目录

第 1 讲 高等数学常用基础知识

1. 余切函数：$cot\,x = \frac{cos\,x}{sin\,x} = \frac{1}{tan\,x}$ $sinx$一个门的面积为 2，$\frac{\pi}{4} \sim \frac{3\pi}{4}$为$\sqrt{2}$

正割函数：$y = sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$ 余割函数：$y = csc\,x = \frac{1}{sin\,x}$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

2. 符号函数：$y = sgn\,x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$；取整函数：$y = [x]$ →考到了用夹逼

3. 若 $U=max\{ f(x), g(x) \}$, $V=min\{ f(x), g(x) \}$,

$$U + V = f + g, U - V = |f - g|, UV = fg$$

4. 组合数公式：$C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^{n} C_i^k$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 推导过程

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2C_{n+2}^3$

5. 积化和差公式*4 $sin\,\alpha\,cos\,\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha + \beta) + sin(a - \beta)]$

和差化积公式*4 $sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\,sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

6. 万能公式$u = tan\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$ 则$sin\,x = \frac{2u}{1+u^2}$，$cos\,x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

7. 因式分解公式

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})\ (n为正偶数)$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})(n为正奇数)$$

8. $\boldsymbol{f(x) + f(-x)}$**为偶函数，**$\boldsymbol{f(x) - f(-x)}$**为奇函数**；$\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$为奇函数；

9. $\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right]$

第 2 讲 极限与连续

1. 数列极限定义：任意$\varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$, 当$n > N$, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$

2. 判断数列发散方法*2：找一个发散的子列；找两个收敛到不同极限的子列

3. 数列极限运算规则（参考函数的）

4. 证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限存在：证明单调不减，证明有界

5. 函数极限定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,当\ 0<|x-x_0|<\delta时,有|f(x)-A|<\varepsilon$$

6. 函数极限存在的充要条件*2

① 左极限=右极限=A　　②**脱帽法**：$\boldsymbol{f(x)=A+\alpha(x)},\ \boldsymbol{\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0}$

7. 函数极限的性质：~~唯一~~性；局部有界性；**局部保号性**：$X_n\ge a$，极限$A\ge a$；

8. 无穷小的比阶 前提：$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0,\beta(x)\neq0$

高阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，记为$\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$；

低阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$；　　同阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$；

k 阶无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq0$　　等价无穷小：$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$；

9. 函数极限运算规则　　前提：极限都存在

a) $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim f(x)=kA\pm lB$

b) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

c) $\boldsymbol{\lim[f(x)^n]=[\lim f(x)]^n}$，n 为正整数

d) $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小；有界函数与无穷小的积是无穷小

b) $o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l),l=min(mn)$->加减法时低阶吸收高阶

c) $o(x^m)\cdot o(x^n)=\boldsymbol{o(x^{m+n})=x^m\cdot o(x^n)}$->乘法时阶数累加

d) $o(x^m)=o(kx^m)=k\cdot o(x^m),k\neq0$且为常数->非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小*9　　前提：$\boldsymbol{x\to0}$　　本质：泰勒展开

$\boldsymbol{\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x}$

$\boldsymbol{a^x-1\sim x\ln a,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^a-1\sim ax}$　　**★$\boldsymbol{x\to x_0}$等价替换成$\boldsymbol{t\to0}$**

可以先等价，再用洛必达，例 2.19；**注意：**减式不能用等价替换

12. 夹逼准则：$g(x)\le f(x)\le h(x),\lim g(x)=\lim h(x)=A,则\lim f(x)=A$

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放　　**不验等号**

对和式缩放的两种方法：

n 为无穷大时，$n\cdot u_{min}\le\sum_{i=1}^n u_i\le n\cdot u_{max}$；

n 为有限数时，$\boldsymbol{1\cdot u_{max}\le\sum_{i=1}^n u_i\le n\cdot u_{max}\to\lim\sum_{i=1}^n u_i=u_{max}}$

13. 洛必达法则：$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，且一阶导都存在　　辅助地位　　例 2.19

若结果的极限不存在，则洛必达失效

14. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）

15. 第一类间断点：可取、跳跃　　第二类间断点：无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知　①夹逼准则；③幂级数求和；④级数收敛的必要条件

②定积分定义：n,i次数相同，若凑不出，可以先放缩 or 夹逼

★定积分特殊情况：$\boldsymbol{a=0,b=x,\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(x\frac{i}{n}\right)\frac{x}{n}}$

b) 数列通项未知

①**★单调有界数列必有极限**：先做差/商证明极限存在，再求；②求出表达式；

③知道极限 a，用拉格朗日中值定理 or 缩放构造$|a_n-a|\le f(n)$，然后

$\lim_{n\to\infty}f(n)=0$，得出$\lim|a_n-a|=0$　　习题 5.7

17. 函数极限的计算　　$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln^\beta x=0$

①判断未定式的种类。七种："$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0\cdot\infty$""$\infty-\infty$""∞^0""0^0""1^∞"

i. "$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"：使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽

ii. "$0\cdot\infty$"：转化成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"

iii. "$\infty-\infty$"：转为乘除法。有分母通分；无分母倒代换$x=\frac{1}{t}$或提取公因式

iv. $\infty^0,0^0,1^\infty$：$\lim u^v=e^{\lim v\ln u}=\lim\left\{[1+(u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v}=e^{\lim(u-1)v}$

$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$　　例如：$\lim_{x\to 0} x^x = 1$

②题型：比阶题；反问题（反求参数）；已知某一极限求另一极限

③方法：Ⅰ等价替换：见根号用有理化；Ⅱ等价无穷小替换

Ⅲ洛必达；Ⅳ泰勒展开；Ⅴ夹逼准则；Ⅵ单调有界；

Ⅶ$f(x)$在$x=x_0$处连续，$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

18. ★常用函数的泰勒展开式*8　　前提：$x\to 0$　　计算时保留 o(·)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x)^3 \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$\frac{A}{B}$型，展开后分子分母同阶；A-B 型，展开到它们的系数不等的 x 的最低次幂为止；

第 3 讲　一元函数微分学的概念与计算

1. ★导数的定义*2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

性质：**求导 or 下限为 0 的积分，函数奇偶性互换，周期不变**

☆**注：复杂函数的求导可以用定义　　例 3.10**

四则运算不成立的时候，用定义　　例 3.7

2. 设$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则$F(x)$在$x=a$处可导$\Leftrightarrow f(a)=0$

3. 某点可导的充分必要条件：函数在该点连续，左导数和右导数存在且相等(定义)

4. 高阶导数概念：$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$

5. 可微判别方法*3:　　①写增量 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

②写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$　　③作极限 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$

6. 四则运算的前提：函数均可导

7. 复合函数的导数(微分)：$\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

8. 反函数求导：$y=f(x), x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x, \varphi'(x)=x'_y\ (x'_y\neq 0)$，则有

一阶 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$；二阶 $y''_{xx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy}\cdot\frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$

9. 参数方程求导：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{cases}$　　一阶：$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

二阶：$\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

10. 隐函数求导：$F(x,y)=0$，两边对 x 求导，将 y 看作中间变量，得到方程，求解即可得到 y’

11. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数，$\ln y = \ln f(x)$；②求导得$\frac{1}{y}y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y[\ln f(x)]'$

12. 幂指函数求导法：

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]' = \left[e^{v(x)\ln u(x)}\right]' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

13. n 阶导数的运算方法 *3

②高阶求导公式：$[u\pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$　　$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

③写出泰勒公式 or 麦克劳林公式，比较系数　　①逐次求导

14. 常见函数的 n 阶导数 *8

$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n (a>0, a\neq 1)$　　$(e^x)^{(n)} = e^x$　　$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$　　$(\cos kx)^{(n)} = k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$　　$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$

$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$

15. 变限积分求导公式：设$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x)\,dx$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)\,dt\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

16. 基本初等函数的导数公式　　　　视绝对值不见

$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$　　　$(log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$

$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(\tan x)'=sec^2 x$

$(\cot x)'=-csc^2 x$　　$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(arc\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　$(csc)'=-\csc x\cot x$　　$(ln|x|)'=\frac{1}{x}$

$\left[ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

第 4 讲　一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带、不带等号；极值、最值的区别：领域、定义域
2. **极值点**⇐一阶可导　　　**驻点**：$f'(x)=0$ ⇐极值
3. 判断极值的充分条件 *3
   a) x_0的去心领域一阶可导
      i. x_0左边，$f'(x)<0$；x_0右边，$f'(x)>0$，为极小值；
      ii. x_0左边，$f'(x)>0$；x_0右边，$f'(x)<0$，为极大值；
   b) $x=x_0$处二阶可导，且$f'(x)=0$，$f''(x_0)\neq 0$
      $f''(x_0)>0$，极小值；$f''(x_0)<0$，极大值
   c) x_0处 n 阶可导，且$f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\ldots,n-1),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 2)$
      n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)>0$，极小值；n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)<0$，极大值
4. 凹弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；凸弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
5. 判断凹凸的充分条件：$f''(x)>0$，凹的；$f''(x)<0$，凸的
6. 拐点，即$f''(x)=0$ ⇔二阶可导
7. 判断拐点的充分条件 *3
   a) x_0的去心领域内二阶导数存在，且左右领域$f''(x)$变号
   b) 三阶可导，$f''(x)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$
   c) x_0处n阶可导, n为奇数, $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\ldots,n-1),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 3)$
8. 铅锤渐近线：$\lim\limits_{x\to x_0^+ or x_0^-} f(x)=\infty$　　　x_0取函数无定义的点

   水平渐近线：$\lim\limits_{x\to+\infty\ or\ -\infty} f(x)=A$

   斜渐近线：令 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$，得$y=kx+b$

若$f(x)$中 x 的 n 次方，>1，则有铅锤渐近线；=1，斜渐进线；<1，水平渐进线
9. 求闭区间的最值步骤：求可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值
   求开区间的最值步骤：求可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围
10. 函数作图步骤：　①确定定义域和奇偶对称性；
    ②求出$f'(x),f''(x)$等于 0 和其不存在的点，将函数划分成几个区间，**画表格**判断每一个的单调性和凹凸性；③确定渐近线(如果有的话)；④作图

研究对象	研究内容
①祖孙三代$\begin{cases} f(x),f_n(x)=x^n,f_1*f_2*\ldots*f_n \\ f'(x):\frac{df(x)}{dx^2}=\frac{1}{2x}f'(x) \\ \int_a^x f(t)dt \\ \sum a_n x^n \end{cases}$ ②分段函数；③参数方程；④隐函数	①斜率→切线→法线； ②单调性、极值点 ③凹凸性、拐点； ④渐进线； ⑤取值、值域； ⑥高阶导数

第 5 讲　中值定理

1. 函数的中值定理　　$f(x)$在$[a,b]$上连续
   a) 有界与最值定理：$m\leq f(x)\leq M$，其中 m、M 为[a, b]上的最值
   b) 介值定理：当$m\leq\mu\leq M$，存在ξ，使得$f(\xi)=\mu$
      $f(\xi)$可为高阶导数，μ可为定积分
   c) 平均值定理:　　　　离散的积分中值定理

   当$a<x_1<\cdots<x_n<b$，在$[x_1,x_n]$内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

   d) 零点定理：当$f(a)\cdot f(b)<0$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$
2. 导数(微分)的中值定理　　对于$f^n(x)$，$f^{n+1}(x)$也满足中值定理例 5.8(2)
   a) 费马定理: f(x₀)可导且为极值，则$f'(x_0)=0$　　　x_0必不为端点

b) 罗尔定理：$f(x)$满足$\begin{cases} \cancel{[a,b]上连续} \\ \cancel{(a,b)内可导} \\ f(a)=f(b) \end{cases}$，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

推广：满足以下条件之一，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

①开区间，但端点极值都为 A；②两端同时趋于$+\infty$ or $-\infty$

③一端极限为 A，另一端水平渐近线为$x=A$；

④定义域为$(-\infty,+\infty)$，趋于两侧，取值趋于$+\infty$ or $-\infty$

c) ★拉格朗日中值定理: **“无条件成立“**

$[a,b]$连续(a,b)可导，$\exists\xi\in(a,b)$，$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

推论：$\boldsymbol{f(x)=f(a)+f'(\xi)(x-a)}=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$ → <u>**联系f和f'**</u>

d) 柯西中值定理：条件同上，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 若$g(x)=x$,变成拉格朗日

e) **★泰勒公式：** 可用于<u>高阶导数</u>的计算证明

阶数：余项之前的最后一项； 本质：任何可导$f(x)=\sum a_n x^n$

i. 带拉格朗日余项：n+1 阶可导，ξ介于x,x_0之间 **证明**

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\boldsymbol{\xi})(x-x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项：$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i+o((x-x_0)^n)$ **计算**

f) **★<u>积分中值定理</u>：** → <u>**联系f和$\int f$**</u>

几何意义：积分的几何面积=底*平均高=矩形面积

$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists\xi\in[a,b]$or(a,b),$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)}$

3. ★麦克劳林公式：$x_0=0$的泰勒公式

4. 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林/泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

5. 重要函数的克劳林展开式 *7

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n}+1)$$

$$cos\,x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\quad \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

6. 证明存在$\xi\in(a,b)$，使得$H\big(\xi,f(\xi),f'(\xi)\big)=0$: 罗尔定理、费马定理

a) 构造辅助函数：把ξ改成 x，对于$f'(x)+g(x)f(x)=0$，两边同乘$e^{\int g(x)\,dx}$，

得构造函数$F(x)=f(x)e^{\int g(x)\,dx}$

b) 验证端点值相等：转化为给定区间内找 F(x)的两个不同的零点

研究对象	研究区间	十大定理
①抽象函数$f(x)$或$\int_a^b f(x)dx$ ②乘积求导公式引发：**逆向思维** $f(x)f'(x)\to F(x)=f^2(x)$ $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)\to F(x)=ff'$ $f'(x)+f(x)\to F(x)=f(x)e^x$ $f'(x)+f(x)\varphi'(x)\to F(x)=f(x)e^{\varphi(x)}$ ③商的求导公式引发： $[f'(x)]^2-f(x)f''(x)\to\frac{f'}{f}\to lnf(x)$	①指定区间$\xi\in(a,b)$ ②缩小区间 例 5.5 $\xi\in(c,d)\subset(a,b)$ ③划分区间，多中值	最值定理 介值定理 平均值定理 零点定理 费马定理 罗尔定理 拉格朗日中值定理 柯西中值定理 泰勒公式 积分中值定理

<u>第 6 讲 零点问题、微分不定式</u>

1. 零点问题:

a) 零点定理：证明根的存在 当$f(a)\cdot f(b)<0$，$f(x)=0$至少有一个根

b) 单调性：证明根的唯一性 $f(x)=0$在(a,b)内单调，$f(x)=0$至多有一根

c) 罗尔定理的推论: $f^{(n)}(x)=0$至多有 k 个根，$f(x)=0$至多有 k+n 个根

d) 实系数奇次方程$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$: 至少有一个根

2. 经典不等式　　函数不等式?

a) $2|ab|\le a^2+b^2$　　$|a\pm b|\le|a|+|b|$　　$\big||a|-|b|\big|\le|a-b|$

离散情况：$|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\le|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

连续情况：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx\,,a<b$

b) 设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时等号成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\qquad\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

特殊情况：$n=2,\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},(a,b>0)$

$$n=3,\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},(a,b,c>0)$$

c) Young 不等式：$x,y,p,q>0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

e) 柯西不等式：$\left[\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$　不证大题不能用

f) $\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right|\le\left[\int_a^b|f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$，$p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

g) $a>b>0,\begin{cases}n>0,a^n>b^n\\n<0,a^n<b^n\end{cases}$　　$\begin{cases}0<a<x<b\\0<c<y<d\end{cases}$，则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{a}$

$\sin x<x<\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right),\sin x<x(x>0)$　　$e^x\ge x+1,x-1\ge\ln x$

$\arctan x\le x\le\arcsin x\,(0\le x\le1)$　　$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x},(x>0)$

h) $|\sin x|<1,|\cos x|<1$

3. 微分不等式的证明方法　*3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)；②常数变量化；③中值定理

第 7 讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数

2. 定积分的定义: $\int_a^b f(t)\,dt=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$

注：$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]'=f(x),a$**任意**

3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续；②在区间上有界，只有有限个间断点

必要条件: 可积函数必有界

4. 定积分的性质:

①求区间长度: $L=\int_a^b dx=b-a$;

②线性性质: $\int_a^b[k_1f(x)\pm k_2g(x)]\,dx=k_1\int_a^b f(x)\,dx\pm k_2\int_a^b g(x)\,dx$

③可加可拆性: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

④保号性: $f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

特殊: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$

⑥估值定理: M、m 为最大、小值，L 为区间长度，$mL\le\int_a^b f(x)\,dx\le ML$

⑦中值定理: 函数连续，$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$

推论：$g(x)$不变号，则$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

5. 变限积分的性质: ①$f(x)$可积，$F(x)$连续；②$f(x)$连续，$F(x)$可导

6. ★变限积分的求导公式: 前提: **被积函数中无**x

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}f(t)\,dt\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

若被积函数中有x，例$\int_0^x uf(u^2+x^2)\,du$，令$y=u^2+x^2$　　例 11.20

~~7. 无穷区间上的反常积分：破坏积分区间的有限性~~

~~无界函数的反常积分：破坏被积函数的有界性~~

8. 奇点:"∞"和使得函数无定义的点(瑕点)

9. ★常用积分

$\int x^k dx=\frac{1}{k+1}x^{k+1}+c$　　常考：$\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+c$　　$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+c}$

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$　　$\int e^x dx=e^x+c$　　$\int a^x dx=\frac{1}{lna}a^x+c$

$\int sinxdx=-cosx+c$　　$\int cosxdx=sinx+c$

$\int tanxdx=-\ln|cosx|+c$　　$\int cot\,x\,dx=ln|sin\,x|+c$

$\int secx\,dx=\int \frac{dx}{cosx}=\ln|secx+tanx|+c$　　$\int \sec^2 x\,dx=tanx+c$

$\int cscxdx=\int \frac{dx}{sinx}=\ln|cscx-cotx|+c$　　$\int \csc^2 x\,dx=-cotx+c$

$\int secxtanxdx=secx+c$　　$\int cscxcotxdx=-cscx+c$

$\int \sec^3 x\,dx=\frac{secxtanx+\int secxdx}{2}=\frac{secxtanx+\ln(secx+tanx)}{2}+c$　　过程

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+c$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$

$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c$

10. 不定积分计算　　　$\boldsymbol{d|x|=dx}$

a) 凑微分法：$\int f[g(x)]g'(x)\,dx=\int f[g(x)]\,d[g(x)]=\int f(u)\,du$

①$f'(x)=Ag(x)$，A 为常数 or 函数　　注：$f(x)dx=df(x)$

$$\int f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{A}\int f(x)Ag(x)\,dx=\frac{1}{A}\int f(x)\,d[f(x)]$$

②若不是，可将被积分函数的分子分母同乘/除$e^{\alpha x},x^{\beta},sin\,x,cos\,x$后恒等变形

b) **★换元法**：$\int f(x)\,dx \overset{x=g(x)}{\Longleftrightarrow} \int f[g(u)]\,d[g(u)]=\int f[g(u)]g'(u)\,du$

代换原则：要有反函数，单调函数

i. 三角函数代换：$\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow x=asin\,t\,,|t|<\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow x=atan\,t\,,|t|<\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow x=asec\,t\,,\begin{cases}x>0,0<t<\frac{\pi}{2}\\ x<0,\frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$$

ii. 恒等变形后三角函数代换：

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\Rightarrow\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$$

iii. 根式代换：$\sqrt[n]{ax+b},\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt{ae^{bx}+c}\Rightarrow$令$\sqrt{*}=t$

同时含有$\sqrt[n]{ax+b}$和$\sqrt[m]{ax+b}\Rightarrow$令$\sqrt[l]{ax+b}=t$，l 为最小公倍数

iv. 倒代换：若分母幂次比分子高两次及以上，$\frac{1}{x}=t$

v. 复杂函数的直接代换：含有$a^x,e^x,ln\,x\,,arcsin\,x\,,arctan\,x$，令复杂函数=t

注意：当$ln\,x\,,arcsin\,x\,,arctan\,x$与$e^x$或$x^n$乘除，优先考虑分部积分法

c) 分部积分法：$\int u\,dv=uv-\int v\,du$

i. u,v选择依据：微分后简单点宜作u，积分后简单点宜作v

$\leftarrow u$				$v\rightarrow$
反三角	对数	幂	指	三角
$arcsinx,arctanx$	lnx	x^n	e^x	$sinx$

ii. 推广: u 与 v 有直到(n+1)阶的连续导数　　表格法

$\int uv^{(n+1)}\,dx=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i u^i v^{n-i+1}+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$

d) 有理函数的积分：$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx(n<m)$

i. 方法：$Q_m(x)$因式分解后，把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意: k 重因式产生 k 项，即$\frac{\cdots}{(\ldots)^k}=\frac{\cdots}{(\ldots)^1}+\frac{\cdots}{(\ldots)^2}+\cdots+\frac{\cdots}{(\ldots)^k}$

11. 定积分的计算

a) 三大方法：牛顿莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)\,dx \xRightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_b^a$

换元积分：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi']\varphi'\,dt$；分部积分：$\int_a^b uv'\,dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

b) 公式总结：①偶函数，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$；奇函数，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

注意：平移对称轴 or 中心至x_0，也满足

②周期函数：$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$，$\int_a^{nT} f(x)\,dx = n\int_a^T f(x)\,dx$

③若$\int_0^T f(x)\,dx = 0$，$\int_a^x f(t)\,dt$以 T 为周期

④★区间再现公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\,dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}sint\right)\frac{b-a}{2}cost\,dt = \int_0^1 (b-a)f[a+(b-a)t]\,dt$$

⑤$\int_0^\pi xf(sinx)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(sinx)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\,dx$

⑥$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)\,dx$；$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx,cosx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx,sinx)\,dx$

⑦★华里士公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx =$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{n 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n\cdot 3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{n 为正偶数} \end{cases}$$

例 7.38

★方法总结：令$x-\frac{b-a}{2}=t$，$\begin{cases} \textbf{若为奇函数，等于0} \\ \textbf{若为偶函数，三角代换后华里士公式} \end{cases}$ **例 7.39**

12. 凑定积分定义的方法:①提出$\frac{1}{n}$;②凑出$\frac{i}{n}$;③转化为$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to 0}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

13. 反常积分的敛散性判别:

a) 无穷区间的$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$：$p>1$收敛，$p\le 1$发散

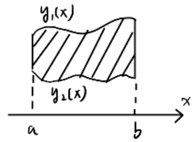
b) 无界函数的$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$：$p<1$收敛，$p\ge 1$发散（奇点 x=0）

14. $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b [f(x)g(x)]'\,dx = f(b)g(b)-f(a)g(a)$

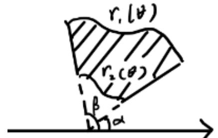
第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

1.定积分计算平均数：$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,dx$

2.计算面积

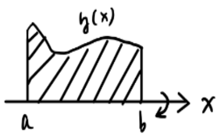


$S = \int_a^b |y_1(x)-y_2(x)|\,dx$

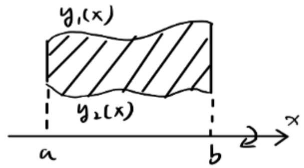


$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|\,d\theta$

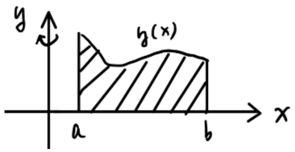
3.计算体积



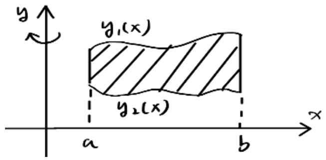
$V_x = \int_a^b \pi y^2(x)\,dx$



$V_x = \pi\int_a^b |y_1^2(x)-y_2^2(x)|\,dx$



$V_y = 2\pi\int_a^b x|y(x)|\,dx$



$V_y = 2\pi\int_a^b x|y_1(x)-y_2(x)|\,dx$

4.

第 9 讲 积分等式与积分不等式

1. 等式问题：①通过证一个特殊等式求特殊积分

②求$\lim\int f(x)dx$：夹逼；③带"$\int$"的中值定理

2. 不等式问题:　**构造辅助函数$\boldsymbol{F(x)}$**

①上/下限变量化，然后利用$\boldsymbol{F'(x)}$、单调性、最值等;

②处理被积函数: Ⅰ利用$f(x)\le g(x)$;　Ⅱf': 拉格朗日中值定理;

Ⅲf'': 泰勒公式（+积分保号性）;　Ⅳ放缩+夹逼;

Ⅴ分部积分;　Ⅵ换元法　③先化简，再证明

3. 和式不等式: 若$f(x)$在$[1,n]$单调递减，$\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\le\int_1^n f(x)\,dx\le\sum_{k=2}^{n}f(k)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}f(x)\le\int_1^n f(x)\,dx\le\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}f(x)$$

若单调递增，把≤换成≥

第 10 讲 多元函数微分学　10 分 大题 应用

1. 多元函数求极限: 除洛必达、单调有界准则不能用外，其余全照搬一元的

2. 偏导数定义: 例如，对 x，$f_x'(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$　对y同理

二阶偏导数: 例如，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}''(x,y)$　$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}=f_{xy}''(x,y)$

也叫二阶混合偏导数

3. 可微: 函数的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，A、B 仅与 x,y 有关

全微分: $dz=A\Delta x+B\Delta y$

4. 判断函数是否**可微**的步骤: ①写出全增量$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

②写出线性增量$dz=A\Delta x+B\Delta y$，其中$A=f_x'(x_0,y_0),B=f_y'(x_0,y_0)$

③作极限$\lim\limits_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若为 0，可微; 否则，不可微

5. 判断偏导数**连续性**的步骤:

①用定义法求$f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$; ②用公式法求$f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$

③若$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$成立，则连续

偏导数连续 ⟹ 可微 ⟹ 连续 ⟹ 极限存在(全方向)

可微 ⟹ 偏导数存在(某方向双侧)

可微 ⟹ 方向导数存在(某方向单侧)(仅数学一)

6. 在某点不可微⇒该点偏

7. 多元函数微分法则

a) 链式求导规则: $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，令$\frac{\partial z}{\partial u}=f_1',\frac{\partial z}{\partial v}=f_2'$

则$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$

则$z_{xx}''=f_{11}''(u_x')^2+f_{12}''u_x'v_x'+f_1'u_{xx}''+f_{22}''(v_x')^2+f_{21}''v_x'u_x'+f_2'v_{xx}''$

$z_{xy}''=f_{11}''u_x'u_y'+f_{12}''u_x'v_y'+f_1'u_{xy}''+f_{22}''v_x'v_y'+f_{21}''v_x'u_y'+f_2'v_{xy}''$

b) 隐函数求导: $F(x,y,z)=0$，两边分别对x,y求导，将z看作中间变量，得到方程，求解即可得到z_x',z_y'

8. 二元函数的极值　二阶泰勒公式

a) 必要条件: 在(x_0,y_0)点，关于 x、y 的一阶偏导为 0

b) 充分条件: 记$f_{xx}''(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}''(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}''(x_0,y_0)=C,\Delta=B^2-AC$:

①$\Delta<0$，$\begin{cases}A<0，极大值\\A>0，极小值\end{cases}$; ②$\Delta>0$，非极值; ③$\Delta=0$，不能判断

9. 条件最值: 目标函数$u=f(x,y,z)$，条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$

①构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$

②令$\begin{cases}F_x'=f_x'+\lambda\varphi_x'+u\psi_x'=0\\F_y'=0,\quad F_z'=0\end{cases}$，$\begin{cases}F_\lambda'=\varphi(x,y,z)=0\\F_\mu'=\psi(x,y,z)=0\end{cases}$

③解上面方程组得备选点$P_i,i=1,2,\dots,n$，并求$f(P_i)$，取其最大值和最小值

~~④根据实际问题，比存在最值，所得即所求~~

10. $f(x,y)$在区域D中的最值: ①求出其在区域内所有可疑点的函数值;

②在区域边界上的最值; ③比较得出最值

11. 一般$f_{xy}''(x_0,y_0)\ne f_{yx}''(x_0,y_0)$，除非它们在$(x_0,y_0)$都连续

12. 偏微分方程: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x\Rightarrow f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+\varphi(y)$

13. $F(x,y)\xrightarrow{对x求导}F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\frac{dy}{dx}=0\xrightarrow{再对x求导}$

$$F_{xx}''(x,y)+F_{xy}''(x,y)\frac{dy}{dx}+\left[F_{yx}''(x,y)+F_{yy}''(x,y)\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx}+F_y'(x,y)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积

2. 二重积分的存在性(可积性)

a) 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上可积，即二重积分存在

b) 在 D 上有界，且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则在 D 上可积

3. 二重积分的定义:

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$$

4. 二重积分的性质:

a) 求区域面积: $\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D dr = A$，A 为 D 的面积

b) 可积函数必有界

c) 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理：参考定积分的性质

5. 普通对称性:

$\iint_D f(x,y)\,dxdy =$	$2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy$	0
D关于y轴对称	$f(x,y)=f(-x,y)$	$f(x,y)=-f(-x,y)$
D关于原点对称	$f(x,y)=f(-x,-y)$	$f(x,y)=-f(-x,-y)$
D关于$y=x$对称	$f(x,y)=f(y,x)$	$f(x,y)=-f(y,x)$
D关于$y=a$对称	$f(x,y)=f(x,2a-y)$	$f(x,y)=-f(x,2a-y)$

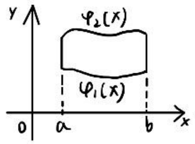
轮换对称性：把 x、y 对调后，**区域 D** 关于 y=x 对称(或不变)，则

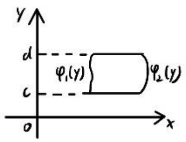
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

6. 二重积分比大小：①用对称性；②用保号性

7. 二重积分的计算

a) 直角坐标系与换序：**下限≤上限**

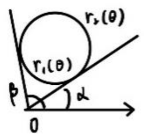




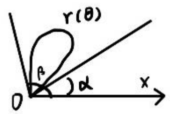
X 型: $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

Y 型: $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx$

b) 极坐标系下与换序：先积 r，后积θ

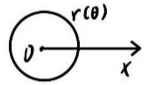


O 在 D 外: $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$



O 在 D 边界上: $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$

O 在 D 内: $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$



c) 选择的**一般**原则:

若①被积函数为$f(x^2+y^2), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$等形式；②区域为圆或者圆的一部分

⇒优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系

d) **极坐标与直角坐标的相互转化**:　　　直线在极坐标下的表示用此方法!

①$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy \xRightarrow[y=rsin\theta]{x=rcos\theta} \iint_{D_{r\theta}} f(rcos\theta, rsin\theta)\,dxdy$；②画好 D 的图形

e) 关于积分区域D

①图形变换：平移、对称、伸缩

②直角系方程给出：已知、未知(描特殊点、图形变换、导数)

③极坐标方程给出：已知(附录Ⅰ)、未知(描特殊点、图形变换、极直互换)

④参数方程给出：已知(附录Ⅰ)、未知(描特殊点、化为直角/极坐标)

⑤动区域（含其他参数)

f) 关于被积函数：分段函数（含绝对值）、最大/小值函数、取整函数(夹逼)、符号函数、抽象函数（复合函数、偏导函数)

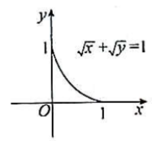
g) 换元法: $\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dxdy \xRightarrow[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint_{D_{uv}} f[x(u,v).y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \neq 0$$

8. 交换积分次序：**画图**，转换成二重积分，然后交换次序

9. $\int_0^{2\pi} dx\int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy = -\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-arcsiny}^{2\pi+arcsiny} f(x,y)\,dx$

$$+\int_0^1 dy\int_{arcsiny}^{\pi-arcsiny} f(x,y)\,dx$$



10. 二重变限积分的求导公式：参考一阶的

11. 二重积分的逆向思维: $\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$

12.

第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程：$F=\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$或$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型：$y'=f(x)g(x)$　　$\frac{dy}{dx}=f(x)g(x)\Rightarrow\int\frac{dy}{g(x)}=\int f(x)\,dx$

b) 可化为变量可分离型：

i. 形如$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$：

令$u=ax+by+c\Rightarrow\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\xRightarrow{\text{带入原方程得}}\frac{du}{dx}=a+bf(u)$

ii. 形如$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$或$\frac{dx}{dy}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$：齐次微分方程

令$u=\frac{y}{x}$，则$y=ux\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\xRightarrow{\text{带入原方程}}\mathrm{x}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dx}}+\mathrm{u}=\varphi(\mathrm{u})\Rightarrow\frac{\mathrm{du}}{\varphi(\mathrm{u})-\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$

c) 一阶线性微分方程：形如$y'(x)+p(x)\cdot y=q(x)$

通解公式 $y=e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C\right]$

推导： 两边同乘$e^{\int p(x)\,dx}$，得$e^{\int p(x)\,dx}y'(x)+e^{\int p(x)\,dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)\,dx}q(x)$

$\left[e^{\int p(x)\,dx}\cdot y'\right]=e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\Rightarrow e^{\int p(x)\,dx}\cdot y=e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx+C$

d) 伯努利方程：形如$y'+p(x)y=q(x)y^n$

步骤:①变形为$y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$　　　③求解即可

②令$z=y^{1-n}$，得$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

3. 二阶可降微分方程的求解

a) $y''=f(x,y')$型(不显含未知函数 y)

①令$y'=p(x),y''=p'$，原方程变为一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

②若求得其解为$p=\varphi(x,C_1)=y'$，则通解为$y=\int\varphi(x,C_1)\,dx+C_2$

b) $y''=f(y,y')$型(不显含自变量 x)

①令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$，原方程变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

②求解得$p=\varphi(y,C_1)=\frac{dy}{dx}$，分离变量$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$

③两边积分得$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx+C_2$，即可求得通解

4. 二阶**变**系数线性微分方程：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$　　　齐次：$f(x)\equiv 0$;

二阶**常**系数线性微分方程：$y''+py'+qy=f(x)$　　　非齐次：$f(x)\neq 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于$y''+p(x)y'+q(x)y=0$，$y_1(x),y_2(x)$是其两个线性无关的解(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$常数)，则$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为通解

b) $y^*(x)$为特解，$y(x)+y^*(x)$为通解

c) $y_1^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$的解，$y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的解，$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的解

6. $y''+py'+qy=0$的通解：　　　特征方程$\lambda^2+p\lambda+q\lambda=0$

①$p^2-4q>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$p^2-4q=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

③$P^2-4q<0,\lambda_1,\lambda_2=\alpha\pm\beta_i$，通解$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7. $y''+py'+qy=f(x)$的特解

a) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$　　特解$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，

$$\text{其中}\begin{cases}Q_n(x)\text{是}x\text{的 n 次一般多项式}\\ k=\begin{cases}0,\ \ \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\1,\alpha=\lambda_1 or\alpha=\lambda_2\\2,\ \ \ \ \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}\end{cases}$$

b) $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

特解$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$

$$\text{其中}\begin{cases}l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 的两个不同的 l 次一般多项式}\\ k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征根}\\1,\alpha\pm\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$$

8. n 阶常系数齐次线性微分方程的解 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

特征方程$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

a) 特征根为单实根λ，通解对应一项$Ce^{\lambda x}$

b) 特征根为 k 重实根λ，通解中对应 k 项$(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2 项$e^{ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

d) 特征根为 k 重复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2k 项

$e^{ax}[(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1x+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

9. n 阶非齐次微分方程$y^{(n)}=f(x)$型的解

①令$y^{(n-1)}=P(x),P'=y^{(n)}$,则$P'(x)=f(x),P(x)=y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1$

②同理得$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\,dx+C_2$

③连续积分 n 次，得含有 n 个任意常数的通解

10.

第 13 讲 无穷级数

1. 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

部分和：$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

m 项后余项：$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}+\cdots$

性质：①$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$；

②$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛⇔$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛

③收敛的必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

2. 正项级数：$u_n\geq 0$

a) 收敛的充分必要条件：部分和数列$\{S_n\}$有界

b) 比较判别法：大的收敛，小的也收敛；小的发散，大的也发散

c) 比较判别法的极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$

i. A=0，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛 ⇔ u_n是v_n的高阶无穷小

ii. A=+∞，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散 ⇔ 低阶

iii. 0 < A < +∞，v_n和u_n有相同的敛散性 ⇔ 同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 ⇔ 前 > 后；②$\rho>1$，发散 ⇔ 前 < 后；

e) 根值判别法(柯西判别法)：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 ⇔ 后一项多开一次更小；②$\rho>1$，发散；

3. 交错级数：各项正负相间，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

a) 莱布尼兹判别法：$\{u_n\}$单调不增且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则收敛

4. 任意项级数：各项可正、可负、可为零，记作$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

绝对值级数：给任意项级数加上绝对值，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**

定理：若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛；

5. 收敛级数的性质

①随便加括号，仍收敛，和不变；　②随便加括号后发散，原级数必发散

③加括号后收敛，原级数不一定收敛；④绝对收敛的级数有可交换性

6. 函数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数：$u_n(x)$是 n 次幂函数 一般形式：$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$; 标准形式：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

a) 阿贝尔定理：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_1(\neq 0)$收敛，所有$|x|<|x_1|$，绝对收敛

x_2　发散　$>|x_2|$，发散

b) 收敛半径的存在性：$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径 R(⩾0)必存在

①x=0 收敛，R=0；　②整个轴上都收敛，R=+∞

③|x|<R，绝对收敛；|x|>R，发散；x=±R，可能发散可能收敛

c) 收敛半径的求法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho},\rho\neq 0\\+\infty,\rho=0\\0,\rho=+\infty\end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 + x=±R 处的敛散性

7. 和函数：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数相等，即在点 x=0 处的某领域内相等，则同幂次的系数相等，即$a_n=b_n$

四则运算：

$$\left(\sum_{n=v}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\,,|x|<R=\min\{R_a,R_b\}\,,c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

性质：①

②$S(x)$可积，则$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\cdot x^{n+1}}{n+1}(x\in I)$的 R 不变，I 可能扩大

③$S(x)$可导，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}(|x|<R)$的 R 不变，I 可能缩小

8. ★重要的幂级数展开式

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,-\infty<x<+\infty$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1$

$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1$

$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\le 1$

$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\begin{cases}x\in(-1,1),\ \alpha\le -1\\ x\in(-1,1],-1<\alpha<0\\ x\in[-1,1],\qquad \alpha>0\end{cases}$

9. 泰勒级数：$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

麦克劳林级数：$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x)^n$

注意：具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

10. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x)\in(x_0-R,x_0+R)$有任意阶导数，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,|x-x_0|<R$

11. 幂级数展开求法

①直接算；②间接法：变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

12. ★**重要结论:**

调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}发散，p\le 1\\ 收敛，p>1\end{cases}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases}发散，p\le 1\\ 收敛，p>1\end{cases}$

交错调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ 收敛

13. 幂级数收敛域的求法

a) 具体型步骤：①$\Sigma u_n(x)\Rightarrow\Sigma|u_n(x)|$

②使用比值、根值判别法，获得收敛区间；③讨论端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在某点$x_1$的敛散性

①收敛，$R\ge|x_1-x_0|$；②发散，$R\le|x_1-x_0|$；③条件收敛，$R=|x_1-x_0|$

ii. 已知$\Sigma a_n(x-x_1)^n$的敛散性，求$\Sigma b_n(x-x_2)^m$的敛散性

①$(x-x_1)^n$和$(x-x_2)^m$的转换：平移收敛区间； R 不变

提出或者乘$(x-x_0)^k$ R 不变

②a_n和b_n的转换：逐项求导 R 不变，I 可能缩小

or 积分 R 不变，I 可能扩大

14. 幂级数和函数的求法 解题过程**标注收敛域**

a) 突破口：$(an+b)^c$在分母上，先导后积；在分子上，先积后导

b) 重要结果

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\le x<1$ $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},-1<x<1$

15.

第 14 讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率：$y=f(x),\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$，则$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式：$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ 曲率半径：$R=\frac{1}{k}(y''\ne 0)$

曲率圆：$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2=R^2$ 其中$\alpha=x-\frac{y'[1+(y')^2]}{y''},\beta=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功：$W=\int_a^b F(x)\,dx$ 抽水做功：$W=\rho g\int_a^b xA(x)\,dx$

水压力：$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\,dx$

4. 平面曲边梯形的形心坐标：$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}=\frac{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}x\,dy}{\int_a^b dx\int_0^{f(x)}dy}=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ $\bar{y}$同理

平面曲线弧长：①$y=y(x),s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},s=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

③$r=r(\theta),s=\int_a^b\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

旋转曲面面积：①$y=y(x),S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},S=2\pi\int_a^b|y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

平行截面面积已知的立体体积：$V=\int_a^b A(x)\,dx$

5. 欧拉方程：形如$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=f(x)$

解法：①当 x>0，令$x=e^t$，则$t=\ln x,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$,

$\frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$，求解

②当 x<0，令$x=-e^t$，同理得

6. 傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$[-\pi,\pi]$

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$　　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$

7. 狄利克雷收敛定理：$[-\pi,\pi]$上连续 or 只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则在$[-\pi,\pi]$上处处收敛

和函数$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

且$S(x)=\begin{cases}f(x)\text{，x 为连续点}\\\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\text{，x 为间断点，其中}f(x_0\pm 0)\text{表示}\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x)\\\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\text{，x}=\pm\pi\end{cases}$

8. 傅里叶展开式：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$，$[-l,l]$

其中$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$　　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

S(x)和傅里叶级数的类似

9. 正弦级数：$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

余弦级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$

10.

第 16 讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积：$a\cdot b=a_xbx+a_yb_y+a_zb_z=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

a 在 b 上的投影：$P_{rj_b}a=\frac{a\cdot b}{|b|}$　　$a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$

2. 向量积：$a\times b=\begin{vmatrix}i&j&k\\a_x&a_y&a_z\\bx&by&bz\end{vmatrix}$　　$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

$a||b\Leftrightarrow|a\times b|=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{bx}=\frac{a_y}{by}=\frac{a_z}{bz}$

3. 混合积：$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

三向量共面：$[abc]=0$

4. 方向余弦：$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\cos\beta,\cos\gamma$

5. 单位向量：$a^o=\frac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

任意向量：$r=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

6. 平面方程：一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：$\begin{vmatrix}x-x_1&y-y_1&z-z_1\\x-x_2&y-y_2&z-z_2\\x-x_3&y-y_3&z-z_3\end{vmatrix}=0$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面束：满足某种规律的平面族

7. 直线方程：一般式：两平面的交线，即联立方程

点向式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

参数式：$x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt$，t 为参数

两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

8. 距离公式：点到面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点 P_0 到线(过 P_1)：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\tau|}$，$\tau=(l,m,n)$为方向向量

两平行直线：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau|}$　　两异面直线：$d=\frac{|(\tau_1\times\tau_2)\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau_1\times\tau_2|}$

两平行平面：$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

9. 直线关系：方向向量τ_1,τ_2　　$\theta=arc\cos\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{|\tau_1|\cdot|\tau_2|}$

平行：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$　　垂直：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

10. 平面关系：法向量$n_1=(A_1,B_1,C_1),n_2$　　$\theta=arccos\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$

平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$　　垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

11. 平面与直线关系：将直线的τ当成平面的法向量

12. 空间曲线：○一般式Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$　几何意义：两曲面的交线

①切向量：　$\tau=\left(\begin{vmatrix}F_y' & F_z'\\G_y' & G_z'\end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix}F_z' & F_x'\\G_z' & G_x'\end{vmatrix}_{P_0},\dots\right)$

②切线方程：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

○参数方程Γ：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

①切向量：$\tau=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$　②切线方程：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

曲线在坐标面的投影：例如在 xOy 的投影，将一般式Γ中的 z 消去，

得$\varphi(x,y)=0$，曲线方程为$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$

13. 空间曲面：$F(x,y,z)=0$

①法向量：$n=\left(F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\right)$

②法线方程：$\frac{x-x_0}{n(0)}=\frac{y-y_0}{n(1)}=\frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面：$n(0)(x-x_0)+n(1)(y-y_0)+n(2)(z-z_0)=0$

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　　椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$　　双曲抛物面：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面：$y=ax^2$

14. ★旋转曲面：曲线Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$绕直线 L：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$旋转一周

解法：$\begin{cases}\begin{cases}\overrightarrow{M_1P}\perp s\Rightarrow m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0\\|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\cdots=(x_1-x_0)^2+\cdots+\cdots\end{cases}\\\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}\end{cases}$

15. 空间曲面面积：$z=z(x,y),S=\iint_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy$

16. 方向导数：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u_x'(P_0)\cos\alpha+u_y'(P_0)\cos\beta+u_z'(P_0)\cos\gamma$

17. 梯度：$grad\ u|_{P_0} = \left(u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0)\right)$

18. 方向导数和梯度得关系：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0} = grad\ u|_{P_0} \cdot l^o = \left|grad\ u|_{P_0}\right| cos\theta$

19.

第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分： 几何意义：空间物体的质量

$$\iiint_D \mathrm{f(x,y,z)\,dv} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j, e+\frac{f-e}{n}k\right) \frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}\cdot\frac{f-e}{n}$$

2. 考研数学中，三重积分总是存在的
3. 凑三重积分定义步骤

①提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；②凑出$\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}$；③$\frac{i}{n} = 0 + \frac{i-0}{n}$，其他两个同理，凑定义完成

4. 性质： 求空间区域体积：$\iiint_\Omega 1\,\mathrm{dv} = \iiint_\Omega \mathrm{dv} = \mathrm{V}$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

~~5. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性~~

6. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系：$\iiint_D f(x,y,z)\,dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$

b) 柱面坐标系：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(rcos\theta, rsin\theta, z) r\ \ drd\theta dz$$

c) 球面坐标系：$x = r\ \ sin\ \varphi\ \ cos\ \theta, y = r\ sin\varphi\ sin\ \theta, z = r\ cos\varphi$

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(r\ sin\varphi\ cos\theta, rsin\varphi\ sin\theta, z) r^2 \sin\varphi\, d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\ sin\varphi\ cos\theta, rsin\varphi\ sin\theta, z) r^2 \sin\varphi\, dr$$

适用范围：①被积函数含$f(x^2+y^2+z^2)$或$f(x^2+y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用（$\bar{\mathrm{x}} = \frac{\iiint_\Omega \mathrm{x\,dv}}{\iiint_\Omega \mathrm{dv}} \Rightarrow \iiint_\Omega \mathrm{x\,dv} = \bar{\mathrm{x}}\cdot\mathrm{v}$）

7. 第一型曲线积分：$\int_L f(x,y)\,ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$ 几何意义：曲线的质量
8. 考研数学中，第一型曲线积分总是存在的
9. 性质： 求曲线长度：$\int_\Gamma 1\,ds = l_\tau$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

10. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性
11. 第一型曲线积分的计算

a) 空间曲线长度：$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

b) 平面曲线：

①$\mathrm{y=y(x)}$ $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(t)]^2}dt$ 类似：平面曲线弧长

②$x = x(t), y = y(t)$ $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

③$r = r(\theta)$ $\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[r(\theta)cos\theta, r(\theta)sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

12. 第一型曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$ 几何意义：曲面质量
13. 考研数学中，第一型曲面积分总是存在的
14. 性质： 求曲线长度：$\iint_\Sigma 1\,dS = S$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

15. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性
16. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

②将$z = z(x,y)$或$F(x,y,z) = 0$带入$f(x,y,z)$

③计算$z'_x, z'_y \Rightarrow dS = \sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy$

得到$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS = \iint_\Sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy$

b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

17. 重积分和第一型线面积分的应用

a) 面积&体积：平面面积、空间曲线长度$f(\cdot)=1$、空间曲面面积

空间体积：$V=\iint_D|f(x,y)-g(x,y)|\,d\sigma$

b) 重心&形心：$\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$　空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例：平面薄片，$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}$同理

c) 转动惯量：$I=mr^2$　平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如：空间物体，$I_x=\iiint_\Omega (y^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dv$，$I_y,I_z,I_O$同理

d) 引力：$F=G\frac{Mm}{r^2}$　平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如：光滑曲线，$F_x=Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)]^{\frac{3}{2}}}ds$，$F_y,F_z$同理

18. 重要结论：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{4}{5}\pi R^5$$

19.

第 18 讲　第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分：$\int_\Gamma F(x,y,z)\,dr=\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)\,dz$

物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功

2. 考研数学中，第二型曲线积分总是存在的

3. 性质：线性性质，可加性，有向性：$\int_{\widehat{AB}}F\cdot dr=-\int_{\widehat{BA}}F\cdot dr$

对称性：假设Γ关于yOz对称，　（无轮换对称性）

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1}P(x,y,z)\,dx, & P(x,y,z)=-P(-x,y,z)\\ 0, & P(x,y,z)=P(-x,y,z)\end{cases}$$

4. 平面第二型曲线积分的计算

a) 直接计算（参数法）：化为定积分　α,β大小无所谓，关键对应起、终点

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,dt$$

b) 格林公式：　条件：封闭，P、Q 有一阶连续偏导

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

若①L 不是封闭曲线：补线法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

5. 平面曲线积分与路径无关

6. 空间第二型曲线积分计算：　斯托克斯公式

$$\oint_l P\,dx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\text{（第二型曲面积分形式）}$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS\text{（第一型曲面积分形式）}$$

7. 第二型曲面积分：　物理背景：向量函数通过曲面的通量

$$\iint\limits_\Sigma F\cdot dS=\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$$

8. 考研数学中，第二型曲面积分总是存在的

9. 性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考第二型曲线积分

10. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$R(x,y,z)$

③将$dx\,dy$写成$\pm dx\,dy$，Σ方向为上取"+"

得$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$

a) 高斯公式：$\oiint_\Sigma P\,dy\,dz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

若①Σ不是封闭曲面：补面法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

11. 两类曲面积分关系：第一型与第二型

$$dy\,dz=\cos\alpha\,dS,\,dz\,dx=\cos\beta\,dS,\,dxdy=\cos\gamma\,dS$$

转换坐标变量法：$z=z(x,y)\Rightarrow\ dydz=-z_x'dxdy,dzdx=-z_y'dxdy\Rightarrow$

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_\Sigma P\big(x,y,z(x,y)\big)(-\frac{\partial z}{\partial x})dxdy$$

Q,R同理，当Σ定向的法向量与 z 轴夹角在 0~90°，取 +

12. 设置$A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度：$div\ A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$　　旋度：$rot\ A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

常用公式：①$div(grad\ u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

②$rot(grad\ u)=0$；③$div(rot\ A)=0$;

13.