Q_o=\begin{bmatrix}C\\ CG\\ \vdots\\ CG^{n-1}\end{bmatrix}$ 满秩 或 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda I-G\\ C\end{bmatrix}=n$