

目录

第一章 概率论的基本概念	1
第二章 随机变量及其分布	1
★第三章 多元随机变量及其分布	3
★第四章 随机变量的数字特征	4

第一章 概率论的基本概念

- 互斥(互不相容): $AB = \emptyset$ 对立(互逆): $\bar{A} = B$
完备(完全)事件组: A_1, A_2, \dots, A_n , 满足 $A_i A_j = \emptyset, i \neq j$, 且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$
- 德摩根律: $\overline{A \cup B} = A \cap B$ $\overline{A \cap B} = A \cup B$ $\overline{A - B} = \bar{A} \bar{B} = \bar{A} \cup B$
- $A \subset B, AB = A, P(AB) = P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ $P(A - B) = P(A) - P(AB) = P(A\bar{B})$
 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$
 $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B})$ $P(A - B|C) = P(A|C) - P(B|C)$
- 古典概率计算公式: $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 A 中的基本事件数}}{\text{样本空间 S 中的基本事件总数}}$
- 不放回抽取, 连续取 n 次每次取 1 个 \Leftrightarrow 一次取 n 个
- 条件概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 乘法定理: $P(AB) = P(B|A)P(A)$
 缩减样本空间解法 $P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$
- 全概率公式: 离散: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$
 连续: $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|y)p_Y(y) dy$ $p_Y(y)$ 同理
- 贝叶斯公式: 离散: $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$

第五章 大数定律和中心极限定理	4
第六章 样本及抽样分布	5
★第七章 参数估计	6
第八章 假设检验	7

$$\text{连续: } p(y|x) = \frac{p(x|y)p_Y(y)}{p_X(x)} = \frac{p(x|y)p_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x|y)p_Y(y) dy} \quad p(x|y)\text{同理}$$

- A、B 独立: $P(AB) = P(A)P(B)$
定理: ① 一系列独立事件中任一部分改为对立事件, 所得事件列仍相互独立
 ② 事件 A、B、C, 任取两个事件都独立, 则
 两两独立: $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$
 相互独立: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

第二章 随机变量及其分布

- 概率密度函数充要条件 ① $f(x) > 0$; ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
- 伯努利分布 $\xrightarrow{+ \text{伯努利分布}}$ 二项分布 $\xrightarrow{+ \text{二项分布}}$ 二项分布 $\xrightarrow{n \text{ 很大}}$ 正态分布 $\xrightarrow{+ \text{正太分布}}$ 正态分布
- 不重要结论:
 a) 正态分布: $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68.26\%$,
 $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99.72\%$
 b) 指数分布: 无记忆性: ① $P\{X > t\} = \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}, t > 0$
 ② $P\{X > t + s | X > s\} = P\{X > t\}$

离散型		$P\{X = k\}/p(x)$	$E(X)$	$D(X)$	
0-1 分布		$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$	抛硬币，二选一
二项分布	$X \sim B(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	n 重伯努利，出现 k 次“是”
松柏分布	$X \sim P(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ	二项分布的 极限 ， $p = \frac{\lambda}{n}$ 结论： $X_1 + X_2 \sim P(2\lambda)$ 意义：单位时间内随机事件发生的次数；例：汽车站的候客人数
几何分布	$X \sim Ge(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	n 重伯努利，第 k 次 首次 出现“是” 无记忆性 为负二项分布的特例 r=1
负二项分布	$X \sim Nb(r, p)$	$C_{k-1}^{r-1} p^r(1-p)^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	几何分布的 和 X=第 k 次实验，正好发生 r 次“是”
超几何分布	$X \sim h(n, N, M)$	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N}) (1 - \frac{n-1}{N-1})$	不放回 抽样的二项分布 若 N 巨大 ，近似为二项分布 意义：N 件物品，有 M 件次品，抽 n 件（不放回）有 k 件次品概率 分子：k 件从 M 中抽取，剩下的在 N 中抽取；分母：从 N 件中随便抽取 n 件

连续型		$P\{X = k\}/p(x)$	$F(x)$	$E(X)$	$D(X)$	
均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, \text{其他} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 1, x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	古典派的几何概型
正态分布	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	μ	σ^2	二项分布的另一种极限 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$; $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 上 α 分位点： $Z \sim N(0, 1)$, $P(Z > z_\alpha) = \alpha$
标准正态分布	$X \sim N(0, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$	0	1	$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(0) = 0.5$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$
指数分布	$X \sim Exp(\lambda)$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	泊松分布的间隔，连续的几何分布
二维均匀分布		$p(x, y) = \begin{cases} 1/S \\ 0, \text{其他} \end{cases}$				
二维正态分布	$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$	$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$				X, Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$; $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + 2ab\sigma_1\sigma_2\rho + b^2\sigma_2^2)$

4. (累积)分布函数 CDF: $F(x) = P(X \leq x)$

离散: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{a \leq x} p(a)$

连续: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ $\frac{d}{dx} F(x) = p(x)$

$F(x)$ 为分布函数的充分必要条件: ③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

① $F(x)$ 单调非减; ② $F(x)$ 右连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, x 范围左闭右开

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$$

$$P(X < a) = 1 - P(X \geq a) = F(a - 0) \leftarrow "a-0" \text{ 为 } a \text{ 左极限, 离散时有意义}$$

$$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a - 0)$$

5. 中心极限定理: 正态分布是所有分布的最终归宿

6. 泊松过程: $P(X = k, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ 时间可变的泊松分布($t=1$)

7. 唯二无记忆性的分布: 几何分布、指数分布

8. 随机变量的函数分布: PDF 为 $p_X(x)$ 的 X , PDF 为 $p_Y(y)$ 的 $Y = g(X)$

$h(y)$ 是单调函数 $y = g(x)$ 的反函数, 求 $p_Y(y)$

① 写出 $p_X(x)$; ② $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = P\{X \leq h(y)\} = F_X(h(y))$;

$$\textcircled{3} p_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} p_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & a < y < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 a, b 为函数 $g(X)$ 在 X 可能取值区间上的值域

$$9. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

★第三章 多为随机变量及其分布

1. 离散: 联合概率质量函数 JPMF

边缘概率质量函数 MPMF (边缘分布):

$$p_{i \cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i \in N \quad Y \text{ 同理}$$

条件概率质量函数: $P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$ Y 同理

2. 连续: 联合概率密度函数 JPDF

边缘概率密度函数 MPDF (边缘密度): $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy$ Y 同理

条件概率密度函数: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$

X 为条件同理

3. 条件概率组成条件分布

4. 联合累积分布函数 JCDF: $F(x, y) = P(\{X \leq x\} \text{ 且 } \{Y \leq y\}) = P(X \leq x, Y \leq y)$

边缘累积分布函数 MCDF: $F_X(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = P(X \leq x)$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) \quad F_X(x)F_Y(y) \text{ 也是分布函数}$$

条件累积分布函数: 连续: $F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^x \frac{p(u, y)}{p_Y(y)} du$ X 为条件同理

5. 相互独立: CDF: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$

$$\text{PMF: } P(X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i)$$

$$\text{PDF: } p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i)$$

$$\text{离散: } p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \text{连续: } p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

6. $Z = (X, Y)$ 的分布: 可能为离散连续混合型

★卷积公式: 已知 $Z = g(x, y)$, 则 $y = h(x, z)$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, h(x, z)) \left| \frac{\partial h(x, z)}{\partial z} \right| dx$$

$$\text{a) } X, Y \text{ 离散: } P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i)$$

$$\text{b) } X, Y \text{ 连续: } Z = Y + X \quad p_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z - y, y) dy$$

$$\begin{matrix} X, Y \text{ 相互独立} \\ = \end{matrix} \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z - x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(z - y)p_Y(y) dy$$

$$Z = \frac{Y}{X} \quad p_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| P(x, xz) dx \quad |x| \text{ 意义: } \left| \frac{dy}{dz} \right|$$

$$Z = YX \quad p_{YX}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} P\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

$$\text{c) } X \text{ 离散, } Y \text{ 连续: } F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = \sum_i P\{X = x_i\} P\{g(x_i, Y) \leq z | X = x_i\}$$

$$7. X_i \sim F_i(x) \quad Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad F_Y(y) = \prod_{i=1}^n F_i(y)$$

$$Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad F_Z(z) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(z))$$

★第四章 随机变量的数字特征

1. 数学期望 (随机变量的一阶矩) 意义: ①对不确定性的计量; ②加权平均 (重心)

离散: $\mu = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ 前提: $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$

连续: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$

性质: ① $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx$;

$$E[g(X, Y)] = \sum_j \sum_i g(x_i, y_j) p(x_i, y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy$$

$$\textcircled{2} E(c) = c \rightarrow E(E(X)) = E(X) \quad \textcircled{6} X, Y \text{ 不相关: } E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$\textcircled{3} \text{齐次性: } E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$\textcircled{4} \text{可加性: } E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$\textcircled{5} \text{施瓦茨不等式: } [E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

$$2. \text{示性函数: } X = \begin{cases} 1, \text{事件} A \text{发生} \\ -1, \text{事件} A \text{没发生} \end{cases}, Y = \begin{cases} 1, \text{事件} B \text{发生} \\ -1, \text{事件} B \text{没发生} \end{cases}, XY = \begin{cases} 1, AB \cup \bar{A}\bar{B} \\ -1, A\bar{B} \cup \bar{A}B \end{cases}$$

3. 方差 (二阶矩): 衡量集中程度

$$Var(X) = \sigma^2 = D(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

$$\text{性质: } \textcircled{1} D(X) = E(X^2) - E(X)^2; \quad \textcircled{3} D(c) = 0 \rightarrow D(D(X)) = 0$$

$$\textcircled{2} D(aX + b) = a^2 D(X); \quad b \text{ 的几何意义为平移量}$$

$$\textcircled{4} D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$$

$$\textcircled{5} D(X) = 0 \Leftrightarrow \text{存在常数 } c \text{ 使得 } P(X = c) = 1 \quad X = c \text{ 与 } P(X = c) = 1 \text{ 不同}$$

4. 标准差: 解决方差单位不一致 $\sigma = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

5. 协方差: $Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y) = -Cov(Y, X)$

$Cov(X, Y) > 0$, 正相关; < 0 , 负相关; $= 0$, 不相关 不相关 \Leftarrow 独立

$$\text{性质: } \textcircled{1} Cov(aX, bY) = abCov(X, Y) \quad \textcircled{3} Cov(X, X) = D(X)$$

$$\textcircled{2} Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$$

对称性求解协方差: 例如 X、Y、Z 独立, 且 X+Y+Z=2,

$$\text{则 } cov(X, Y) = cov(X, 2 - X - Z) = cov(X, 2) - cov(X, X) - cov(X, Z)$$

$$\text{因为 } cov(X, Y) = cov(X, Z), \text{ 所以 } cov(X, Y) = D(X)/2$$

6. 相关系数: $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ 因为标准差有单位 $\rho_{XY} \in [-1, 1]$

$$\rho > 0, \text{ 正相关}; \quad \rho < 0, \text{ 负相关};$$

$$\rho = 1, \text{ 完全正相关}; \quad \rho = -1, \text{ 完全负相关}; \quad \rho = 0, \text{ (线性) 不相关};$$

$$|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \text{存在常数 } a (\neq 0), b \text{ 使得 } P(Y = aX + b) = 1$$

7. 满足二维正态分布的 X, Y 独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$, 即不相关

第五章 大数定律和中心极限定理

1. 马尔可夫不等式: $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$ 切比雪夫不等式: $P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$

2. 概率收敛: 记为 $Y_n \xrightarrow{P} a$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$

3. 弱大数定律 统计存在的基础 结论: 切比雪夫 or 辛钦能推出伯努利

a) 伯努利大数定律: 条件: $X_n \sim B(n, p)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$

b) 辛钦大数定律: 条件: X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 期望存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

c) 切比雪夫大数定律: 记为 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu, n \rightarrow \infty$

条件: X_1, X_2, \dots, X_n 两两不相关, $E(X_i)$ 与 $D(X_i)$ 存在, $D(X_i) \leq c$ (常数)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

4. 中心极限定理 解释了为什么生活中正态分布处处可见

a) 棣莫弗-拉普拉斯定理 理解: 伯努利分布的和的极限是正态分布

条件: $X_n \sim B(n, p)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad X_n \sim N(np, np(1-p))$$

b) 列维-林德伯格定理: 条件: X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, $E(X_i)$ 与 $D(X_i)$ 存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) = \Phi(x) \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

c) 计算方法: 例如 $P\{X > k\} = P\left\{\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

第六章 样本及抽样分布

1. 样本 X_1, X_2, \dots, X_n

a) 若 X 的分布为 $F(x)$, 则样本的分布为 $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$

b) 若 X 的密度为 $f(x)$, 则样本的密度为 $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

c) $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其线性组合也服从正态分布

2. 统计量(样本数字特征): 不含未知参数

a) 样本均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 样本标准差: $S = \sqrt{S^2}$

b) 样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2)$

自由度为 $n-1$

c) k (原点)阶矩: $E(X^k)$ k 阶中心矩: $E\{[X - E(X)]^k\}$

$k+l$ 阶混合矩: $E(X^k Y^l)$ $k+l$ 阶混合中心矩 $E\{[X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l\}$

性质: ① $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} * n * E(X) = E(X)$;

② $D(\bar{X}) = D\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum D(X_i) = \frac{1}{n} D(X)$; ③ $E(S^2) = D(X)$

3. 抽样分布: 统计量的分布

a) 一个正态总体的抽样分布: 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

i. 样本均值的分布: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 或 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ 量化 \bar{X} 逼近 μ 的靠谱程度

ii. 样本方差的分布: 量化 S^2 逼近 σ^2 的靠谱程度

\bar{X} 与 S^2 相互独立, 且 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ 自由度为 $n-1$

$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ 自由度为 n

b) 两个正态总体的抽样分布: 总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且相互独立

i. 样本均值的差:

$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ 或 $U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

若 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, $T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S_\omega^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

ii. 样本方差的比例: $F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$

三大分布	统计量	性质
卡方分布	$X_i \sim N(0,1), \chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$	① χ_1^2, χ_2^2 独立, $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$; ② $E(X) = n$ $D(X) = 2n$ ② 上 α 分位点: $P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n)\} = \int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{\infty} f(y) dy = \alpha$
t 分布	$\begin{cases} X \sim N(0,1) \\ Y \sim \chi^2(n) \end{cases}, X, Y$ 独立, $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$	① 上 α 分位点: $P\{T > t_{\alpha}(n)\} = \int_{t_{\alpha}(n)}^{\infty} h(t) dt = \alpha$; ② $h(t)$ 为偶函数; ③ n 充分大, $t(n)$ 近似于 $N(0,1)$ ④ $P\{ T > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$; ⑤ $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$ ⑥ $E(X) = 0 (n > 1)$ $D(X) = \frac{n}{n-2} (n > 2)$
F 分布	$\begin{cases} X \sim \chi^2(n_1) \\ Y \sim \chi^2(n_2) \end{cases}, X, Y$ 独立, $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$	① 上 α 分位点: $P\{F > F_{\alpha}(n_1, n_2)\} = \int_{F_{\alpha}(n_1, n_2)}^{\infty} \psi(y) dy = \alpha$; $E(X) = \frac{n_2}{n_2-2} (n_2 > 2)$ ② $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$, $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{\alpha}(n_1, n_2)}$ $D(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)} (n_2 > 4)$

★第七章 参数估计

1. 参数估计意义：分布函数已知，部分参数未知

2. 点估计：样本构造估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，未知参数 θ ，估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

种类：①一致估计量： $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$ $\bar{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ 大样本容量

②无偏估计量： $E(\hat{\theta}) = \theta$ 小样本容量

③更有效估计量： $D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$ ， $\hat{\theta}_1$ 更有效

a) 矩估计法：

理论基础：辛钦大数定律 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k - E(X^k)\right| < \varepsilon\right) = 1$

计算方法： $E(X^l) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l, l = 1, 2, \dots, n$ 考研中 l 最多为 2

b) 最大似然估计法：可能性最大的就是事实

最大似然函数： $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$

最大似然估计值： $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ；最大似然估计量： $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

计算方法： $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ $\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0$

	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间(置信水平 $1 - \alpha$)
一个正态总体	μ	σ^2 已知	$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$
		σ^2 未知	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$
	σ^2	μ 已知	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$
		μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2)/n_1 + (\sigma_2^2)/n_2}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{(\sigma_1^2)/n_1 + (\sigma_2^2)/n_2})$
		$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =$ 未知	$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), S_\omega^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}})$
	σ_1^2/σ_2^2	μ_1, μ_2 未知	$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$

第八章 假设检验

1. 第一类错误： H_0 是对的，但我们拒绝了它（弃真）

第二类错误： H_0 错，接受（纳伪）

2. 显著性水平 $\alpha = P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真时拒绝 } H_0\} = P_{\mu_0}\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > k\right\}$

$$\beta(\theta) = P_{\mu}(\text{接收 } H_1) = P_{\mu}\left\{\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha}\right\}$$

3. 显著性检测：只控制第一类错误

步骤：①提出 H_0 （必须带等号）；

②给出显著性水平 α ；

③确定检验统计量及拒绝域形式；

④求出拒绝域 W

检验参数	其他参数	H_0	H_1	检验统计量的分布	拒绝域
μ	σ^2 已知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$ U \geq u_{\alpha/2} \quad U \geq u_{\alpha} \quad U \leq -u_{\alpha}$
	σ^2 未知	$\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$ T \geq t_{\alpha/2}(n-1) \quad T \geq t_{\alpha}(n-1) \quad T \leq -t_{\alpha}(n-1)$
σ^2	μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n) \text{ or } \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n) \quad \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n)$
	μ 未知	$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ or } \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1) \quad \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$ $\mu_1 - \mu_2 > \mu_0$	$U = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$ U \geq u_{\alpha/2} \quad U \geq u_{\alpha} \quad U \leq -u_{\alpha}$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 =$ 未知	$\mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0$	$\mu_1 - \mu_2 < \mu_0$	$T = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\mu_0}{S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$ T \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ $T \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \quad T \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
σ_1^2/σ_2^2	μ_1, μ_2 已知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (X_j - \mu_2)^2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$	$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2) \text{ or } F \geq F_{\alpha/2}(n_1, n_2)$ $F \geq F_{\alpha}(n_1, n_2) \quad F \leq F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
	μ_1, μ_2 未知	$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ or } F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ $F \geq F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad F \leq F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)$