《2020 线性代数辅导讲义》

练习参考答案

- 2019 年 5 月 5 日-

金榜图书编辑部数学组

微信公众号

目录

限于能力和时间，难免有些错漏，恳请大家指正. 更欢迎大家分享不同的解法.

第 **2** 页　今年考题

(2019,2) 答案　-4

解析:（方法一）

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-2&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1\\3&4\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&-1&1\\3&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2&-1&1\\1&1&0\\8&7&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\8&7\end{vmatrix}=1,$$

$A_{11}-A_{12}=-3-1=-4.$

(方法二）

$$\begin{aligned}A_{11}-A_{12}&=1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}+0\cdot A_{14} &&\text{（行列式按第一行展开式）}\\&=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix} &&\text{（第一行倍数分别加二、三行）}\\&=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&-1&1\\0&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix} &&\text{（按第一列展开）}\\&=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix} &&\text{（第一行加第二行）}\\&=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0\\3&4\end{vmatrix}=-4.\end{aligned}$$

行列式的计算方法很多，比如一开始还可以用第一列加到第二列. 请同学们自己多多练习.

第 **15** 页

答案　$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

解析: 行列式的计算方法很多. 计算时, 通过观察行列式的特点来简化计算. 比如本题按第一行展开就没有按第一列展开计算方便. 按第一列展开后三角形行列式可以直接得出结果.

这里按第四列展开为例计算一下.

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{4+3}(-1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\lambda^3 + \left(\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

也可以利用行列式的性质

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda^2+\lambda+2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{第 3 行的}\lambda+1\text{倍加到第 4 行}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & \lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 行的}\lambda^2+\lambda+2\text{倍加到第 4 行}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行的}\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+3\text{倍加到第 4 行}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4. \quad \text{第 4 行展开}$$

第 **17** 页

（1）(2018,3) 答案　2

解析:

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3] = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 可逆，为了方便，记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 则

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}, \tag{$*$}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},\text{即 }\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\text{则有}\quad\text{（相似的矩阵，行列式值相等）}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=1-(-1)=2.$$

也可以就关系式 $(*)$ 两边取行列式，

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix},$$

$\boldsymbol{P}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{P}|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2.$$

（2）答案　1

解析: 矩阵不可逆, 矩阵行列式为零.

$$|A|=0,\quad |A-2E|=0,\quad |3A+2E|=0,\text{（特征值}|\lambda E-A|=0,\text{特征值的相关知识见第五章）}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda=0,2,-\frac{2}{3}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为

$$\lambda=1,3,\frac{1}{3},\quad\text{（3 阶矩阵 3 个特征值.）}$$

行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$ 等于特征值乘积,

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=1\times 3\times\frac{1}{3}=1.$$

（3） 答案 24

解析: 相似矩阵有相同的特征值, 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1,2,3,$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 2,3,4.

$$|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}| = 2\times 3\times 4 = 24.$$

第 22 页

答案 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$

解析: 线性方程组的系数行列式

$$D=\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}\left(a_i-a_j\right)\neq 0.\quad \text{(范德蒙行列式)}$$

由克拉默法则知, 方程组有唯一的解.

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & 1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}}{D}=0,\qquad \text{(行列式的性质, 两列元素相同, 行列式为零)}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_n=\frac{D_n}{D}=0,$$

所以, 求得方程组的解为 $(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

第 28 页　今年考题

答案 A

解析: 两个和秩有关的重要结论，经常会用到.

1. 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中线性无关的解向量个数为 $n-r(\boldsymbol{A})$,n 为方程组中未知量的个数.

2. 伴随矩阵的秩的关系,

$$r\left(A^{*}\right)=\begin{cases} n, & r(A)=n, \\ 1, & r(A)=n-1, \\ 0, & r(A)<n-1. \end{cases}$$

根据题目条件，$n-r(A)=2$. $r(A)=4-2=2<4-1$, 可得 $r\left(A^{*}\right)=0$.

选 A.

第 43 页

答案　A

解析: $A^{*}=A^{\mathrm{T}}$ 即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

可见

$$a_{ij}=A_{ij}\,(i,j=1,2,3).$$

那么

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2>0.$$

又因 $AA^{*}=|A|E$, 即

$$AA^{\mathrm{T}}=|A|E.$$

两边取行列式, 有 $|A||A^{\mathrm{T}}|=||A|E| \Rightarrow |A|^2=|A|^3 \Rightarrow |A|$ 等于 0 或 1.

从而 $3a_{11}^2=1$, 故 $a_{11}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

第 47 页

答案　A

解析: 因为 $B=E+AB$, 所以

$$B-AB=E, B(E-A)=E, B=(E-A)^{-1}.$$

又因为 $C=A+CA$, 所以

$$C-CA=A, C(E-A)=A, C=A(E-A)^{-1}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
B-C &= (E-A)^{-1} - A(E-A)^{-1} \\
&= (E-A)(E-A)^{-1} = E.
\end{aligned}
$$

正确答案选 A.

第 51 页

答案 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

解析:

$$
\begin{aligned}
A^{2019} &= P^{-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}P \cdot P^{-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}P \cdots P^{-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}P \\
&= P^{-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}\alpha\beta^{\mathrm{T}} \cdots \alpha\beta^{\mathrm{T}}P \\
&= P^{-1}\alpha\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha\right)^{2018}\beta^{\mathrm{T}}P \\
&= P^{-1}\alpha\beta^{\mathrm{T}}P
\end{aligned}
$$

其中 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha = [0,1,-1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1.$

又 $\alpha\beta^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0,1,-1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 代入上式,

$$
\text{上式} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
$$

第 54 页

答案 (I) $a=0$, (II) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

解析: (I)

$$
A^3 = O \Rightarrow \left|A^3\right| = 0 \Rightarrow |A| = 0
$$

而

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3,$$

故 $a=0$.

（II）

$$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E,$$

$$(E-A)X(E-A^2)=E.$$

$E-A, E-A^2$ 必可逆.

$$\begin{aligned} X &= (E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

第 59 页　今年考题

(2019,1)本题只要求数学一的同学掌握.

解:(I) 由 $\boldsymbol{\beta}$ 在这组基下的坐标得,

$$\boldsymbol{\beta} = b\boldsymbol{\alpha}_1 + c\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3.$$

$$\begin{cases} 1 = b+c+1, \\ 1 = 2b+3c+a, \\ 1 = b+2c+3. \end{cases}$$

解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(II) 因为

$$|\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}$ 是 R^3 的一个基.

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}, \text{即}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})\begin{bmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}$ 就是所求的过渡矩阵.

(2019,2 3) 解: 向量组 I 与向量组 II 等价，向量组中的向量可以相互表示，即方程组

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)X=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3), & (1)\\ (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)Y=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) & (2)\end{cases}$$

有解.

对矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 进行初等行变换

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{array}\right].$$

当 $a=-1$ 时,

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&-2&2&0\end{array}\right].$$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2, r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\boldsymbol{\beta}_1)=3.$

方程组 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_1$ 无解，$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，向量组 I、II 不等价.

当 $a=1$ 时,

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&2&3\\0&1&-1&0&-2&-2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{cases}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\boldsymbol{\beta}_1)=2,\\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\boldsymbol{\beta}_2)=2,\\ r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\boldsymbol{\beta}_3)=2\end{cases}\text{且}r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{cases}r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\boldsymbol{\alpha}_1)=2,\\ r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\boldsymbol{\alpha}_2)=2,\\ r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\boldsymbol{\alpha}_3)=2.\end{cases}$$

方程组 (1)(2) 均有解，向量均可相互线性表示，向量组 I、II 等价.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_3]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

可得通解 $(3,-2,0)^T+k(2,-1,-1)^T,k$为任意常数.

$\boldsymbol{\beta}_3=(3+2k)\boldsymbol{\alpha}_1-(k+2)\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_3,k$为任意常数.

当 $a\neq\pm1$ 时,

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{cases}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_1)=3,\\r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_2)=3,\\r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_3)=3,\end{cases}\text{且}r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{cases}r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\,\boldsymbol{\alpha}_1)=3,\\r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\,\boldsymbol{\alpha}_2)=3,\\r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\,|\,\boldsymbol{\alpha}_3)=3.\end{cases}$$

方程组 (1)(2) 均有解，向量均可相互线性表示，向量组 I、II 等价.

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\,|\,\boldsymbol{\beta}_3]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&a^2-1&a^2-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right].$$

可得 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

第 **71** 页

证明: 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}.\tag{1}$$

(1) 式左乘 $\boldsymbol{A}$, 得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2+l_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}.$$

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1+l_2\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\lambda_2\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}.\tag{2}$$

由 λ_1,λ_2 不同，所以不全为 0, 不妨设 $\lambda_2\neq0$.

(1) 式乘 λ_2, 得

$$k_1\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\lambda_2\boldsymbol{\beta}_1+l_2\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\lambda_2\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}.\tag{3}$$

(2)−(3) 得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.\tag{2}$$

λ_1,λ_2 不同，所以 $\lambda_1-\lambda_2\neq0$, 即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $k_1=0,k_2=0$. 代入 (1) 式

$$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}.$$

同样可得，$l_1=0,l_2=0,l_3=0$.

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

第 74 页

解析: 设数 k_1,k_2,k_3, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}.$$

记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出就是看方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解.

对矩阵 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]$ 做初等行变换,

$$\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}.$$

（I）当 $a=0$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&-b&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$, 故方程组无解, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

（II）当 $a\neq 0$ 且 $a\neq b$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&0&\frac{1}{a}\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$, 方程组有唯一解, 求得

$$k_1=1-\frac{1}{a},k_2=\frac{1}{a},k_3=0.$$

即 $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2$.

（III）当 $a\neq 0$ 且 $a=b$ 时,

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}]\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=2$, 方程组有无穷多解, 求得

$$k_1=1-\frac{1}{a},k_2=\frac{1}{a}+k,k_3=k,k\text{为任意常数}$$

即 $\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+k\right)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,k$为任意常数.

第 78 页

(1) 答案　A

解析: 向量组 I 可由向量组 II 线性表出,

$$r\,(\mathrm{I})\leqslant r\,(\mathrm{II})\leqslant s.$$

若向量组 I 线性无关, 则

$$r\,(\mathrm{I})=r.$$

故 $r\leqslant s$. 选（A）.

通过反例排除（B）（C）（D）.

（B）,

$\mathrm{I}:(1,0,0),(0,2,0),(3,4,0)$ 线性相关,$r=3$.

$\mathrm{II}:(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 可线性表出 I,$s=3$.

（C）,

$\mathrm{II}:(1,0,0),(0,1,0)$ 线性无关, $s=2$.

$\mathrm{I}:(1,0,0),(0,2,0),(3,4,0)$; $r=3$.

（D）,

$\mathrm{I}:(1,0,0),(0,2,0),(3,4,0)$,$r=3$.

$\mathrm{II}:(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,2,0),(3,4,0)$ 线性相关, 可表出 (I),$s=5$.

第 79 页

(2) 答案　B

解析: 矩阵可以改写成列向量、元素的形式, 故有

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}\cdots & b_{1k} & \cdots\\ \cdots & b_{2k} & \cdots\\ \cdots & \vdots & \cdots\\ \cdots & b_{nk} & \cdots\end{bmatrix}$$

$$=[\cdots,\boldsymbol{\gamma}_k,\cdots],$$

$$\gamma_k = b_{1k}\boldsymbol{\alpha}_1 + b_{2k}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + b_{nk}\boldsymbol{\alpha}_n, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

$\boldsymbol{C}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

$\boldsymbol{B}$ 可逆, 可得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$. 类似, $\boldsymbol{A}$ 的列向量可以由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量线性表出.

综上, $\boldsymbol{C}$ 的列向量与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量等价.

证明: 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r, 记其极大线性无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}.$$

$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 的秩为 q, 记其极大线性无关组为

$$\boldsymbol{\beta}_{i_1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_q}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出, 可以推出,

$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_{i1}, \boldsymbol{\beta}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{i_q}$ 线性表出,

定理 3.5 推论,

$$r \leqslant q,$$

即

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t).$$

第 85 页

答案　A

解析: (B)(C)(D), 可以举反例排除.

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $r(\boldsymbol{A}) = 1, r(\boldsymbol{B}) = 1$,

$r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{BA}) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq r(\boldsymbol{A})$,

$r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq \max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$,

$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B})$.

对于选项（A）.

矩阵的秩 = 矩阵列向量组的秩 = 矩阵行向量组的秩.

设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n],\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{AB}=[b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\cdots,b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n].$$

$\boldsymbol{AB}$ 的列向量均可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.
所以 $(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})$ 的列向量分别可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.
$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 也可以由 $(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})$ 的列向量组线性表出.
$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})$ 的列向量组与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价，故 $r(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$.

第 94 页　今年考题

答案　1

解析: （2019,3）$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]$ 进行初等行变换,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-1 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

方程组有无穷多解, $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b})<3$, 得 $a=1$.

（2019,1）答案　$k(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},k$为任意常数.

解析: 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 得 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $r(\boldsymbol{A})<3$. 所以，$r(\boldsymbol{A})=2$.
线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系线性无关解向量的个数为 $3-r(\boldsymbol{A})=1$.
由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 知 $-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0},$$

即 $(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解, 则通解为

$$k(-1,2,-1)^{\mathrm{T}},k\text{为任意常数}.$$

(2019,1) 答案　A

解析: 由图形三个平面没有公共交点. $\Longleftrightarrow$ 三个方程的方程组无解. $\Longleftrightarrow$ $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 排除（B）（D）.

任意两个平面相交，即不平行. $\Longleftrightarrow$ 平面方程的系数不成比例. $\Longleftrightarrow r\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} > 1.$

选（A）.

第 98 页

答案　B

解析:

$$\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}, r(\boldsymbol{A}^*) \geqslant 1.$$

伴随矩阵的秩的关系,$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A}) = n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A}) = n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A}) < n-1. \end{cases}$ 知

$$r(\boldsymbol{A}) = n\text{或}n-1.$$

非齐次方程组有不同的解, 即有多个解,

$$r(\boldsymbol{A}) < n.$$

故 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$, 所以齐次线性方程组的基础解系非零向量个数为 $n - r(\boldsymbol{A}) = 1$, 选（B）.

第 100 页

答案　D

解析: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,0,-2,0)^{\mathrm{T}}$, 即 $n - r(\boldsymbol{A}) = 1$,

$$r(\boldsymbol{A}) = n-1 = 3 < 4,$$

知 $|\mathbf{A}| = 0$.

$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都是方程组

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的解, 即

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$$

是方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解. 由伴随矩阵的秩的关系, 得

$$r(\boldsymbol{A}^*) = 1,$$

故方程组 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 3 个线性无关的解.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 排除（C）.

正确答案选（D）.

第 103 页

解析: 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3.$$

又 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$, 故 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant 2, 1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$.

当 $k\neq 9$ 时,$r(\boldsymbol{B})=2$. 此时, $r(\boldsymbol{A})=1$.

$$n-r(\boldsymbol{A})=3-1=2.$$

因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}+k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}}, k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

当 $k=9$ 时,$r(\boldsymbol{B})=1$. 此时,$r(\boldsymbol{A})=1$ 或 $r(\boldsymbol{A})=2$.

（1）当 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时,

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $ax+by+cz=0$ 同解. 由 $n-r(\boldsymbol{A})=2$, (不妨设 $a\neq 0$) , 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为

$$k_1(-b,a,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-c,0,a)^{\mathrm{T}}, k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

（2）当 $r(\boldsymbol{A})=2$ 时,

由 $n-r(\boldsymbol{A})=1$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 通解为

$$k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}}, k_1\text{为任意常数}.$$

第 109 页

（I） 证明: 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关. 故 $|\boldsymbol{A}|=0$, 有特征值 $\lambda=0$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的另外两个特征值为 λ_1,λ_2, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

所以,$r(A)=2$.

(II) 由 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

得 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的一个解. 又

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$$

得 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解.

由(I)$r(\boldsymbol{A})=2$, 知方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系只有 1 个解向量,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$k(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+(1,1,1)^{\mathrm{T}},k\text{为任意常数}.$$

第 120 页

解: (I) 初等列变换, 则 $|\boldsymbol{A}|=c|\boldsymbol{B}|,c\neq 0$,

$$\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix},$$

$$0=c(2-a),$$

得 $a=2$.

(II) $\boldsymbol{P}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 的解.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

得 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$, k_1,k_2,k_3为任意常数.

若 $\boldsymbol{X}$ 可逆, 则

$$|\boldsymbol{X}|=\begin{vmatrix}3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3\\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 4\\ -1 & -1 & -1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & k_2-k_1 & k_3-k_1\end{vmatrix}=k_3-k_2\neq 0.$$

所以满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3-6k_1 & 4-6k_2 & 4-6k_3\\ -1+2k_1 & -1+2k_2 & -1+2k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}, k_3\neq k_2.$

第 **125** 页　今年考题

（2019,1,2,3） 解: (I) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\begin{cases}tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B}),\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\ 4x-8=-2y.\end{cases}$

解得 $x=3, y=-2$.

(II)

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-2),$$

求得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $2,-1,-2$. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 特征值相同，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-1,-2$.

当 $\lambda=2$ 时，解得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量为 $(1,-2,0)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-1$ 时，解得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量为 $(2,-1,0)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量为 $(1,-3,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-2$ 时，解得 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量为 $(-\frac{1}{2},1,2)^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{B}$ 的一个特征向量为 $(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

故

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\boldsymbol{B}.$$

所求的可逆矩阵 $P=\begin{bmatrix}1&2&-\frac{1}{2}\\-2&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\-2&-\frac{1}{3}&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

【注】: 可逆矩阵 P 不唯一.

第 145 页

解: 矩阵 A 可逆，则 $|A|\neq 0, A^*$ 可逆，$\lambda\neq 0$.

$$A^*\alpha=\lambda\alpha,$$

两边同时左乘 A,

$$AA^*\alpha=\lambda A\alpha,$$

即 $|A|\alpha=\lambda A\alpha$, $A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$.

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3+b\\2+2b\\1+b+a\end{bmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix},$$

对应分量相等，

$$\begin{cases}3+b&=\frac{|A|}{\lambda}\ (1)\\2+2b&=\frac{|A|}{\lambda}b\ (2)\\1+b+a&=\frac{|A|}{\lambda}\ (3)\end{cases}$$

联立 (1)(3) 式, $3+b=1+b+a$, 得 $a=2$, $|A|=4$.

联立 (1)(2) 式,$2+2b=(3+b)b$, 得 $b^2+b-2=0$, 即 $b=-2$ 或 $b=1$.

$b=-2$ 时，$\lambda=4$；$b=1$ 时，$\lambda=1$.

第 149 页

答案　A

解析: 重要的考点：$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 与 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$ 谁是矩阵, 谁是数, 有什么特点.

$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的矩阵, 且是对称矩阵, 又 α 是单位列向量, 故 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=1$,

$$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)=\alpha$$

故 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $1,\overbrace{0,\cdots,0}(n-1\text{个})$, 故 $E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $0,\overbrace{1,\cdots,1}(n-1\text{个})$.

因此, 矩阵 $E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

回顾一下讲义定理 2.3 . 要熟练灵活运用.

第 158 页　今年考题

答案　A

解析: 求规范形实际就是判断系数矩阵特征值的正负.

$\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，特征值是 3 个实数, 记为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 可得 $\lambda^2+\lambda-2=0$.

λ 可取 $-2,1$.

又 $|\boldsymbol{A}|=4=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-2,-2$, 一正二负，选（C）.

第 164 页

答案　$3y_1^2$

解析: 由题设条件知,

$$r(\boldsymbol{A})=1,\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

得特征值 $\lambda=3$.

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}.$$

标准形为 $3y_1^2$.

第 169 页

解析: (I) 二次型是平方项的和，总体要等于 0，则各项分别等于 0, 可列式

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+ax_3=0,\end{cases}$$

解方程组，矩阵行初等变换

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

当 $a \neq 2$ 时，方程组只有零解；

当 $a = 2$ 时，方程组通解为 $k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数.

(II) 当 $a \neq 2$ 时，

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + a x_3 \end{cases}$ 且 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ 可逆.

二次型的规范形 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时，

$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{2}(x_2 + x_3)^2$.

二次型的规范形 $f = y_1^2 + y_2^2$.

第 175 页

(1) 解析: 比如矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0, \lambda_{1,2} = 1.$$

$$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

齐次方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有 2 个线性无关的解, 即特征值 1 有 2 个线性无关的特征向量, 能相似对角化.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1,$$

$$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1,$$

方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有 1 个线性无关的解, 即特征值 1 有 1 个线性无关的特征向量, 不能相似对角化.

显然, 这两矩阵特征值相同但不相似.

(2) 答案 B

解析: 两个矩阵都是对称矩阵, 相似的充要条件是特征值相同.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是就是主对角元素:$2,b,0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $2,b,0$, 分别代入

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2-1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 2-b & -a \\ -1 & -a & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & 2-b-a^2 & -2a \\ 0 & -2a & 0 \end{vmatrix}=-4a^2=0.$$

$a=0$ 时, 有特征值 2.

$$|b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} b-1 & -a & -1 \\ -a & b-b & -a \\ -1 & -a & b-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-1 & -a & -1 \\ -a & 0 & -a \\ -b & 0 & b \end{vmatrix}=a(-2ab)=0.$$

由于 $a=0$, 上式对任意的 b 都成立.

$$|0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} -1 & -a & -1 \\ -a & -b & -a \\ -1 & -a & -1 \end{vmatrix}=0,$$

行列式两行相同, 行列式等于零, 恒成立.

所以, 选 B.