目录

第 1 讲 高等数学常用基础知识

1. 余切函数：$cot\,x=\frac{cos\,x}{sin\,x}=\frac{1}{tan\,x}$　　$sinx$一个门的面积为 2，$\frac{\pi}{4}\sim\frac{3\pi}{4}$为$\sqrt{2}$

正割函数：$y=sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$　　　余割函数：$y=csc\,x=\frac{1}{sin\,x}$

2. 符号函数：$y=sgn\,x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$；取整函数：$y=[x]$

3. 若 *U=max{ f(x), g(x) }*, *V=min{ f(x), g(x) }*,
则 *U+V = f(x) + g(x)*　　*U-V = | f(x) - g(x)|*　　*UV = f(x)g(x)*

4. 组合数公式：$C_{n+1}^{k+1}=\sum_{i=k}^{n}C_i^k$　　$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　推导过程

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(\sum_{k=1}^{n}k)^2$　　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=2C_{n+2}^3$

5. 积化和差公式*4　　$sin\,\alpha\,cos\,\beta=\frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)+sin(a-\beta)]$

和差化积公式*4　　$sin\,\alpha+sin\,\beta=2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. 万能公式$u=tan\frac{x}{2}\ (-\pi<x<\pi)$　　则$sin\,x=\frac{2u}{1+u^2}$，$cos\,x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

7. 因式分解公式

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$ (n为正偶数)

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$($n$为正奇数)

8. $\boldsymbol{f(x)+f(-x)}$**为偶函数，**$\boldsymbol{f(x)-f(-x)}$**为奇函数**；$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数；

9. $\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k)}=\frac{1}{k}[\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}]$

第 2 讲 极限与连续

1. 数列极限定义：任意$\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$, 当$n>N$, 恒有$|x_n-a|<\varepsilon$

2. 判断数列发散方法*2：找一个发散的子列；找两个收敛到不同极限的子列

3. 数列极限运算规则（参考函数的）

4. 证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限存在：证明单调不减，证明有界

5. 函数极限定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,当\ 0<|x-x_0|<\delta时,有|f(x)-A|<\varepsilon$$

6. 函数极限存在的充要条件*2

① 左极限=右极限=A ②**脱帽法**：$\boldsymbol{f(x)=A+\alpha(x),\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0}$

7. 函数极限的性质： ~~唯一~~性；局部有界性；**局部保号性**：$X_n\geq a$，极限$A\geq a$；

8. 无穷小的比阶 前提：$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0,\beta(x)\neq 0$

高阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，记为$\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$；

低阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$； 同阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$；

k 阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$ 等价无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

9. 函数极限运算规则 前提：极限都存在

a) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim f(x)=kA\pm lB$

b) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

c) $\boldsymbol{\lim[f(x)^n]=[\lim f(x)]^n}$，n 为正整数

d) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小；有界函数与无穷小的积是无穷小

b) $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=min(mn)$->加减法时低阶吸收高阶

c) $o(x^m)\cdot o(x^n)=\boldsymbol{o(x^{m+n})}=\boldsymbol{x^m\cdot o(x^n)}$->乘法时阶数累加

d) $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m),k\neq 0$且为常数->非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小*9 前提：$\boldsymbol{x\to 0}$ 本质：泰勒展开

$\boldsymbol{\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x}$

$\boldsymbol{a^x-1\sim x\ln a,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,(1+x)^a-1\sim ax}$ **★$\boldsymbol{x\to x_0}$等价替换成$\boldsymbol{t\to 0}$**

可以先等价，再用洛必达，例 2.19；**注意：**减式不能用等价替换

12. 夹逼准则：$g(x)\leq f(x)\leq h(x),\lim g(x)=\lim h(x)=A,$则$\lim f(x)=A$

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放 **不验等号**

对和式缩放的两种方法：

n 为无穷大时，$n\cdot u_{min}\leq\sum_{i=1}^{n}u_i\leq n\cdot u_{max}$；

n 为有限数时，$\boldsymbol{1\cdot u_{max}\leq\sum_{i=1}^{n}u_i\leq n\cdot u_{max}\to\lim\sum_{i=1}^{n}u_i=u_{max}}$

13. 洛必达法则：$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，且一阶导都存在 辅助地位 例 2.19

若结果的极限不存在，则洛必达失效

14. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）

15. 第一类间断点：可取、跳跃 第二类间断点：无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知 ①夹逼准则；③幂级数求和；④级数收敛的必要条件

②定积分定义：n,i次数相同，若凑不出，可以先放缩 or 夹逼

★定积分特殊情况：$\boldsymbol{a=0,b=x,\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(x\frac{i}{n}\right)\frac{x}{n}}$

b) 数列通项未知

①★单调有界数列必有极限：先做差/商证明极限存在，再求；②求出表达式；

③<u>知道极限 a</u>，用定义构造$|a_n-a|\leq$某一函数，然后拉格朗日中值定理 or 缩放，得出$\lim|a_n-a|=0$

17. 函数极限的计算

①判断未定式的种类。七种："$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""∞^0""0^0""1^∞"

i. "$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"：使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽

ii. "$0\cdot\infty$"：转化成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"

iii. "$\infty-\infty$"：转为乘除法。有分母通分；无分母倒代换$x=\frac{1}{t}$或提取公因式

iv. $\infty^0,0^0,1^\infty$：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}=\lim\left\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v}$

$\boldsymbol{\because\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$ 例如：$\lim_{x\to 0}x^x=1$

②题型：比阶题；反问题（反求参数）；已知某一极限求另一极限

③方法：Ⅰ等价替换：见根号用有理化；Ⅱ等价无穷小替换

Ⅲ洛必达；Ⅳ泰勒展开；Ⅴ夹逼准则；Ⅵ单调有界；

VII $f(x)$在$x=x_0$处连续，$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

18. $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln^{\beta}x=0$

19. ★常用函数的泰勒展开式*8　　前提：$x\to 0$　　计算时保留 o(·)

$\boldsymbol{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}$　　$\boldsymbol{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$

$\boldsymbol{\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x)^3}$　　$\boldsymbol{\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$

$\boldsymbol{\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$　　$\boldsymbol{\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$

$\boldsymbol{e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}$　　$\boldsymbol{(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)}$

$\frac{A}{B}$型，展开后分子分母同阶；A-B 型，展开到它们的系数不等的 x 的最低次幂为止；

第 3 讲　一元函数微分学的概念与计算

1. ★导数的定义*2

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

性质：**求导 or 下限为 0 的积分，函数奇偶性互换，周期不变**

☆**注：复杂函数的求导可以用定义　　例 3.10**

四则运算不成立的时候，用定义　　例 3.7

2. 设$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则$F(x)$在$x=a$处可导$\Leftrightarrow f(a)=0$
3. 可导的充分必要条件：左导数和右导数存在且相等
4. 高阶导数概念：$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$
5. 可微判别方法*3:　①写增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

②写线性增量 $A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$　　③作极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}$

6. 四则运算的前提：函数均可导
7. 复合函数的导数(微分): $\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x)$
8. 反函数求导: $y=f(x),x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x,\varphi'(x)=x'_y(x'_y\neq 0)$，则有

一阶 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$；二阶 $y''_{xx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

9. 参数方程求导：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$　一阶：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

二阶：$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

10. 隐函数求导：$F(x,y)=0$，两边对 x 求导，将 y 看作中间变量，得到方程，求解即可得到 y'
11. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数，$\ln y=\ln f(x)$；②求导得$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]'\Rightarrow y'=y[\ln f(x)]'$

12. 幂指函数求导法：

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

13. n 阶导数的运算方法 *3

a) 逐次求导。

b) 高阶求导公式：$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$　　$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

c) 写出泰勒公式 or 麦克劳林公式，比较系数

14. 常见函数的 n 阶导数 *8

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0,a\neq 1)$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$　　$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$　　$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$　　$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$

15. 变限积分求导公式：设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x)\,dx$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\,dt\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x)$$

16. 基本初等函数的导数公式　　视绝对值不见

$(a^x)' = a^x \ln a (a>0, a\neq 1)$　　$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}(a>0, a\neq 1)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$　　$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$　　$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc)' = -\csc x \cot x$　　$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

17.

第 4 讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带、不带等号；极值、最值的区别：领域、定义域
2. 极值点的必要条件：一阶可导
3. 判断极值的充分条件 *3
   a) x_0的去心领域一阶可导
      i. x_0左边，$f'(x)<0$；x_0右边，$f'(x)>0$，为极小值；
      ii. x_0左边，$f'(x)>0$；x_0右边，$f'(x)<0$，为极大值；
   b) $x=x_0$处二阶可导，且$f'(x)=0$，$f''(x_0)\neq 0$
      $f''(x_0)>0$，极小值；$f''(x_0)<0$，极大值
   c) x_0处 n 阶可导，且$f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\dots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 2)$
      n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)>0$，极小值；n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)<0$，极大值
4. 凹弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；凸弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
5. 判断凹凸的充分条件：$f''(x)>0$，凹的；$f''(x)<0$，凸的
6. 拐点的必要条件:二阶可导
7. 判断拐点的充分条件 *3
   a) x_0的去心领域内二阶导数存在，且左右领域$f''(x)$变号
   b) 三阶可导，$f''(x)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$
   c) x_0处n阶可导, n 为奇数, $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\dots,n-1), f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 3)$
8. 铅锤渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0^+ or x_0^-} f(x)=\infty$　　x_0取函数无定义的点

   水平渐近线：$\lim\limits_{x\to +\infty\ or\ -\infty} f(x) = A$

   斜渐近线：令$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$，得$y=kx+b$

若$f(x)$中 x 的 n 次方，>1，则有铅锤渐近线；=1，斜渐进线；<1，水平渐进线

9. 极值且可导⇒驻点
10. 求闭区间的最值步骤：求可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值
    求开区间的最值步骤：求可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围
11. 函数作图步骤:①确定定义域和奇偶对称性；
    ②求出$f'(x), f''(x)$等于 0 和其不存在的点，将函数划分成几个区间，**画表格**判断每一个的单调性和凹凸性；③确定渐近线(如果有的话)；④作图
12.

第 5 讲 中值定理

1. 函数的中值定理
   a) 有界与最值定理：$m\leq f(x)\leq M$，其中 m、M 为[a, b]上的最值
   b) 介值定理：当$m\leq\mu\leq M$，存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\mu$
   c) 平均值定理：当$a<x_1<\cdots<x_n<b$, 在$[x_1,x_n]$内至少存在一点ξ, 使$f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$
   d) 零点定理：当$f(a)\cdot f(b)<0$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$
2. 导数(微分)的中值定理
   a) 费马定理：$f(x_0)$可导且为极值，则$f'(x_0)=0$
   b) 罗尔定理：$f(x)$满足$\begin{cases}[a,b]上连续\\(a,b)内可导\\f(a)=f(b)\end{cases}$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$
   c) ★拉格朗日中值定理：$\begin{cases}[a,b]连续\\(a,b)可导\end{cases}$，$\exists\xi\in(a,b)$，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
   d) 柯西中值定理：条件同上，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
   e) 泰勒公式：任何可导$f(x)=\sum a_n x^n$
      i. 带拉格朗日余项: n+1 阶可导，ξ介于x,x_0之间

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项: $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)$

3. 克劳林公式: $x_0=0$的泰勒公式
4. 重要函数的克劳林展开式 *7

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n}+1)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n) \quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

5. 证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$H(\xi,f(\xi),f'(\xi))=0$: 罗尔定理、费马定理
   a) 构造辅助函数: 把ξ改成 x，对于$f'(x)+g(x)f(x)=0$，两边同乘$e^{\int g(x)\,dx}$，

      得构造函数$F(x)=f(x)e^{\int g(x)\,dx}$

   b) 验证端点值相等: 转化为给定区间内找 F(x)的两个不同的零点
6.

第 6 讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:
   a) 零点定理: 证明根的存在
      当$f(a)\cdot f(b)<0$，$f(x)=0$至少有一个根
   b) 单调性: 证明根的唯一性
      $f(x)=0$在(a,b)内单调，$f(x)=0$至少有一个根
   c) 罗尔定理的推论: $f^{(n)}(x)=0$至多有 k 个根，$f(x)=0$至多有 k+n 个根
   d) 实系数奇次方程: 至少有一个根
2. 经典不等式
   a) $2|ab|\le a^2+b^2$　　$|a\pm b|\le|a|+|b|$　　$\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$
   b) 设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立

$$\frac{\boldsymbol{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{\boldsymbol{n}}\ge\sqrt[n]{\boldsymbol{a_1a_2\cdots a_n}} \qquad \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\le\sqrt{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{n}}$$

   c) $x,y,p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{1}=1$，则$\mathrm{xy}\le\frac{\mathrm{x^p}}{\mathrm{p}}+\frac{\mathrm{y^q}}{\mathrm{q}}$
   d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$
      $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$
   e) $\left[\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$
   f) $\left|\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right|\le\left[\int_a^b|t(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$，$p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
   g) $0<a<x<b,0<c<y<d$，则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{b}$　　$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$

      $x<\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$　　$\sin x<x(x>0)$　　$e^x\ge x+1,x-1\ge\ln x$

      $\arctan x\le x\le\arcsin x\,(0\le x\le 1)$
3. 微分不等式的证明方法 *3
①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)；②常数变量化；③中值定理
4.

第 7 讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数
2. **定积分的定义:** $\boldsymbol{\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}}$

   注: $\boldsymbol{\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]'=f(x),a}$**任意**
3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续；②在去见善有界，只有有限个间断点
   必要条件: 可积函数必有界
4. 定积分的性质:①求区间长度: 略；②线性性质: 略

③可加可拆性: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

④保号性: $f(x) \le g(x)$,则$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

特殊: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

⑥估值定理: M、m 为最大、小值，L 为区间长度，$mL \le \int_a^b f(x)\,dx \le ML$

⑦中值定理: 函数连续，闭区间内至少存在一点ξ，使得$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

5. 变限积分的性质: ①$f(x)$可积，$F(x)$连续; ②$f(x)$连续，$F(x)$可导
6. 变限积分的求导公式:　　前提: 被积函数中无 x

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t)\,dt\right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

7. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性
   无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性
8. 奇点:"∞"和使得函数无定义的点(瑕点)
9. 不定积分计算
   a) 凑微分法: $\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f[g(x)]\,d[g(x)] = \int f(u)\,du$
      i. 若 f(x)较复杂，对其(或其主要部分)求导可以得到 g(x)的倍数(常数 or 函数)

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{A}\int f(x)Ag(x)\,dx = \frac{1}{A}\int f(x)\,d[f(x)]$$

      ii. 得不到倍数，可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子，来恒等变形。常用的因子有$e^{\alpha x}, x^{\beta}, \sin x, \cos x$

   b) 换元法: $\int f(x)\,dx \overset{x=g(x)}{\Longleftrightarrow} \int f[g(u)]\,d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)\,du$

      i. 三角函数代换: $\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\sec t, \begin{cases} x > 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

      ii. 恒等变形后三角函数代换: $\sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow \sqrt{\varphi^2(x)+k^2}, \sqrt{\varphi^2(x)-k^2}, \sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$

      iii. 根式代换: $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt{ae^{bx}+c} \Rightarrow$令$\sqrt{*} = t$

      同时含有$\sqrt[n]{ax+b}$和$\sqrt[m]{ax+b} \Rightarrow$令$\sqrt[l]{ax+b} = t$，l 为最小公倍数

      iv. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上，$\frac{1}{x} = t$

      v. 复杂函数的直接代换: 含有$a^x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arctan x$，令复杂函数=t

      注意: 当$\ln x, \arcsin x, \arctan x$与$e^x$或$x^n$乘除，优先考虑分部积分法

   c) 分部积分法: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
      i. 适用于$\int u\,dv$难求，而$\int v\,du$好求
      ii. 积分后简单点宜作u，微分后简单点宜作v
         $P_n(x)$与$e^{kx}, \sin ax, \cos ax$中的一个$\Rightarrow u = P_n(x)$
         e^{ax}与$\sin ax, \cos ax$中的一个　　$\Rightarrow u$任选其一
         $P_n(x)$与$\ln x, \arcsin x, \arctan x$中的一个$\Rightarrow u \ne P_n(x)$
      iii. 推广: u 与 v 有直到(n+1)阶的连续导数

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$$

   d) 有理函数的积分: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx\,(n < m)$

      i. 方法: 把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和

      ii. 注意: k 重因式产生 k 项

10. 定积分的计算
   a) 牛顿莱布尼兹公式: $\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_b^a$

   b) 换元积分: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi'(t)]\varphi'(t)\,dt$

   c) 分部积分法: $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

   d) 重要结论:

i. 偶函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$；奇函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

ii. 周期函数，$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$

iii. 区间再现公式: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx$

iv. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{n 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n\cdot 3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{n 为正偶数} \end{cases}$

11. 凑定积分定义的方法:①提出$\frac{1}{n}$;②凑出$\frac{i}{n}$;③转化为$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

12. 反常积分的敛散性判别:

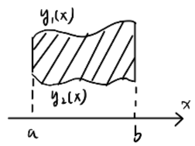
a) 无穷区间的$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$: $p>1$收敛，$p\le 1$发散

b) 无界函数的$\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^p}$: $p<1$收敛，$p\ge 1$发散（奇点 x=0）

13.

第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

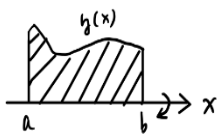
1.计算面积

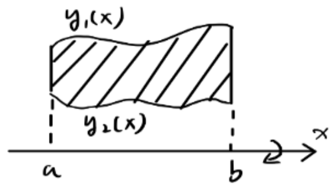


$S = \int_{a}^{b} |y_1(x) - y_2(x)|\,dx$

$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)|\,d\theta$

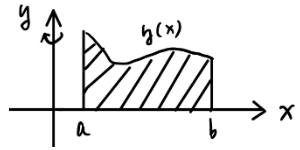
2.计算体积

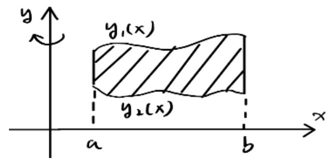




$V = \int_{a}^{b} \pi y^2(x)\,dx$

$V = \pi\int_{a}^{b} |y_1^2(x) - y_2^2(x)|\,dx$





$V_y = 2\pi\int_{a}^{b} x|y(x)|\,dx$

$V = 2\pi\int_{a}^{b} x|y_1(x) - y_2(x)|\,dx$

3.积计算平均数: $\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} y(x)\,dx$

第 9 讲 积分等式与积分不等式

第 10 讲 多元函数微分学

1. 领域、去心领域；内点、外点、边界点；有界集、无界集；开集、闭集；连通集、开区域、闭区域、区域；单连通区域、多连通区域；
聚点: 孤立点:

2. 偏导数定义: 例如，对 x，$f_x'(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

二阶偏导数: 例如，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x,y)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z^2}{\partial x\partial y} = f_{xy}''(x,y)$ 也叫二阶混合偏导数

3. 可微: 函数的全增量$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，A、B 仅与 x,y 有关

全微分: $dz = A\Delta x + B\Delta y$

4. 判断函数是否可微的步骤:
a) 写出全增量$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$
b) 写出线性增量$dz = A\Delta x + B\Delta y$，其中$A = f_x'(x_0,y_0), B = f_y'(x_0,y_0)$
c) 作极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若为 0，可微；否则，不可微

5. 判断偏导数连续性的步骤:
a) 用定义法求$f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$
b) 用公式法求$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$

c) 若 $\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$， $\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$成立，则连续

6. 多元函数微分法则

a) 链式求导规则：$z=f(u,v)$

i. $u=\varphi(t),v=\psi(t)$，则$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$

ii. $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

iii. $u=\varphi(x,y),v=\psi(y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}$

b) 隐函数存在定理

7. 二元函数的极值

a) 必要条件：在(x_0,y_0)点，关于 x、y 的一阶偏导为 0

b) 充分条件：记$f_{xx}''(x_0,y_0)=\mathrm{A}$，$f_{xy}''(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}''(x_0,y_0)=C,\Delta=B^2-AB$：

① $\Delta<0$，$\begin{cases}A<0,\text{极大值}\\A>0,\text{极小值}\end{cases}$；②$\Delta<0$，非极值；③$\Delta=0$，不能判断

c) 求最值的步骤：目标函数$u=f(x,y,z)$，条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\\psi(x,y,z)=0\end{cases}$

①构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

②令$\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'+u\psi_x'=0\\F_y'=f_y'+\lambda\varphi_y'+u\psi_y'=0,\\F_z'=f_z'+\lambda\varphi_z'+u\psi_z'=0\end{cases}$ $\begin{cases}F_\lambda'=\varphi(x,y,z)=0\\F_\mu'=\psi(x,y,z)=0\end{cases}$

③解上面方程组得备选点$P_i,i=1,2,\dots,n$，并求$f(P_i)$，取其最大值和最小值

~~④根据实际问题，比存在最值，所得即所求~~

8. 二元函数的最值计算步骤：①求出其在区域内所有可疑点的函数值；②在区域边界上的最值；③比较得出最值

9. 一般$f_{xy}''(x_0,y_0)\neq f_{yx}''(x_0,y_0)$，除非它们在$(x_0,y_0)$都连续

10.

第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义：曲顶柱体的体积

2. 二重积分的存在性(可积性)

a) 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上可积，即二重积分存在

b) 在 D 上有界，且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则在 D 上可积

3. 二重积分的定义：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$$

4. 二重积分的性质：

a) 求区域面积：$\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D dr=A$，A 为 D 的面积

b) 可积函数必有界

c) 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理：参考定积分的性质

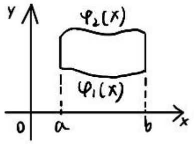
5. 普通对称性：$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\,dxdy\,, & f(x,y)=\ f(-x,y)\\0, & f(x,y)=\ -f(-x,y)\end{cases}$

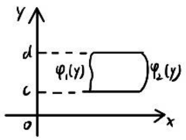
轮换对称性：把 x、y 对调后，区域 D 关于 y=x 对称(或不变)，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

6. 二重积分的计算

a) 直角坐标系下：**下限≤上限**

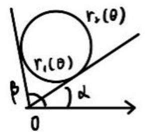




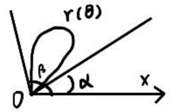
X 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy$

Y 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)}f(x,y)\,dx$

b) 极坐标系下：先积 r，后积θ

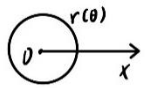


O 在 D 外：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(rcos\theta,rsin\theta)r\,dr$



O 在 D 边界上：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(rcos\theta,rsin\theta)r\,dr$

O 在 D 内：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(rcos\theta,rsin\theta)r\,dr$



c) 选择的**一般**原则：

若①被积函数为$f(x^2+y^2),f\left(\frac{y}{x}\right),f\left(\frac{x}{y}\right)$等形式；②积分区域为圆或者圆的一部分⇒优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系

d) **极坐标与直角坐标的相互转化**:

①$\begin{cases}x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$; ②画好 D 的图形

7. 交换积分次序: **画图**，转换成二重积分，然后交换次序

8.

第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程：$F=\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$或$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型: $y'=f(x)g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(x)}=\int f(x)\,dx$$

b) 可化为变量可分离型:

i. 形如$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$:

令$u=ax+by+c\Rightarrow\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\xrightarrow{\text{带入原方程得}}\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

ii. 形如$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$或$\frac{dx}{dy}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$: 齐次微分方程

令$u=\frac{y}{x}$，则$y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\xrightarrow{\text{带入原方程}}\mathrm{x}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{u}=\varphi(\mathrm{u})\Rightarrow\frac{\mathrm{du}}{\varphi(\mathrm{u})-\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$

c) 一阶线性微分方程: 形如$y'(x)+p(x)\cdot y=q(x)$

通解公式 $y=e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C\right]$

推导: 两边同乘$e^{\int p(x)\,dx}$，得$e^{\int p(x)\,dx}y'(x)+e^{\int p(x)\,dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)\,dx}q(x)$

$\left[e^{\int p(x)\,dx}\cdot y'\right]=e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\Rightarrow e^{\int p(x)\,dx}\cdot y=e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C$

d) 伯努利方程: 形如$y'+p(x)y=q(x)y^n$

步骤:①变形为$y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$

②令$z=y^{1-n}$，得$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

③求解即可

3. 二阶可降微分方程的求解

a) $y''=f(x,y')$型(不显含未知函数 y)

①令$y'=p(x),y''=p'$，原方程变为一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

②若求得其解为$p=\varphi(x,C_1)=y'$，则通解为$y=\int\varphi(x,C_1)\,dx+C_2$

b) $y''=f(y,y')$型(不显含自变量 x)

①令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$，原方程变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

②求解得$p=\varphi(y,C_1)=\frac{dy}{dx}$，分离变量$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$

③两边积分得$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx+C_2$，即可求得通解

4. 二阶变系数线性微分方程: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

二阶常系数线性微分方程: $y''+py'+qy=f(x)$

齐次: $f(x)\equiv 0$; 非齐次: $f(x)\neq 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于$y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $y_1(x),y_2(x)$是其两个线性无关的解(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$常数)，则$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为通解

b) $y^*(x)$为特解，$y(x)+y^*(x)$为特解

c) $y_1^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$的解，$y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的解，$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的解

6. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解 $y''+py'+qy=0$

特征方程$\lambda^2+p\lambda+q\lambda=0$

①$p^2-4q>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$p^2-4q=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

③$P^2-4q<0,\lambda_1,\lambda_2=a\pm\beta_i$，通解$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解 $y''+py'+qy=f(x)$

a) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 特解$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，

其中$\begin{cases}Q_n(x)\text{是}x\text{的 n 次一般多项式} \\ k=\begin{cases}0,\ \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2 \\ 1,\alpha=\lambda_1 or \alpha=\lambda_2 \\ 2,\quad \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}\end{cases}$

b) $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

特解$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$

其中$\begin{cases} l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 的两个不同的 l 次一般多项式} \\ k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征根}\\ 1,\alpha\pm\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$

8. n 阶常系数齐次线性微分方程的解 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

特征方程$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

a) 特征根为单实根λ，通解对应一项$Ce^{\lambda x}$

b) 特征根为 k 重实根λ，通解中对应 k 项$(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2 项$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

d) 特征根为 k 重复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2k 项

$e^{\alpha x}[(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1x+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

9. n 阶非齐次微分方程$y^{(n)}=f(x)$型的解

①令$y^{(n-1)}=P(x),P'=y^{(n)}$,则$P'(x)=f(x),P(x)=y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1$

②同理得$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\,dx+C_2$

③连续积分 n 次，得含有 n 个任意常数的通解

10.

第 13 讲 无穷级数

1. 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

部分和：$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

m 项后余项：$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}+\cdots$

性质： ①$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$；

②$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛⇔ $\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛

③收敛的必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

2. 正项级数：$u_n\geq 0$

a) 收敛的充分必要条件：部分和数列$\{S_n\}$有界

b) 比较判别法：大的收敛，小的也收敛；小的发散，大的也发散

c) 比较判别法的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$

i. A=0，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛 ⇔ u_n是v_n的高阶无穷小

ii. A=+∞，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散 ⇔ 低阶

iii. 0＜A＜+∞，v_n和u_n有相同的敛散性 ⇔ 同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 ⇔ 前＞后；②$\rho>1$，发散 ⇔ 前＜后；

e) 根值判别法(柯西判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 ⇔ 后一项多开一次更小；②$\rho>1$，发散；

3. 交错级数：各项正负相间，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

a) 莱布尼兹判别法：$\{u_n\}$单调不增且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则收敛

4. 任意项级数：各项可正、可负、可为零，记作$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

绝对值级数：给任意项级数加上绝对值，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**

定理：若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛；

5. 收敛级数的性质

①随便加括号，仍收敛，和不变； ②随便加括号后发散，原级数必发散

③加括号后收敛，原级数不一定收敛；④绝对收敛的级数有可交换性

6. 函数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数：$u_n(x)$是 n 次幂函数 一般形式：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$; 标准形式：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

a) 阿贝尔定理：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_1(\neq 0)$收敛，所有$|x|<|x_1|$，绝对收敛

x_2 发散 $>|x_2|$，发散

b) 收敛半径的存在性：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径 R(≥0)必存在

①x=0 收敛，R=0；②整个轴上都收敛，R=+∞

③|x|<R，绝对收敛；|x|>R，发散；x=±R，可能发散可能收敛

c) 收敛半径的求法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=\rho$，$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho},\rho\neq 0\\ +\infty,\rho=0\\ 0,\rho=+\infty\end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 + x=±R 处的敛散性

7. 和函数：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数相等，即在点 x=0 处的某领域内相等，则同幂次的系数相等，即$a_n = b_n$

四则运算:

$$\left(\sum_{n=v}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, |x| < R = \min\{R_a, R_b\}\,, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

性质: ①

②$S(x)$可积，则$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$的 R 不变，I 可能扩大

③$S(x)$可导，则$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$的 R 不变，I 可能缩小

8. ★重要的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$cos\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \le 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots, \begin{cases} x \in (-1,1), & \alpha \le -1 \\ x \in (-1,1], & -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1,1], & \alpha > 0 \end{cases}$$

9. 泰勒级数: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$

麦克劳林级数: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x)^n$

具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

10. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x) \in (x_0 - R, x_0 + R)$有任意阶导数，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0, |x - x_0| < R$$

11. 幂级数展开求法

①直接算；②间接法：变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

12. ★**重要结论:**

调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} 发散, & p \le 1 \\ 收敛, & p > 1 \end{cases}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} 发散, & p \le 1 \\ 收敛, & p > 1 \end{cases}$

交错调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ 收敛

13. 幂级数收敛域的求法

a) 具体型步骤: ①$\Sigma u_n(x) \Rightarrow \Sigma|u_n(x)|$

②使用比值、根值判别法，获得收敛区间；③讨论端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$在某点$x_1$的敛散性

①收敛，$R \ge |x_1 - x_0|$；②发散，$R \le |x_1 - x_0|$；③条件收敛，$R = |x_1 - x_0|$

ii. 已知$\Sigma a_n(x - x_1)^n$的敛散性，求$\Sigma b_n(x - x_2)^m$的敛散性

①$(x - x_1)^n$和$(x - x_2)^m$的转换: 平移收敛区间； R 不变

提出或者乘$(x - x_0)^k$ R 不变

②a_n和b_n的转换: 逐项求导 R 不变，I 可能缩小

or 积分 R 不变，I 可能扩大

14. 幂级数和函数的求法

a) 突破口: $(an + b)^c$在分母上，先导后积；在分子上，先积后导

b) 解题过程标注收敛域

c) 重要结果

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1 - x), -1 \le x < 1$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$

15.

第 14 讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率：$y=f(x),\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式：$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$　　曲率半径：$R=\frac{1}{k}(y''\neq 0)$

曲率圆：$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=R^2$　　其中$\alpha=x-\frac{y'[1+(y')^2]}{y''},\beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功：$W=\int_a^b F(x)\,dx$　　抽水做功：$W=\rho g\int_a^b xA(x)\,dx$

水压力：$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\,dx$

4. 平面曲边梯形的形心坐标：$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}x\,dy}{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}dy}=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$　　$\bar{y}$同理

平面曲线弧长：①$y=y(x),s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

③$r=r(\theta),s=\int_a^b\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

旋转曲面面积：①$y=y(x),S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},S=2\pi\int_a^b|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

平行截面面积已知的立体体积：$V=\int_a^b A(x)\,dx$

5. 欧拉方程：形如$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

解法:　①当 x>0，令$x=e^t$，则$t=\ln x,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$,

$\frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$，求解

②当 x<0，令$x=-e^t$，同理得

6. 傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$[-\pi,\pi]$

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$　　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$

7. 狄利克雷收敛定理：$[-\pi,\pi]$上连续 or 只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则在$[-\pi,\pi]$上处处收敛

和函数$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

且$S(x)=\begin{cases}f(x)\text{，x 为连续点}\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\text{，x 为间断点，其中}f(x_0\pm 0)\text{表示}\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x)\\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\text{，}x=\pm\pi\end{cases}$

8. 傅里叶展开式：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$，$[-l,l]$

其中$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$　　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

S(x)和傅里叶级数的类似

9. 正弦级数：$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

余弦级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$

10.

第 16 讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积：$a\cdot b=a_xbx+a_yb_y+a_zb_z=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

a 在 b 上的投影：$P_{rj_b}a=\frac{a\cdot b}{|b|}$　　$a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$

2. 向量积：$a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\a_x&a_y&a_z\\bx&by&bz\end{vmatrix}$　　$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

$a||b\Leftrightarrow|a\times b|=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{bx}=\frac{a_y}{by}=\frac{a_z}{bz}$

3. 混合积：$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

三向量共面：$[abc]=0$

4. 方向余弦：$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\cos\beta,\cos\gamma$

5. 单位向量：$a^o=\frac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

任意向量：$r=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

6. 平面方程：一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面束：满足某种规律的平面族

7. 直线方程：一般式：两平面的交线，即联立方程

点向式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

参数式：$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$，t 为参数

两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

8. 距离公式：点到面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点 P_0 到线(过 P_1)：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\tau|}$，$\tau=(l,m,n)$为方向向量

两平行直线：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau|}$　　两异面直线：$d=\frac{|(\tau_1\times\tau_2)\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau_1\times\tau_2|}$

两平行平面：$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

9. 直线关系：方向向量τ_1,τ_2　　$\theta=arc\cos\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{|\tau_1|\cdot|\tau_2|}$

平行：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$　　垂直：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

10. 平面关系：法向量$n_1=(A_1,B_1,C_1),n_2$　　$\theta=arccos\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$

平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$　　垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

11. 平面与直线关系：将直线的τ当成平面的法向量

12. 空间曲线：○一般式Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$　　几何意义：两曲面的交线

①切向量：　$\tau=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0},\ldots\right)$

②切线方程：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

○参数方程Γ：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

①切向量：$\tau=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$　　②切线方程：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

曲线在坐标面的投影：例如在 xOy 的投影，将一般式Γ中的 z 消去，

得$\varphi(x,y)=0$，曲线方程为$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$

13. 空间曲面：$F(x,y,z)=0$

①法向量：$n=\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$

②法线方程：$\frac{x-x_0}{n(0)}=\frac{y-y_0}{n(1)}=\frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面：$n(0)(x-x_0)+n(1)(y-y_0)+n(2)(z-z_0)=0$

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　　椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$　　双曲抛物面：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面：$y=ax^2$

14. ★旋转曲面：曲线Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$绕直线 L：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$旋转一周

解法：$\begin{cases}\begin{cases}\overrightarrow{M_1P}\perp s\Rightarrow m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0\\|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\cdots=(x_1-x_0)^2+\cdots+\cdots\end{cases}\\\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}\end{cases}$

15. 空间曲面面积：$z=z(x,y),S=\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2}\,dx\,dy$

16. 方向导数：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma$

17. 梯度：$grad\ u|_{P_0}=\left(u_x'(P_0),u_y'(P_0),u_z'(P_0)\right)$

18. 方向导数和梯度得关系：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=grad\ u|_{P_0}\cdot l^o=\left|grad\ u|_{P_0}\right|\cos\theta$

19.

第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分：　几何意义：空间物体的质量

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j,e+\frac{f-e}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}\cdot\frac{f-e}{n}$$

2. 考研数学中，三重积分总是存在的

3. 凑三重积分定义步骤

①提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；②凑出$\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}$；③$\frac{i}{n}=0+\frac{i-0}{n}$，其他两个同理，凑定义完成

4. 性质：　求空间区域体积：$\iiint_\Omega 1\,dv=\iiint_\Omega dv=V$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

5. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性

6. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系：$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$

b) 柱面坐标系：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\ drd\theta dz$$

c) 球面坐标系：$x=r\ \sin\varphi\ \cos\theta,y=r\sin\varphi\sin\theta,z=r\cos\varphi$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta dr$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,dr$$

适用范围：①被积函数含$f(x^2+y^2+z^2)$或$f(x^2+y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用（$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\,dv}{\iiint_\Omega dv}\Rightarrow\iiint_\Omega x\,dv=\bar{x}\cdot v$）

7. 第一型曲线积分：$\int_L f(x,y)\,ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$　　几何意义：曲线的质量

8. 考研数学中，第一型曲线积分总是存在的

9. 性质：　求曲线长度：$\int_\Gamma 1\,ds=l_\tau$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

10. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性

11. 第一型曲线积分的计算

a) 空间曲线长度：$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

b) 平面曲线：

①$y=y(x)$　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(t)]^2}dt$　类似：平面曲线弧长

②$x=x(t),y=y(t)$　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

③$r=r(\theta)$　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

12. 第一型曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$　　　　几何意义：曲面质量
13. 考研数学中，第一型曲面积分总是存在的
14. 性质：　　求曲线长度：$\iint_\Sigma 1\,dS = S$
可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质
15. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性
16. 第一型曲面积分的计算
　a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）
　　①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）
　　②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$f(x,y,z)$
　　③计算$z_x', z_y' \Rightarrow dS = \sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$
　　　得到$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_\Sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$
　b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用
17. 重积分和第一型线面积分的应用
　a) 面积&体积：平面面积、空间曲线长度$f(\cdot)=1$、空间曲面面积
　　　　空间体积：$V=\iint_D |f(x,y)-g(x,y)|\,d\sigma$
　b) 重心&形心：$\frac{质量}{面积、体积、长度}$　空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理
　　例：平面薄片，$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}$同理
　c) 转动惯量：$I=mr^2$　　　平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理
　　例如：空间物体，$I_x=\iiint_\Omega (y^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dv$，$I_y, I_z, I_O$同理
　d) 引力：$F=G\frac{Mm}{r^2}$　　　平面薄片、空间物体、光滑曲面同理
　　例如：光滑曲线，$F_x = Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\,ds$，$F_y, F_z$同理
18. 重要结论：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (x^2+y^2+z^2)\,dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2\cdot r^2 \sin\varphi\,dr = \frac{4}{5}\pi R^5$$

19.

第 18 讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分：$\int_\Gamma F(x,y,z)\,dr = \int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)\,dz$
　　物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功
2. 考研数学中，第二型曲线积分总是存在的
3. 性质：线性性质，可加性，有向性：$\int_{\widehat{AB}} F\cdot dr = -\int_{\widehat{BA}} F\cdot dr$
　　对称性：假设Γ关于yOz对称，　　　（无轮换对称性）

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \begin{cases} 2\int_{\Gamma_1} P(x,y,z)\,dx, & P(x,y,z) = -P(-x,y,z) \\ 0, & P(x,y,z)=P(-x,y,z) \end{cases}$$

4. 平面第二型曲线积分的计算
　a) 直接计算（参数法）：化为定积分　　α,β大小无所谓，关键对应起、终点

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,dt$$

　b) 格林公式：　条件：封闭，P、Q 有一阶连续偏导

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$$

　　若①L 不是封闭曲线：补线法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法
5. 平面曲线积分与路径无关
6. 空间第二型曲线积分计算：　　斯托克斯公式

$$\oint_l P\,dx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \text{（第二型曲面积分形式）}$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \text{（第一型曲面积分形式）}$$

7. 第二型曲面积分：　　　物理背景：向量函数通过曲面的通量

$$\iint\limits_\Sigma F\cdot dS = \iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

8. 考研数学中，第二型曲面积分总是存在的
9. 性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考第二型曲线积分

10. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$R(x,y,z)$

③将$dx\,dy$写成$\pm dx\,dy$，Σ方向为上取"+"

得$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$

a) 高斯公式： $\oiint_{\Sigma} P\,dy\,dz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

若①Σ不是封闭曲面：补面法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

11. 两类曲面积分关系：第一型与第二型

$$dy\,dz = \cos\alpha\,dS\,,dz\,dx = \cos\beta\,dS, dxdy = \cos\gamma\,dS$$

转换坐标变量法：$z=z(x,y)\Rightarrow\ dydz=-z_x'dxdy, dzdx=-z_y'dxdy\Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{\Sigma} P\big(x,y,z(x,y)\big)(-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy$$

Q,R同理，当Σ定向的法向量与 z 轴夹角在 0~90°，取 +

12. 设置$A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度：$div\ A = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 旋度：$rot\ A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

常用公式：①$div(grad\ u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

②$rot(grad\ u)=0$；③$div(rot\ A)=0$；

13.