第一章 线性空间和线性变换

1.1-1.3 线性空间、基与坐标、坐标变换、线性子空间

- **线性空间**：满足加法——交换律、结合律、零元素$\alpha+0=\alpha$、负元素$\alpha+\beta=0$

  数乘——$1\cdot\alpha=\alpha$、$k(l\alpha)=(kl)\alpha$、$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$、$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

  $Ax=0$解空间、A的核/零空间：$N(A)$；A的列空间 / 值域：$R(A)$
- 同一组点在不同基（α,β,γ）下有不同的坐标（x,y,z）：$\alpha x=\beta y=\gamma z$
- 求向量α在基$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$下的坐标$k$：解$Ak=E\alpha$
- **过渡矩阵**P：$\beta=\alpha\boldsymbol{P}$，由基 $\alpha=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 到基 $\beta=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$
- **坐标变换公式**：$x=Py\Leftarrow\alpha x=\beta y$
- 线性子空间=平凡子空间+非平凡子空间；平凡子空间=零子空间+线性空间本身

  交空间：$V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1\text{ 且 }\boldsymbol{\alpha}\in V_2\}$；和空间：$V_1+V_2=\{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\mid\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1\text{ 且 }\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}$

  性质：$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$

  直和：$V_1\oplus V_2=V_1+V_2$，当$V_1\cap V_2=\{0\}$

1.4-1.5 线性映射、值域、核

- 线性映射：$\mathscr{A}:V_1\to V_2$。满足叠加性、齐次性

  恒等映射E：$\mathscr{A}:V\to V,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\in V,\quad\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$；零映射0：$\mathscr{A}:V_1\to V_2,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=0$
- 线性映射在基 $\alpha=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 与基 $\beta=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 下的矩阵表示A：$\mathscr{A}(\alpha)=(\beta)\boldsymbol{A}$

  线性映射在基 α 与基 β 下向量坐标变换公式：$y=Ax$

  与过度矩阵P的近似：$A=P^{-1}$
- 在两个线性空间V_1,V_2中，对应的不同基的关系为 $\begin{array}{ccc} V_1 & \{\boldsymbol{\alpha}_i\} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \{\boldsymbol{\alpha}_i'\} \\ \mathscr{A}\downarrow & \boldsymbol{A}\downarrow \qquad \downarrow\boldsymbol{B} \\ V_2 & \{\boldsymbol{\beta}_i\} \xrightarrow{Q} \{\boldsymbol{\beta}_i'\} \end{array}$，其中$P,Q$为过渡矩阵，$A,B$为线性映射的矩阵表示

  则$\boldsymbol{B}=Q^{-1}\boldsymbol{AP}$
- 线性映射 $\mathscr{A}$ 的值域$R(\mathscr{A})$：所有向量的变换输出的集合，$\mathscr{B}(V_1)=\{\boldsymbol{\beta}=\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})\in V_2\mid\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1\}$

  为 $\mathscr{A}$ 的秩rank $\mathscr{A}$=dim $R(\mathscr{A})$
- 核子空间：$N(\mathscr{A})=\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\alpha\in V_1\mid\mathscr{A}(\alpha)=0\}$

  零度：$\dim N(\mathscr{A})$
-

1.6-1.9 线性变换的矩阵与运算、同构、特征值与特征向量、不变子空间

- 线性变换：$\mathscr{A}:V\to V,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}A$。

- 相似：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，$P$为过渡矩阵
- 恒等变换：$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=\boldsymbol{E}$，其中$\mathscr{B}=\mathscr{A}^{-1}$
- 同构映射σ：$\begin{matrix}\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})\\ \sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})\end{matrix}$

  性质：①V中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相（无）关 $\Longleftrightarrow$ 像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性相(无) 关

  ②两个线性空间，同构⇔有相同的维度
- 线性变换的特征值λ_0 和 特征向量x：$\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\lambda_0\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}_0\in\boldsymbol{F}$

  计算方法：先计算矩阵A，然后计算它的λ_A和x_A，则

  $\lambda_0=\lambda_A, x=\alpha x_A\overset{例如}{=}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$
- 代数重复度p_i：某个特征值λ_i的重根数

  几何重复度q_i：某个特征值λ_i的特征子空间的维度
- 不变子空间W：W 是 V 的子空间，对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}\in W$ 都有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\in\boldsymbol{W}$
- 最小多项式：$\psi_\lambda=P_1(\lambda)^{d_1}P_2(\lambda)^{d_2}\ldots P_s(\lambda)^{d_0}$，其中 $P_i(\lambda)$ 是首项系数为 1、且互不相同的不可约多项式
- $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s\Leftrightarrow\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是准对角矩阵，$\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$

1.10 矩阵的相似对角形

- $\mathscr{A}$ 可对角 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值的几何重复度等于代数重复度 $\Leftrightarrow$ λ_i 的代数重复度 $p_i=n-\operatorname{rank}(\lambda_iE-A)$
- $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可同时对角化 $\Leftrightarrow AB=BA$

第二章 λ-矩阵与矩阵的Jordan标准形

2.1-2.2 λ-矩阵及标准形、初等因子与相似条件

- 等价：$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq\boldsymbol{B}(\lambda)\Leftrightarrow\boldsymbol{D}_k(\lambda)$相同 $\Leftrightarrow d_k(\lambda)$ 相同 $\Leftrightarrow$ 秩&初等因子相同
- **不变因子**：$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，用于Smith标准型中
- k阶**行列式因子**：$\boldsymbol{D}_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$
- **初等因子**：$d_k(\lambda)$分解成多个一次因式方程后，不为常数的全体
  - 方法一：把$\lambda E-A$化为Smith标准型
  - 方法二：求出所有的$\boldsymbol{D}_k$

    不变因子$1,1,(\lambda-2)^5(\lambda-3)^3,(\lambda-2)^5(\lambda-3)^4(\lambda+2)$

    初等因子$(\lambda-2)^5,(\lambda-3)^3,(\lambda-2)^5,(\lambda-3)^4,(\lambda+2)$
- **Smith标准型**：唯一

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\lambda})\simeq\begin{bmatrix}d_1(\lambda)&&&&&&\\&d_2(\lambda)&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&d_r(\lambda)&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{bmatrix}_{m\times n}$$

计算方法：初等变换

技巧:

2.3 矩阵的Jordan标准形

- **Jordan标准型**:
  - 方法一：利用初等因子
  - ~~方法二：利用~~$\operatorname{rank}\left(\lambda_i E-A\right)^k$
  - **方法三**：求出所有特征值。对于重根，$n-rank(\lambda E-A)$为其约旦块数量
- Jordan标准型的**变换矩阵**P：①求出J；②令$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_3\right)$，解$AP=PJ$得$\boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{X}_3$
- Jordan标准型的应用
  - 求解 常系数线性微分方程组$\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{X}}{\mathrm{dt}}=\boldsymbol{A X}$：①求$J$；②求$P$；③求解$\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{Y}}{\mathrm{dt}}=\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A P Y}=\boldsymbol{J Y}$；④通过$X=PY$得$X$
  - 求A^k：$A^k=PJ^kP^{-1}$

~~2.4 矩阵的有理标准形~~

- 有理标准形：$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}=\left[\begin{array}{cccc}\boldsymbol{C}_1 & & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{C}_k\end{array}\right], C_i=\left[\begin{array}{ccccc}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_i n_i \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_i n_{i-1} \\ & & \ddots & & \ddots \\ & \ddots & & 0 & -a_{i 2} \\ & & & 1 & -a_{i 1}\end{array}\right]$

  A的非常数的k个不变因子为$\varphi_i(\lambda)=\lambda^{n_i}+a_{i 1} \lambda^{n_i-1}+\cdots+a_i n_{i-1} \lambda+a_i n_i$
- $F=Q^{-1} A Q=(\boldsymbol{P} \boldsymbol{M})^{-1} \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{P} \boldsymbol{M}^{-1}\right)$

  计算有理标准形 $\boldsymbol{F}$ 及变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$：①求J；②根据不变因子写出F；③ $\boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A P}=\boldsymbol{J} \rightarrow P, F M=M J \rightarrow M$；④$Q=PM^{-1}$

第三章 内积空间、正规矩阵、Hermite矩阵

- n维酉空间：(1) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$;　(2) $(k \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), k$ 为任意实数;
  (3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nu})=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu})+(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nu})$;　(4) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})=0$.
- G为基$\{\alpha_i\}$度量矩阵：$g_{ij}=\left(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j\right)$

$$\boldsymbol{G}=\left[\begin{array}{cccc}g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1 n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n 1} & g_{n 2} & \cdots & g_{n n}\end{array}\right]$$

- 复共轭转置矩阵$A^H=(\bar{A})^{\mathrm{T}}$
- Hermite矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}$；反Hermite矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=-\boldsymbol{A}$
- **Cauchy- Schwarz不等式**：$|(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})| \leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|$
- **Schmidt方法求标准正交基**:
  - 正交化

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1 \\
& \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1\right)} \boldsymbol{\beta}_1 \\
& \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
& \boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1\right)} \boldsymbol{\beta}_1-\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_2\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2\right)} \boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}\right)}{\left(\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}\right)} \boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}$$

- 单位化

-

酉空间	欧式空间
酉矩阵：$A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}} = E$，记 $A \in U^{n\times n}$ $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \in U^{n\times n}$，$\lvert \det A \rvert = 1$	正交矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$，记$A \in E^{n\times n}$ ①$A^{-1} = A^{\mathrm{T}} \in E^{n\times n}$；②$\det A = \pm 1$；③$AB, BA \in E^{n\times n}$
酉变换(等距变换)：$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \sigma(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	正交变换：$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta})) = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

- **幂等矩阵**：$A^2 = A$，$A \in C^{n\times n} \Leftrightarrow rank(A) = r, \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \\ 0 & \end{bmatrix}$
- 正交：$S \perp T$

  正交和：$\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T}$，正交补：$T_{\perp} \Leftrightarrow \boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}$

  正交投影：$\boldsymbol{P}_S = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}, U_1 \in U_r^{n\times r}$
- 次酉矩阵：$U_1^{\mathrm{H}}U_1 = E_r$，记$\boldsymbol{U}_1 \in U_r^{n\times r}$
- $A = A^{\mathrm{H}} = A^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}, \boldsymbol{U} \in U_r^{n\times r}$
-

酉空间	欧式空间
Hermite变换 / 自伴(随)变换：$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$	对称变换：$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$
反Hermite变换：$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$	反对称变换：$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$
酉相似：$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}$	正交相似：$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}$

- **Schur 引理**：任何一个n阶复矩阵A酉相似于一个上(下)三角矩阵

  求酉矩阵W使得$\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{W} \Longrightarrow$ 上三角矩阵：

  ①取A的一个单位特征向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1$，通过$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$的方法构造标准正交基（不唯一），组成$U_1$

  ②$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & ? \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$，得到$A_1$。大小为$(n-1)*(n-1)$

  ③取A_1的一个单位特征向量，构造标准正交基，组成V_1，令$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & V_1 \end{bmatrix}$

  ④$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_2$
- **正规矩阵**：$AA^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}}A$，$A \in C^{n\times n}$；实正规矩阵：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，$A \in R^{n\times n}$（∵显然$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）

  A是正规矩阵，求酉矩阵U使得$\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} \Longrightarrow$ **对角矩阵**：求出A所有特征向量，经过Schmidt正交化后构成U
- 伴随变换 (酉/欧式空间)：$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = \left(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{\beta})\right) \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$
- 正规变换 (酉/欧式空间)：$\mathscr{A}^{\mathrm{H}}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{\mathrm{H}}$
- **Hermite二次型**：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{\mathrm{H}}AX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i x_j$

  使用酉变换将Hermite二次齐式化为标准型：也就是用酉变换把A对角化
- 正定>0，半正定≥0，负定<0，半负定≤0

正定 $\Leftrightarrow$ n个顺序主子式全>0 $\Leftrightarrow$ n个特征值>0 $\Leftrightarrow$ P可逆，$P^H AP$正定 $\Leftrightarrow$ $P^H AP = E \Leftrightarrow Q$可逆，$A = Q^H Q$

半正定 $\Leftrightarrow$ 同理

负定 $\Leftrightarrow$ n个顺序主子式全负正相间 $\Leftrightarrow$

- A的Rayleigh商：$R(X) = \frac{X^{\mathrm{H}} AX}{X^{\mathrm{H}} X}$

  性质：(1) $R(k\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X}) \quad (k \in \mathbf{R}) \qquad$ (2) $\lambda_1 \leqslant R(X) \leqslant \lambda_n$
  (3) $\min_{X \neq 0} R(X) = \lambda_1, \quad \max_{X \neq 0} R(X) = \lambda_n$

第四章 矩阵分解

- **满秩分解**：$A = BC$，不唯一

  ①对A作初等行变换，得A的秩r

  ②B = A的前r个线性无关列

  ③C = A行变换后的前r个线性无关行

- ~~**正交三角分解 / UR分解 / QR分解**~~： $A = UR, A = R_1 U_1$，A列满秩。唯一

  $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}_1 \in U^{n \times n}, \boldsymbol{R}$是正线上三角阵，$R_1$是正线下三角阵

  用QR分解求解$Ax = b$

  ①将所有列向量经Schmidt正交构成矩阵U

  ②$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}$

  ③$URx = b \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{b}$

- 正奇异值 / 奇异值：$\alpha_i = \sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\mu_i}$，$AA^{\mathrm{H}}$ 的正特征值 $\lambda_i, A^{\mathrm{H}} A$ 的正特征值 μ_i（不为0）

- **奇异值分解**：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{U} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$，不唯一

  ①求AA^{H} 的特征值λ_i（可以为0），以及对应的单位特征向量（Schmidt方法）构成U

  ②求$A^{\mathrm{H}} A$的特征值μ_i（可以为0），以及对应的单位特征向量构成V

  ③求A的奇异值$\alpha(! = 0)$，然后从大到小构成对角矩阵$\boldsymbol{\Delta}$

- **极分解**：$A = H_1 U = U H_2$，H_1、H_2为正定Hermite矩阵，$\boldsymbol{U} \in U^{n \times n}$。唯一

  类似非零复数$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中ρ>0是z的模(或称极径),θ是z的幅角

- ~~**正规矩阵的谱分解**~~：$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sum_{i=1}^{n_j} \boldsymbol{\alpha}_{ji} \boldsymbol{\alpha}_{ji}^{\mathrm{H}} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \boldsymbol{G}_j$，其中$G_j = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji} \alpha_{ji}^{\mathrm{H}}$，$r$表示相异特征根数量

  ①求出A的所有特征根，以及对应的单位特征向量（Schmidt正交化）α

  ②对于重根，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{H}} + \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{H}} + \ldots$；单根$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{H}}$

  ③$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \boldsymbol{G}_j$

- ~~**单纯矩阵（可以对角化）的谱分解**~~：

  ①求出所有特征向量（不用正交单位化）α_i，构成$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \ldots)$

  ②令$\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n)$

  ③对于重根，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}} + \ldots$；单根，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$

  ④$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \boldsymbol{G}_j$

第五章 范数、序列、级数

5.1 - 5.3 向量范数、矩阵范数、诱导范数

- Hölder 不等式：设 $p>1, q=\frac{p}{(p-1)}$，则 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$，其中 $a_k, b_k \geqslant 0$

  Minkowski 不等式: 对任何 $p \geqslant 1$,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i+b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- **向量范数**：非负性、齐次性、三角不等式（$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$）
- **p-范数**：p≥1，$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

  1-范数：　$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|$

  2-范数 / 欧式范数：　$\|\boldsymbol{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

  ∞ -范数：　$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}=\lim_{p \rightarrow \infty}\|x\|_p=\max\left|x_i\right|,(i=1,2, \cdots, n)$
- **矩阵范数**：非负性、齐次性、三角不等式、矩阵乘法相容性（$\|\boldsymbol{A} \boldsymbol{B}\| \leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$）。$\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right) \in C^{m \times n}$

  矩阵的**1-范数**：$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$

  Frobenius 范数：$\|\boldsymbol{A}\|_F=\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
- $\|A\|_\beta$ 是与向量范数 $\|x\|_\alpha$ **相容的矩阵范数**：$\|A x\|_\alpha \leqslant\|A\|_\beta\|x\|_\alpha$
- **诱导范数** / 算子范数：$\|\boldsymbol{A}\|_i=\max_{x \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A} \boldsymbol{x}\|_\alpha}{\|\boldsymbol{x}\|_\alpha}$，且 $|\ A\|_i$ 是与向量范数 $\|x\|_\alpha$ **相容的矩阵范数**
- **矩阵p-范数**：$\|\boldsymbol{A}\|_p=\max_{x \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{A} \boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$

  列和范数：$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_j\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right)$，$(j=1,2, \cdots, n)$

  谱范数：$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_j\left(\lambda_{\mathrm{j}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \lambda_{\mathrm{j}}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}\right)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}$ 的第j个特征值。也就是A的最大正奇异值

  行和范数：$\|A\|_{\infty}=\max_i\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right) \quad(i=1,2, \cdots, m)$，表示每一行（取绝对值后）求和，取其中最大的。
- **谱半径**：$\rho(A)=\max\left\{\left|\lambda_1\right|,\left|\lambda_2\right|, \cdots,\left|\lambda_n\right|\right\}$，$A \in C^{n \times n}$

  若 A 是正规矩阵，则$\rho(A)=\|A\|_2$

5.4-5.6 矩阵序列与极限、幂级数、测度

- **矩阵序列** $\left\{A_k\right\}$ 的极限：$A=\lim_{k \rightarrow \infty} A_k=\left(a_{ij}\right)=\left(\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)}\right)$
- 矩阵序列 $\left\{A_k\right\}$ 收敛于于 $A \Leftrightarrow$ 任意一种矩阵范数都满足 $\lim_{k \rightarrow \infty}\left\|A_k-A\right\|=0$
- 判断**收敛条件**：$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k=0 \Leftrightarrow \rho(A)<1$
- **矩阵级数**$\sum_{k=1}^{\infty} A_k=A_1+A_2+\cdots+A_k+\cdots$
- 若 $m \times n$ 个常数项级数都绝对收敛，则称矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$**绝对收敛**

> 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛

- 矩阵级数$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$绝对收敛 $\Leftrightarrow$ 任何一种矩阵范数，正项数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\boldsymbol{A}_k\right\|$ 收敛
- 两个矩阵级数$\boldsymbol{S}_1: \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_k+\cdots ; \quad \boldsymbol{S}_2: \boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{B}_k+\cdots$都绝对收敛，且和为$A$、$B$，则它们的柯西乘积
  $\begin{aligned}\boldsymbol{S}_3: & \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_1+\left(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B}_1\right)+\left(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_3+\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{B}_1\right) \\ & +\cdots+\left(\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B}_{k-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{B}_1\right)+\cdots\end{aligned}$ 也绝对收敛，和为AB

- **矩阵幂级数**：$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_k A^k + \cdots$
- **判断矩阵幂级数A是否收敛**：
  - 方法一：A的某一种范数（比如行和范数）$< R$，收敛
  - 方法二：幂级数$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ 的收敛半径为R，A 为 n 阶方阵。若 $\rho(A) < R$，则矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 绝对收敛；若 $\rho(A) > R$，发散
  - **结论**：矩阵幂级数$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k+\cdots$绝对收敛$\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A})<1$，且其和为 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$.
- 方法三：判断J的收敛。即$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{J}_1^k(\lambda_1), \boldsymbol{J}_2^k(\lambda_2), \cdots, \boldsymbol{J}_r^k(\lambda_r)\right)\boldsymbol{P}^{-1}$，

$$\boldsymbol{J}i^k(\boldsymbol{\lambda} i) = \begin{bmatrix} \lambda i^k & \mathrm{C}k^1 \lambda i^{k-1} & \cdots & \mathrm{C}k^{di-1}\lambda i^{k-di+1} \\ & \lambda i^k & & \vdots \\ & & \ddots & \mathrm{C}k^1 \lambda i^{k-1} \\ & & & \lambda i^k \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}k^l = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} \quad (k \geqslant l)$$

> 1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径：$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| = \rho,\quad R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$
> 2. 调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；　　p级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases} \text{发散}, & p \leq 1 \\ \text{收敛}, & p > 1 \end{cases}$
>
> 　广义 p 级数：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\begin{cases} \text{发散}, p \leq 1 \\ \text{收敛}, p > 1 \end{cases}$；　交错调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$，收敛

- ~~矩阵测度：~~$\mu(A) = \lim_{x\to 0+}\frac{\|E+xA\|-1}{x}$~~，$\|\cdot\|$是给定的算子范数~~

~~列和范数的测度：~~$\mu_1(\boldsymbol{A}) = \max_j\left(\operatorname{Re}(a_{ij}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|\right)$

~~谱范数的测度：~~$\mu_2(A) = \max_i \lambda_i\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}\right)$~~，其中~~$\lambda_i\left(\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}\right)$~~表示矩阵~~$\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{2}$~~的第~~$i$~~个特征值~~

~~行和范数的测度：~~$\mu_\infty(\boldsymbol{A}) = \max_i\left(\operatorname{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\right)$

第六章 矩阵函数

6.1 矩阵多项式

- 矩阵多项式：$p(\boldsymbol{A}) = a_m\boldsymbol{A}^m + a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1} + \cdots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{E}$

  来源于$p(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$
- Jordan表示。$p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{P}\operatorname{diag}(p(\boldsymbol{J}_1), p(\boldsymbol{J}_2), \cdots, p(\boldsymbol{J}_r))\boldsymbol{P}^{-1}$

$$p(\boldsymbol{J}_i) = \begin{bmatrix} p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & \frac{p''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{p^{(d_i-1)}(\lambda_i)}{(d_i-1)!} \\ & p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & & \vdots \\ & & p(\lambda_i) & \ddots & \\ & & & \ddots & p'(\lambda_i) \\ & & & & p(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

步骤：求J，然后求P和P^{-1}，然后计算$p(J)$，最后通过$p(A) = Pp(J)P^{-1}$得到

- **化零多项式**：$p(\lambda) = a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$满足$p(\boldsymbol{A}) = 0$

- **定理6. 1.2(Hamilton-Cayley定理)** n阶方阵A的特征多项式 $D(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^n-\operatorname{tr}A\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\det A$为A的化零多项式，即$D(A)=0$
- **最小多项式**$\psi_A(\lambda)$：次数最低且首项系数为1的化零多项式

  求法：不同初等因子相乘（若次数不同，底相同，则选次数大的）

6.2-6.4 矩阵函数

- 矩阵函数：$f(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{A})$。不唯一
  - 表示一：**Jordan表示式**

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(f(\boldsymbol{J}_1),f(\boldsymbol{J}_2),\cdots,f(\boldsymbol{J}_r))\boldsymbol{P}^{-1}\end{aligned}$$

其中

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{bmatrix}f(\lambda_i)&f'(\lambda_i)&\frac{1}{2!}f''(\lambda_i)&\cdots&\frac{1}{(d_i-1)!}&f^{(d_i-1)}(\lambda_i)\\&f(\lambda_i)&f'(\lambda_i)&&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&\ddots&\frac{1}{2!}f''(\lambda_i)\\&&&&\ddots&f'(\lambda_i)\\&&&&&f(\lambda_i)\end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

  步骤：求J，然后求P和P^{-1}，然后公式计算$f(J)$，接着得到$f(A)=Pp(J)P^{-1}$。最后将各个$f(x)$代入

  - ~~表示二：拉格朗日——西勒维斯特内插多项式表示。~~

$$f(\boldsymbol{A})=p(\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{s}\left[a_{k1}\boldsymbol{E}+a_{k2}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E}\right)+\cdots+a_{kd_k}\left(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E}\right)^{d_k-1}\right]\varphi_k(\boldsymbol{A})$$

s为最小多项式中不同项的个数

$$\varphi_k(x)=\frac{\varphi_A(x)}{(x-\lambda_k)^{d_k}}\quad k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,d_k$$

d_k表示最小多项式中某一项的次数

$$a_{kl}=\frac{1}{(l-1)!}\left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\left(\frac{f(x)}{\varphi_k(x)}\right)\right]\Bigg|_{x=\lambda_k}$$

步骤：①求最小多项式$\varphi_A(x)$

②根据公式依次求$\varphi_k(x)$、a_{kl}、$f(A)$

③把具体的A带入$f(A)$，得到多项式表达式

④把要计算各种$f(x)$（A换成了x）以$x=x_0$的取值带入

- ~~表示三：**多项式表示。**~~$f(A)=p(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_{m-1}A^{m-1}$

  来源$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{m-1}x^{m-1}$

  步骤：①求最小多项式$\varphi_A(x)$;

  ②根据公式求出关于a_i的表达式$p(x)$、$p'(x)...$直到最后一项为常数

  ③将$x_i=\lambda_i$(最小多项式中的)带入上式解出所有a_i，得到$f(A)$

  ④将具体的A带入$f(A)$
- 表示四：幂级数表示。$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k$，谱半径为$\rho<R$

  来源$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\quad|x|<R$

必考： $e^{A}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^{n}\quad(\rho<\infty)$

性质：1）$e^{A\lambda}e^{A\mu}=e^{A(\lambda+\mu)}$；2）当 $AB=BA$ 时，有$e^{A+B}=e^{A}e^{B}=e^{B}e^{A}$；3）$\left(e^{A}\right)^{-1}=e^{-A}$
；

5）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{At}\right)=Ae^{At}=e^{At}A$；6）$\det e^{A}=e^{\operatorname{tr}A}$，其中 $\operatorname{tr}A$ 是 A 的迹

$\sin\boldsymbol{A}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}\boldsymbol{A}^{2n+1}\quad(\boldsymbol{\rho}<\infty)$； $\cos A=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}A^{2n}\quad(\rho<\infty)$

$(E+A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}A^{n}\quad(\rho<1)$； $\ln(E+A)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}A^{n}\quad(\rho<1)$

$(E-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}A^{n}\quad(\rho<1)$；$(E-A)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}nA^{n-1}\quad(\rho<1)$

第七章 函数矩阵与矩阵微分方程

7.1 函数矩阵与纯量

- 函数矩阵：$\boldsymbol{A}(x)=\begin{bmatrix}a_{11}(x)&a_{12}(x)&\cdots&a_{1n}(x)\\a_{21}(x)&a_{22}(x)&\cdots&a_{2n}(x)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}(x)&a_{m2}(x)&\cdots&a_{mn}(x)\end{bmatrix}$
- 逆矩阵：$\boldsymbol{A}^{-1}(x)=\frac{1}{|\boldsymbol{A}(x)|}\operatorname{adj}\boldsymbol{A}(x)$
- 有极限：$\lim_{x\to x_0}\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}$

  连续：$\lim_{x\to x_0}A(x)=A\left(x_0\right)$
- **函数矩阵对纯量的导数**

$$\boldsymbol{A}'\left(x_0\right)=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boldsymbol{A}\left(x_0+\Delta x\right)-\boldsymbol{A}(x)}{\Delta x}$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{11}'\left(x_0\right)&\boldsymbol{a}_{12}'\left(x_0\right)&\cdots&a_{1n}'\left(x_0\right)\\\boldsymbol{a}_{21}'\left(x_0\right)&a_{22}'\left(x_0\right)&\cdots&a_{2n}'\left(x_0\right)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}'\left(x_0\right)&a_{m2}'\left(x_0\right)&\cdots&a_{mn}'\left(x_0\right)\end{bmatrix}$$

性质：①$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[k(x)\boldsymbol{A}(x)]=\frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{A}(x)+k(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}$，$k(x)$ 是 x 的纯量函数

②$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)]=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{B}(x)+\boldsymbol{A}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}(x)}{\mathrm{d}x}$，没有交换律

③$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=-\boldsymbol{A}^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{A}^{-1}(x)$，也可以求出$\boldsymbol{A}^{-1}(x)$后用①来算

④$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(x))=\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}f'(t)=f'(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}$，$x=f(t)$ 是 t 的纯量函数

⑤若 $A(x)$ 与 $A^{-1}(x)$ 都可导,则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}=-\boldsymbol{A}^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\boldsymbol{A}^{-1}(x)$

⑥$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}(x))=\frac{\mathrm{d}A(x)}{\mathrm{d}x}f'(t)=f'(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}$

- **函数矩阵的积分**：$\int_a^b\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}\int_a^b a_{11}(x)\mathrm{d}x&\int_a^b a_{12}(x)\mathrm{d}x&\cdots&\int_a^b a_{1n}(x)\mathrm{d}x\\\int_a^b a_{21}(x)\mathrm{d}x&\int_a^b a_{22}(x)\mathrm{d}x&\cdots&\int_a^b a_{2n}(x)\mathrm{d}x\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\int_a^b a_{m1}(x)\mathrm{d}x&\int_a^b a_{m2}(x)\mathrm{d}x&\cdots&\int_a^b a_{mn}(x)\mathrm{d}x\end{bmatrix}$

7.2 函数向量

- Gram矩阵：$\boldsymbol{G}=\left(g_{ij}\right)_{m\times m},g_{ij}=\int_a^b\boldsymbol{\alpha}_i(x)\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}(x)\mathrm{d}x$

  其中$\boldsymbol{\alpha}_1(x),\boldsymbol{\alpha}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(x)$ 是 m 个定义在 $[a,b]$ 上的连续函数向量（行向量）

  Gram行列式：$\det G$
- $\boldsymbol{\alpha}_1(x),\boldsymbol{\alpha}_2(x),\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(x)$ 线性无关 ⇔ Gram矩阵满秩

- Wronski矩阵：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(x) &= \left(A(x), A'(x), A''(x) \cdots, A^{(m-1)}(x)\right)_{m\times mn} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots a_{1n}(x) & \cdots a_{11}^{(m-1)}(x) & a_{12}^{(m-1)}(x) & \cdots a_{1n}^{(m-1)}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots a_{2n}(x) & \cdots a_{21}^{(m-1)}(x) & a_{22}^{(m-1)}(x) & \cdots a_{2n}^{(m-1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots a_{mn}(x) & \cdots a_{m1}^{(m-1)}(x) & a_{m2}^{(m-1)}(x) & \cdots a_{mn}^{(m-1)}(x) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中，$A(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1(x) \\ \boldsymbol{\alpha}_2(x) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m(x) \end{bmatrix}$

7.3-7.4 矩阵、线性向量微分方程

- 矩阵微分方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t), X_0(t) = C$的解为$X(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}C$
  - 当 $\det C \neq 0$ 时，任一 $\boldsymbol{X}(t)$ 有 Jacobi 等式$\det \boldsymbol{X}(t) = \det \boldsymbol{C} \cdot \exp \int_{t_0}^{t}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}(t)))\mathrm{d}t$
  - 若$X_0(t) = C_1$和$X_0(t) = C_2$的情况下解为$X_1(t)$、$X_2(t)$，则满足 $X_2(t) = X_1(t)T, T = C_1^{-1}C_2$
- 矩阵微分方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{A}, X_0(t) = C$的解为$X(t) = C\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$
- $X(t+s) = X(t)X(s), X(0) = E \Leftrightarrow X(t) = e^{At}$
- 线性向量微分方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$的解为$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0$
- 线性向量微分方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$的解为 $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

第八章 矩阵的广义逆

- A的**广义逆矩阵**A^- $\Leftrightarrow$ 对于$Ax = b$，有使解 $x = A^-b$ 成立的 A^- 存在
  $\Leftrightarrow AA^-A = A$

  A的大小为m*n，当m=n，唯一，否则不唯一

  计算方法：对$\begin{bmatrix} A_{m*n} & E_m \\ E_n & 0 \end{bmatrix}$进行初等行+列变换，得到$\begin{bmatrix} E_{m*n} & P_{m*m} \\ Q_{n*n} & 0 \end{bmatrix}$，通过公式 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix}\boldsymbol{P} = A^-$，$X, Y, Z$任意，可以为0方便计算
- 左逆（右逆）：$A_{\mathrm{L}}^{-1}A_{m*n} = E_n$ （或 $AA_{\mathrm{R}}^{-1} = E_m$）

  若$m = n$且A满秩，则$A^{-1} = A_{\mathrm{L}}^{-1} = A_{\mathrm{R}}^{-1}$
- 自反广义逆$\boldsymbol{A}_r^-$：使 $\begin{matrix} AA^-A = A \\ A^-AA^- = A^- \end{matrix}$ 成立的 A^-
- A的**伪逆矩阵**A^+：满足**Penrose - Moore方程**，即 $\begin{matrix} AA^+A = A & A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^{\mathrm{H}} = AA^+ & (A^+A)^{\mathrm{H}} = A^+A \end{matrix}$。唯一

  性质：$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)^+ = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^+\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$

  方法一：设 $A \in C^{m\times n}, A = BC$ 是 A 的一个满秩分解,则 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} = A^+$

  方法二：①求酉矩阵U可以使A^HA对角化；②求A^HA的所有特征值构成Λ，而$\Lambda^+ = \Lambda^{-1}$；③ $A^+ = \left(A^{\mathrm{H}}A\right)^+A^{\mathrm{H}} = U\Lambda^+U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}$

方法三：①求$A^H A$的非零特征值构成Λ_r；②求非零特征值对应的单位特征向量（即非零特征值在U中对应的几列）；③$\boldsymbol{A}^+ = U_1 \boldsymbol{\Lambda}_r^{-1} U_1^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$

- **矩阵方程$AXB = D$的通解**$X = A^- DB^- + Y - A^- AYBB^-$，Y任意且与X大小一致，前提$A^-$与$B^-$存在
- **相容（有解）方程组** $Ax = b$ 的通解：$x = Bb + (E_n - BA)z$
- **最小模解**：相容方程组所有解中2-范数 $\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{H}}x}$ 中最小的

  性质：$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆矩阵，则对于任意 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小模解 $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$
- **最小二乘解** x_0：满足任意 x都有$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$

  最佳最小二乘解u：对于任意最小二乘解 x_0，$\|\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}_0\|$

  性质：①$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个广义逆矩阵，则对于任意 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{b}$是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow$ $ABA = A, (AB)^H = AB$

  ②$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最佳最小二乘解

第九章 Kronecker积

- **Kronecker积 / 直积**：$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}_{mp*nq}$，其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{p\times q}$

  性质：①无交换律；②$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$；③$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \cdot \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$；④ $\operatorname{rank}(A \otimes B) = (\operatorname{rank} A)(\operatorname{rank} B)$；

  ⑤$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 和$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_q$都线性无关 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_i \otimes \boldsymbol{y}_j$线性无关；⑥ $|\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|^p |\boldsymbol{B}|^m$；

  ⑦存在置换矩阵（有限个初等矩阵的乘积）P，使得$\boldsymbol{P}_{m*n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_{m*m} \otimes \boldsymbol{B}_{n*n})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$
- Kronecker积的幂：$\boldsymbol{A}^{[k]} = \underbrace{\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{A}}_{k个\boldsymbol{A}}$

  性质：$AB^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]}$
- 矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$对矩阵$\boldsymbol{B} = (b_{kl})_{p\times q}$的导数：

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{D}\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{11}} & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{12}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{1q}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{21}} & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{22}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{2q}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{p1}} & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{p2}} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{pq}} \end{bmatrix}_{mp\times nq} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial b_{kl}}\right)$$

  性质：①$\frac{\mathrm{D}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{DC}}(\boldsymbol{E}_q \otimes \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{E}_p \otimes \boldsymbol{A})\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{B}}{\mathrm{DC}}$

  ②$\frac{\mathrm{D}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{DC}} \otimes \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \otimes \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{B}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{DC}} \otimes \boldsymbol{B} + \left(\boldsymbol{A} \otimes \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial c_{ij}}\right)$

  ③$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{D}\boldsymbol{B}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{D}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}, \left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}}{\mathrm{D}\boldsymbol{B}}\right)^{\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}}$
- 梯度：$\operatorname{grad} f = \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\boldsymbol{X}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$，其中$f$为纯量函数

  链式法则：$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为向量变量，一元函数 $f(t) = f(X(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$，则$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}\boldsymbol{X}} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}$

- 已知$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{l} c_{ij}x^i y^j \overset{例如}{=} 2x+xy^3$，
  $f(A,B)=\sum_{i,j=0}^{l} c_{ij}A^i\otimes B^j \overset{对应}{=} 2A\otimes E+A\otimes B^3$

  A_{m*m}的特征值为λ，特征向量为x；B_{n*n}的特征值为μ，特征向量为y，则$f(A,B)$的特征值为$f(\lambda,\mu)$，特征向量为$x\otimes y$，有mn个
- 矩阵 A 与 B 的 Kronecker 和：$A\otimes E_n+E_m\otimes B$
- 矩阵行展开：$\mathrm{rs}(A)$；列展开：$\mathrm{cs}(A)$

  性质：① $\begin{array}{l}\mathrm{rs}(ABC)=\mathrm{rs}(B)\left(A^{\mathrm{T}}\otimes C\right)\\ \mathrm{cs}(ABC)=\left(C^{\mathrm{T}}\otimes A\right)\mathrm{cs}(B)\end{array}$
- Sylvester线性矩阵方程：$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_p=\boldsymbol{C}\Leftrightarrow Gx=c$，其中$x=\mathrm{cs}(X),c=\mathrm{cs}(C),G=\sum_{j=1}^{p}\left(B_j^{\mathrm{T}}\otimes A_j\right)$
- **方程**$AX+XB=C$**有唯一解**$\Leftrightarrow\lambda_i(\boldsymbol{A})+\lambda_j(\boldsymbol{B})\neq 0\quad(\forall i,j)$，其中 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值
- 方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=0$ 有非零矩阵 $\boldsymbol{X}$ $\Leftrightarrow$ 对于某一个 i 与 j 有$\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{A})+\mu_j(\boldsymbol{B})=0$