

第1讲 高等数学常用基础知识

1. $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$

2. 余切函数: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

正割函数: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

余割函数: $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

3. 符号函数: $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$; 取整函数: $y = [x]$

4. 若 $U = \max\{f(x), g(x)\}$, $V = \min\{f(x), g(x)\}$,

则 $U+V = f(x) + g(x)$ $U-V = |f(x) - g(x)|$ $UV = f(x)g(x)$

5. 组合数公式: $C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^n C_i^k$ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ [推导过程](#)

$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\sum_{k=1}^n k)^2$ $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2C_{n+2}^3$

6. $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$

7. 积化和差公式*4 $\cos \alpha \sin \beta$ 和 $\cos \alpha \cos \beta$ 同理

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

和差化积公式*4 $\sin \alpha - \sin \beta$ 和 $\cos \alpha - \cos \beta$ 同理

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

8. 万能公式 $u = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$ 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

9. 因式分解公式

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} - b^{n-1})$ (n 为正偶数)

$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ (n 为正奇数)

第2讲 极限与连续

1. 数列极限定义: 任意 $\varepsilon < 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 当 $n > N$, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$

2. 判断数列发散方法*2: 找到其一个发散的子列;

找到两个收敛的子列, 但是收敛到不同的极限

3. 数列极限运算规则 (参考函数的)

4. 证明 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 的极限存在: 证明单调不减, 证明有界

5. 函数极限定义:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

6. 函数极限存在的充要条件*2

① 左极限=右极限=A ② $f(x) = A + \alpha(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

7. 函数极限的性质: 唯一性; 局部有界性; 局部保号性;

8. 无穷小的比阶 前提: $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$

高阶无穷小: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

低阶无穷小: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$; 同阶无穷小: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$;

k 阶无穷小: $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$ 等价无穷小: $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

9. 函数极限运算规则 前提: 极限都存在

a) $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$

b) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

c) $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$, n 为正整数

d) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小; 有界函数与无穷小的积是无穷小

b) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l)$, $l = \min(m, n)$ -> 加减法时低阶吸收高阶

c) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) = x^m \cdot o(x^n)$ -> 乘法时阶数累加

d) $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m)$, $k \neq 0$ 且为常数 -> 非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小*9 前提: $x \rightarrow 0$ 本质: 泰勒展开
 $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax$ ★ $x \rightarrow x_0$ 等价替换成 $t \rightarrow 0$

12. 夹逼准则: $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \lim g(x) = A, \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$

使用方法: 缩放, 对分母中阶数最低的缩放

对和式 $\sum_{i=1}^n u_i$ 缩放的两种方法:

n 为无穷大时, $n \cdot u_{\min} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max}$;

n 为有限数时, $1 \cdot u_{\max} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max}$;

13. 洛必达法则: $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 且一阶导都存在

14. 海涅定理: (联系数列极限与函数极限)

15. 第一类间断点: 可取、跳跃

第二类间断点: 无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知

① 夹逼准则 ② 定积分定义 ③ 幂级数求和 ④ 级数收敛的必要条件

b) 数列通项未知

① “单调有界数列必有极限”; ② 求出表达式; ③ 利用定义构造 $|a_n - a|$

17. 函数极限的计算步骤

判断未定式的种类。七种: " $\frac{0}{0}$ " " $\frac{\infty}{\infty}$ " " $0 \cdot \infty$ " " $\infty - \infty$ " " ∞^0 " " 0^{∞} " " 1^{∞} "

i. " $\frac{0}{0}$ " " $\frac{\infty}{\infty}$ ": 使分子次数大于分母次数, 即倒三角形状 ∇

ii. " $0 \cdot \infty$ ": 转化成 " $\frac{0}{0}$ " 或 " $\frac{\infty}{\infty}$ "

iii. " $\infty - \infty$ ": 变形为乘除法。有分母, 通分; 无分母, 倒代换或提取公因式

iv. $\infty^0 0^{\infty} 1^{\infty}$: $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$

$$= \lim \left\{ [1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}} \right\}^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v} \quad \therefore \lim \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

18. ★常用函数的泰勒展开式*8 前提: $x \rightarrow 0$ 计算时保留 $o(\cdot)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

$\frac{A}{B}$ 型, 适用“上下同阶”原则, 即展开后分子分母同阶;

A-B 型, 适用“幂次最低”原则, 即展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止;

第3讲 一元函数微分学的概念与计算

1. 导数的定义*2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. 可导的充分必要条件: 左导数和右导数存在且相等

3. 高阶导数概念: $f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$

4. 可微判别方法*3:

① 写增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

② 写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

③ 作极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$

5. 复合函数的导数(微分): $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

6. 反函数求导: $y = f(x), x = \varphi(y)$, 记 $f'(x) = y'_x, \varphi'(x) = x'_y (x'_y \neq 0)$, 则有

$$\text{一阶 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\text{二阶 } y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

7. 参数方程求导: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

$$\text{一阶: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\text{二阶: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

8. 隐函数求导: $F(x, y) = 0$, 两边对 x 求导, 将 y 看作中间变量, 得到方程, 求解即可得到 y'

9. 对数求导法: 对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数, $\ln y = \ln f(x)$; ② 求导得 $\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y[\ln f(x)]'$

10. 幂指数函数求导法:

$$[u(x)^{v(x)}]' = [e^{v(x) \ln u(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

11. n 阶导数的运算方法 *3

a) 逐次求导。

b) 高阶求导公式: $[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

c) 写出泰勒公式 or 麦克劳林公式, 比较系数

12. 常见函数的 n 阶导数 *8

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n (a > 0, a \neq 1) \quad (e^x)^{(n)} = e^x \quad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n} (x > 0) \quad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (x > -1)$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$$

13. 变限积分求导公式: 设 $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x) dx$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)] \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \varphi_1'(x)$$

14. 基本初等函数的导数公式

$$(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad [\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

15.

第4讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别: 带不带等号

极值、最值的区别: 领域、定义域

2. 极值点的必要条件: 一阶可导

3. 判断极值的充分条件 *3

a) x_0 的去心领域一阶可导

i. x_0 左边, $f'(x) < 0$; x_0 右边, $f'(x) > 0$, 为极小值;

ii. x_0 左边, $f'(x) > 0$; x_0 右边, $f'(x) < 0$, 为极大值;

b) $x = x_0$ 处二阶可导, 且 $f'(x) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$

$f''(x_0) > 0$, 极小值; $f''(x_0) < 0$, 极大值

c) x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$

n 为偶数, $f^{(n)}(x_0) > 0$, 极小值; n 为偶数, $f^{(n)}(x_0) < 0$, 极大值

4. 凹弧: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$; 凸弧: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

5. 判断凹凸的充分条件: $f''(x) > 0$, 凹的; $f''(x) < 0$, 凸的

6. 拐点的必要条件: 二阶可导

7. 判断拐点的充分条件 *3

a) x_0 的去心邻域内二阶导数存在, 且左右邻域 $f''(x)$ 变号

b) 三阶可导, $f''(x) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$

c) x_0 处 n 阶可导, n 为奇数, $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 2, \dots, n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 3)$

8. 斜渐近线: 例 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1$, $y = k_1 x + b$ 为斜渐近曲线

9. 求闭区间的最值步骤: 求出可疑点(驻点和不可导点)和端点, 比较得到最值

10. 求开区间的最值(取值范围)步骤: 求出可疑点和两端的单侧极限, 比较得到最值或取值范围

11. 函数作图步骤:

① 确定定义域和奇偶对称性 ② 利用 $f'(x)$, $f''(x)$ 为 0 和不存在的点, 将函数划分成几个区间, 判断每一个的单调性和凹凸性 ③ 确定渐近线(如果有的话) ④ 作图

12.

第5讲 中值定理

1. 函数的中值定理

a) 有界与最值定理: $m \leq f(x) \leq M$, 其中 m 、 M 为 $[a, b]$ 上的最值

b) 介值定理: 当 $m \leq \mu \leq M$, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$

c) 平均值定理: 当 $a < x_1 < \dots < x_n < b$, 在 $[x_1, x_n]$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) =$

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$$

d) 零点定理: 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

2. 导数(微分)的中值定理

a) 费马定理: $f(x_0)$ 可导且为极值, 则 $f'(x_0) = 0$

b) 罗尔定理: $f(x)$ 满足 $\begin{cases} [a, b] \text{ 上连续} \\ (a, b) \text{ 内可导, 存在 } \xi \in (a, b), \text{ 使得 } f'(\xi) = 0 \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

c) 拉格朗日中值定理: $\begin{cases} [a, b] \text{ 连续} \\ (a, b) \text{ 可导} \end{cases}$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

d) 柯西中值定理: 条件同上, $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

e) 泰勒公式

i. 带拉格朗日余项: $n+1$ 阶可导, ξ 介于 x, x_0 之间

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项: $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$

3. 克劳林公式: $x_0 = 0$ 的泰勒公式

4. 重要函数的克劳林展开式 *7

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

5. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $H(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$: 罗尔定理、费马定理

a) 构造辅助函数: 把 ξ 改成 x , 对于 $f'(x) + g(x)f(x) = 0$, 两边同乘 $e^{\int g(x) dx}$,

得构造函数 $F(x) = f(x)e^{\int g(x) dx}$

b) 验证端点值相等: 转化为给定区间内找 $F(x)$ 的两个不同的零点

第6讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:

a) 零点定理: 证明根的存在

当 $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f(x) = 0$ 至少有一个根

b) 单调性: 证明根的唯一性

$f(x) = 0$ 在 (a, b) 内单调, $f(x) = 0$ 至少有一个根

c) 罗尔定理的推论: $f^{(n)}(x) = 0$ 至多有 k 个根, $f(x) = 0$ 至多有 $k+n$ 个根

d) 实系数奇次方程: 至少有一个根

2. 经典不等式

a) $2|ab| \leq a^2 + b^2$ $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ $||a| - |b|| \leq |a - b|$

b) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时等号成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

c) $x, y, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

$$e) \left[\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

$$f) \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}, \quad p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

g) $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$

$$x < \tan x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}) \quad \sin x < x \quad (x > 0)$$

$$\arctan x \leq x \leq \arcsin x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$e^x \geq x + 1, x - 1 \geq \ln x \quad \frac{1}{1+x} < \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (x > 0)$$

3. 微分不等式的证明方法 *3

a) 利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)

b) 常数变量化

c) 中值定理

第7讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数; ②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数

$$2. \text{定积分的定义: } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \frac{b-a}{n}$$

3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续; ②在去见善有界, 只有有限个间断点
必要条件: 可积函数必有界

4. 定积分的性质:

a) 求区间长度: 略

b) 线性性质: 略

$$c) \text{可加可拆性: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$d) \text{保号性: } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{特殊: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

e) 估值定理: M, m 为最大、小值, L 为区间长度

$$mL \leq \int_a^b f(x) dx \leq ML$$

f) 中值定理: 函数连续, 闭区间内至少存在一点 ξ , 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

5. 变限积分的性质: ① $f(x)$ 可积, $F(x)$ 连续; ② $f(x)$ 连续, $F(x)$ 可导

6. 变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无 x

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

7. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性

8. 奇点: " ∞ " 和使得函数无定义的点(瑕点)

9. 不定积分计算

$$a) \text{凑微分法: } \int f[g(x)]g'(x) dx = \int f[g(x)] d[g(x)] = \int f(u) du$$

i. 若 $f(x)$ 较复杂, 对其(或其主要部分)求导可以得到 $g(x)$ 的倍数(常数 or 函数)

$$\int f(x)g(x)dx = \frac{1}{A} \int f(x)Ag(x)dx = \frac{1}{A} \int f(x)d[f(x)]$$

ii. 得不到倍数, 可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子, 来恒等变形。常用的因子有 $e^{ax}, x^\beta, \sin x, \cos x$

b) 换元法: $\int f(x)dx \xrightarrow{x=g(u)} \int f[g(u)]d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u)du$

i. 三角函数代换: $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t, \begin{cases} x > 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

ii. 恒等变形后三角函数代换: $\sqrt{ax^2 + bx + c} \Rightarrow$

$$\sqrt{\varphi^2(x) + k^2}, \sqrt{\varphi^2(x) - k^2}, \sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$$

iii. 根式代换: $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt{ae^{bx}+c} \Rightarrow \text{令 } \sqrt{*} = t$

同时含有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 和 $\sqrt[m]{ax+b} \Rightarrow \text{令 } \sqrt[l]{ax+b} = t, l \text{ 为最小公倍数}$

iv. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上, $\frac{1}{x} = t$

v. 复杂函数的直接代换: 含有 $a^x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arctan x$, 令复杂函数 = t

注意: 当 $\ln x, \arcsin x, \arctan x$ 与 e^x 或 x^n 乘除, 优先考虑分部积分法

c) 分部积分法: $\int u dv = uv - \int v du$

i. 适用于 $\int u dv$ 难求, 而 $\int v du$ 好求

ii. 积分后简单点宜作 u, 微分后简单点宜作 v

$$P_n(x) \text{ 与 } e^{kx}, \sin ax, \cos ax \text{ 中的一个} \Rightarrow u = P_n(x)$$

$$e^{ax} \text{ 与 } \sin ax, \cos ax \text{ 中的一个} \Rightarrow u \text{ 任选其一}$$

$$P_n(x) \text{ 与 } \ln x, \arcsin x, \arctan x \text{ 中的一个} \Rightarrow u \neq P_n(x)$$

iii. 推广: u 与 v 有直到 (n+1) 阶的连续导数

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx$$

d) 有理函数的积分: $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx (n < m)$

i. 方法: 把 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意: k 重因式产生 k 项

10. 定积分的计算

a) 牛顿莱布尼兹公式: $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_a^b$

b) 换元积分: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi'(t)]\varphi'(t) dt$

c) 分部积分法: $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

d) 重要结论:

i. 偶函数, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

ii. 奇函数, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

iii. 周期函数, $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

iv. 区间再现公式: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases}$

11. 凑定积分定义的方法: ① 提出 $\frac{1}{n}$; ② 凑出 $\frac{i}{n}$; ③ 转化为 $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$

12. 华里士公式: P147

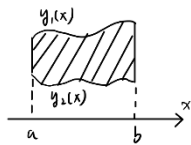
13. 反常积分的敛散性判别:

a) 无穷区间的 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$: $p > 1$ 收敛, $p \leq 1$ 发散

b) 无界函数的 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$: $p < 1$ 收敛, $p \geq 1$ 发散 (奇点 $x=0$)

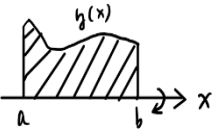
第8讲 一元函数积分学的几何应用

1. 计算面积

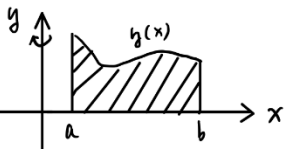


$$S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

2. 计算体积



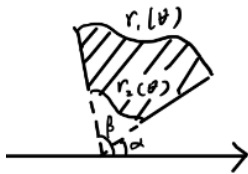
$$V = \int_a^b \pi y^2(x) dx$$



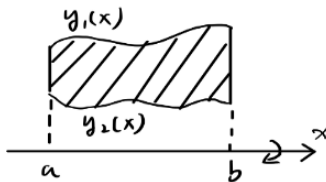
$$V_y = 2\pi \int_a^b x |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

3. 积分计算平均数: $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$

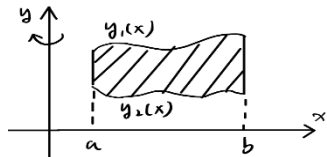
第9讲 积分等式与积分不等式



$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$$



$$V = \pi \int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)| dx$$



$$V = 2\pi \int_a^b x |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

第10讲 多元函数微分学

1. 领域、去心领域; 内点、外点、边界点; 有界集、无界集; 开集、闭集; 连通集、开区域、闭区域、区域; 单连通区域、多连通区域; 聚点: 孤立点:

2. 偏导数定义: 例如, 对 x , $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

二阶偏导数: 例如, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ 也叫二阶混合偏导数

3. 可微: 函数的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, A, B 仅与 x, y 有关

全微分: $dz = A\Delta x + B\Delta y$

4. 判断函数是否可微的步骤:

- a) 写出全增量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$
b) 写出线性增量 $dz = A\Delta x + B\Delta y$, 其中 $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$

c) 作极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$, 若为 0, 可微; 否则, 不可微

5. 判断偏导数连续性的步骤:

- a) 用定义法求 $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$
b) 用公式法求 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$
c) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0), \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$ 成立, 则连续

6. 多元函数微分法则

- a) 链式求导规则: $z = f(u, v)$

i. $u = \varphi(t), v = \psi(t)$, 则 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$

ii. $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

iii. $u = \varphi(x, y), v = \psi(y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}$

- b) 隐函数存在定理

7. 二元函数的极值

a) 必要条件: 在 (x_0, y_0) 点, 关于 x, y 的一阶偏导为 0

b) 充分条件: 记 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C, \Delta = B^2 - AC$:

① $\Delta < 0, \begin{cases} A < 0, & \text{极大值} \\ A > 0, & \text{极小值} \end{cases}$; ② $\Delta < 0$, 非极值; ③ $\Delta = 0$, 不能判断

c) 求最值的步骤: 目标函数 $u = f(x, y, z)$, 条件 $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

① 构造辅助函数 $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$

② 令 $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x + \mu \psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y + \mu \psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda \varphi'_z + \mu \psi'_z = 0 \end{cases}, \begin{cases} F'_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

③ 解上面方程组得备选点 $P_i, i = 1, 2, \dots, n$, 并求 $f(P_i)$, 取其最大值和最小值

④ 根据实际问题, 比存在最值, 所得即所求

8. 二元函数的最值计算步骤: ① 求出其在区域内所有可疑点的函数值;

② 在区域边界上的最值; ③ 比较得出最值

9. 一般 $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0)$, 除非它们在 (x_0, y_0) 都连续

第11讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积

2. 二重积分的存在性(可积性)

a) 在有界闭区域 D 上连续, 则在 D 上可积, 即二重积分存在

b) 在 D 上有界, 且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的, 则在 D 上可积

3. 二重积分的定义:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j\right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}$$

4. 二重积分的性质:

a) 求区域面积: $\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = A$, A 为 D 的面积

b) 可积函数必有界

c) 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理: 参考 [定积分的性质](#)

5. 普通对称性: $\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$

轮换对称性: 把 x, y 对调后, 区域 D 关于 $y=x$ 对称(或不变), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

6. 二重积分的计算

a) 直角坐标系下: 下限 \leq 上限

X 型: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$

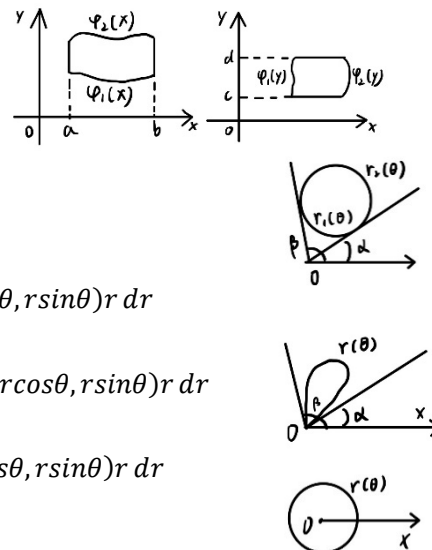
Y 型: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$

b) 极坐标系下: 先积 r , 后积 θ

○ 在 D 外: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

○ 在 D 边界上: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

○ 在 D 内: $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$



c) 选择的一般原则:

若①被积函数为 $f(x^2 + y^2)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等形式; ②积分区域为圆或者圆的一部分 \Rightarrow

优先选用极坐标系, 否则使用直角坐标系

d) 极坐标与直角坐标的相互转化:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}; \textcircled{2} \text{画好 } D \text{ 的图形}$$

7. 交换积分次序: 画图, 转换成二重积分, 然后交换次序

第12讲 常微分方程

1. 微分方程: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ 或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型: $y' = f(x)g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(x)} = \int f(x) dx$$

b) 可化为变量可分离型:

i. 形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$:

$$\text{令 } u = ax + by + c \Rightarrow \frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{带入原方程得}} \frac{du}{dx} = a + bf(u)$$

ii. 形如 $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 或 $\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$: 齐次微分方程

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \xrightarrow{\text{带入原方程}} x \frac{du}{dx} + u = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

c) 一阶线性微分方程: 形如 $y'(x) + p(x) \cdot y = q(x)$

$$\text{通解公式 } y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C \right]$$

推导: 两边同乘 $e^{\int p(x) dx}$, 得 $e^{\int p(x) dx} y'(x) + e^{\int p(x) dx} p(x) \cdot y = e^{\int p(x) dx} q(x)$

$$\left[e^{\int p(x) dx} \cdot y \right]' = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) \Rightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot y = \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C$$

d) 伯努利方程: 形如 $y' + p(x)y = q(x)y^n$

步骤: ① 变形为 $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$

$$\textcircled{2} \text{令 } z = y^{1-n}, \text{ 得 } \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

③ 求解即可

3. 二阶可降微分方程的求解

a) $y'' = f(x, y')$ 型 (不显含未知函数 y)

① 令 $y' = p(x)$, $y'' = p'$, 原方程变为一阶方程 $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$

② 若求得解为 $p = \varphi(x, C_1) = y'$, 则通解为 $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$

b) $y'' = f(y, y')$ 型 (不显含自变量 x)

① 令 $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$, 原方程变为 $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

② 求解得 $p = \varphi(y, C_1) = \frac{dy}{dx}$, 分离变量 $\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$

③ 两边积分得 $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx + C_2$, 即可求得通解

4. 二阶变系数线性微分方程: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

二阶常系数线性微分方程: $y'' + py' + qy = f(x)$

齐次: $f(x) \equiv 0$;

非齐次: $f(x) \neq 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $y_1(x), y_2(x)$ 是其两个线性无关的解 (即 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$

常数), 则 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 为通解

b) $y^*(x)$ 为特解, $y(x) + y^*(x)$ 为特解

c) $y_1^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$ 的解, $y_2^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$ 的解, $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$ 的解

6. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

① $p^2 - 4q > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$, 通解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

② $p^2 - 4q = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 通解 $y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$

③ $p^2 - 4q < 0, \lambda_{1,2} = a \pm \beta i$, 通解 $y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

7. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解 $y'' + py' + qy = f(x)$

a) $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$

特解 $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x) x^k$,

其中 $\begin{cases} Q_n(x) \text{ 是 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \\ 1, & \alpha = \lambda_1 \text{ 或 } \alpha = \lambda_2 \\ 2, & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \end{cases}$

b) $f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$

特解 $y^* = e^{\alpha x} [Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x] x^k$

其中 $\begin{cases} l = \max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i \text{ 不是特征根} \\ 1, & \alpha \pm \beta i \text{ 是特征根} \end{cases} \end{cases}$

8. n 阶常系数齐次线性微分方程的解 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

特征方程 $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$

a) 特征根为单实根 λ , 通解对应一项 $C e^{\lambda x}$

b) 特征根为 k 重实根 λ , 通解中对应 k 项 $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根 $\alpha \pm \beta i (\beta > 0)$, 通解中对应 2 项 $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

d) 特征根为 k 重复根 $\alpha \pm \beta i (\beta > 0)$, 通解中对应 2k 项

$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 x + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

9. n 阶非齐次微分方程 $y^{(n)} = f(x)$ 型的解

① 令 $y^{(n-1)} = P(x), P' = y^{(n)}$, 则 $P'(x) = f(x), P(x) = y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$

② 同理得 $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx + C_2$

③ 连续积分 n 次, 得含有 n 个任意常数的通解

10.

第13讲 无穷级数

1. 无穷级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

部分和: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

m 项余项: $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$

性质: ① $\sum_{n=1}^{\infty} (a u_n \pm b v_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$;

② $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛

③ 收敛的必要条件: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

2. 正项级数: $u_n \geq 0$

a) 收敛的充分必要条件: 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

b) 比较判别法: 大的收敛, 小的也收敛; 小的发散, 大的也发散

c) 比较判别法的极限形式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

i. $A=0$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛 $\Leftrightarrow u_n$ 是 v_n 的高阶无穷小

ii. $A=+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散 \Leftrightarrow 低阶

iii. $0 < A < +\infty$, v_n 和 u_n 有相同的敛散性 \Leftrightarrow 同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

① $\rho < 1$, 收敛 \Leftrightarrow 前 > 后; ② $\rho > 1$, 发散 \Leftrightarrow 前 < 后;

e) 根值判别法(柯西判别法): $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

① $\rho < 1$, 收敛 \Leftrightarrow 后一项多开一次更小; ② $\rho > 1$, 发散;

3. 交错级数: 各项正负相间, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

a) 莱布尼兹判别法: $\{u_n\}$ 单调不增且 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则收敛

4. 任意项级数: 各项可正、可负、可为零, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

绝对值级数: 给任意项级数加上绝对值, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛

定理: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛;

5. 收敛级数的性质

① 随便加括号, 仍收敛, 和不变; ② 随便加括号后发散, 原级数必发散

③加括号后收敛, 原级数不一定收敛; ④绝对收敛的级数有可交换性

6. 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

幂级数: $u_n(x)$ 是 n 次幂函数 一般形式: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$; 标准形式: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) 阿贝尔定理: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1 (\neq 0)$ 收敛, 所有 $|x| < |x_1|$, 绝对收敛
 x_2 发散 $> |x_2|$, 发散

b) 收敛半径的存在性: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $R (\geq 0)$ 必存在

① $x=0$ 收敛, $R=0$; ② 整个轴上都收敛, $R=+\infty$

③ $|x| < R$, 绝对收敛; $|x| > R$, 发散; $x = \pm R$, 可能发散可能收敛

c) 收敛半径的求法: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 + $x = \pm R$ 处的敛散性

7. 和函数: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

幂级数相等, 即在点 $x=0$ 处的某领域内相等, 则同幂次的系数相等, 即 $a_n = b_n$

四则运算:

$$\left(\sum_{n=v}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R = \min\{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

性质: ①

② $S(x)$ 可积, 则 $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$ 的 R 不变, I 可能扩大

③ $S(x)$ 可导, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$ 的 R 不变, I 可能缩小

8. ★重要的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \begin{cases} x \in (-1, 1), \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \alpha > 0 \end{cases}$$

9. 泰勒级数: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

麦克劳林级数: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x)^n$

具有任意阶导数的函数, 其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

10. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$$f(x) \in (x_0 - R, x_0 + R) \text{ 有任意阶导数, } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0, |x-x_0| < R$$

11. 幂级数展开求法

①直接算; ②间接法: 变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

12. ★重要结论:

$$\text{调和级数: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{发散} \quad \rho \text{ 级数: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases} \quad \text{交错调和级数: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{收敛}$$

13. 幂级数收敛域的求法

a) 具体型步骤: ① $\Sigma u_n(x) \Rightarrow \Sigma |u_n(x)|$

② 使用比值、根值判别法, 获得收敛区间; ③ 讨论端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在某点 x_1 的敛散性

①收敛, $R \geq |x_1 - x_0|$; ②发散, $R \leq |x_1 - x_0|$; ③条件收敛, $R = |x_1 - x_0|$
 ii. 已知 $\sum a_n(x - x_1)^n$ 的敛散性, 求 $\sum b_n(x - x_2)^m$ 的敛散性

① $(x - x_1)^n$ 和 $(x - x_2)^m$ 的转换: 平移收敛区间; R 不变
 提出或者乘 $(x - x_0)^k$ R 不变

② a_n 和 b_n 的转换: 逐项求导 R 不变, l 可能缩小
 or 积分 R 不变, l 可能扩大

14. 幂级数和函数的求法

a) 突破口: $(an + b)^c$ 在分母上, 先导后积; 在分子上, 先积后导

b) 解题过程标注收敛域

c) 重要结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), -1 \leq x < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$$

15.

第14讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率: $y = f(x), \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式: $k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ 曲率半径: $R = \frac{1}{k} (y'' \neq 0)$

曲率圆: $(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2$ 其中 $\alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功: $W = \int_a^b F(x) dx$ 抽水做功: $W = \rho g \int_a^b xA(x) dx$

水压力: $P = \rho g \int_a^b x[f(x) - h(x)] dx$

4. 平面曲边梯形的形心坐标: $\bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$ \bar{y} 同理

平面曲线弧长: ① $y = y(x), s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

② $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

$$\textcircled{3} r = r(\theta), s = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

旋转曲面面积: ① $y = y(x), S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, S = 2\pi \int_a^b |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

平行截面面积已知的立体体积: $V = \int_a^b A(x) dx$

5. 欧拉方程: 形如 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$

解法: ① 当 $x > 0$, 令 $x = e^t$, 则 $t = \ln x, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, 于是 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x}$,

$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$, 方程化为 $\frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$, 求解

② 当 $x < 0$, 令 $x = -e^t$, 同理得

6. 傅里叶级数: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), [-\pi, \pi]$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

7. 狄利克雷收敛定理: $[-\pi, \pi]$ 上连续 or 只有有限个第一类间断点, 且最多只有有限个极值点, 则在 $[-\pi, \pi]$ 上处处收敛

和函数 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$$\text{且 } S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点, 其中 } f(x_0 \pm 0) \text{ 表示 } \lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

8. 傅里叶展开式: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), [-l, l]$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$S(x)$ 和傅里叶级数的类似

9. 正弦级数: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

余弦级数: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$

10.

第16讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$

a 在 b 上的投影: $P_{rjb} a = \frac{a \cdot b}{|b|}$ $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

2. 向量积: $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $|a \times b| = |a||b| \sin \theta$

$a \parallel b \Leftrightarrow |a \times b| = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

3. 混合积: $[abc] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

三向量共面: $[abc] = 0$

4. 方向余弦: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos \beta, \cos \gamma$

5. 单位向量: $a^o = \frac{a}{|a|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

任意向量: $r = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

6. 平面方程: 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$

点法式: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

三点式: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$

截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

平面束: 满足某种规律的平面族

7. 直线方程: 一般式: 两平面的交线, 即联立方程

点向式: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

参数式: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$, t 为参数

两点式: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

8. 距离公式: 点到面: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

点 P_0 到线(过 P_1): $d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_0 P_1}|}{|\tau|}$, $\tau = (l, m, n)$ 为方向向量

两平行直线: $d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau|}$ 两异面直线: $d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau_1 \times \tau_2|}$

两平行平面: $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

9. 直线关系: 方向向量 τ_1, τ_2 $\theta = \arccos \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{|\tau_1| \cdot |\tau_2|}$

平行: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ 垂直: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

10. 平面关系: 法向量 $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2$ $\theta = \arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$

平行: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ 垂直: $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

11. 平面与直线关系: 将直线的 τ 当成平面的法向量

12. 空间曲线: \odot 一般式 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 几何意义: 两曲面的交线

①切向量: $\tau = \left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}, \dots \right)$

②切线方程: $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程: $\tau(0)(x-x_0) + \tau(1)(y-y_0) + \tau(2)(z-z_0) = 0$

\odot 参数方程 $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$

①切向量: $\tau = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$ ②切线方程: $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程: $\tau(0)(x-x_0) + \tau(1)(y-y_0) + \tau(2)(z-z_0) = 0$

曲线在坐标面的投影: 例如在 xOy 的投影, 将一般式 Γ 中的 z 消去,

得 $\varphi(x, y) = 0$, 曲线方程为 $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

13. 空间曲面: $F(x, y, z) = 0$

①法向量: $n = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$

②法线方程: $\frac{x-x_0}{n(0)} = \frac{y-y_0}{n(1)} = \frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面: $n(0)(x-x_0) + n(1)(y-y_0) + n(2)(z-z_0) = 0$

椭球面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$

椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 双曲抛物面: $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$

椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 双曲柱面: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

抛物柱面: $y = ax^2$

14. ★旋转曲面: 曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 绕直线 $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ 旋转一周

解法: $\begin{cases} \overrightarrow{M_1P} \perp s \Rightarrow m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0 \\ |\overrightarrow{M_0P}| = |\overrightarrow{M_0M_1}| \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \dots = (x_1-x_0)^2 + \dots + \dots \\ \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \end{cases}$

15. 空间曲面面积: $z = z(x, y), S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

16. 方向导数: $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos \alpha + u'_y(P_0) \cos \beta + u'_z(P_0) \cos \gamma$

17. 梯度: $\text{grad } u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$

18. 方向导数和梯度得关系: $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = \text{grad } u|_{P_0} \cdot l^0 = |\text{grad } u|_{P_0}| \cos \theta$

第17讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分: 几何意义: 空间物体的质量

$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j, e + \frac{f-e}{n}k\right) \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \cdot \frac{f-e}{n}$$

2. 考研数学中, 三重积分总是存在的

3. 凑三重积分定义步骤

①提出 $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$; ②凑出 $\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}$; ③ $\frac{i}{n} = 0 + \frac{i-0}{n}$, 其他两个同理, 凑定义完成

4. 性质: 求空间区域体积: $\iiint_{\Omega} 1 dv = \iiint_{\Omega} dv = V$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

5. 普通对称性、轮换对称性: 参考[二重积分的对称性](#)

6. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系: $\iiint_D f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$

b) 柱面坐标系: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

c) 球面坐标系: $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi dr$$

适用范围: ①被积函数含 $f(x^2 + y^2 + z^2)$ 或 $f(x^2 + y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用 ($\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \Rightarrow \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot v$)

7. 第一型曲线积分: $\int_L f(x, y) ds$ 或 $\int_L f(x, y, z) ds$ 几何意义: 曲线的质量

8. 考研数学中, 第一型曲线积分总是存在的

9. 性质: 求曲线长度: $\int_L 1 ds = l_r$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

10. 普通对称性、轮换对称性: 参考 [二重积分的对称性](#)

11. 第一型曲线积分的计算

a) 空间曲线长度: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

b) 平面曲线:

$$\textcircled{1} y = y(x) \quad \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad \text{类似: } \text{平面曲线弧长}$$

$$\textcircled{2} x = x(t), y = y(t) \quad \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\textcircled{3} r = r(\theta) \quad \int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta] \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$$

c) 边界方程代入被积函数、对称性、形心公式的逆用

12. 第一型曲面积分: $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 几何意义: 曲面质量

13. 考研数学中, 第一型曲面积分总是存在的

14. 性质: 求曲线长度: $\iint_{\Sigma} 1 dS = S$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

15. 普通对称性、轮换对称性: 参考 [二重积分的对称性](#)

16. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分: 三步骤 (无先后顺序)

①将 Σ 投影到某一平面 (比如 xOy 面) \Rightarrow 投影区域为 D (比如 D_{xy})

②将 $z = z(x, y)$ 或 $F(x, y, z) = 0$ 带入 $f(x, y, z)$

③计算 $z'_x, z'_y \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

$$\text{得到 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

b) 边界方程代入被积函数、对称性、形心公式的逆用

17. 重积分和第一型线面积分的应用

a) 面积&体积: [平面面积](#)、[空间曲线长度](#) $f(\cdot) = 1$ 、[空间曲面面积](#)

$$\text{空间体积: } V = \iint_D |f(x, y) - g(x, y)| d\sigma$$

b) 重心&形心: $\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$ 空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

$$\text{例: 平面薄片, } \bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \bar{y} \text{ 同理}$$

c) 转动惯量: $I = mr^2$ 平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

$$\text{例如: 空间物体, } I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv, I_y, I_z, I_o \text{ 同理}$$

d) 引力: $F = G \frac{Mm}{r^2}$ 平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

$$\text{例如: 光滑曲线, } F_x = Gm \int_L \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds, F_y, F_z \text{ 同理}$$

18. 重要结论:

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{5} \pi R^5$$

19.

第18讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分: $\int_{\Gamma} F(x, y, z) dr = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$

物理背景: 变力在平面/空间曲线上做的总功

2. 考研数学中, 第二型曲线积分总是存在的

3. 性质: 线性性质, 可加性, 有向性: $\int_{AB} F \cdot dr = -\int_{BA} F \cdot dr$

对称性: 假设 Γ 关于 yOz 对称, (无轮换对称性)

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} P(x, y, z) dx, & P(x, y, z) = -P(-x, y, z) \\ 0, & P(x, y, z) = P(-x, y, z) \end{cases}$$

4. 平面第二型曲线积分的计算

a) 直接计算 (参数法): 化为定积分 α, β 大小无所谓, 关键对应起、终点

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

b) 格林公式: 条件: 封闭, P, Q 有一阶连续偏导

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

若① L 不是封闭曲线: 补线法; ② P, Q 、其偏导在 D 上不连续: 挖去法

5. 平面曲线积分与路径无关

6. 空间第二型曲线积分计算: 斯托克斯公式

$$\oint_{\Sigma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (\text{第二型曲面积分形式})$$
$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \quad (\text{第一型曲面积分形式})$$

7. 第二型曲面积分: 物理背景: 向量函数通过曲面的通量

$$\iint_{\Sigma} F \cdot dS = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

8. 考研数学中, 第二型曲面积分总是存在的

9. 性质: 线性性质, 可加性, 有向性, 对称性: 参考[第二型曲线积分](#)

10. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分: 三步骤 (无先后顺序)

① 将 Σ 投影到某一平面 (比如 xOy 面) \Rightarrow 投影区域为 D (比如 D_{xy})

② 将 $z = z(x, y)$ 或 $F(x, y, z) = 0$ 带入 $R(x, y, z)$

③ 将 $dx dy$ 写成 $\pm dx dy$, Σ 方向为上取“+”

$$\text{得} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

a) 高斯公式: $\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$

若① Σ 不是封闭曲面: 补面法; ② P, Q 、其偏导在 D 上不连续: 挖去法

11. 两类曲面积分关系: 第一型与第二型

$$dy dz = \cos \alpha dS, dz dx = \cos \beta dS, dx dy = \cos \gamma dS$$

转换坐标变量法: $z = z(x, y) \Rightarrow dy dz = -z'_x dx dy, dz dx = -z'_y dx dy \Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{\Sigma} P(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy$$

Q, R 同理, 当 Σ 定向的法向量与 z 轴夹角在 $0 \sim 90^\circ$, 取 +

12. 设置 $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\text{散度: } \operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{旋度: } \operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

常用公式: ① $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$;

② $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$; ③ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$;

13.