第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘 k；③某一行乘 k 后加到另一行；

第二章 行列式

1. **某一行的展开式**：$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\,,(i=1,2,\dots,n)$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 列同理

2. 行列式变号：交换某两行

不变：①转置； ②某一行/列乘 k 后加到另一行/列；

③某行所有元素为两个数之和，可以写成两个行列式之和

数乘：①某行的公因数 k 可以提到外面；②$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$

3. 若 A 中无 0 且$R(A)=1,A^2=(列向量*行向量)\text{^}2=lA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\,A,A^n=l^{n-1}A$

4. 八大类型行列式及其解法

箭型行列式、两三角型行列式、两条线型行列式、Hessenberg 型行列式、三对角型行列式、各行元素和相等型行列式、相邻两行对应元素相差 K 倍型行列式、副对角行列式、**范德蒙德型行列式：**

$$V_n=det\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & & x_n\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}=det\begin{bmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & & x_2^{n-1}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{bmatrix}=\Pi_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

解法：拆行法、升阶法、方程组法、累加消点法、累加法、递推法（特征方程法）、步步差法

5. 莫拉克法则：$D=det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},x_j=\frac{D_j}{D},j=1,2,\dots,n$

第三章 矩阵

1. n 维上/下三角方阵，$A^k=O,k\ge n$

2. **B**、**C** 分别为 m、n 阶，则$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}$

3. 伴随矩阵：$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$ 逆矩阵：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$AA^*=A^*A=|A|E$ $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$ $|A^*|=|A|^{n-1}$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$ $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$

4. **A、B 等价**：存在可逆矩阵 P 和 Q，使得$B=PAQ$

几何意义：两个有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过**初等行/列变换**后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

5. n 维方阵 A 可逆 ⇔A 与 E 等价

⇔|A|≠0 ⇔A 为非奇异矩阵 ⇔R(A)=n

⇔A 的各列/行**线性无关** ⇔A^T可逆 ⇔A 的列向量构成$\mathbb{R}^n$的

⇔0 不是 A 的特征值 ⇔Ax=0 只有零解 ⇔Ax=b 只有唯一解

6. 初等矩阵：$\boldsymbol{E}$经过一次初等变换 左乘⇔行变换，右乘⇔列变换

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ k & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ nk & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & k^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{2n-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

7. 求逆：$(A\quad E)\xrightarrow{r}(E\quad A^{-1})$ $(E+B)^{-1}=(BB^{-1}+B)^{-1}$

求解：$(A\quad B)\xrightarrow{r}(E\quad X)$

8. ①$max\{R(A),R(B)\}\le R(A|B)\le R(A)+R(B)$

②$R(A+B)\le R(A)+R(B)$ ③$R(AB)\le min\,\{R(A),R(B)\}$

④$A为m\times s的矩阵,B为s\times n的矩阵,AB=O,R(A)+R(B)\le s$

⑤A 可逆，则$R(AB)=R(BA)=R(B)$ ⑥$R\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}=R(A)+R(B)$

⑦$R(A^*)=\begin{cases}n, & R(A)=n\\ 1, & R(A)=n-1\\ 0, & R(A)<n-1\end{cases}$

9. $(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$

10. 非齐次线性方程组：$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\beta_{m\times 1},\beta_{m\times 1}\ne 0$ 齐次线性方程组：$\beta_{m\times 1}=0$

第四章 向量组的线性相关性

1. $k_1\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$

线性相关：|A|=0 $\Leftrightarrow k_1 \sim k_n$不全为 0 ⇔不满秩 $\Leftrightarrow AX = 0$有解

线性无关：|A|≠0 $\Leftrightarrow k_1 \sim k_n$全为 0 ⇔满秩 $\Leftrightarrow AX = 0$无解

结论：①n+1 个 n 维度向量必线性相关

②任何部分相关⇒整体相关；整体无关⇒任何部分无关

③线性无关⇒延伸无关；线性相关⇒缩短相关

④向量组 A 两两正交且非零，则其线性无关

2. 线性组合/表出/表示：$\beta = \boldsymbol{AX} = k_1\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$有解$\Leftrightarrow R(A) = R(A|\beta)$

结论：①向量组(I)线性无关，$(I|\beta)$线性相关，则β可由向量组(I)线性表示，且表示方法唯一

3. 极大无关组：r 组线性无关，r+1 组线性相关　计算：初等行变换化为行最简形

4. 向量组等价：两个向量组可以相互线性表示$\Leftrightarrow R(I) = R(I|II) = R(II)$**(缺一不可)**

结论：①多数向量能用少数向量线性表示，多数向量一定线性相关

②向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则$R(I) \le R(II)$

5. 过渡矩阵：$B = AC$　坐标变换公式：$X = CY$

6. $AX = 0$的基础解系：本质：一个极大无关组，　**构成：$\boldsymbol{n - R(A)}$个解**

计算方法：对 A 初等行变换得到最简形

7. $AX = \beta$的通解：对$(A|\beta)$初等行变换得到最简形，通解=特解+基础解系

第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值：$|A - \lambda E| = 0$　几何意义：伸缩比例

特征方程：$(A - \lambda E)X = 0$　$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}$（迹）　$\prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$

特征向量：对应λ的X　几何意义：矩阵对向量只发生伸缩变换

2. $\mathrm{A}, \mathrm{A}^{-1}, \mathrm{A}^*, \mathrm{A}^{\mathrm{m}}$有相同的特征向量

$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{|A|}{\lambda}, \lambda^m$是它们的特征值

3. **A、B 相似**：$P^{-1}AP = B$　A、B 的行列式、秩、迹、特征值相等

几何意义：一个有限维向量空间的同一个线性变换

$P^{-1}A^nP = B^n$　$P^{-1}EP = E$

4. 可相似对角化的充分必要条件：$R(A - \lambda_i E) = n - n_i$，$\lambda_i$是$n_i$重特征值

P 的求法：先解$|A - \lambda E| = 0$，P 由基础解系构成

5. 向量正交⇔ $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 \Leftrightarrow$ **$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$内积为 0**

6. 施密特正交化方法：$\beta_m = \alpha_m - \frac{[\alpha_m, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]}\beta_1 - \frac{[\alpha_m, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]}\beta_2 - \cdots - \frac{[\alpha_m, \beta_{m-1}]}{[\beta_{m-1}, \beta_{m-1}]}\beta_{m-1}$

7. **正交**矩阵：$AA^T = E$ ⇔行/列向量组是**单位正交**向量组⇔ $|A|^2 = 1 \Leftrightarrow A^T = A^{-1}$

8. 实对称矩阵化为对角阵：$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \Lambda$

①求出特征值λ；②求出特征向量，然后正交化，再单位化，构成正交矩阵 Q

9.

第六章 实二次型

1. 二次型：$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^TAX$　A 为实对称矩阵

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$

标准型：只含有完全平方项　规范型：完全平方项前的系数为±1

2. 化实二次型为标准型方法

a) (可逆)线性变换：$X = CY$，C 为可逆矩阵

b) 配方法：

i. 二次型含有完全平方项:：例令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

ii. 二次型不含完全平方项：例令$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

c) 正交变换法步骤：

①求出特征值λ；②求出特征向量，正交化，单位化，构成正交矩阵 Q

3. A、B **合同**：$C^TAC = B$

几何意义：**一个**有限维向量空间的同一个双线性函数 or 内积

性质：①如果 A 为对称矩阵，B 也是对称矩阵；②$R(A) = R(B)$；③传递性

4. 正定二次型：$\forall X \ne 0$，都有$f > 0$　负定二次型：$\forall X \ne 0$，都有$f < 0$

5. A 为正定矩阵⇔①A 特征值全为正；②各阶顺序主子式都为正值

A 为负定矩阵⇔奇数阶顺序主子式为负值，偶数得为正值

6.