

# 目录

第一章 线性方程组的解法	1
第二章 行列式	1
第三章 矩阵	1
第四章 向量组的线性相关性	2
第五章 矩阵的相似对角化	2
第六章 实二次型	3

## 第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换: ①交换两行; ②某一行乘  $k$ ; ③某一行乘  $k$  后加到另一行;

## 第二章 行列式

1. 某一行的展开式:  $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, (i = 1, 2, \dots, n)$   
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  列同理

2. 行列式变号: 交换某两行  
不变: ①转置; ②某一行/列乘  $k$  后加到另一行/列;  
③某行所有元素为两个数之和, 可以写成两个行列式之和  
数乘: ①某行的公因数  $k$  可以提到外面; ② $|kA| = k^n |A|$

3. 若  $A$  中无 0 且  $R(A) = 1, A^2 = (\text{列向量} * \text{行向量})^2 = lA = \sum_{i=1}^n a_{ii} A, A^n = l^{n-1} A$

4. 范德蒙德型行列式:

$$V_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

5. 莫拉克法则:  $D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x_j = \frac{D_j}{D}, j = 1, 2, \dots, n$

## 第三章 矩阵

1.  $n$  维上/下三角方阵,  $A^k = O, k \geq n$

2.  $B, C$  分别为  $m, n$  阶, 则  $\begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$

3. 伴随矩阵:  $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$  逆矩阵:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

$$AA^* = A^*A = |A|E \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|} \quad |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1} \quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (kA)^* = k^{n-1} A^*$$

4. 二阶方阵求逆:  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

5.  $A, B$  可交换:  $AB = BA$  反对称矩阵:  $A = -A^T$

6.  $A, B$  等价: 存在可逆矩阵  $P$  和  $Q$ , 使得  $B = PAQ \Leftrightarrow R(A) = R(B)$

几何意义: 两个有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过初等行/列变换后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

7.  $n$  维方阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A$  与  $E$  等价

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\Leftrightarrow A$  为非奇异矩阵

$\Leftrightarrow R(A) = n$

$\Leftrightarrow A$  的各列/行线性无关

$\Leftrightarrow A^T$  可逆

$\Leftrightarrow A$  的列向量构成  $\mathbb{R}^n$  的

$\Leftrightarrow 0$  不是  $A$  的特征值

$\Leftrightarrow Ax=0$  只有零解

$\Leftrightarrow Ax=b$  只有唯一解

8. 初等矩阵:  $E$  经过一次初等变换

左乘  $\Leftrightarrow$  行变换, 右乘  $\Leftrightarrow$  列变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ nk & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. 求逆:  $(A \quad E) \xrightarrow{r} (E \quad A^{-1})$

$$(E+B)^{-1} = (BB^{-1} + B)^{-1}$$

求解:  $(A \quad B) \xrightarrow{r} (E \quad X)$

$$10. \textcircled{1} \max\{R(A), R(B)\} \leq R(A|B) \leq R(A) + R(B)$$

$$\textcircled{2} R(A+B) \leq R(A) + R(B) \quad \textcircled{3} R(AB) \leq \min\{R(A), R(B)\}$$

$$\textcircled{4} A \text{ 为 } m \times s \text{ 的矩阵, } B \text{ 为 } s \times n \text{ 的矩阵, } AB = O, R(A) + R(B) \leq s$$

$$\textcircled{5} A \text{ 可逆, 则 } R(AB) = R(BA) = R(B) \quad \textcircled{6} R \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = R(A) + R(B)$$

$$\textcircled{7} R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n \\ 1, & R(A) = n-1 \\ 0, & R(A) < n-1 \end{cases}$$

$$11. (a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$12. \text{非齐次线性方程组: } A_{m \times n} X_{n \times 1} = \beta_{m \times 1} \neq 0 \quad \text{齐次线性方程组: } \beta_{m \times 1} = 0$$

结论:  $\textcircled{1} Ax = 0$  的解的线性组合仍为其解

$\textcircled{2} a, b$  为  $Ax = b$  的解, 则  $a - b$  为导出组  $Ax = 0$  的解

13.

#### 第四章 向量组的线性相关性

$$1. \quad k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n = 0$$

线性相关:  $|A|=0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$  不全为 0  $\Leftrightarrow$  不满秩  $\Leftrightarrow AX = 0$  有解

线性无关:  $|A| \neq 0 \Leftrightarrow k_1 \sim k_n$  全为 0  $\Leftrightarrow$  满秩  $\Leftrightarrow AX = 0$  无解

结论:  $\textcircled{1} n+1$  个  $n$  维度向量必线性相关

$\textcircled{2}$  任何部分相关  $\Rightarrow$  整体相关; 整体无关  $\Rightarrow$  任何部分无关

$\textcircled{3}$  线性无关  $\Rightarrow$  延伸无关; 线性相关  $\Rightarrow$  缩短相关

$\textcircled{4}$  向量组  $A$  两两正交且非零, 则其线性无关

$$2. \text{线性组合/表出/表示: } \beta = AX = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n \text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A|\beta) \begin{cases} = n, \text{ 唯一解} \\ < n, \text{ 无穷多解} \end{cases}$$

结论:  $\textcircled{1}$  向量组(I)线性无关,  $(I|\beta)$  线性相关, 则  $\beta$  可由向量组(I)线性表示, 且表示方法唯一

3. 极大无关组:  $r$  组线性无关,  $r+1$  组线性相关 计算: 初等行变换化为行最简形

4. 向量组等价: 两个向量组可以相互线性表示  $\Leftrightarrow R(I) = R(I|II) = R(II)$  (缺一不可)

结论:  $\textcircled{1}$  多数向量能用少数向量线性表示, 多数向量一定线性相关

$\textcircled{2}$  向量组(I)可由向量组(II)线性表示, 则  $R(I) \leq R(II)$

$$5. \text{过渡矩阵: } B = AC \quad \text{坐标变换公式: } X = CY$$

6.  $\star Ax = 0$  的基础解系: 本质: 一个极大无关组, 构成:  $n - R(A)$  个解

计算方法: 对  $A$  初等行变换得到最简形

结论:  $\textcircled{1}$  只有零解  $\Leftrightarrow R(A) = n$

有非零解  $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$  的列向量线性相关

$\textcircled{2} \eta_1, \eta_2$  为  $Ax = 0$  的两个解, 其线性组合也是  $Ax = 0$  的解

7.  $\star Ax = \beta$  的通解: 对  $(A|\beta)$  初等行变换得到最简形, 通解=特解+基础解系

结论:  $\textcircled{1}$  有无穷多解, 则  $R(A) = R(A|\beta) < n$

$\textcircled{2} \alpha, \beta$  为  $Ax = \beta$  的两个解,  $\alpha - \beta$  为  $Ax = 0$  的解

$\textcircled{3} \alpha$  为  $Ax = \beta$  的解,  $\eta$  为  $Ax = 0$  的解,  $\alpha + \eta$  为  $Ax = \beta$  的解, 即通解=特解+基础解系

$\textcircled{4} Ax = \beta$  无解  $\Leftrightarrow R(A) \neq R(A|\beta)$

注意: 若  $X$  为矩阵, 求通解时每列都独立成向量看待, 且若  $X$  阶数很小, 可直接假设矩阵中的每一个数为一个变量进行求解

8. 同解方程组结论:  $A$  经过初等行变换后与  $A$  同解

9. 求公共解: 方法一: 联立两个方程直接求 例 4.19

方法二: 求出两个方程的通解后相等

方法三: 将一个通解带入另一个方程

求同解: 不能直接联立, 注意解的数量(无穷多、唯一)必须相同, 可将一个通解带入另一个方程

证明同解: 分别证明一个方程的解满足另一个方程

区别: 同解是两个方程的解集完全相同, 公共解是两个解集的公共部分

10.

#### 第五章 矩阵的相似对角化

$$1. \text{特征值: } |A - \lambda E| = 0$$

几何意义: 伸缩比例

$$\text{特征方程: } (A - \lambda E)X = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{迹}) \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$$

特征向量: 对应  $\lambda$  的  $X$

几何意义: 矩阵对向量只发生伸缩变换

结论:  $\textcircled{1}$  不同  $\lambda$  对应的特征向量线性无关

$\textcircled{2} |A| = 0$ , 则 0 为  $A$  的特征值

$\textcircled{3}$  同一特征值对应的特征向量的线性组合还是特征向量

$$2. A, A^{-1}, A^*, A^m \text{ 有相同的特征向量 } \lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m \text{ 是它们的特征值}$$

3. A、B 相似:  $P^{-1}AP = B$  记作  $A \sim B$

几何意义: 一个有限维向量空间的同一个线性变换

判断相似步骤: ①判断是否可相似对角化; ②特征值是否相同

结论: ①  $P^{-1}A^n P = B^n$  ②  $P^{-1}EP = E$

③  $P^{-1}AP$  的特征值为  $\lambda_A$ , 特征向量是  $P^{-1}X_A$

④ A、B 的行列式、秩、迹、特征值相等,  $X_A = PX_B$

⑤ 两个矩阵都是对称矩阵, 相似的充要条件是特征值相同

4. n 阶方阵 A 可对角化  $\Leftrightarrow$  有 n 个线性无关的特征向量

5. 可相似对角化, 即  $A \sim \Lambda \Leftrightarrow R(A - \lambda_i E) = n - n_i$ ,  $\lambda_i$  是  $n_i$  重特征值

$\Leftrightarrow \lambda_i$  是  $n_i$  重特征值, 则  $\lambda_i$  有  $n_i$  个线性无关的特征向量

P 的求法: 先解  $|A - \lambda E| = 0$ , P 由基础解系构成

结论: P 是 A 的特征向量,  $\Lambda$  是 A 的特征值

6. 向量正交  $\Leftrightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow \alpha, \beta$  内积为 0  $\Leftrightarrow \alpha^T \beta = \beta^T \alpha = 0$

7. 施密特正交化方法: 使用前提: 重根的特征向量

$$\beta_m = \alpha_m - \frac{[\alpha_m, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_m, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2 - \dots - \frac{[\alpha_m, \beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]} \beta_{m-1}$$

8. 正交矩阵:  $AA^T = E \Leftrightarrow$  行/列向量组是单位正交向量组  $\Leftrightarrow |A|^2 = 1 \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

9. 实对称矩阵化为对角阵:  $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$  实对称矩阵必可相似对角化

步骤: ①求出特征值  $\lambda$ ; ②求出特征向量, 正交化, 再单位化, 构成正交矩阵 Q

结论: ①实对称矩阵 A 的不同  $\lambda_1, \lambda_2$  对应的特征向量必正交

10. 利用正交求特征向量:

a) 若有 3 个不同的特征向量, 已知其中两个, 可求第三个

b) 若特征值有重根, 已知单根的特征向量, 可求重根的所有特征向量

例如, 三阶方阵,  $\lambda = 2 \rightarrow \alpha = [1 \ 0 \ 1]^T$ , 求  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  的特征向量 P154

11. 实例: ①若  $AB - kA = O$ , 则 k 为 A 的特征值

②若  $A^2 - kA = O$ , 则 k 或 0 为 A 的特征值

12.

## 第六章 实二次型

1. 二次型:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T B X = X^T A X$

$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

A 必须为实对称矩阵 B 改成实对称矩阵方法:  $a_{ii} = b_{ii}, a_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$

标准型: 只含有完全平方项 (不唯一, 且坐标变换也不唯一)

规范型: 完全平方项前的系数为  $\pm 1$ , 与特征值的正负号保持一致 (唯一, 但坐标变换不唯一)

计算方法: 求出 A 的特征值 or 其他方法

2. (可逆)线性变换:  $X = CY$ , C 为可逆矩阵 也叫坐标变换公式

3. 化实二次型为标准型方法  $f = x^T A x = y^T \Lambda y$

a) 配方法: 前提: 必须满足坐标变换 不靠谱!

i. 二次型含有完全平方项: 将非平方项提取公因式然后配成完全平方项,

$$\text{例如 } f = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 4\left(x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + 4x_3^2, \text{ 令 } \begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

ii. 二次型不含完全平方项: 例  $f = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$ , 令  $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

b) 正交变换法步骤: 必存在 Q

①求出特征值  $\lambda$ ; ②求出特征向量, 正交化, 单位化, 构成正交矩阵 Q

4. 正惯性指数 p: 标准型中正平方项的个数; 负惯性指数 q: 负平方项的个数

5. A、B 合同:  $C^T AC = B$ , C 可逆  $\Leftrightarrow X^T A X$  和  $X^T B X$  有相同的正、负惯性指数

几何意义: 一个有限维向量空间的同一个双线性函数 or 内积

性质: ①如果 A 为对称矩阵, B 也是对称矩阵; ②  $R(A) = R(B)$ ; ③传递性

6. 正定二次型:  $\forall X \neq 0$ , 都有  $f > 0$  负定二次型:  $\forall X \neq 0$ , 都有  $f < 0$

7. A 为正定矩阵  $\Leftrightarrow$  前提: 对称矩阵

①A 特征值全为正; ②各阶顺序主子式都为正值

③正惯性指数  $p = n$ ; ④A、E 合同; ⑤  $A^{-1}$  正定

A 为负定矩阵  $\Leftrightarrow$  奇数阶顺序主子式为负值, 偶数得为正值

8. 等价、相似、合同的关系

a) 相似  $\Rightarrow$  等价, 合同  $\Rightarrow$  等价

b) 实对称矩阵 A 与 B 相似  $\Rightarrow$  A 与 B 合同

9.