

第一章 线性空间和线性变换

1.1-1.3 线性空间、基与坐标、坐标变换、线性子空间

- 线性空间：
 $Ax = 0$ 解空间、 A 的核/零空间： $N(A)$ ； A 的列空间/值域： $R(A)$
- 同一组点在不同基 (α, β, γ) 下有不同的坐标 (x, y, z) ： $\alpha x = \beta y = \gamma z$
- 求向量 α 在基 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 下的坐标 k ：解 $Ak = E\alpha$
- 过渡矩阵 P ： $\beta = \alpha P$ ，由基 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 到基 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$
- 坐标变换公式： $x = Py \Leftarrow \alpha x = \beta y$
- 线性子空间=平凡子空间+非平凡子空间；平凡子空间=零子空间+线性空间本身
交空间： $V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{ 且 } \alpha \in V_2\}$ ；和空间： $V_1 + V_2 = \{\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1 \text{ 且 } \alpha_2 \in V_2\}$
性质： $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$
直和： $V_1 \oplus V_2 = V_1 + V_2$ ，当 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

1.4-1.5 线性映射、值域、核

- 线性映射： $\mathcal{A} : V_1 \rightarrow V_2$ 。满足叠加性、齐次性
恒等映射 E ： $\mathcal{A} : V \rightarrow V, \mathcal{A}(\alpha) = \alpha \in V, \forall \alpha \in V$ ；零映射 0 ： $\mathcal{A} : V_1 \rightarrow V_2, \mathcal{A}(\alpha) = 0$
- 线性映射在基 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 与基 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ 下的矩阵表示 A ：
 $\mathcal{A}(\alpha) = (\beta) A$
线性映射在基 α 与基 β 下向量坐标变换公式： $y = Ax$
与过渡矩阵 P 的近似： $A = P^{-1}$
$$\begin{array}{ccc} V_1 & \{\alpha_i\} & \xrightarrow{P} \{\alpha'_i\} \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow B \\ V_2 & \{\beta_i\} & \xrightarrow{Q} \{\beta'_i\} \end{array}$$

其中 P, Q 为过渡矩阵， A, B 为线性映射的矩阵表示
则 $B = Q^{-1}AP$
- 线性映射 \mathcal{A} 的值域 $R(\mathcal{A})$ ：所有向量的变换输出的集合，
 $\mathcal{B}(V_1) = \{\beta = \mathcal{B}(\alpha) \in V_2 \mid \forall \alpha \in V_1\}$
为 \mathcal{A} 的秩 $\text{rank } \mathcal{A} = \dim R(\mathcal{A})$
- 核子空间： $N(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^{-1}(0) = \{\alpha \in V_1 \mid \mathcal{A}(\alpha) = 0\}$
零度： $\dim N(\mathcal{A})$
-

1.6-1.9 线性变换的矩阵与运算、同构、特征值与特征向量、不变子空间

- 线性变换： $\mathcal{A} : V \rightarrow V, \mathcal{A}(\alpha) = \alpha A$ 。
- 相似： $B = P^{-1}AP$ ， P 为过渡矩阵
- 恒等变换： $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = E$ ，其中 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$

- 同构映射 σ : $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$
 $\sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha)$

性质: ① V 中向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性相(无)关 \iff 像 $\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_s)$ 线性相(无)关

② 两个线性空间, 同构 \iff 有相同的维度

- 特征值 λ_0 和 特征向量 x : $\mathcal{A}(x) = \lambda_0 x, \lambda_0 \in F$

计算方法: 先计算矩阵 A , 然后计算它的 λ_A 和 x_A , 则

$$\lambda_0 = \lambda_A, x = \alpha x_A \stackrel{\text{例如}}{=} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 代数重复度 p_i : 某个特征值 λ_i 的重根数
 几何重复度 q_i : 某个特征值 λ_i 的特征子空间的维度
- 不变子空间 W : W 是 V 的子空间, 对于任意向量 $\alpha \in W$ 都有 $\mathcal{A}(\alpha) \in W$
- 最小多项式: $\psi_\lambda = P_1(\lambda)^{d_1} P_2(\lambda)^{d_2} \dots P_s(\lambda)^{d_s}$, 其中 $P_i(\lambda)$ 是首项系数为 1、且互不相同的不可约多项式
- $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s \iff \mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是准对角矩阵, $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_s\}$

1.10 矩阵的相似对角形

- \mathcal{A} 可对角 $\iff A$ 可对角化 $\iff A$ 的每一个特征值的几何重复度等于代数重复度 $\iff \lambda_i$ 的代数重复度 $p_i = n - \text{rank}(\lambda_i E - A)$
- A, B 可同时对角化 $\iff AB = BA$

第二章 λ -矩阵与矩阵的Jordan标准形

2.1-2.2 λ -矩阵及标准形、初等因子与相似条件

- 等价: $A(\lambda) \simeq B(\lambda) \iff D_k(\lambda)$ 相同 $\iff d_k(\lambda)$ 相同 \iff 秩&初等因子相同
- 不变因子: $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)$, 用于Smith标准型中
- k 阶行列式因子: $D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda) \dots d_k(\lambda)$
- 初等因子: $d_k(\lambda)$ 分解成多个一次因式方程后, 不为常数的全体
 - 方法一: 把 $\lambda E - A$ 化为Smith标准型
 - 方法二: 求出所有的 D_k

不变因子 $1, 1, (\lambda - 2)^5(\lambda - 3)^3, (\lambda - 2)^5(\lambda - 3)^4(\lambda + 2)$

初等因子 $(\lambda - 2)^5, (\lambda - 3)^3, (\lambda - 2)^5, (\lambda - 3)^4, (\lambda + 2)$

- Smith标准型: 唯一

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

计算方法: 初等变换

技巧:

2.3 矩阵的Jordan标准形

- Jordan标准型:
 - 方法一: 利用初等因子
 - 方法二: 利用 $\text{rank}(\lambda_i E - A)^k$
 - 方法三: 求出所有特征值。对于重根, $n - \text{rank}(\lambda E - A)$ 为其约旦块数量
- Jordan标准型的变换矩阵P: ①求出J; ②令 $P = (X_1 X_2 X_3)$, 解 $AP = PJ$ 得 $X_1 X_2 X_3$
- Jordan标准型的应用
 - 求解 常系数线性微分方程组 $\frac{dX}{dt} = AX$: ①求J; ②求P; ③求解 $\frac{dY}{dt} = P^{-1}APY = JY$; ④通过 $X = PY$ 得X
 - 求 A^k : $A^k = PJ^k P^{-1}$

2.4 矩阵的有理标准形

- 有理标准形: $A \sim F, F = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k \end{bmatrix}, C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_i n_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_i n_{i-1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & -a_{i1} \end{bmatrix}$

A的非常数的k个不变因子为 $\varphi_i(\lambda) = \lambda^{n_i} + a_{i1}\lambda^{n_i-1} + \cdots + a_{i n_{i-1}}\lambda + a_{i n_i}$

- $F = Q^{-1}AQ = (PM)^{-1}A(PM^{-1})$
计算有理标准形F及变换矩阵Q: ①求J; ②根据不变因子写出F; ③ $P^{-1}AP = J \rightarrow P, FM = MJ \rightarrow M$; ④ $Q = PM^{-1}$

第三章 内积空间、正规矩阵、Hermite矩阵

- G为基 $\{\alpha_i\}$ 度量矩阵: $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

- 复共轭转置矩阵 $A^H = (\bar{A})^T$
- Hermite矩阵: $A^H = A$; 反Hermite矩阵: $A^H = -A$
- Cauchy-Schwarz不等式: $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$
- Schmidt方法求标准正交基:

- 正交化

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ &\vdots \\ \beta_r &= \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})} \beta_{r-1} \end{aligned}$$

- 单位化

| 酉空间 | 欧式空间 |
|--|--|
| 酉矩阵: $A^H A = A A^H = E$, 记 $A \in U^{n \times n}$ $A^{-1} = A^H \in U^{n \times n}, \det A = 1$ | 正交矩阵: $A^T A = A A^T = E$, 记 $A \in E^{n \times n}$ ① $A^{-1} = A^T \in E^{n \times n}$; ② $\det A = \pm 1$; ③ $AB, BA \in E^{n \times n}$ |
| 酉变换(等距变换): $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ | 正交变换: $(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$ |

- 幂等矩阵: $A^2 = A, A \in C^{n \times n} \Leftrightarrow \text{rank}(A) = r, P^{-1} A P = \begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}$

- 正交: $S \perp T$

正交和: $S \oplus T$, 正交补: $T_{\perp} \Leftrightarrow S \oplus T = V$

正交投影: $P_S = U_1 U_1^H, U_1 \in U_r^{n \times r}$

- 次酉矩阵: $U_1^H U_1 = E_r$, 记 $U_1 \in U_r^{n \times r}$
- $A = A^H = A^2 \Leftrightarrow A = U U^H, U \in U_r^{n \times r}$

| 酉空间 | 欧式空间 |
|---|--|
| Hermite变换 / 自伴(随)变换: $(\mathcal{B}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$ | 对称变换: $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$ |
| 反Hermite变换: $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}(\beta))$ | 反对称变换: $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = -(\alpha, \mathcal{A}(\beta))$ |
| 酉相似: $U^H A U = U^{-1} A U = B$ | 正交相似: $U^T A U = U^{-1} A U = B$ |
| | |

- Schur 引理: 任何一个n阶复矩阵A酉相似于一个上(下)三角矩阵

求酉矩阵W使得 $W^H A W \Rightarrow$ 上三角矩阵:

①取A的一个单位特征向量 ε_1 , 通过 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ 的方法构造标准正交基 (不唯一), 组成 U_1

② $U_1^H A U_1 = \begin{bmatrix} \lambda & ? \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$, 得到 A_1 。大小为 $(n-1) * (n-1)$

③取 A_1 的一个单位特征向量, 构造标准正交基, 组成 V_1 , 令 $U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & V_1 \end{bmatrix}$

④ $W = U_1 U_2$

- 正规矩阵:** $A A^H = A^H A, A \in C^{n \times n}$; 实正规矩阵: $A A^T = A^T A, A \in R^{n \times n}$ (\because 显然 $A^H = A^T$)

A是正规矩阵, 求酉矩阵U使得 $U^H A U \Rightarrow$ **对角矩阵**: 求出A所有特征向量, 经过Schmidt正交化后构成U

- 伴随变换(酉/欧式空间): $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^H(\beta)) \quad \forall \alpha, \beta \in V$

- 正规变换(酉/欧式空间): $\mathcal{A}^H \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^H$

- Hermite二次型: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^H A X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \bar{x}_i x_j$

使用酉变换将Hermite二次齐式化为标准型: 也就是用酉变换把A对角化

- 正定>0, 半正定 ≥ 0 , 负定<0, 半负定 ≤ 0

正定 \Leftrightarrow n 个顺序主子式全 $>0 \Leftrightarrow n$ 个特征值 $>0 \Leftrightarrow P$ 可逆, $P^H A P$ 正定 $\Leftrightarrow P^H A P = E \Leftrightarrow Q$ 可逆, $A = Q^H Q \Leftrightarrow$

半正定 \Leftrightarrow 同理

负定 $\Leftrightarrow n$ 个顺序主子式全负正相间 \Leftrightarrow

第四章 矩阵分解

- **满秩分解**: $A = BC$, 不唯一
 - ①对 A 作初等行变换, 得 A 的秩 r
 - ② $B = A$ 的前 r 个线性无关列
 - ③ $C = A$ 行变换后的前 r 个线性无关行
- **正交三角分解 / UR分解 / QR分解**: $A = UR, A = R_1 U_1$, A 列满秩。唯一
 $U, U_1 \in U^{n \times n}$, R 是正线上三角阵, R_1 是正线下三角阵
用QR分解求解 $Ax = b$
 - ①将所有列向量经Schmidt正交构成矩阵 U
 - ② $R = U^H A$
 - ③ $URx = b \Rightarrow x = R^{-1} U^H b$
- **正奇异值 / 奇异值**: $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\mu_i}$, AA^H 的正特征值 λ_i , $A^H A$ 的正特征值 μ_i (不为0)
- **奇异值分解**: $A = UDV^H = U \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H$, 不唯一
 - ①求 AA^H 的特征值 λ_i (可以为0), 以及对应的单位特征向量 (Schmidt方法) 构成 U
 - ②求 $A^H A$ 的特征值 μ_i (可以为0), 以及对应的单位特征向量构成 V
 - ③求 A 的奇异值 α_i ($\neq 0$), 然后从大到小构成对角矩阵 Δ
- **极分解**: $A = H_1 U = U H_2$, H_1, H_2 为正定Hermite矩阵, $U \in U^{n \times n}$ 。唯一
类似非零复数 $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $\rho > 0$ 是 z 的模(或称极径), θ 是 z 的幅角
- **正规矩阵的谱分解**: $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} \alpha_{ji}^H = \sum_{j=1}^r \lambda_j G_j$, 其中 $G_j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} \alpha_{ji}^H$, r 表示相异特征根数量
 - ①求出 A 的所有特征根, 以及对应的单位特征向量 (Schmidt正交化) α
 - ②对于重根, $G = \alpha_1 \alpha_1^H + \alpha_2 \alpha_2^H + \dots$; 单根 $G = \alpha_1 \alpha_1^H$
 - ③ $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j G_j$
- **单纯矩阵 (可以对角化) 的谱分解**:
 - ①求出所有特征向量 (不用正交单位化) α_i , 构成 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots)$
 - ②令 $(P^{-1})^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$
 - ③对于重根, $G = \alpha_1 \beta_1^T + \alpha_2 \beta_2^T + \dots$; 单根, $G = \alpha_1 \beta_1^T$
 - ④ $A = \sum_{j=1}^r \lambda_j G_j$

第五章 范数、序列、级数

5.1 - 5.3 向量范数、矩阵范数、诱导范数

- Hölder 不等式: 设 $p > 1, q = \frac{p}{(p-1)}$, 则 $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n b_k^q)^{\frac{1}{q}}$, 其中 $a_k, b_k \geq 0$

Minkowski 不等式: 对任何 $p \geq 1$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

- 向量范数: 非负性、齐次性、三角不等式 ($\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$)

- p-范数: $p \geq 1$, $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

1-范数: $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

2-范数 / 欧式范数: $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{x}^H \mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$

∞ -范数: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_p = \max |x_i|, (i = 1, 2, \dots, n)$

- 矩阵范数: 非负性、齐次性、三角不等式、矩阵乘法相容性 ($\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$)。

$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in C^{m \times n}$

矩阵的1-范数: $\|\mathbf{A}\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Frobenius 范数: $\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

- $\|\mathbf{A}\|_\beta$ 是与向量范数 $\|\mathbf{x}\|_\alpha$ 相容的矩阵范数: $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\alpha \leq \|\mathbf{A}\|_\beta \|\mathbf{x}\|_\alpha$

- 诱导范数 / 算子范数: $\|\mathbf{A}\|_i = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\alpha}{\|\mathbf{x}\|_\alpha}$, 且 $\|\mathbf{A}\|_i$ 是与向量范数 $\|\mathbf{x}\|_\alpha$ 相容的矩阵范数

- 矩阵p-范数: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$

列和范数: $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right), (j = 1, 2, \dots, n)$

谱范数: $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_j (\lambda_j (\mathbf{A}^H \mathbf{A}))^{\frac{1}{2}}, \lambda_j (\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ 表示矩阵 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 的第j个特征值。也就是A的最大正奇异值

行和范数: $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) (i = 1, 2, \dots, m)$, 表示每一行 (取绝对值后) 求和, 取其中最大的。

- 谱半径: $\rho(\mathbf{A}) = \max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}, \mathbf{A} \in C^{m \times n}$

若 \mathbf{A} 是正规矩阵, 则 $\rho(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2$

5.4-5.6 矩阵序列与极限、幂级数、测度

- 矩阵序列 $\{\mathbf{A}_k\}$ 的极限: $\mathbf{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}_k = (a_{ij}) = (\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)})$
- 矩阵序列 $\{\mathbf{A}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{A} \Leftrightarrow$ 任意一种矩阵范数都满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| = 0$
- 判断收敛条件: $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = 0 \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) < 1$
- 矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k + \dots$
- 若 $m \times n$ 个常数项级数都绝对收敛, 则称矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

- 矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ 绝对收敛 \Leftrightarrow 任何一种矩阵范数, 正项数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_k\|$ 收敛
- 两个矩阵级数 $\mathbf{S}_1: \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k + \dots; \mathbf{S}_2: \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{B}_k + \dots$ 都绝对收敛, 且和为 \mathbf{A}, \mathbf{B} , 则它们的柯西乘积 $\mathbf{S}_3: \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_1) + \dots + (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_k + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_{k-1} + \dots + \mathbf{A}_k \mathbf{B}_1) + \dots$ 也绝对收敛, 和为 $\mathbf{A}\mathbf{B}$
- 矩阵幂级数: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{A}^k = c_0 \mathbf{E} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 + \dots + c_k \mathbf{A}^k + \dots$
- 判断矩阵幂级数 \mathbf{A} 是否收敛:
 - 方法一: \mathbf{A} 的某一种范数 (比如行和范数) $< R$, 收敛

- 方法二：幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛半径为 R , A 为 n 阶方阵。若 $\rho(A) < R$, 则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛; 若 $\rho(A) > R$, 发散
- 结论: 矩阵幂级数 $E + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$, 且其和为 $(E - A)^{-1}$.
- 方法三: 判断 J 的收敛。即 $A^k = P \operatorname{diag}(J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \cdots, J_r^k(\lambda_r)) P^{-1}$,

$$J_i^k(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & Ck^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & Ck^{d_i-1} \lambda_i^{k-d_i+1} \\ & \lambda_i^k & & \vdots \\ & & \ddots & Ck^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$$Ck^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (k \geq l)$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, \quad R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$
 - 调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; p 级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases}$
- 广义 p 级数: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases}$; 交错调和级数: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, 收敛

- 矩阵测度: $\mu(A) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\|E + xA\| - 1}{x}$, $\|\cdot\|$ 是给定的算子范数

$$\text{列和范数的测度: } \mu_1(A) = \max_j \left(\operatorname{Re}(a_{jj}) + \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}| \right)$$

$$\text{谱范数的测度: } \mu_2(A) = \max_i \lambda_i \left(\frac{A + A^H}{2} \right), \text{ 其中 } \lambda_i \left(\frac{A + A^H}{2} \right) \text{ 表示矩阵 } \frac{A + A^H}{2} \text{ 的第 } i \text{ 个特征值}$$

$$\text{行和范数的测度: } \mu_{\infty}(A) = \max_i \left(\operatorname{Re}(a_{ii}) + \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \right)$$

第六章 矩阵函数

6.1 矩阵多项式

- 矩阵多项式: $p(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$

$$\text{来源于 } p(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

- Jordan表示. $p(A) = P \operatorname{diag}(p(J_1), p(J_2), \cdots, p(J_r)) P^{-1}$

$$p(J_i) = \begin{bmatrix} p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & \frac{p''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{p^{(d_i-1)}(\lambda_i)}{(d_i-1)!} \\ & p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & & \vdots \\ & & p(\lambda_i) & \ddots & \\ & & & \ddots & p'(\lambda_i) \\ & & & & p(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

步骤: 求 J , 然后求 P 和 P^{-1} , 然后计算 $p(J)$, 最后通过 $p(A) = Pp(J)P^{-1}$ 得到

- 化零多项式: $p(A) = 0$

A 的特征多项式为 A 的化零多项式, 即

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n - \operatorname{tr} A \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A = 0$$

- 最小多项式 $\psi_A(\lambda)$: 次数最低且首项系数为1的化零多项式

求法: 不同初等因子相乘

6.2-6.4 矩阵函数

- 矩阵函数: $f(A) = p(A)$ 。不唯一
- 表示一: Jordan表示式

$$\begin{aligned} f(A) &= P f(J) P^{-1} \\ &= P \text{diag}(f(J_1), f(J_2), \dots, f(J_r)) P^{-1} \end{aligned}$$

其中

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) \\ & & & & f'(\lambda_i) \\ & & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i \times d_i}$$

步骤: 求 J , 然后求 P 和 P^{-1} , 然后公式计算 $f(J)$, 接着得到 $f(A) = P f(J) P^{-1}$ 。最后将各个 $f(x)$ 代入

- 表示二: 拉格朗日——西勒维斯特内插多项式表示。

$$f(A) = p(A) = \sum_{k=1}^s [a_{k1}E + a_{k2}(A - \lambda_k E) + \cdots + a_{kd_k}(A - \lambda_k E)^{d_k-1}] \varphi_k(A)$$

s 为最小多项式中不同项的个数

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi_A(x)}{(x - \lambda_k)^{d_k}} \quad k = 1, 2, \dots, s; l = 1, 2, \dots, d_k$$

d_k 表示最小多项式中某一项的次数

$$a_{kl} = \frac{1}{(l-1)!} \left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} \left(\frac{f(x)}{\varphi_k(x)} \right) \right] \Big|_{x=\lambda_k}$$

步骤: ①求最小多项式 $\varphi_A(x)$

②根据公式依次求 $\varphi_k(x)$ 、 a_{kl} 、 $f(A)$

③把具体的 A 带入 $f(A)$, 得到多项式表达式

④把要计算各种 $f(x)$ (A 换成了 x) 以 $x = x_0$ 的取值带入

- 表示三: 多项式表示。 $f(A) = p(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_{m-1} A^{m-1}$

来源 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}$

步骤: ①求最小多项式 $\varphi_A(x)$;

②根据公式求出关于 a_i 的表达式 $p(x)$ 、 $p'(x)$...直到最后一项为常数

③将 $x_i = \lambda_i$ (最小多项式中的) 带入上式解出所有 a_i , 得到 $f(A)$

④将具体的 A 带入 $f(A)$

- 表示四: 幂级数表示。 $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$, 谱半径为 $\rho < R$

来源 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad |x| < R$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (\rho < \infty)$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1} \quad (\rho < \infty)$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} A^{2k} \quad (\rho < \infty)$$

$$(E + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k \quad (\rho < 1)$$

$$\ln(E + A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} A^k \quad (\rho < 1)$$

$$(E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \quad (\rho < 1)$$

$$(E - A)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k A^{k-1} \quad (\rho < 1)$$

函数矩阵与矩阵微分方程

7.1 函数矩阵与纯量

- 函数矩阵: $A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}$

- 逆矩阵: $A^{-1}(x) = \frac{1}{|A(x)|} \text{adj } A(x)$

- 有极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A$

连续: $\lim_{x \rightarrow x_0} A(x) = A(x_0)$

- 函数矩阵对纯量的导数:

$$A'(x_0) = \left. \frac{dA(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{bmatrix} a'_{11}(x_0) & a'_{12}(x_0) & \cdots & a'_{1n}(x_0) \\ a'_{21}(x_0) & a'_{22}(x_0) & \cdots & a'_{2n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{m1}(x_0) & a'_{m2}(x_0) & \cdots & a'_{mn}(x_0) \end{bmatrix}$$

性质: ① $\frac{d}{dx}[k(x)A(x)] = \frac{dk(x)}{dx}A(x) + k(x)\frac{dA(x)}{dx}$, $k(x)$ 是 x 的纯量函数

② $\frac{d}{dx}[A(x)B(x)] = \frac{dA(x)}{dx}B(x) + A(x)\frac{dB(x)}{dx}$, 没有交换律

③ $\frac{dA^{-1}(x)}{dx} = -A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}A^{-1}(x)$, 也可以求出 $A^{-1}(x)$ 后用①来算

④ $\frac{d}{dt}(A(x)) = \frac{dA(x)}{dx}f'(t) = f'(t)\frac{dA(x)}{dx}$, $x = f(t)$ 是 t 的纯量函数

- 函数矩阵的积分: $\int_a^b A(x)dx = \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(x)dx & \int_a^b a_{12}(x)dx & \cdots & \int_a^b a_{1n}(x)dx \\ \int_a^b a_{21}(x)dx & \int_a^b a_{22}(x)dx & \cdots & \int_a^b a_{2n}(x)dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_a^b a_{m1}(x)dx & \int_a^b a_{m2}(x)dx & \cdots & \int_a^b a_{mn}(x)dx \end{bmatrix}$

7.2 函数向量

- Gram矩阵: $G = (g_{ij})_{m \times m}$, $g_{ij} = \int_a^b \alpha_i(x)\alpha_j^T(x)dx$

其中 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_m(x)$ 是 m 个定义在 $[a, b]$ 上的连续函数向量 (行向量)

Gram行列式: $\det G$

- $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_m(x)$ 线性无关 \Leftrightarrow Gram矩阵满秩

- Wronski矩阵:

$$W(x) = (A(x), A'(x), A''(x) \cdots, A^{(m-1)}(x))_{m \times mn}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) & \cdots & a_{11}^{(m-1)}(x) & a_{12}^{(m-1)}(x) & \cdots & a_{1n}^{(m-1)}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) & \cdots & a_{21}^{(m-1)}(x) & a_{22}^{(m-1)}(x) & \cdots & a_{2n}^{(m-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) & \cdots & a_{m1}^{(m-1)}(x) & a_{m2}^{(m-1)}(x) & \cdots & a_{mn}^{(m-1)}(x) \end{bmatrix}$$

其中, $A(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \alpha_2(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix}$

7.3-7.4 矩阵、线性向量微分方程

- 矩阵微分方程 $\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$, $X_0(t) = C$ 的解为 $X(t) = e^{A(t-t_0)}C$
 - 当 $\det C \neq 0$ 时, 任一 $X(t)$ 有 Jacobi 等式 $\det X(t) = \det C \cdot \exp \int_{t_0}^t (\text{tr}(A(t))) dt$
 - 若 $X_0(t) = C_1$ 和 $X_0(t) = C_2$ 的情况下解为 $X_1(t)$ 、 $X_2(t)$, 则满足 $X_2(t) = X_1(t)T$, $T = C_1^{-1}C_2$
- 矩阵微分方程 $\frac{dX(t)}{dt} = X(t)A$, $X_0(t) = C$ 的解为 $X(t) = Ce^{A(t-t_0)}$
- $X(t+s) = X(t)X(s)$, $X(0) = E \Leftrightarrow X(t) = e^{At}$
- 线性向量微分方程 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解为 $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$
- 线性向量微分方程 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ 的解为 $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{f}(\tau)d\tau$

第八章 矩阵的广义逆

- A 的广义逆矩阵 $A^- \Leftrightarrow$ 对于 $Ax = b$, 有使解 $x = A^-b$ 成立的 A^- 存在
 $\Leftrightarrow AA^-A = A$
 A 的大小为 $m \times n$, 当 $m=n$, 唯一, 否则不唯一
 计算方法: 对 $\begin{bmatrix} A_{m \times n} & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$ 进行初等行+列变换, 得到 $\begin{bmatrix} E_{m \times n} & P_{m \times m} \\ Q_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$, 通过公式 $M = Q \begin{bmatrix} E_r & X \\ Y & Z \end{bmatrix} P = A^-$, X, Y, Z 任意, 可以为 0 方便计算
- 左逆 (右逆): $A_L^{-1} A_{m \times n} = E_n$ (或 $AA_R^{-1} = E_m$)
 若 $m = n$ 且 A 满秩, 则 $A^{-1} = A_L^{-1} = A_R^{-1}$
- 自反广义逆 A_r^- : 使 $AA^-A = A$
 $A^-AA^- = A^-$ 成立的 A^-
- A 的伪逆矩阵 A^+ : 满足 Penrose - Moore 方程, 即 $AA^+A = A$ $A^+AA^+ = A^+$
 $(AA^+)^H = AA^+$ $(A^+A)^H = A^+A$ 。唯一
 性质: $A^+ = A^H(AA^H)^+ = (A^HA)^+A^H$
 方法一: 设 $A \in C^{m \times n}$, $A = BC$ 是 A 的一个满秩分解, 则 $X = C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H = A^+$
 方法二: ①求酉矩阵 U 可以使 A^HA 对角化; ②求 A^HA 的所有特征值构成 Λ , 而 $\Lambda^+ = \Lambda^{-1}$; ③ $A^+ = (A^HA)^+A^H = U\Lambda^+U^HA^H$
 方法三: ①求 A^HA 的非零特征值构成 Λ_r ; ②求非零特征值对应的单位特征向量 (即非零特征值在 U 中对应的几列); ③ $A^+ = U_1\Lambda_r^{-1}U_1^HA^H$

- 矩阵方程 $AXB = D$ 的通解 $X = A^-DB^- + Y - A^-AYBB^-$, Y 任意且与 X 大小一致, 前提 A^- 与 B^- 存在
- 相容 (有解) 方程组 $Ax = b$ 的通解: $x = Bb + (E_n - BA)z$
- 最小模解: 相容方程组所有解中 2-范数 $\|x\| = \sqrt{x^H x}$ 中最小的
性质: B 是 A 的一个广义逆矩阵, 则对于任意 b , $x = Bb$ 是 $Ax = b$ 的最小模解 $\Leftrightarrow (BA)^H = BA$
- 最小二乘解 x_0 : 满足任意 x 都有 $\|Ax_0 - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2$
最佳最小二乘解 u : 对于任意最小二乘解 x_0 , $\|u\| \leq \|x_0\|$
性质: ① B 是 A 的一个广义逆矩阵, 则对于任意 b , $x = Bb$ 是 $Ax = b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow ABA = A, (AB)^H = AB$
② $x = A^+b$ 是方程组 $Ax = b$ 的最佳最小二乘解

第九章 Kronecker 积

- Kronecker 积 / 直积: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}_{mp \times nq}$, 其中
 $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{p \times q}$
性质: ① 无交换律; ② $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$; ③ $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$; ④ $\text{rank}(A \otimes B) = (\text{rank } A)(\text{rank } B)$;
⑤ x_1, x_2, \dots, x_n 和 y_1, y_2, \dots, y_q 都线性无关 $\Leftrightarrow x_i \otimes y_j$ 线性无关; ⑥ $|A \otimes B| = |A|^p |B|^m$;
⑦ 存在置换矩阵 (有限个初等矩阵的乘积) P , 使得 $P_{m \times n}^T (A_{m \times m} \otimes B_{n \times n}) P = B \otimes A$
- Kronecker 积的幂: $A^{[k]} = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{k \uparrow A}$
性质: $AB^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}$
- 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 对矩阵 $B = (b_{kl})_{p \times q}$ 的导数:
$$\frac{DA}{DB} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial b_{11}} & \frac{\partial A}{\partial b_{12}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial b_{1q}} \\ \frac{\partial A}{\partial b_{21}} & \frac{\partial A}{\partial b_{22}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial b_{2q}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial A}{\partial b_{p1}} & \frac{\partial A}{\partial b_{p2}} & \cdots & \frac{\partial A}{\partial b_{pq}} \end{bmatrix}_{mp \times nq} = \left(\frac{\partial A}{\partial b_{kl}} \right)$$

性质: ① $\frac{D(AB)}{DC} = \frac{DA}{DC}(E_q \otimes B) + (E_p \otimes A) \frac{DB}{DC}$
② $\frac{D(A \otimes B)}{DC} = \frac{DA}{DC} \otimes B + A \otimes \frac{DB}{DC} = \frac{DA}{DC} \otimes B + \left(A \otimes \frac{\partial B}{\partial c_{ij}} \right)$
③ $\left(\frac{DA}{DB} \right)^T = \frac{DA^T}{DB^T}, \left(\frac{DA}{DB} \right)^H = \frac{DA^H}{DB^H}$
- 梯度: $\text{grad } f = \frac{Df}{DX} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T$, 其中 f 为纯量函数
链式法则: $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ 为向量变量, 一元函数 $f(t) = f(X(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, 则 $\frac{df}{dt} = \frac{Df}{DX} \cdot \frac{dX}{dt}$
- 已知 $f(x, y) = \sum_{i,j=0}^l c_{ij} x^i y^j \stackrel{\text{例如}}{=} 2x + xy^3$,
 $f(A, B) = \sum_{i,j=0}^l c_{ij} A^i \otimes B^j \stackrel{\text{对应}}{=} 2A \otimes E + A \otimes B^3$

$A_{m \times n}$ 的特征值为 λ , 特征向量为 x ; $B_{n \times n}$ 的特征值为 μ , 特征向量为 y , 则 $f(A, B)$ 的特征值为 $f(\lambda, \mu)$, 特征向量为 $x \otimes y$, 有 mn 个

- 矩阵 A 与 B 的 Kronecker 和: $A \otimes E_n + E_m \otimes B$
- 矩阵行展开: $\text{rs}(A)$; 列展开: $\text{cs}(A)$
 性质: ① $\text{rs}(ABC) = \text{rs}(B) (A^T \otimes C)$
 $\text{cs}(ABC) = (C^T \otimes A) \text{cs}(B)$
- Sylvester 线性矩阵方程: $A_1 XB_1 + A_2 XB_2 + \cdots + A_p XB_p = C \Leftrightarrow Gx = c$, 其中
 $x = \text{cs}(X), c = \text{cs}(C), G = \sum_{j=1}^p (B_j^T \otimes A_j)$
- 方程 $AX + XB = C$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \lambda_i(A) + \lambda_j(B) \neq 0 \quad (\forall i, j)$, 其中 $\lambda_i(A)$ 表示 A 的第 i 个特征值
- 方程 $AX + XB = 0$ 有非零矩阵 $X \Leftrightarrow$ 对于某一个 i 与 j 有 $\lambda_i(A) + \mu_j(B) = 0$