目录

第 1 讲 高等数学常用基础知识

1. 余切函数：$cot\,x=\frac{cos\,x}{sin\,x}=\frac{1}{tan\,x}$ $sinx$一个门的面积为 2，$\frac{\pi}{4}\sim\frac{3\pi}{4}$为$\sqrt{2}$

正割函数：$y=sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$ 余割函数：$y=csc\,x=\frac{1}{sin\,x}$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

2. 符号函数：$y=sgn\,x=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$；取整函数：$y=[x]$ →考到了用夹逼

3. 若$U=max\{f(x),g(x)\},V=min\{f(x),g(x)\}$,

$$U+V=f+g,U-V=|f-g|,UV=fg$$

4. 组合数公式：$C_{n+1}^{k+1}=\sum_{i=k}^{n}C_i^k$ $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 推导过程

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(\sum_{k=1}^{n}k)^2$ $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}=2C_{n+2}^3$

5. 积化和差公式*4 $sin\,\alpha\ \ cos\,\beta=\frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta)+sin(a-\beta)]$

和差化积公式*4 $sin\,\alpha+sin\,\beta=2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. 万能公式$u=tan\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$ 则$sin\,x=\frac{2u}{1+u^2}$，$cos\,x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

7. 因式分解公式

$$a^n-b^n=\ (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$=\ (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})\ (n为正偶数)$$

$$a^n+b^n=\ (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(n为正奇数)$$

8. $\boldsymbol{f(x)+f(-x)}$**为偶函数，**$\boldsymbol{f(x)-f(-x)}$**为奇函数**；$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数；

9. $\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right]$

第 2 讲 极限与连续

1. 数列极限定义：任意$\varepsilon>0$，$\exists N\in N_+$,当$n>N$,恒有$|x_n-a|<\varepsilon$

2. 判断数列发散方法*2：找一个发散的子列；找两个收敛到不同极限的子列

3. 数列极限运算规则（参考函数的）

4. 证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限存在：证明单调不减，证明有界

5. 函数极限定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当 }0<|x-x_0|<\delta\text{时},\text{有}|f(x)-A|<\varepsilon$$

6. 函数极限存在的充要条件*2

① 左极限=右极限=A　　②**脱帽法**：$\boldsymbol{f(x)=A+\alpha(x)}$，$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0}$

7. 函数极限的性质：　唯一性；局部有界性；**局部保号性**：$X_n\geq a$，极限$A\geq a$；

8. 无穷小的比阶　前提：$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0,\beta(x)\neq 0$

高阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，记为$\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$；

低阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$；　　同阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$；

k 阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0$　　等价无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

9. 函数极限运算规则　　　　前提：极限都存在

a) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim f(x)=kA\pm lB$

b) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

c) $\boldsymbol{\lim[f(x)^n]=[\lim f(x)]^n}$，n 为正整数

d) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小；有界函数与无穷小的积是无穷小

b) $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=min(mn)$->加减法时低阶吸收高阶

c) $o(x^m)\cdot o(x^n)=\boldsymbol{o(x^{m+n})=x^m\cdot o(x^n)}$->乘法时阶数累加

d) $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m),k\neq 0$且为常数->非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小*9　　前提：$\boldsymbol{x\to 0}$　　本质：泰勒展开

$\boldsymbol{\sin x\sim x}$，$\boldsymbol{\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x}$，$\boldsymbol{\ln(1+x)\sim x}$，$\boldsymbol{e^x-1\sim x}$

$\boldsymbol{a^x-1\sim x\ln a}$，$\boldsymbol{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$，$\boldsymbol{(1+x)^a-1\sim ax}$　　**★$\boldsymbol{x\to x_0}$等价替换成$\boldsymbol{t\to 0}$**

可以先等价，再用洛必达，例 2.19；**注意：**减式不能用等价替换

12. 夹逼准则：$g(x)\leq f(x)\leq h(x),\lim g(x)=\lim h(x)=A$,则$\lim f(x)=A$

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放　　　**不验等号**

对和式缩放的两种方法：

n 为无穷大时，$n\cdot u_{min}\leq\sum_{i=1}^n u_i\leq n\cdot u_{max}$；

n 为有限数时，$\boldsymbol{1\cdot u_{max}\leq\sum_{i=1}^n u_i\leq n\cdot u_{max}\to\lim\sum_{i=1}^n u_i=u_{max}}$

13. 洛必达法则：$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，且一阶导都存在　　　　辅助地位　　例 2.19

若结果的极限不存在，则洛必达失效

14. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）

15. 第一类间断点：可取、跳跃　　　　第二类间断点：无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知　①夹逼准则；③幂级数求和；④级数收敛的必要条件

②定积分定义：n,i次数相同，若凑不出，可以先放缩 or 夹逼

★定积分特殊情况：$\boldsymbol{a=0,b=x,\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(x\frac{i}{n}\right)\frac{x}{n}}$

b) 数列通项未知

①★单调有界数列必有极限：先做差/商证明极限存在，再求（令所有通项等于极值 A）；②求出表达式；③知道极限 a，用拉格朗日中值定理 or 缩放构造$|a_n-a|\leq f(n)$，然后$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$，得出$\lim|a_n-a|=0$　　习题 5.7

17. 函数极限的计算

①判断未定式的种类。七种："$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""∞^0""0^0""1^∞"

i. "$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"：使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽

ii. "$0\cdot\infty$"：转化成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"

iii. "$\infty-\infty$"：转为乘除法。有分母通分；无分母倒代换$x=\frac{1}{t}$或提取公因式

iv. $\infty^0,0^0,1^\infty$：$\lim u^v=e^{\lim\limits_{u\to 1}(u-1)v}=e^{\lim v\ln u}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e} \qquad \lim_{x\to 0} x^x=1$$

②题型：比阶题；反问题（反求参数）；已知某一极限求另一极限

③方法：Ⅰ等价替换：见根号用有理化；Ⅱ等价无穷小替换

Ⅲ洛必达；Ⅳ泰勒展开；Ⅴ夹逼准则；Ⅵ单调有界；

Ⅶ$f(x)$在$x=x_0$处连续，$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

18. 伪无穷：$\ln x$ 　　真无穷：x 　　超无穷：e^x

19. ★常用函数的泰勒展开式*8　　前提：$x\to 0$　　计算时保留 o(·)

$\boldsymbol{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}$ 　　$\boldsymbol{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)}$

$\boldsymbol{\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}$ 　　$\boldsymbol{\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$

$\boldsymbol{\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$ 　　$\boldsymbol{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}$

$\boldsymbol{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}$ 　　$\boldsymbol{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o(x^2)}$

$\frac{A}{B}$型，展开后分子分母同阶；A-B 型，展开到它们的系数不等的 x 的最低次幂为止；

20.

第 3 讲 一元函数微分学的概念与计算

1. ★导数的定义*2

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

性质：**求导 or 下限为 0 的积分，函数奇偶性互换，周期不变**

☆**注：复杂函数的求导可以用定义，例 3.10　　四则运算不成立，用定义，例 3.7**

2. 设$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则$F(x)$在$x=a$处可导$\Leftrightarrow f(a)=0$

3. 某点可导的充分必要条件：函数在该点连续，左导数和右导数存在且相等(定义)

4. 高阶导数概念：$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$

5. 可微判别方法*3:　　①写增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

②写线性增量 $A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$　　③ $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0$,可微；否则不可微

6. 四则运算的前提：函数均可导

7. 复合函数的导数(微分)：$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x)$

8. 反函数求导：$y=f(x),x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x,\varphi'(x)=x'_y(x'_y\neq 0)$，则有

一阶 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$；二阶 $y''_{xx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{1}{x'_y}=\frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

9. 参数方程求导：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$　一阶：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

二阶：$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

10. 隐函数求导：$F(x,y)=0$，两边对 x 求导，将 y 看作中间变量，得到方程，求解即可得到 y'

11. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数，$\ln y=\ln f(x)$；②求导得$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]'\Rightarrow y'=y[\ln f(x)]'$

12. 幂指函数求导法：

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

13. n 阶导数的运算方法　　③写出泰勒公式 or 麦克劳林公式，比较系数

②$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$　$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$　　①逐次求导

14. 常见函数的 n 阶导数 *8

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n(a>0,a\neq 1)$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$　　$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$　　$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$　　$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$

15. 基本初等函数的导数公式　　视绝对值不见

$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$　　$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\tan\ x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$　　$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$　　$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$　　$(\csc x)' = -\csc x \cot x$　　$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

第 4 讲　一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带、不带等号；极值、最值的区别：领域、定义域
2. **极值点**⇐一阶可导　　**驻点**：$f'(x) = 0$ ⇐极值
3. 判断极值的充分条件 *3
   a) x_0的去心领域一阶可导
      i. x_0左边，$f'(x) < 0$；x_0右边，$f'(x) > 0$，为极小值；
      ii. x_0左边，$f'(x) > 0$；x_0右边，$f'(x) < 0$，为极大值；
   b) $x = x_0$处二阶可导，且$f'(x) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$
      $f''(x_0) > 0$，极小值；$f''(x_0) < 0$，极大值
   c) x_0处 n 阶可导，且$f^{(m)}(x_0) = 0(m = 1,2,\dots,n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0(n \geq 2)$
      n 为偶数，$f^{(n)}(x_0) > 0$，极小值；n 为偶数，$f^{(n)}(x_0) < 0$，极大值
4. 凹弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；凸弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
5. 判断凹凸的充分条件：$f''(x) > 0$，凹的；$f''(x) < 0$，凸的
6. 判断拐点的充分条件 *3　　拐点，即$f''(x) = 0$ ⇐二阶可导
   a) x_0的去心领域内二阶导数存在，且左右领域$f''(x)$变号
   b) 三阶可导，$f''(x) = 0$，$f'''(x_0) \neq 0$
   c) x_0处n阶可导, n为奇数, $f^{(m)}(x_0) = 0(m = 2,\dots,n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0(n \geq 3)$
7. 铅锤渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0^+ or x_0^-} f(x) = \infty$　　x_0取函数无定义的点

   水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty\ or\ -\infty} f(x) = A$

   斜渐近线：令$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx] = b$，得$y = kx + b$

   若$f(x)$中 x 的 n 次方，>1，则有铅锤渐近线；=1，斜渐进线；<1，水平渐进线
8. 求闭区间的最值步骤：求可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值
   求开区间的最值步骤：求可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围
9. 函数作图步骤：　①确定定义域和奇偶对称性；
   ②求出$f'(x), f''(x)$等于 0 和其不存在的点，将函数划分成几个区间，**画表格**判断每一个的单调性和凹凸性；③确定渐近线(如果有的话)；④作图

研究对象	研究内容
①祖孙三代$\begin{cases} f(x), f_n(x) = x^n, f_1 * f_2 * \dots * f_n \\ f'(x): \frac{df(x)}{dx^2} = \frac{1}{2x}f'(x) \\ \int_a^x f(t)dt \\ \sum a_n x^n \end{cases}$ ②分段函数；③参数方程；④隐函数	①斜率→切线→法线； ②单调性、极值点 ③凹凸性、拐点； ④渐进线； ⑤取值、值域； ⑥高阶导数

第 5 讲　中值定理

1. 函数的中值定理　　$f(x)$在$[a,b]$上连续
   a) 有界与最值定理：$m \leq f(x) \leq M$，其中 m、M 为[a, b]上的最值
   b) 介值定理：当$m \leq \mu \leq M$，存在ξ，使得$f(\xi) = \mu$
      $f(\xi)$可为高阶导数，μ可为定积分
   c) 平均值定理：　　离散的积分中值定理

   当$a < x_1 < \cdots < x_n < b$，在$[x_1, x_n]$内至少存在一点$\xi$，使$f(\xi) = \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

   d) 零点定理：当$f(a)\cdot f(b) < 0$，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$
2. 导数(微分)的中值定理　　<u>对于$f^n(x)$，$f^{n+1}(x)$也满足中值定理例 5.8(2)</u>
   a) 费马定理：$f(x_0)$可导且为极值，则$f'(x_0) = 0$　　x_0必不为端点
   b) 罗尔定理：$f(x)$满足$\begin{cases} [a,b]上连续 \\ (a,b)内可导，存在\xi \in (a,b)，使得f'(\xi) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$
      (背后为零点定理)

推广：满足以下条件之一，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$
①开区间，但端点极值都为 A；②两端同时趋于+∞or-∞
③一端极限为 A，另一端水平渐近线为$x = A$；
④定义域为$(-\infty, +\infty)$，趋于两侧，取值趋于+∞or-∞

c) ★**拉格朗日中值定理:** “无条件成立“

$[a,b]$连续(a,b)可导，$\exists\xi\in(a,b)$，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

推论：$\boldsymbol{f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)}$

$\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)$ → **联系f和f'**

d) 柯西中值定理：条件同上，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 若$g(x)=x$,变成拉格朗日

e) ★**泰勒公式：**拉格朗日的广义形式，在中点展开

可用于高阶导数的计算证明

阶数：余项之前的最后一项； 本质：任何可导$f(x)=\sum a_n x^n$

i. 带拉格朗日余项: n+1 阶可导，ξ介于x,x_0之间 **证明**

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\boldsymbol{\xi})(x-x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项: $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)$ **计算**

f) ★**积分中值定理:** → **联系f和$\int f$**

几何意义：积分的几何面积=底*平均高=矩形面积

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$or(a,b),$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)}$

3. ★麦克劳林公式: $x_0=0$的泰勒公式
4. 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林/泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

5. ★重要函数的麦克劳林展开式 *7

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n}+1)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$ $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

6. 证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$H(\xi,f(\xi),f'(\xi))=0$: 罗尔定理、费马定理

a) 构造辅助函数：把ξ改成 x，对于$f'(x)+g(x)f(x)=0$，两边同乘$e^{\int g(x)dx}$,

得构造函数$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$

b) 验证端点值相等：转化为给定区间内找 F(x)的两个不同的零点

研究对象	研究区间	十大定理
①抽象函数$f(x)$或$\int_a^b f(x)dx$ ②乘积求导公式引发：**逆向思维** $f(x)f'(x)\to F(x)=f^2(x)$ $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)\to F(x)=ff'$ $f'(x)+f(x)\to F(x)=f(x)e^x$ $f'(x)+f(x)\varphi'(x)\to F(x)$ $=f(x)e^{\varphi(x)}$ ③商的求导公式引发： $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)\to\frac{f'}{f}\to lnf(x)$	①指定区间$\xi\in(a,b)$ ②缩小区间 例 5.5 $\xi\in(c,d)\subset(a,b)$ ③划分区间，多中值	最值定理 介值定理 平均值定理 零点定理 费马定理 罗尔定理 拉格朗日中值定理 柯西中值定理 泰勒公式 积分中值定理

第 6 讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:

a) 零点定理：证明根的存在 当$f(a)\cdot f(b)<0$，$f(x)=0$至少有一个根

b) 单调性：证明根的唯一性 $f(x)=0$在(a,b)内单调, $f(x)=0$至多有一根

c) 罗尔定理的推论：$f^{(n)}(x)=0$至多有 k 个根，$f(x)=0$至多有 k+n 个根

d) 实系数奇次方程$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$：至少有一个根

2. 经典不等式 函数不等式?

a) $\boldsymbol{2|ab|\le a^2+b^2}$ $\boldsymbol{|a\pm b|\le|a|+|b|}$ $\boldsymbol{||a|-|b||\le|a-b|}$

离散情况：$\boldsymbol{|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|}$

连续情况： $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, a<b$

b) 设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \qquad \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

特殊情况： $n=2, \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, (a,b>0)$

$n=3, \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, (a,b,c>0)$

c) Young 不等式：$x,y,p,q>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$xy \le \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

e) 柯西不等式： $\left[\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$ 不证大题不能用

f) $\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \le \left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$， $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

g) $a>b>0, \begin{cases} n>0, a^n>b^n \\ n<0, a^n<b^n \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 0<a<x<b \\ 0<c<y<d \end{cases}$，则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$

$\sin x < x < \tan x \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right), \sin x < x (x>0) \qquad e^x \ge x+1, x-1 \ge \ln x$

$\arctan x \le x \le \arcsin x \,(0 \le x \le 1) \qquad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, (x>0)$

h) $|\sin x|<1, |\cos x|<1 \qquad x\to\infty, p>0, \ln x < x^p$

3. 微分不等式的证明方法 *3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)；②常数变量化；③中值定理

第 7 讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在 定理：①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数

2. 定积分的定义： $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$

注： $\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' = f(x)$**,** a**任意**

3. 定积分存在的充分条件：①在区间上连续；②在区间上有界，只有有限个间断点

必要条件：可积函数必有界

性质:①求区间长度：$L=\int_a^b dx = b-a$；

②线性性：$\int_a^b [k_1f(x)\pm k_2g(x)]\,dx = k_1\int_a^b f(x)\,dx \pm k_2\int_a^b g(x)\,dx$

③可加可拆性：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

④保号性：$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

特殊：$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

⑥估值定理: M、m 为最大、小值，L 为区间长度，$mL \le \int_a^b f(x)\,dx \le ML$

⑦中值定理：函数连续，$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

推论：$g(x)$不变号，则$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

4. 变限积分的性质：①$f(x)$可积，$F(x)$连续；②$f(x)$连续，$F(x)$可导

★变限积分的求导公式： 前提：**被积函数中无**x

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t)\,dt\right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

若被积函数中有x，例$\int_0^x uf(u^2+x^2)\,du$，令$y=u^2+x^2$ 例 11.20

5. 无穷区间上的反常积分：破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分：破坏被积函数的有界性

6. ★**常用积分** 奇点:"∞"和使得函数无定义的点(瑕点)

$\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}+c \qquad$ 常考：$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+c \qquad \int e^x dx = e^x+c \qquad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x+c$

$\int sinxdx = -cosx + c$　　$\int cosxdx = sinx + c$

$\int tanxdx = -\ln|cosx| + c$　　$\int cot\,x\,dx = ln|sin\,x| + c$

$\int secx\,dx = \int \frac{dx}{cosx} = \ln|secx + tanx| + c$　　$\int \sec^2 x\,dx = tanx + c$

$\int cscxdx = \int \frac{dx}{sinx} = \ln|cscx - cotx| + c$　　$\int \csc^2 x\,dx = -cotx + c$

$\int secxtanxdx = secx + c$　　$\int cscxcotxdx = -cscx + c$

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{secxtanx + \int secxdx}{2} = \frac{secxtanx + \ln(secx + tanx)}{2} + c$　　过程

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + c$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + c$

$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + c$　　$\int \frac{dx}{sinx+1} = tanx - secx + c$

7. 不定积分计算　　$\boldsymbol{d|x| = dx}$

a) 凑微分法: $\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f[g(x)]\,d[g(x)] = \int f(u)\,du$

①$f'(x) = Ag(x)$，A 为常数 or 函数　　注：$f(x)dx = df(x)$

$$\int f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{A}\int f(x)Ag(x)\,dx = \frac{1}{A}\int f(x)\,d[f(x)]$$

②若不是，可将被积分函数的分子分母同乘/除$e^{\alpha x}, x^{\beta}, sin\,x, cos\,x$后恒等变形

b) ★**换元法**：$\int f(x)\,dx \overset{x=g(x)}{\Longleftrightarrow} \int f[g(u)]\,d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)\,du$

代换原则：要有反函数，单调函数

i. 三角函数代换: $\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = asin\,t, |t| < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = atan\,t, |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = asec\,t, \begin{cases} x > 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

ii. 恒等变形后三角函数代换:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \Rightarrow \sqrt{\varphi^2(x)+k^2}, \sqrt{\varphi^2(x)-k^2}, \sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$$

iii. 根式代换: $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt{ae^{bx}+c} \Rightarrow$令$\sqrt{*} = t$

同时含有$\sqrt[n]{ax+b}$和$\sqrt[m]{ax+b} \Rightarrow$令$\sqrt[l]{ax+b} = t$，l 为最小公倍数

iv. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上，$\frac{1}{x} = t$

v. 复杂函数的直接代换: 含有$a^x, e^x, ln\,x, arcsin\,x, arctan\,x$，令复杂函数=t

注意: 当$ln\,x, arcsin\,x, arctan\,x$与$e^x$或$x^n$乘除，优先考虑分部积分法

c) 分部积分法: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

i. u, v选择依据：微分后简单点宜作u，积分后简单点宜作v

$\leftarrow u$				$v \rightarrow$
反三角	对数	幂	指	三角
$arcsinx, arctanx$	lnx	x^n	e^x	$sinx$

ii. 推广: u 与 v 有直到(n+1)阶的连续导数　　表格法

$\int uv^{(n+1)}\,dx = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i u^i v^{n-i+1} + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$

d) 有理函数的积分: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx (n < m)$

i. 方法: $Q_m(x)$因式分解后，把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意: k 重因式产生 k 项，即$\frac{\cdots}{(\dots)^k} = \frac{\cdots}{(\dots)^1} + \frac{\cdots}{(\dots)^2} + \cdots + \frac{\cdots}{(\dots)^k}$

8. 定积分的计算

a) 三大方法：牛顿莱布尼兹公式: $\int_a^b f(x)\,dx \xRightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_b^a$

换元积分: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi']\varphi'\,dt$；分部积分: $\int_a^b uv'\,dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

b) 公式总结: ①偶函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$；奇函数，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

注意：平移对称轴 or 中心至x_0，也满足

②周期函数：$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$，$\int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$

③若$\int_0^T f(x)\,dx = 0$，$\int_a^x f(t)\,dt$以 T 为周期

④★区间再现公式:

$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{x=a+b-t} \int_a^b f(a+b-t)\,dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}sint\right)\frac{b-a}{2}cost\,dt = \int_0^1 (b-a)f[a+(b-a)t]\,dt$$

⑤**?** $\int_0^{\pi} xf(sinx)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\,dx$

⑥**?** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)\,dx$；$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx, cosx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx, sinx)\,dx$

⑦$\int_0^{n\pi} x|sinx|\ dx = n^2\pi$

⑧★**华里士公式**：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx =$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{n 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n\text{-}3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{n 为正偶数} \end{cases}$$

例 7.38

★方法总结：令$\boldsymbol{x-\frac{b-a}{2}=t}$，$\begin{cases} \textbf{若为奇函数，等于0} \\ \textbf{若为偶函数，三角代换后华里士公式} \end{cases}$ **例 7.39**

9. 凑定积分定义的方法:①提出$\frac{1}{n}$;②凑出$\frac{i}{n}$;③转化为$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

若不能直接凑出，可先缩放 or 提出容易算极值的部分 **习题 7.14**

10. 反常积分的敛散性判别:

a) 无穷区间的$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$：$p>1$收敛，$p\le 1$发散

b) 无界函数的$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$：$p<1$收敛，$p\ge 1$发散（奇点 x=0）

11. $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

12. 可积不可求积：幂级数展开后积分 例 13.35

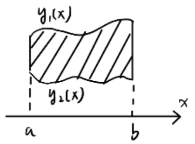
13. 参数方程积分：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$\int_a^b y\,dx = \int_a^b \psi(t)\,d\varphi(t)$

14. $\int(1-\cos x)^{\frac{3}{2}}dx = \int\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}dx = 2\sqrt{2}\int\sin^3\frac{x}{2}dx$

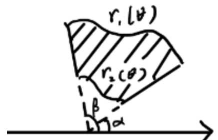
15.

第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

1.计算面积

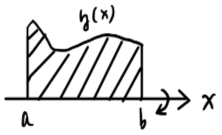


$S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)|\,dx$

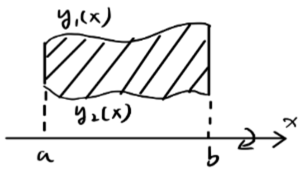


$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)|\,d\theta$

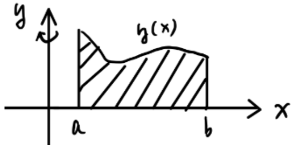
2.计算体积



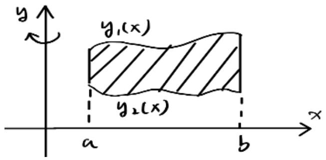
$V_x = \int_a^b \pi y^2(x)\,dx$



$V_x = \pi\int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)|\,dx$



$V_y = 2\pi\int_a^b x|y(x)|\,dx$



$V_y = 2\pi\int_a^b x|y_1(x) - y_2(x)|\,dx$

3.定积分计算平均数：$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,dx$

第 9 讲 积分等式与积分不等式

1. 等式问题：①通过证一个特殊等式求特殊积分

   ②求$\lim\int f(x)dx$：夹逼；③带"$\int$"的中值定理

2. 不等式问题： **构造辅助函数$F(x)$**

   ①上/下限变量化，然后利用$F'(x)$、单调性、最值等；

   ②处理被积函数：Ⅰ利用$f(x)\le g(x)$；　　Ⅱf'：拉格朗日中值定理；

   Ⅲf''：泰勒公式（+积分保号性）；　　Ⅳ放缩+夹逼；

   Ⅴ分部积分；　　Ⅵ换元法　　③先化简，再证明

3. 和式不等式：若$f(x)$在$[1,n]$单调递增，$\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\le\int_1^n f(x)\,dx\le\sum_{k=2}^{n}f(k)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\le\int_1^n f(x)\,dx\le\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}f(x)$$

   若单调递减，把≤换成≥

第 10 讲 多元函数微分学　　10 分 大题 应用

1. 多元函数求极限：除洛必达、单调有界准则不能用外，其余全照搬一元的

2. 偏导数定义：例如，对 x，$f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　　对y同理

   二阶偏导数：例如，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$　　$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$

   也叫二阶混合偏导数

3. 可微：函数的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，A、B 仅与 x,y 有关

   全微分：$dz=A\Delta x+B\Delta y$

4. 函数**可微**：$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}\frac{[f(x,y)-f(x_0,y_0)]-[f_x'*(x-x_0)+f_y'*(y-y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$

5. 判断偏导数**连续性**的步骤：

   ①用定义法求$f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$；②用公式法求$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$

   ③若$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$成立，则连续

偏导数存在(某方向双侧)

偏导数连续 ⟹ 可微 ⟹ 连续 ⟹ 极限存在(全方向)

方向导数存在(某方向单侧)(仅数学一)

6. 在某点不可微⇒该点偏导不连续

7. 多元函数微分法则

   a) 链式求导规则：$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，令$\frac{\partial z}{\partial u}=f_1',\frac{\partial z}{\partial v}=f_2'$

   则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

   则$z''_{xx}=f''_{11}(u_x')^2+f''_{12}u_x'v_x'+f_1'u''_{xx}+f''_{22}(v_x')^2+f''_{21}v_x'u_x'+f_2'v''_{xx}$

   $z''_{xy}=f''_{11}u_x'u_y'+f''_{12}u_x'v_y'+f_1'u''_{xy}+f''_{22}v_x'v_y'+f''_{21}v_x'u_y'+f_2'v''_{xy}$

   b) 隐函数求导：$F(x,y,z)=0$，两边分别对x,y求导，将z看作中间变量，得到方程，求解即可得到z_x',z_y'

8. 二元函数的极值　　二阶泰勒公式

   a) 必要条件：$(f_x',f_y')_{X_0}=0$，X_0为驻点

   b) 充分条件：①$\begin{vmatrix}f''_{xx}&f''_{xy}\\f''_{yx}&f''_{yy}\end{vmatrix}_{X_0}>0$，$\begin{cases}(\text{负定})f''_{xx}|_{X_0}<0，\text{极大值}\\(\text{正定})f''_{xx}|_{X_0}>0，\text{极小值}\end{cases}$

   ②$|\cdot|<0$，非极值；　③$|\cdot|=0$，不能判断

9. ★条件最值：目标函数$u=f(x,y,z)$，条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$

   ①构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

   ②令$\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'+u\psi_x'=0\\F_y'=0,\quad F_z'=0\end{cases}$，$\begin{cases}F_\lambda'=\varphi(x,y,z)=0\\F_\mu'=\psi(x,y,z)=0\end{cases}$

   ③解方程，得 n 个点，计算每个点的值，取其最大值和最小值

   若f带根号，可以去掉根号后计算

10. $f(x,y)$在区域D中的最值：①求出其在区域内所有可疑点的函数值；②在区域边界上的最值；③比较得出最值

11. 一般$f''_{xy}(x_0,y_0)\ne f''_{yx}(x_0,y_0)$，除非它们在$(x_0,y_0)$都连续

12. 偏微分方程：$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$

13. $F(x,y)\xrightarrow{\text{对}x\text{求导}}F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\frac{dy}{dx}=0\xrightarrow{\text{再对}x\text{求导}}$

$$F''_{xx}(x,y)+F''_{xy}(x,y)\frac{dy}{dx}+\left[F''_{yx}(x,y)+F''_{yy}(x,y)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}+F'_y(x,y)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义：曲顶柱体的体积
2. 二重积分的存在性(可积性)
   ①在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上可积，即二重积分存在
   ②在 D 上有界，且在 D 上除了有限点和有限光滑曲线外都连续，则在 D 上可积
3. 二重积分的定义：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$$

性质：求区域面积：$\iint_D dr = A$，A 为 D 的面积　　　可积函数必有界
　　线性、可加、保号、估值、中值：参考定积分的性质

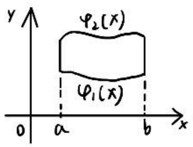
4. 普通对称性：

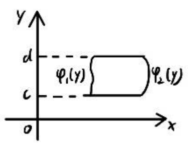
$\iint_D f(x,y)\,dxdy =$	偶→ $2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$	奇→ 0
D关于y轴对称	$f(x,y)= f(-x,y)$	$f(x,y)=- f(-x,y)$
D关于原点对称	$f(x,y)= f(-x,- y)$	$f(x,y)=- f(-x,- y)$
D关于$y=x$对称	$f(x,y)=f(y,x)$	$f(x,y)=-f(y,x)$
D关于$y=a$对称**?**	$f(x,y)=f(x,2a-y)$	$f(x,y)=-f(x,2a-y)$

　轮换对称性：把 x、y 对调后，**区域 D** 关于 y=x 对称(或不变)，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

5. 二重积分比大小：①用对称性；②用保号性
6. 二重积分的计算：画图、对称奇偶、选直/极坐标（可以拆）
   a) 直角坐标系与换序：**下限≤上限**

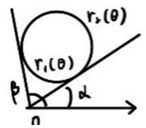




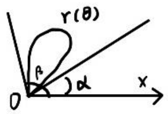
X 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

Y 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx$

   b) 极坐标系下与换序：先积 r，后积θ

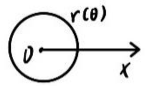


O 在 D 外：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$



O 在 D 边界上：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$

O 在 D 内：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr$



   c) 选择的**一般**原则：
   若①被积函数为$f(x^2+y^2), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$等形式；②区域为圆或者圆的一部分
   ⇒优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系
   d) **极坐标与直角坐标的相互转化**：　　　直线在极坐标下的表示用此方法！
   ①$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy \xRightarrow[y=r\sin\theta]{x=r\cos\theta} \iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dxdy$；②画好 D 的图形
   e) 关于积分区域D
 ①图形变换：平移、对称、伸缩
 ②直角系方程给出：已知、未知(描特殊点、图形变换、导数)
 ③极坐标方程给出：已知(附录Ⅰ)、未知(描特殊点、图形变换、极直互换)
 ④参数方程给出：已知(附录Ⅰ)、未知(描特殊点、化为直角/极坐标)
 ⑤动区域（含其他参数）
   f) 关于被积函数：分段函数（含绝对值）、最大/小值函数、取整函数(夹逼)、符号函数、抽象函数（复合函数、偏导函数）

   g) 换元法：$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy \xRightarrow[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint_{D_{uv}} f[x(u,v).y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \neq 0$$

7. 交换积分次序：**画图**，转换成二重积分，然后交换次序
8. 二重变限积分的求导公式：参考一阶的
9. 二重积分的逆向思维：$\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b\frac{1}{f(y)}dy = \iint_D\frac{f(x)}{f(y)}dxdy)$
10.

第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程：$F=\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$或$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$
常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程
2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型: $y'=f(x)g(y)$ $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx$

b) 可化为变量可分离型:

①$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$: 令$u=ax+by+c,\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\xRightarrow{\text{带入得}}\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

②$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$或$\frac{dx}{dy}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$: 齐次微分方程

令$u=\frac{y}{x}$, 则$y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\xRightarrow{\text{带入原方程}}x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u)\Rightarrow\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$

c) 一阶线性微分方程: 形如$y'(x)+p(x)\cdot y=q(x)$

通解公式 $y=e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C\right]$

推导: 两边同乘$e^{\int p(x)\,dx}$, 得$e^{\int p(x)\,dx}y'(x)+e^{\int p(x)\,dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)\,dx}q(x)$

$\left[e^{\int p(x)\,dx}\cdot y\right]'=e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\Rightarrow e^{\int p(x)\,dx}\cdot y=\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C$

d) 伯努利方程: 形如$y'+p(x)y=q(x)y^n$ **即x为自变量，y为应变量**

步骤:①变形为$y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$ ③求解即可

②令$z=y^{1-n}$, 得$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, 则$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

3. 二阶可降微分方程的求解 换元

①$y''=f(x,y')$型: 令$y'=p(x),y''=p'$, 原方程变为一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

②$y''=f(y,y')$型: 令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$, 原方程变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

4. 二阶**变**系数线性微分方程: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 齐次: $f(x)\equiv 0$;
二阶**常**系数线性微分方程: $y''+py'+qy=f(x)$ 非齐次: $f(x)\neq 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于$y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $y_1(x),y_2(x)$是其两个线性无关的解(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$常数), 则$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为通解, $C_1+C_2=1$

b) $y^*(x)$为特解, $y(x)+y^*(x)$为通解

c) $y_1^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$ 的 **特解**， $y_2^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的**特解**, $y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的**特解**

d) 全部解=奇解+通解 ∴通解不代表所有解

6. $y''+py'+qy=0$的通解: 特征方程$\lambda^2+p\lambda+q\lambda=0$

①$p^2-4q>0$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, 通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$p^2-4q=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 通解$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

③$P^2-4q<0,\lambda_1,\lambda_2=a\pm\beta_i$, 通解$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7. $y''+py'+qy=f(x)$的特解

a) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 特解$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$,

$k=\begin{cases}0, & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\ 1, & \alpha=\lambda_1 or \alpha=\lambda_2\\ 2, & \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$, $Q_n(x)$是x的n次一般多项式, 通过将y^*带入方程求出$Q_n(x)$

b) $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

特解$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$

其中$\begin{cases}l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 两个不同的 l 次一般多项式}\\ k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征根}\\ 1,\alpha\pm\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$

注意: 若$P_n(x)=0$, $Q_l^{(2)}(x)$不一定为 0

8. n 阶常系数齐次线性微分方程的解 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

特征方程$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

a) 特征根为单实根λ, 通解对应一项$Ce^{\lambda x}$

b) 特征根为 k 重实根λ, 通解中对应 k 项$(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$, 通解中对应 2 项$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

d) 特征根为 k 重复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$, 通解中对应 2k 项
$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

9. n 阶非齐次微分方程$y^{(n)}=f(x)$型的解

①令$y^{(n-1)}=P(x),P'=y^{(n)}$,则$P'(x)=f(x),P(x)=y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1$

②同理得$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\,dx+C_2$

③连续积分 n 次, 得含有 n 个任意常数的通解

10.

第 13 讲 无穷级数

1. 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
部分和：$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$
m 项后余项：$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+k} + \cdots$
性质：①$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n \pm bv_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm b\sum_{n=1}^{\infty} v_n$；
②$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Leftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$收敛　　③**收敛的必要条件：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$**

2. ★正项级数：$u_n \geq 0$　　发散+发散=发散

a) 收敛的充分必要条件：$\{S_n\}$有上界，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$

b) **比较判别法**：大的收敛，小的也收敛；小的发散，大的也发散

c) 比较判别法的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$　　适用于初等级数

i. A=0，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛 $\Leftrightarrow$　u_n是v_n的高阶无穷小
ii. A=+∞，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也发散 $\Leftrightarrow$　低阶
iii. 0＜A＜+∞，v_n和u_n**同敛散** $\Leftrightarrow$　同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$　　适用于

①$\rho < 1$，收敛；②$\rho > 1$，发散；③$\rho = 1$，不一定（大部分发散）

e) 根值判别法(柯西判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$

①$\rho < 1$，收敛②$\rho > 1$，发散；③$\rho = 1$，不一定(举反例，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n s$)

3. 交错级数：各项正负相间，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

a) **莱布尼兹判别法**：$\{u_n\}$单调不增且$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则收敛

b) 拆成几个级数之和分别判断，然后利用收敛级数的性质判断交错级数

4. 任意项级数：可正可负可 0，记作$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$　　绝对值级数：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$
若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**绝对收敛**　　**大多数**
若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$**条件收敛**
定理：若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必收敛；
可以拆成正项级数和交错级数分别判断收敛，然后总和；

5. 收敛级数的性质　　敛散性推不出除了$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$外任何极限的内容

①收敛级数随便加括号后仍收敛，其和不变；②随便加括号后发散，原级数必发散
③加括号后收敛，原级数不一定收敛；　　④绝对收敛的级数有可交换性

6. **判断敛散性步骤：**①判断$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|$是否为 0，②判别级数类型：(a)正项级数，五大判别法；(b)交错级数：先判断$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$，成功了变成正项，失败则用莱布尼兹判别法

7. ★**重要结论**：调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　发散　　p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}发散，p \leq 1\\ 收敛，p > 1\end{cases}$

广义 p 级数：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}发散，p \leq 1\\ 收敛，p > 1\end{cases}$；交错调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$，收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$都是任意项级数
①$a, b, c \neq 0$，且$au + bv + cw = 0$，则只要其中两个收敛，另一个必收敛
②若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散
③若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$绝对收敛 $\Leftarrow \left|\frac{u_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + \frac{1}{n^2})$
④若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛：

Ⅰ收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$，性质①　　反推要加$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$的条件

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$　　$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+1})$

$u \geq 0$　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$

Ⅱ不定：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　　反例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$　　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$　　$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$　　反例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

u任意　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$　　反例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

u任意　　$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$　　反例：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

⑤$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛：$\begin{cases} u_n \ge 0, v_n \ge 0, \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n\text{收敛} \\ u_n\text{任意}, v_n \ge 0, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| v_n\text{收敛} \end{cases}$

8. 函数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$　　幂级数：$u_n(x)$是 n 次幂函数

一般形式：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$；　**标准形式：**$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$

a) 阿贝尔定理：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_1(\ne 0)$收敛，所有$|x|<|x_1|$，绝对收敛

x_2　　发散　　　$>|x_2|$，发散

b) 收敛半径的存在性：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径 R(≥0)必存在

①x=0 收敛，R=0；　　②整个轴上都收敛，R=+∞

③|x|<R，绝对收敛；|x|>R，发散；x=±R，可能发散可能收敛

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛半径：$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，$R=\begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \ne 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

d) 收敛域 ＝ 收敛区间 ＋ $x=\pm R$处的敛散性

9. 和函数：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

定理：幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$相等，即在点 x=0 处的某领域内拥有相同的和函数，则它们同次幂项的系数相等，即$a_n=b_n$

四则运算：　乘法：$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

其中$|x|<R=\min\{R_a, R_b\}, c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

性质：①$S(x)$连续，幂级数在$x=R$(or$-R$)收敛，则$S(x)$在$(-R,R]$(or$[-R,R)$)连续

②$S(x)$可积，则$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1}$ $(x\in I)$的 R 不变，收敛域可能扩大

③$S(x)$可导，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$(|x|<R)$的 R 不变，收敛域可能缩小

10. 泰勒级数：$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$；麦克劳林级数：$\sim\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$

注意：具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x)\in(x_0-R, x_0+R)$有任意阶导数，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$　$\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0, |x-x_0|<R$

11. 幂级数展开求法　①标准：直接算；　　级数展开数三考得多，数一少

②不标准(间接法)：变量代换、四则运算、逐项求导/积分、待定系数

12. 幂级数**收敛域**的求法　　分析幂级数必须先求收敛域

a) 具体型步骤：①$\Sigma u_n(x) \Rightarrow \Sigma|u_n(x)|$

②$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ or $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}<1$，得收敛区间$(a,b)$；③端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$在某点$x_1$的敛散性

①收敛，$R\ge|x_1-x_0|$；②发散，$R\le|x_1-x_0|$；**③条件收敛，$\boldsymbol{R=|x_1-x_0|}$**

ii. 已知$\Sigma a_n(x-x_1)^n$的敛散性，求$\Sigma b_n(x-x_2)^m$的敛散性

①$(x-x_1)^n$和$(x-x_2)^m$的转换：平移收敛区间；　R 不变

提出或者乘$(x-x_0)^k$　R 不变

②a_n和b_n的转换：逐项求导　R 不变，I 可能缩小　→　子型

or 积分　R 不变，I 可能扩大　→　母型

13. ★幂级数**和函数**的求法（小猪配齐）

a) 基本思路：①复杂系数**拆**成简单求和；②各项阶数、系数**配**齐；③**凑**子型、母型级数；④无定义的点用级数**补**齐

b) 突破口：②有递推关系，微分方程

①$(an+b)^c$　在分子上，先积后导，$S(x)=(\int S(x)dx)'$

在分母上，先导后积，$S(x)=\int_a^x S'(x)dx+S(a)$，$a$取展开点

c) **重要的幂级数展开+收敛域（方浩）**

子型：$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\xrightarrow{\text{求导}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}}$　　$\boldsymbol{-1<x<1}$

$\boldsymbol{\xrightarrow{\text{求导}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}}$　　$\boldsymbol{-1<x<1}$

母型：$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=-\ln(1-x)}$　　$\boldsymbol{-1\le x<1}$

$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=-\ln(1+x)}$　　$\boldsymbol{-1<x\le 1}$　　**交错**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\arctan x \xleftarrow{\text{积分}} \sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{-\ln(1-x)-[-\ln(1+x)]}{2}$$

带阶乘： $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$　　$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$　　$-\infty<x<+\infty$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$　　**(泊松分布期望、方差)** $-\infty<x<+\infty$

其他： $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\begin{cases}x\in(-1,1),\ \alpha\le -1\\ x\in(-1,1],-1<\alpha<0\\ x\in[-1,1],\quad \alpha>0\end{cases}$

14.

第 14 讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率：$y=f(x),\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，则$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式：$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$　　曲率半径：$R=\frac{1}{k}(y''\neq 0)$

曲率圆：$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=R^2$　　其中$\alpha=x-\frac{y'[1+(y')^2]}{y''},\beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功：$W=\int_a^b F(x)\,dx$　　**抽水做功**：$W=\rho g\int_a^b xA(x)\,dx$

水压力：$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\,dx$　$f(x)-h(x)$为底宽　　$A(x)$为底面积

4. **平面曲边梯形的形心坐标：** $\bar{x}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}x\,dy}{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}dy}=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$　　$\bar{y}$同理

平面曲线弧长： ①$y=y(x),s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

③$r=r(\theta),s=\int_a^b\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

旋转曲面面积：①$y=y(x),S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},S=2\pi\int_a^b|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

平行截面面积已知的立体体积：$V=\int_a^b A(x)\,dx$

5. 微分方程的物理应用：加速度$a=v\frac{dv}{dx}$　　引力$F=G\frac{Mm}{r^2}$　　注意力的方向

冷却定律$\frac{dx}{dt}=-k(x-x_0)$　$x-x_0$为温差，$-$表示温度随时间的↑而↓

6. 欧拉方程：形如$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

解法：　①当 x>0，令$x=e^t$，则$t=\ln x,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$，求解

②当 x<0，令$x=-e^t$，同理得

7. 傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$[-\pi,\pi]$　　**周期函数**

傅里叶系数：$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$　　计算几乎不考

8. 狄利克雷收敛定理：$[-\pi,\pi]$上连续 or 只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则在$[-\pi,\pi]$上处处收敛

和函数$S(x)=\begin{cases}f(x),\ \text{x 为连续点}\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \text{x 为间断点}\\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2},\ x=\pm\pi\end{cases}$　　其中$f(x_0\pm 0)$表示$\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x)$

9. 正弦级数：$f(x)$奇函数，$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$　$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$

余弦级数：$f(x)$偶函数，$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$　$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

10. 延拓：将$[0,\pi]$上函数展位正弦 or 余弦级数
步骤：补成$[-\pi,\pi]$上的奇 or 偶函数，再以2π为周期延拓

11. 傅里叶展开式：$n\to\frac{n}{l},[-\pi,\pi]\to[-l,l]$

第 16 讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积：$a\cdot b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

a 在 b 上的投影：$P_{r j_b}a=\frac{a\cdot b}{|b|}$　　　$a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$

2. 向量积：$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_x & a_y & a_z\\ bx & by & bz\end{vmatrix}$　　　$a||b\Leftrightarrow|a\times b|=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{bx}=\frac{a_y}{by}=\frac{a_z}{bz}$

$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$　　　方向：右手定则

3. 混合积：$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$　　　三向量共面：$[abc]=0$

4. 方向余弦：$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\cos\beta,\cos\gamma$

5. 单位向量：$a^o=\frac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$　任意向量：$r=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

6. 平面方程：法向量$n=(A,B,C)$　平面上两不共线向量叉乘　　比直线方程重要

一般式：$Ax+By+Cz+D=0$　　　☆**截距式：**$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

点法式：$\overrightarrow{P_0P}\perp\vec{n}\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2\\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3\end{vmatrix}=0$

平面束：已知平面S过直线L:$\begin{cases}S_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ S_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，且$S$不为其中的一个平面，例如$S_1$，则$S$方程为$\mu S_1+S_2=0$

7. 直线方程：方向向量$\tau=(l,m,n)$　　一般式：两平面的交线，即联立方程

点向式：$\overrightarrow{P_0P}||\tau\to\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$　　两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

参数式：$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$，t 为参数　　τ含0用这个

8. 距离公式：★**点到面：**$\boldsymbol{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$　　两平行平面：$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

其他几乎不考

点 P_0 到线(过 P_1)：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\tau|}=\frac{\text{平行四边形面积}}{\text{底边}}$，$\tau=(l,m,n)$为方向向量

两平行直线：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau|}$　　两异面直线：$d=\frac{|(\tau_1\times\tau_2)\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau_1\times\tau_2|}=\frac{\text{平行六面体体积}}{\text{底面积}}$

9. ×直线关系：方向向量τ_1,τ_2　　　$\theta=arc\cos\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{|\tau_1|\cdot|\tau_2|}$

平行：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$　　　垂直：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

10. ×平面关系：法向量$n_1=(A_1,B_1,C_1),n_2$　　　$\theta=\arccos\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$

平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$　　　垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

11. ×平面与直线关系：将直线的τ当成平面的法向量

12. ★**空间曲线**：○一般式$\Gamma:F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$　　几何意义：两曲面交线

①切向量：$\tau=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z\\ G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix} F'_z & F'_x\\ G'_z & G'_x\end{vmatrix}_{P_0},\dots\right)$　　②切线：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

○参数方程Γ：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

①切向量：$\tau=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$　　②切线：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

★**曲面在坐标面的投影**：例xOy，将Γ中的 z 消去，曲线方程为$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$

注意简单特例：若曲面为柱面，如$x^2+4y^2=4$在xOy的投影为本身

13. ★空间曲面：隐式$\boldsymbol{F(x,y,z)=0}$　　显式$\boldsymbol{z=z(x,y)}$

①法向量：$\boldsymbol{n=(F'_x|_{X_0},F'_y|_{X_0},F'_z|_{X_0})}$　　**②法线：**$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{n(0)}=\frac{y-y_0}{n(1)}=\frac{z-z_0}{n(2)}}$

③切平面：$\boldsymbol{n(0)(x-x_0)+n(1)(y-y_0)+n(2)(z-z_0)=0}$

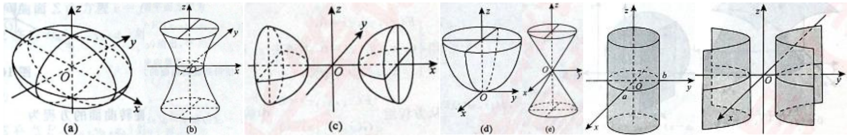
a.椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　b.单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

c.双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　　d.椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

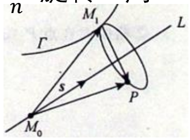
e.椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$　　×双曲抛物面(马鞍面)：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$　了解

椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　双曲柱面：$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　（无图）

抛物柱面：$y=ax^2$　　柱面准线：定曲线；母线：动直线



14. ★旋转曲面：曲线Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$绕直线 L：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$旋转一周



解法：$\begin{cases}\left|\overrightarrow{M_0P}\right|=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\\ \overrightarrow{M_1P}\perp s\end{cases}+\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}$

15. 方向导数：公式法 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma$

定义：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,\ y_0,\ z_0)}{t}$

16. 梯度：$grad\ \ u|_{P_0}=\left(u_x'(P_0),u_y'(P_0),u_z'(P_0)\right)$

17. 方向导数和梯度的关系：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=grad\ \ u|_{P_0}\cdot l^o=\left|grad\ \ u|_{P_0}\right|\ \cos\theta$

18. $S_{椭圆}=ab\pi$　　$S_{球}=4\pi r^2$　　$V_{球}=\frac{4}{3}\pi r^3$　　$V_{锥}=\frac{1}{3}Sh$

19.

第 17 讲　三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分：　　几何意义：空间物体的质量　　总存在

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j,e+\frac{f-e}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}\cdot\frac{f-e}{n}$$

性质：求空间区域体积$\iiint_\Omega dv=V$　　普通、轮换对称性：参考二重积分的对称性

可积必有界，线性，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

2. 凑三重积分定义步骤

①提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；②凑出$\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}$；③$\frac{i}{n}=0+\frac{i-0}{n}$，其他两个同理，凑定义完成

3. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系：二重积分+定积分

i. 先一后二，即先定积分再二重积分：先投影(得D)，再穿线(得α,β)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\iint_D dxdy\int_\alpha^\beta f(x,y,z)dz$$

ii. 先二后一，即先二重积分再定积分：先定限(得α,β)，再积分(得D)

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\int_\alpha^\beta dz\iint_D f(x,y,z)\,dxdy$$

b) 柱面坐标系：$x=r\ \cos\theta,y=r\ \sin\theta,z=z$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,drd\theta dz$$

c) 球面坐标系：$x=r\ \ \sin\varphi\ \ \cos\theta,y=r\ \ \sin\varphi\ \ \sin\theta,z=r\ \ \cos\varphi$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(r\ \ \sin\varphi\ \ \cos\theta,r\sin\varphi\ \ \sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta dr$$
$$=$$
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\ \ \sin\varphi\ \ \cos\theta,r\sin\varphi\ \ \sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,dr$$

适用范围：①被积函数含$f(x^2+y^2+z^2)$或$f(x^2+y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用（$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\,dv}{\iiint_\Omega dv}\Rightarrow\iiint_\Omega x\,dv=\bar{x}\cdot v$）

4. 第一型曲线积分：$\int_L f(x,y)\,ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$　　几何意义：曲线质量

积分区域为曲线的定积分(面积)　　总存在

性质：求曲线长度：$\int_\Gamma 1\,ds=l_\tau$ 普通、轮换对称性：参考二重积分的对称性

可积必有界，线性，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

5. 第一型曲线积分的计算：

a) 平面曲线：一投二代三计算（伪二元）　　类似：平面曲线弧长

①$y=y(x)$　　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$

②$x=x(t),y=y(t)$　　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

③$r=r(\theta)$ $\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)cos\theta,r(\theta)sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

b) 空间曲线长度：和上面的②同理

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

6. 第一型曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$ 几何意义：曲面质量

积分区域为曲面的二重积分(体积) 总存在

性质：求曲面面积$\iint_\Sigma 1\,dS=S$ 普通、轮换对称性：参考二重积分的对称性

可积必有界，线性，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

7. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序） 一投二代三计算（伪三元）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

若投影有重叠：①投影到其他平面；②拆分后投影

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$f(x,y,z)$ $x=x(y,z)$同理

③计算$z'_x,z'_y\Rightarrow dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy$

得到$\boldsymbol{\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_\Sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2+1}\,dx\,dy}$

b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

8. 重积分和第一型线面积分的应用 不同应用，被积函数相同，积分维度不同

a) 面积&体积：平面面积：$S=\int_a^b|y_1(x)-y_2(x)|\,dx$

空间体积：$V=\iint_D|f(x,y)-g(x,y)|\,d\sigma$

空间曲线长度：$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$

空间曲面面积：$z=z(x,y),S=\iint_D\sqrt{(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2+1}\,dx\,dy$

介于两曲线弧的柱面面积：$S=\int_L[z_1(x,y)-z_2(x,y)]\,ds$

若$r=r(\theta),ds=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

b) ★重心&形心=$\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$ 空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例：平面薄片，$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}$同理 ρ为常数时，为形心

c) 转动惯量：$I=mr^2$ 平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如：空间物体，$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dv$，$I_y,I_z,I_O$同理

d) 引力：$F=G\frac{Mm}{r^2}$ 平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如：光滑曲线，$F_x=Gm\int_L\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$，$F_y,F_z$同理

9. $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{4}{5}\pi R^5$

10. S是以原点为圆心的球，则$\iint_\Sigma xy\,dS=\iint_\Sigma x dS=0$ 习题 17.11

第 18 讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分：$\int_\Gamma F(x,y,z)\,dr=\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)\,dz$

物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功 总存在

性质：线性，可加，有向$\int_{\widehat{AB}}F\,dr=-\int_{\widehat{BA}}F\,dr$，对称：参考二重积分的对称性

2. 平面第二型曲线积分的计算 平面曲线积分与路径无关

a) 直接计算：一投二代三计算 α,β大小无所谓，关键对应起、终点

$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}\,dx$

$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,dt$

b) ★格林公式： 条件：封闭，P,Q有一阶连续偏导 左手朝D为正方向

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

若①L不是封闭曲线：补线法；②P,Q,其偏导在D上不连续：挖去法

③L包含原点，则补一个刚好能带入的包含原点的曲线

3. ★空间第二型曲线积分计算：

方法一：斯托克斯公式 l为Σ的边界，l方向与Σ的法向量成右手系

$$\oint_l P\,dx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$

（第二型曲面积分形式） （第一型曲面积分形式）

方法二：降维(z用x,y代)，再用格林公式

4. 平面曲线积分与路径无关的理论

①沿任意全在D内的闭曲线L，有$\oint_L P\,dx+Qdy=0$

②$\int_{L_{AB}} P\,dx+Qdy$在D内与路径无关$\Leftrightarrow P\,dx+Qdy$存在原函数，只与$L$的起、终点$A,B$有关

③D内存在$u(x,y)$，使$du=Pdx+Qdy$

④$grad\ \ u=Pi+Qj$

⑤$Pdx+Qdy=0$为全微分方程

⑥$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

a) D是平面有界闭区域，P,Q连续，则①~⑤等价

b) ★**D是平面单连通区域，P,Q连续且具有一阶导，①~⑥等价**

c) D是平面有界闭区域，P,Q连续且具有一阶导，②⇒⑥

5. 第二型曲面积分： 物理背景：向量函数通过曲面的通量 总存在

$\iint_\Sigma F\cdot dS=\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$

性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考第二型曲线积分

6. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：拆成三部分算 一投二代三计算 （无先后顺序）

①将$\Sigma\xrightarrow{\text{投影到某一平面}}$投影区域为$D$（比如$D_{xy}$） 投影不能重叠

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$R(x,y,z)$

③将$dx\,dy$写成$\pm dx\,dy$，Σ方向为上取"+"

得$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$

a) ★高斯公式： 外正内负，上正下负

$$\oiint_\Sigma P\,dy\,dz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

若①Σ不是封闭曲面：补面法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

7. 第一、二型曲面积分关系： $dy\,dz=\cos\alpha\,dS,dz\,dx=\cos\beta\,dS,dxdy=\cos\gamma\,dS$

转换坐标变量法：将原投影在一个坐标面上的曲面积分投影到另一个坐标面上

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{xy}} P\big(x,y,z(x,y)\big)(-z_x')dxdy$$

Q,R同理，当Σ定向的法向量与 z 轴夹角在 0~90°，取 +

8. 设$A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度：$div\ \ A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

旋度：$rot\ \ A=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

①$div(grad\ \ u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；②$rot(grad\ \ u)=0$；③$div(rot\ \ A)=0$；

9. $|Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma|=|(P,Q,R)||\vec{n}|cos\varphi\le|(P,Q,R)|$