目录

第 1 讲 高等数学常用基础知识

1. $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$

2. 余切函数：$cot\, x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

正割函数：$y = sec\, x = \frac{1}{\cos x}$　　余割函数：$y = csc\, x = \frac{1}{\sin x}$

3. 符号函数：$y = sgn\, x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$；取整函数：$y = [x]$

4. 若 *U=max{ f(x), g(x) }*，*V=min{ f(x), g(x) }*，

则 *U+V = f(x) + g(x)*　　*U-V = | f(x) - g(x)|*　　*UV = f(x)g(x)*

5. 组合数公式：$C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^{n} C_i^k$　　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$　　推导过程

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$　　$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2C_{n+2}^3$

6. $cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

7. 积化和差公式*4　　$cos\,\alpha\, sin\,\beta$和$cos\,\alpha\, cos\,\beta$同理

$sin\,\alpha\, cos\,\beta = \frac{1}{2}[sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$

$sin\,a\, sin\,\beta = \frac{1}{2}[cos(\alpha-\beta) - cos(\alpha+\beta)]$

和差化积公式*4　　$sin\,\alpha - sin\,\beta$和$cos\,\alpha - cos\,\beta$同理

$sin\,\alpha + sin\,\beta = 2\, sin\frac{\alpha+\beta}{2} cos\frac{\alpha-\beta}{2}$　　$cos\,\alpha + cos\,\beta = 2\, cos\frac{\alpha+\beta}{2} cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

8. 万能公式$u = tan\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$　　则$sin\, x = \frac{2u}{1+u^2}$，$cos\, x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

9. 因式分解公式

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$　　$a^3 + b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1})$ (n为正偶数)

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$($n$为正奇数)

第 2 讲 极限与连续

1. 数列极限定义：任意$\varepsilon > 0$，$\exists N \in N_+$, 当$n > N$, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$

2. 判断数列发散方法*2：找到其一个发散的子列；

找到两个收敛的子列，但是收敛到不同的极限

3. 数列极限运算规则（参考函数的）

4. 证明$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$的极限存在：证明单调不减，证明有界

5. 函数极限定义：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta\text{时}, \text{有}|f(x) - A| < \varepsilon$$

6. 函数极限存在的充要条件*2

① 左极限=右极限=A　　② $f(x) = A + \alpha(x)$，$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$

7. 函数极限的性质：　唯一性；局部有界性；局部保号性；

8. 无穷小的比阶　前提：$lim\,\alpha(x) = 0, lim\,\beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$

高阶无穷小：$lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，记为$\alpha(x) = o(\beta(x))$；

低阶无穷小：$lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$；　　同阶无穷小：$lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$；

k 阶无穷小：$lim\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$　　等价无穷小：$lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，记为$\alpha(x) \sim \beta(x)$；

9. 函数极限运算规则　前提：极限都存在

a) $lim[kf(x) \pm lg(x)] = k\, lim\, f(x) \pm l\, lim\, f(x) = kA \pm lB$

b) $lim[f(x)\cdot g(x)] = lim\, f(x) \cdot lim\, g(x) = A \cdot B$

c) $\boldsymbol{lim[f(x)^n] = [lim\, f(x)]^n}$，n 为正整数

d) $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}(B \neq 0)$

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小；有界函数与无穷小的积是无穷小

b) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = min(mn)$->加减法时低阶吸收高阶

c) $o(x^m)\cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) = x^m \cdot o(x^n)$->乘法时阶数累加

d) $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$且为常数->非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小*9　　前提：$x \to 0$　　本质：泰勒展开

$\boldsymbol{\sin x \sim x,\ \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,\ \ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x}$

$\boldsymbol{a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^a - 1 \sim ax}$　　**★$x \to x_0$等价替换成$t \to 0$**

12. 夹逼准则：$g(x) \le f(x) \le h(x), \lim g(x) = A, \lim h(x) = A$, 则$\lim f(x) = A$

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放

对和式$\sum_{i=1}^{n} u_i$缩放的两种方法：

n 为无穷大时，$n \cdot u_{min} \le \sum_{i=1}^{n} u_i \le n \cdot u_{max}$；

n 为有限数时，$1 \cdot u_{max} \le \sum_{i=1}^{n} u_i \le n \cdot u_{max}$；

13. 洛必达法则：$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，且一阶导都存在

14. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）

15. 第一类间断点：可取、跳跃　　第二类间断点：无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知

① 夹逼准则　②定积分定义　③幂级数求和　④级数收敛的必要条件

b) 数列通项未知

① “单调有界数列必有极限”；②求出表达式；③利用定义构造$|a_n - a|$

17. 函数极限的计算步骤

判断未定式的种类。七种："$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$0 \cdot \infty$""$\infty - \infty$""∞^0""0^0""1^∞"

i. "$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$"：使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽

ii. "$0 \cdot \infty$"：转化成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"

iii. "$\infty - \infty$"：变形为乘除法。有分母，通分；无分母，倒代换或提取公因式

iv. $\infty^0 0^0 1^\infty$：$\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$

$$= \lim\left\{[1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v} = e^{\lim(u-1)v} \qquad \because \boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

18. ★常用函数的泰勒展开式*8　　前提：$x \to 0$　　计算时保留 o(·)

$\boldsymbol{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$　　$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}$

$\boldsymbol{\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x)^3}$　　$\boldsymbol{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$

$\boldsymbol{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$　　$\boldsymbol{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$

$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$　　$\boldsymbol{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)}$

$\frac{A}{B}$型，适用“上下同阶”原则，即展开后分子分母同阶；

A-B 型，适用“幂次最低”原则，即展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止；

第 3 讲　一元函数微分学的概念与计算

1. 导数的定义*2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. 可导的充分必要条件：左导数和右导数存在且相等

3. 高阶导数概念：$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$

4. 可微判别方法*3:　　①写增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

②写线性增量 $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$　　③作极限 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$

5. 复合函数的导数(微分): $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

6. 反函数求导: $y = f(x), x = \varphi(y)$，记$f'(x) = y'_x, \varphi'(x) = x'_y\left(x'_y \neq 0\right)$，则有

一阶 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

二阶 $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{x'_y}\right)}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^2} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{\left(x'_y\right)^3}$

7. 参数方程求导: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

一阶: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

二阶: $\frac{d^2y}{d^2x} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$

8. 隐函数求导：$F(x,y)=0$，两边对 x 求导，将 y 看作中间变量，得到方程，求解即可得到 y'

9. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数，$ln\,y=ln\,f(x)$；②求导得$\frac{1}{y}y'=[ln\,f(x)]'\Rightarrow y'=y[ln\,f(x)]'$

10. 幂指函数求导法：

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[e^{v(x)\,ln\,u(x)}\right]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

11. n 阶导数的运算方法 *3

a) 逐次求导。

b) 高阶求导公式：$[u\pm v]^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$　　$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$

c) 写出泰勒公式 or 麦克劳林公式，比较系数

12. 常见函数的 n 阶导数 *8

$(a^x)^{(n)}=a^x(ln\,a)^n(a>0,a\neq 1)$　　$(e^x)^{(n)}=e^x$　　$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$(sin\,kx)^{(n)}=k^n\,sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$　　$(cos\,kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$(ln\,x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}(x>0)$　　$[ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}(x>-1)$

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$

13. 变限积分求导公式：设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x)\,dx$，$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\,dt\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

14. 基本初等函数的导数公式

$(a^x)'=a^x\,ln\,a(a>0,a\neq 1)$　　$(log_a x)'=\frac{1}{x\,ln\,a}(a>0,a\neq 1)$

$(arc\,sin\,x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(arccos\,x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　$(tan\,x)'=sec^2\,x$

$(cot\,x)'=-csc^2\,x$　　$(arctan\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$　　$(arc\,cot\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

$(sec\,x)'=sec\,x\,tan\,x$　　$(csc)'=-csc\,x\,cot\,x$

$\left[ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$　　$\left[ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

15.

第 4 讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带不带等号

极值、最值的区别：领域、定义域

2. 极值点的必要条件：一阶可导

3. 判断极值的充分条件 *3

a) x_0的去心领域一阶可导

i. x_0左边，$f'(x)<0$；x_0右边，$f'(x)>0$，为极小值；

ii. x_0左边，$f'(x)>0$；x_0右边，$f'(x)<0$，为极大值；

b) $x=x_0$处二阶可导，且$f'(x)=0$，$f''(x_0)\neq 0$

$f''(x_0)>0$，极小值；$f''(x_0)<0$，极大值

c) x_0处 n 阶可导，且$f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\dots,n-1),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 2)$

n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)>0$，极小值；n 为偶数，$f^{(n)}(x_0)<0$，极大值

4. 凹弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；凸弧：$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

5. 判断凹凸的充分条件：$f''(x)>0$，凹的；$f''(x)<0$，凸的

6. 拐点的必要条件:二阶可导

7. 判断拐点的充分条件 *3

a) x_0的去心领域内二阶导数存在，且左右领域$f''(x)$变号

b) 三阶可导，$f''(x)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$

c) x_0处n阶可导, n为奇数, $f^{(m)}(x_0)=0(m=2,\dots,n-1),f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geq 3)$

8. 斜渐近线：例 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k_1x]=b_1$，$y=k_1x+b$为斜渐进曲线

9. 求闭区间的最值步骤：求出可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值

10. 求开区间的最值(取值范围)步骤：求出可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围

11. 函数作图步骤：

①确定定义域和奇偶对称性②利用$f'(x),f''(x)$为 0 和不存在的点，将函数划分成几个区间，判断每一个的单调性和凹凸性③确定渐近线(如果有的话)④作图

12.

第 5 讲 中值定理

1. 函数的中值定理

   a) 有界与最值定理：$m \le f(x) \le M$，其中 m、M 为[a, b]上的最值

   b) 介值定理：当$m \le \mu \le M$，存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \mu$

   c) 平均值定理：当$a < x_1 < \cdots < x_n < b$，在$[x_1, x_n]$内至少存在一点$\xi$，使$f(\xi) = \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$

   d) 零点定理：当$f(a) \cdot f(b) < 0$，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$

2. 导数(微分)的中值定理

   a) 费马定理：$f(x_0)$可导且为极值，则$f'(x_0) = 0$

   b) 罗尔定理：$f(x)$满足$\begin{cases} [a,b]\text{上连续} \\ (a,b)\text{内可导} \\ f(a) = f(b) \end{cases}$，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$

   c) 拉格朗日中值定理：$\begin{cases} [a,b]\text{连续} \\ (a,b)\text{可导} \end{cases}$，存在$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   d) 柯西中值定理：条件同上，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

   e) 泰勒公式

      i. 带拉格朗日余项：n+1 阶可导，ξ介于x, x_0之间

      $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

      ii. 带佩亚诺余项：$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + o((x-x_0)^n)$

3. 克劳林公式：$x_0 = 0$的泰勒公式

4. 重要函数的克劳林展开式 *7

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n}+1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

5. 证明存在$\xi \in (a,b)$，使得$H\big(\xi, f(\xi), f'(\xi)\big) = 0$：罗尔定理、费马定理

   a) 构造辅助函数：把ξ改成 x，对于$f'(x) + g(x)f(x) = 0$，两边同乘$e^{\int g(x)\,dx}$，

      得构造函数$F(x) = f(x)e^{\int g(x)\,dx}$

   b) 验证端点值相等：转化为给定区间内找 F(x)的两个不同的零点

6.

第 6 讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题：

   a) 零点定理：证明根的存在

      当$f(a) \cdot f(b) < 0$，$f(x) = 0$至少有一个根

   b) 单调性：证明根的唯一性

      $f(x) = 0$在(a,b)内单调，$f(x) = 0$至少有一个根

   c) 罗尔定理的推论：$f^{(n)}(x) = 0$至多有 k 个根，$f(x) = 0$至多有 k+n 个根

   d) 实系数奇次方程：至少有一个根

2. 经典不等式

   a) $2|ab| \le a^2 + b^2$　　$|a \pm b| \le |a| + |b|$　　$\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$

   b) 设$a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$，当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时等号成立

      $$\frac{\boldsymbol{a_1+a_2+\cdots+a_n}}{\boldsymbol{n}} \ge \sqrt[n]{\boldsymbol{a_1 a_2 \cdots a_n}} \qquad \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \le \sqrt{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n}}$$

   c) $x, y, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{1} = 1$，则$\mathrm{xy} \le \frac{\mathrm{x^p}}{\mathrm{p}} + \frac{\mathrm{y^q}}{\mathrm{q}}$

d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

e) $\left[\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx$

f) $\left|\int_b^a f(x)\cdot g(x)\,dx\right|\le\left[\int_a^b|t(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_a^b|g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$, $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

g) $0<a<x<b,0<c<y<d$, 则$\frac{c}{b}<\frac{y}{x}<\frac{d}{b}$

$x<\tan x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ $\sin x<x(x>0)$

$\arctan x\le x\le\arcsin x\,(0\le x\le1)$

$e^x\ge x+1,x-1\ge\ln x$ $\quad$ $\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$

3. 微分不等式的证明方法 *3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)；②常数变量化；③中值定理

4.

第 7 讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数
2. 定积分的定义: $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}$
3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续；②在去见善有界，只有有限个间断点

   必要条件: 可积函数必有界
4. 定积分的性质:
   a) 求区间长度: 略
   b) 线性性质: 略
   c) 可加可拆性: $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
   d) 保号性: $f(x)\le g(x)$,则$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

      特殊: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$
   e) 估值定理: M、m 为最大、小值，L 为区间长度
   $$mL\le\int_a^b f(x)\,dx\le ML$$
   f) 中值定理: 函数连续，闭区间内至少存在一点ξ，使得
   $$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a)$$
5. 变限积分的性质: ①$f(x)$可积，$F(x)$连续；②$f(x)$连续，$F(x)$可导
6. 变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无 x
$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)}f(t)\,dt\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$
7. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

   无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性
8. 奇点:” ∞ ”和使得函数无定义的点(瑕点)
9. 不定积分计算
   a) 凑微分法: $\int f[g(x)]g'(x)\,dx=\int f[g(x)]\,d[g(x)]=\int f(u)\,du$
      i. 若 f(x)较复杂，对其(或其主要部分)求导可以得到 g(x)的倍数(常数 or 函数)
      $$\int f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{A}\int f(x)Ag(x)\,dx=\frac{1}{A}\int f(x)\,d[f(x)]$$
      ii. 得不到倍数，可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子，来恒等变形。常用的因子有$e^{\alpha x},x^\beta,\sin x,\cos x$
   b) 换元法: $\int f(x)\,dx\overset{x=g(x)}{\Longleftrightarrow}\int f[g(u)]\,d[g(u)]=\int f[g(u)]g'(u)\,du$
      i. 三角函数代换: $\sqrt{a^2-x^2}\Rightarrow x=a\sin t,|t|<\frac{\pi}{2}$
      $$\sqrt{a^2+x^2}\Rightarrow x=a\tan t,|t|<\frac{\pi}{2}$$
      $$\sqrt{x^2-a^2}\Rightarrow x=a\sec t,\begin{cases}x>0,0<t<\frac{\pi}{2}\\x<0,\frac{\pi}{2}<t<\pi\end{cases}$$
      ii. 恒等变形后三角函数代换: $\sqrt{ax^2+bx+c}\Rightarrow$
      $\sqrt{\varphi^2(x)+k^2},\sqrt{\varphi^2(x)-k^2},\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$

iii. 根式代换：$\sqrt[n]{ax+b},\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt{ae^{bx}+c}$ ⇒令$\sqrt{*}=t$

同时含有$\sqrt[n]{ax+b}$和$\sqrt[m]{ax+b}$ ⇒令$\sqrt[l]{ax+b}=t$，l 为最小公倍数

iv. 倒代换：若分母幂次比分子高两次及以上，$\frac{1}{x}=t$

v. 复杂函数的直接代换：含有$a^x,e^x,\ln x,\arcsin x,\arctan x$，令复杂函数=t

注意： 当$\ln x,\arcsin x,\arctan x$与$e^x$或$x^n$乘除，优先考虑分部积分法

c) 分部积分法：$\int u\,dv=uv-\int v\,du$

i. 适用于$\int u\,dv$难求，而$\int v\,du$好求

ii. 积分后简单点宜作u，微分后简单点宜作v

$P_n(x)$与$e^{kx},\sin ax,\cos ax$中的一个⇒ $u=P_n(x)$

e^{ax}与$\sin ax,\cos ax$中的一个 ⇒ u任选其一

$P_n(x)$与$\ln x,\arcsin x,\arctan x$中的一个⇒ $u\neq P_n(x)$

iii. 推广：u 与 v 有直到(n+1)阶的连续导数

$$\int uv^{(n+1)}\,dx=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx$$

d) 有理函数的积分：$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx(n<m)$

i. 方法：把$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意：k 重因式产生 k 项

10. 定积分的计算

a) 牛顿莱布尼兹公式：$\int_a^b f(x)\,dx\xrightarrow{F'(x)=f(x)}F(x)|_b^a$

b) 换元积分：$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi'(t)]\varphi'(t)\,dt$

c) 分部积分法：$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

d) 重要结论：

i. 偶函数，$\int_{-a}^a f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$

ii. 奇函数，$\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$

iii. 周期函数，$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$

iv. 区间再现公式：$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$

v. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{n 为大于 1 的奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n\cdot 3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{n 为正偶数}\end{cases}$

11. 凑定积分定义的方法:①提出$\frac{1}{n}$;②凑出$\frac{i}{n}$;③转化为$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$

~~12. 华里士公式: P147~~

13. 反常积分的敛散性判别:

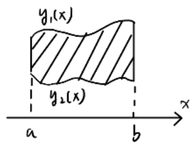
a) 无穷区间的$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$：$p>1$收敛，$p\le 1$发散

b) 无界函数的$\int_0^1\frac{dx}{x^p}$：$p<1$收敛，$p\ge 1$发散（奇点 x=0）

14.

第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

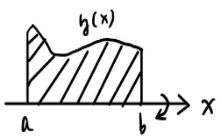
1.计算面积

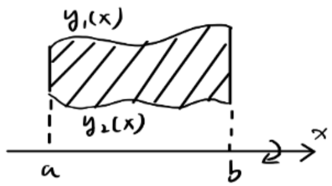


$S=\int_a^b|y_1(x)-y_2(x)|\,dx$

$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|\,d\theta$

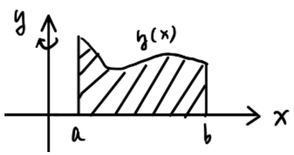
2.计算体积



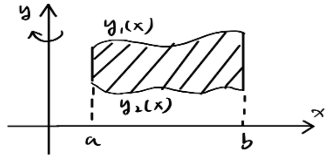


$V=\int_a^b\pi y^2(x)\,dx$

$V=\pi\int_a^b|y_1^2(x)-y_2^2(x)|\,dx$



$V_y = 2\pi \int_a^b x|y(x)|\,dx$



$V = 2\pi \int_a^b x|y_1(x) - y_2(x)|\,dx$

3.积计算平均数：$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\,dx$

第 9 讲 积分等式与积分不等式

第 10 讲 多元函数微分学

1. 领域、去心领域；内点、外点、边界点；有界集、无界集；开集、闭集；
   连通集、开区域、闭区域、区域；单连通区域、多连通区域；
   聚点:　　　　　　　　　　　　　　　孤立点:

2. 偏导数定义：例如，对 x，$f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

   二阶偏导数：例如，$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y)$

   $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial z^2}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y)$　也叫二阶混合偏导数

3. 可微：函数的全增量$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，A、B 仅与 x,y 有关

   全微分：$dz = A\Delta x + B\Delta y$

4. 判断函数是否可微的步骤:
   a) 写出全增量$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$
   b) 写出线性增量$dz = A\Delta x + B\Delta y$，其中$A = f'_x(x_0,y_0), B = f'_y(x_0,y_0)$
   c) 作极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若为 0，可微；否则，不可微

5. 判断偏导数连续性的步骤:
   a) 用定义法求$f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$
   b) 用公式法求$f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$
   c) 若$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f'_x(x,y) = f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f'_y(x,y) = f'_y(x_0,y_0)$成立，则连续

6. 多元函数微分法则
   a) 链式求导规则：$z = f(u,v)$
      i. $u=\varphi(t), v=\psi(t)$，则$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$
      ii. $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$
      iii. $u=\varphi(x,y), v=\psi(y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}$
   b) 隐函数存在定理

7. 二元函数的极值
   a) 必要条件：在(x_0,y_0)点，关于 x、y 的一阶偏导为 0
   b) 充分条件：记$f''_{xx}(x_0,y_0) = A$，$f''_{xy}(x_0,y_0) = B$，$f''_{yy}(x_0,y_0) = C, \Delta = B^2 - AB$:

      ①　$\Delta < 0$，$\begin{cases} A<0\text{，极大值} \\ A>0\text{，极小值} \end{cases}$；②$\Delta < 0$，非极值；③$\Delta = 0$，不能判断

   c) 求最值的步骤：目标函数$u = f(x,y,z)$，条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0 \\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$
      ①构造辅助函数$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) + \mu\psi(x,y,z)$
      ②令$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + u\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + u\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + u\psi'_z = 0 \end{cases}$，$\begin{cases} F'_\lambda = \varphi(x,y,z) = 0 \\ F'_\mu = \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$
      ③解上面方程组得备选点$P_i, i = 1,2,\ldots,n$，并求$f(P_i)$，取其最大值和最小值
      ~~④根据实际问题，比存在最值，所得即所求~~

8. 二元函数的最值计算步骤：①求出其在区域内所有可疑点的函数值；
   ②在区域边界上的最值；③比较得出最值

9. 一般$f''_{xy}(x_0,y_0) \neq f''_{yx}(x_0,y_0)$，除非它们在$(x_0,y_0)$都连续

10.

第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义：曲顶柱体的体积
2. 二重积分的存在性(可积性)
   a) 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上可积，即二重积分存在
   b) 在 D 上有界，且在 D 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则在 D 上可积
3. 二重积分的定义：

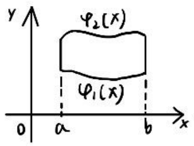
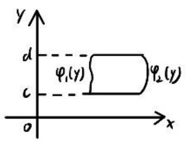
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i, c+\frac{d-c}{n}j\right)\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}$$

4. 二重积分的性质：
   a) 求区域面积：$\iint_D 1\cdot d\sigma = \iint_D dr = A$，A 为 D 的面积
   b) 可积函数必有界
   c) 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理：参考定积分的性质
5. 普通对称性：$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy, & f(x,y) = f(-x,y) \\ 0, & f(x,y) = -f(-x,y) \end{cases}$

   轮换对称性：把 x、y 对调后，区域 D 关于 y=x 对称(或不变)，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$$

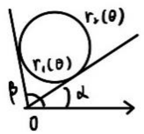
6. 二重积分的计算
   a) 直角坐标系下：**下限≤上限**

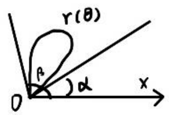
X 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

Y 型：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)\,dx$

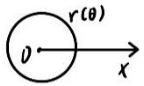
   b) 极坐标系下：先积 r，后积θ



O 在 D 外：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$



O 在 D 边界上：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$



O 在 D 内：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{r(\theta)} f(rcos\theta, rsin\theta)r\,dr$

   c) 选择的**一般**原则：

若①被积函数为$f(x^2+y^2), f\left(\frac{y}{x}\right), f\left(\frac{x}{y}\right)$等形式；②积分区域为圆或者圆的一部分⇒优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系

   d) **极坐标与直角坐标的相互转化**：

   ①$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$；②画好 D 的图形

7. 交换积分次序：**画图**，转换成二重积分，然后交换次序
8.

第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程：$F=\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$或$y^{(n)} = f\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)$

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解
   a) 变量可分离型：$y' = f(x)g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \Rightarrow \int\frac{dy}{g(x)} = \int f(x)\,dx$$

   b) 可化为变量可分离型：
      i. 形如$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$：

$$令u = ax+by+c \Rightarrow \frac{du}{dx} = a+b\frac{dy}{dx} \xRightarrow{带入原方程得} \frac{du}{dx} = a+bf(u)$$

      ii. 形如$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$或$\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$：齐次微分方程

$$令u = \frac{y}{x}，则y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \xRightarrow{带入原方程} x\frac{du}{dx} + u = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u)-n} = \frac{dx}{x}$$

   c) 一阶线性微分方程：形如$y'(x) + p(x)\cdot y = q(x)$

$$通解公式\quad y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx + C\right]$$

推导： 两边同乘$e^{\int p(x)\,dx}$，得$e^{\int p(x)\,dx}y'(x) + e^{\int p(x)\,dx}p(x)\cdot y = e^{\int p(x)\,dx}q(x)$

$$\left[e^{\int p(x)\,dx}\cdot y'\right] = e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x) \Rightarrow e^{\int p(x)\,dx}\cdot y = e^{\int p(x)\,dx}\cdot q(x)\,dx + C$$

   d) 伯努利方程：形如$y' + p(x)y = q(x)y^n$

步骤:①变形为$y^{-n}\cdot y'+p(x)y^{1-n}=q(x)$

②令$z=y^{1-n}$，得$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$，则$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

③求解即可

3. 二阶可降微分方程的求解

a) $y''=f(x,y')$型(不显含未知函数 y)

①令$y'=p(x),y''=p'$，原方程变为一阶方程$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$

②若求得其解为$p=\varphi(x,C_1)=y'$，则通解为$y=\int\varphi(x,C_1)\,dx+C_2$

b) $y''=f(y,y')$型(不显含自变量 x)

①令$y'=p,y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$，原方程变为$p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

②求解得$p=\varphi(y,C_1)=\frac{dy}{dx}$，分离变量$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$

③两边积分得$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx+C_2$，即可求得通解

4. 二阶变系数线性微分方程：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

二阶常系数线性微分方程：$y''+py'+qy=f(x)$

齐次：$f(x)\equiv 0$；　　　　非齐次：$f(x)\not\equiv 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于$y''+p(x)y'+q(x)y=0$, $y_1(x),y_2(x)$是其两个线性无关的解(即$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq$常数)，则$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$为通解

b) $y^*(x)$为特解，$y(x)+y^*(x)$为特解

c) $y_1^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$的解，$y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的解，$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的解

6. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解　$y''+py'+qy=0$

特征方程$\lambda^2+p\lambda+q\lambda=0$

①$p^2-4q>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$p^2-4q=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

③$P^2-4q<0,\lambda_1,\lambda_2=a\pm\beta_i$，通解$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

7. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解　$y''+py'+qy=f(x)$

a) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$

特解$y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，

$$\text{其中}\begin{cases}Q_n(x)\text{是}x\text{的 n 次一般多项式}\\ k=\begin{cases}0,\ \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\1,\alpha=\lambda_1 or \alpha=\lambda_2\\2,\quad \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}\end{cases}$$

b) $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

特解$y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$

$$\text{其中}\begin{cases}l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 x 的两个不同的 l 次一般多项式}\\ k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征根}\\1,\alpha\pm\beta i\text{是特征根}\end{cases}\end{cases}$$

8. n 阶常系数齐次线性微分方程的解 $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$

特征方程$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\cdots+p_{n-1}\lambda+p_n=0$

a) 特征根为单实根λ，通解对应一项$Ce^{\lambda x}$

b) 特征根为 k 重实根λ，通解中对应 k 项$(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2 项$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

d) 特征根为 k 重复根$\alpha\pm\beta_i(\beta>0)$，通解中对应 2k 项

$e^{\alpha x}[(C_1+C2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x+(D_1x+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

9. n 阶非齐次微分方程$y^{(n)}=f(x)$型的解

①令$y^{(n-1)}=P(x),P'=y^{(n)}$,则$P'(x)=f(x),P(x)=y^{(n-1)}=\int f(x)\,dx+C_1$

②同理得$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\,dx+C_2$

③连续积分 n 次，得含有 n 个任意常数的通解

10.

第 13 讲 无穷级数

1. 无穷级数：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

部分和：$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$

m 项后余项：$\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k}+\cdots$

性质：　①$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm b\sum_{n=1}^{\infty}v_n$；

②$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow\sum_{n=m+1}^{\infty}u_n$收敛

③收敛的必要条件：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

2. 正项级数: $u_n \geq 0$

a) 收敛的充分必要条件: 部分和数列$\{S_n\}$有界

b) 比较判别法: 大的收敛，小的也收敛；小的发散，大的也发散

c) 比较判别法的极限形式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$

i. A=0，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛 $\Leftrightarrow$ u_n是v_n的高阶无穷小

ii. A=+∞，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也发散 $\Leftrightarrow$ 低阶

iii. 0＜A＜+∞，v_n和u_n有相同的敛散性 $\Leftrightarrow$ 同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 $\Leftrightarrow$ 前＞后；②$\rho>1$，发散 $\Leftrightarrow$ 前＜后；

e) 根值判别法(柯西判别法): $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$

①$\rho<1$，收敛 $\Leftrightarrow$ 后一项多开一次更小；②$\rho>1$，发散；

3. 交错级数: 各项正负相间，即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$

a) 莱布尼兹判别法: $\{u_n\}$单调不增且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则收敛

4. 任意项级数: 各项可正、可负、可为零，记作$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

绝对值级数: 给任意项级数加上绝对值，即$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为任意项级数，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**

定理: 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛；

5. 收敛级数的性质

①随便加括号，仍收敛，和不变； ②随便加括号后发散，原级数必发散

③加括号后收敛，原级数不一定收敛；④绝对收敛的级数有可交换性

6. 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数: $u_n(x)$是 n 次幂函数 一般形式: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$; 标准形式: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

a) 阿贝尔定理: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=x_1(\neq 0)$收敛，所有$|x|<|x_1|$，绝对收敛

x_2 发散 $>|x_2|$，发散

b) 收敛半径的存在性: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛半径 R(⩾0)必存在

①x=0 收敛，R=0；②整个轴上都收敛，R=+∞

③|x|<R，绝对收敛；|x|>R，发散；x=±R，可能发散可能收敛

c) 收敛半径的求法: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho},\rho\neq 0\\+\infty,\rho=0\\0,\rho=+\infty\end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 + x=±R 处的敛散性

7. 和函数: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

幂级数相等，即在点 x=0 处的某领域内相等，则同幂次的系数相等，即$a_n=b_n$

四则运算:

$$\left(\sum_{n=v}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,|x|<R=\min\{R_a,R_b\},c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

性质: ①

②$S(x)$可积，则$\int_0^x S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\cdot x^{n+1}}{n+1}(x\in I)$的 R 不变，I 可能扩大

③$S(x)$可导，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}(|x|<R)$的 R 不变，I 可能缩小

8. ★重要的幂级数展开式

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,-1<x<1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leq 1$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\begin{cases}x\in(-1,1),\ \alpha\leq -1\\x\in(-1,1],-1<\alpha<0\\x\in[-1,1],\quad \alpha>0\end{cases}$$

9. 泰勒级数：$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

麦克劳林级数：$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x)^n$

具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

10. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x) \in (x_0-R, x_0+R)$有任意阶导数，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, |x-x_0| < R$$

11. 幂级数展开求法

①直接算；②间接法：变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

12. ★**重要结论:**

调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

p 级数：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{发散，} p \le 1 \\ \text{收敛，} p > 1 \end{cases}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(ln\, n)^p} \begin{cases} \text{发散，} p \le 1 \\ \text{收敛，} p > 1 \end{cases}$

交错调和级数：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ 收敛

13. 幂级数收敛域的求法

a) 具体型步骤：①$\Sigma u_n(x) \Rightarrow \Sigma |u_n(x)|$

②使用比值、根值判别法，获得收敛区间；③讨论端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$在某点$x_1$的敛散性

①收敛，$R \ge |x_1-x_0|$；②发散，$R \le |x_1-x_0|$；③条件收敛，$R=|x_1-x_0|$

ii. 已知$\Sigma a_n(x-x_1)^n$的敛散性，求$\Sigma b_n(x-x_2)^m$的敛散性

①$(x-x_1)^n$和$(x-x_2)^m$的转换：平移收敛区间； R 不变

提出或者乘$(x-x_0)^k$ R 不变

②a_n和b_n的转换：逐项求导 R 不变，I 可能缩小

or 积分 R 不变，I 可能扩大

14. 幂级数和函数的求法

a) 突破口：$(an+b)^c$在分母上，先导后积；在分子上，先积后导

b) 解题过程标注收敛域

c) 重要结果

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x), -1 \le x < 1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$

15.

第 14 讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率：$y=f(x), \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，则$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = f'(x)\frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式：$k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$ 曲率半径：$R = \frac{1}{k}(y'' \ne 0)$

曲率圆：$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$ 其中$\alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功：$W = \int_a^b F(x)\,dx$ 抽水做功：$W = \rho g \int_a^b xA(x)\,dx$

水压力：$P = \rho g \int_a^b x[f(x)-h(x)]\,dx$

4. 平面曲边梯形的形心坐标：$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} x\,dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$ $\bar{y}$同理

平面曲线弧长：①$y=y(x), s=\int_a^b \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, s=\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

③$r=r(\theta), s=\int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

旋转曲面面积：①$y=y(x), S=2\pi\int_a^b |y(x)|\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$

②$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, S=2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

平行截面面积已知的立体体积：$V=\int_a^b A(x)\,dx$

5. 欧拉方程：形如$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = f(x)$

解法: ①当 x>0，令$x=e^t$，则$t=\ln x, \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}$，

$\frac{d^2y}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$，方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t)$，求解

②当 x<0，令$x=-e^t$，同理得

6. 傅里叶级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$[-\pi,\pi]$

其中$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$　　$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$

7. 狄利克雷收敛定理：$[-\pi,\pi]$上连续 or 只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则在$[-\pi,\pi]$上处处收敛

和函数$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$$\text{且}S(x)=\begin{cases} f(x)\text{，x 为连续点} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\text{，x 为间断点，其中}f(x_0\pm 0)\text{表示}\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}f(x) \\ \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}\text{，}x=\pm\pi \end{cases}$$

8. 傅里叶展开式：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$，$[-l,l]$

其中$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$　　$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$

S(x)和傅里叶级数的类似

9. 正弦级数：$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$

余弦级数：$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$

10.

第 16 讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积：$a\cdot b=a_xbx+a_yb_y+a_zb_z=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$

a 在 b 上的投影：$P_{rj_b}a=\frac{a\cdot b}{|b|}$　　$a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$

2. 向量积：$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$　　$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

$a||b\Leftrightarrow|a\times b|=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{bx}=\frac{a_y}{by}=\frac{a_z}{bz}$

3. 混合积：$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

三向量共面：$[abc]=0$

4. 方向余弦：$\cos\alpha=\frac{a_x}{|a|},\cos\beta,\cos\gamma$

5. 单位向量：$a^o=\frac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

任意向量：$r=r(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

6. 平面方程：一般式：$Ax+By+Cz+D=0$

点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面束：满足某种规律的平面族

7. 直线方程：一般式：两平面的交线，即联立方程

点向式：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

参数式：$x=x_0+lt,y=y_0+mt,z=z_0+nt$，t 为参数

两点式：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

8. 距离公式：点到面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

点 P_0 到线(过 P_1)：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_0P_1}|}{|\tau|}$，$\tau=(l,m,n)$为方向向量

两平行直线：$d=\frac{|\tau\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau|}$ 两异面直线：$d=\frac{|(\tau_1\times\tau_2)\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\tau_1\times\tau_2|}$

两平行平面：$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

9. 直线关系：方向向量τ_1,τ_2 $\theta=arc\cos\frac{\tau_1\cdot\tau_2}{|\tau_1|\cdot|\tau_2|}$

平行：$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ 垂直：$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$

10. 平面关系：法向量$n_1=(A_1,B_1,C_1),n_2$ $\theta=arccos\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}$

平行：$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

11. 平面与直线关系：将直线的τ当成平面的法向量

12. 空间曲线：○一般式Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 几何意义：两曲面的交线

①切向量：$\tau=\left(\begin{vmatrix}F'_y & F'_z\\G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{P_0},\begin{vmatrix}F'_z & F'_x\\G'_z & G'_x\end{vmatrix}_{P_0},\dots\right)$

②切线方程：$\frac{\mathrm{x-x_0}}{\tau(0)}=\frac{\mathrm{y-y_0}}{\tau(1)}=\frac{\mathrm{z-z_0}}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

○参数方程Γ：$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$

①切向量：$\tau=\left(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)$ ②切线方程：$\frac{x-x_0}{\tau(0)}=\frac{y-y_0}{\tau(1)}=\frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程：$\tau(0)(x-x_0)+\tau(1)(y-y_0)+\tau(2)(z-z_0)=0$

曲线在坐标面的投影：例如在 xOy 的投影，将一般式Γ中的 z 消去，

得$\varphi(x,y)=0$，曲线方程为$\begin{cases}\varphi(x,y)=0\\z=0\end{cases}$

13. 空间曲面：$F(x,y,z)=0$

①法向量：$n=\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$

②法线方程：$\frac{x-x_0}{n(0)}=\frac{y-y_0}{n(1)}=\frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面：$n(0)(x-x_0)+n(1)(y-y_0)+n(2)(z-z_0)=0$

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 双曲抛物面：$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

抛物柱面：$y=ax^2$

14. ★旋转曲面：曲线Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$绕直线 L：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$旋转一周

解法：$\begin{cases}\begin{cases}\overrightarrow{M_1P}\perp s\Rightarrow m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0\\|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|\Rightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\dots=(x_1-x_0)^2+\dots+\dots\end{cases}\\\begin{cases}F(x_1,y_1,z_1)=0\\G(x_1,y_1,z_1)=0\end{cases}\end{cases}$

15. 空间曲面面积：$z=z(x,y),S=\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dx\,dy$

16. 方向导数：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$

17. 梯度：$grad\,u|_{P_0}=\left(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)\right)$

18. 方向导数和梯度得关系：$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=grad\,u|_{P_0}\cdot l^o=\left|grad\,u|_{P_0}\right|\cos\theta$

19.

第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分： 几何意义：空间物体的质量

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j,e+\frac{f-e}{n}k\right)\frac{b-a}{n}\cdot\frac{d-c}{n}\cdot\frac{f-e}{n}$$

2. 考研数学中，三重积分总是存在的
3. 凑三重积分定义步骤

①提出$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$；②凑出$\frac{i}{n},\frac{j}{n},\frac{k}{n}$；③$\frac{i}{n}=0+\frac{i-0}{n}$，其他两个同理，凑定义完成

4. 性质：　　求空间区域体积：$\iiint_\Omega 1\,dv=\iiint_\Omega dv=V$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

~~5. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性~~

6. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系：$\iiint_D f(x,y,z)\,dv=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz$

b) 柱面坐标系：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$

$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(rcos\theta,rsin\theta,z)r\ drd\theta dz$

c) 球面坐标系：$x=r\ sin\ \varphi\ cos\ \theta,y=r\ sin\varphi\ sin\ \theta,z=r\ cos\varphi$

$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_D f(r\ sin\varphi\ cos\theta,rsin\varphi\ sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,d\varphi d\theta dr$

$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}d\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)}f(r\ sin\varphi\ cos\theta,rsin\varphi\ sin\theta,z)r^2\sin\varphi\,dr$

适用范围：①被积函数含$f(x^2+y^2+z^2)$或$f(x^2+y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用（$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\,dv}{\iiint_\Omega dv}\Rightarrow\iiint_\Omega x\,dv=\bar{x}\cdot v$）

7. 第一型曲线积分：$\int_L f(x,y)\,ds$或$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds$　　几何意义：曲线的质量
8. 考研数学中，第一型曲线积分总是存在的
9. 性质：　　求曲线长度：$\int_\Gamma 1\,ds=l_\tau$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

10. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性
11. 第一型曲线积分的计算

a) 空间曲线长度：$x=x(t),y=y(t),z=z(t)$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

b) 平面曲线：

①y = y(x)　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{1+[y'(t)]^2}dt$　类似：平面曲线弧长

②$x=x(t),y=y(t)$　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$

③$r=r(\theta)$　$\int_L f(x,y)\,ds=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)cos\theta,r(\theta)sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

12. 第一型曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS$　　几何意义：曲面质量
13. 考研数学中，第一型曲面积分总是存在的
14. 性质：　　求曲线长度：$\iint_\Sigma 1\,dS=S$

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：定积分的性质

15. 普通对称性、轮换对称性：参考二重积分的对称性
16. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$f(x,y,z)$

③计算$z_x',z_y'\Rightarrow dS=\sqrt{1+(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2}\,dx\,dy$

得到$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,dS=\iint_\Sigma f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+\left(z_y'\right)^2}\,dx\,dy$

b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

17. 重积分和第一型线面积分的应用

a) 面积&体积：平面面积、空间曲线长度$f(\cdot)=1$、空间曲面面积

空间体积：$V=\iint_D|f(x,y)-g(x,y)|\,d\sigma$

b) 重心&形心：$\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$　空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例：平面薄片，$\bar{x}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)\,d\sigma}$，$\bar{y}$同理

c) 转动惯量：$I=mr^2$　　平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如：空间物体，$I_x=\iiint_\Omega (y^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dv$，$I_y,I_z,I_O$同理

d) 引力：$F=G\frac{Mm}{r^2}$　　平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如：光滑曲线，$F_x=Gm\int_L \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}ds$，$F_y,F_z$同理

18. 重要结论：

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}(x^2+y^2+z^2)\,dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr=\frac{4}{5}\pi R^5$$

19.

第 18 讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分：$\int_\Gamma F(x,y,z)\,dr=\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)\,dz$

物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功

2. 考研数学中，第二型曲线积分总是存在的

3. 性质：线性性质，可加性，有向性：$\int_{\widehat{AB}}F\cdot dr=-\int_{\widehat{BA}}F\cdot dr$

对称性：假设Γ关于yOz对称，　　（无轮换对称性）

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1}P(x,y,z)\,dx, & P(x,y,z)=-P(-x,y,z)\\ 0, & P(x,y,z)=P(-x,y,z)\end{cases}$$

4. 平面第二型曲线积分的计算

a) 直接计算（参数法）：化为定积分　　α,β大小无所谓，关键对应起、终点

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}\,dt$$

b) 格林公式：　　条件：封闭，P、Q 有一阶连续偏导

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$$

若①L 不是封闭曲线：补线法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

5. 平面曲线积分与路径无关

6. 空间第二型曲线积分计算：　　斯托克斯公式

$$\oint_l P\,dx+Qdy+Rdz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$（第二型曲面积分形式）

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS$$（第一型曲面积分形式）

7. 第二型曲面积分：　　物理背景：向量函数通过曲面的通量

$$\iint\limits_\Sigma F\cdot dS=\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$$

8. 考研数学中，第二型曲面积分总是存在的

9. 性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考第二型曲线积分

10. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将Σ投影到某一平面（比如xOy面）⇒投影区域为D（比如D_{xy}）

②将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$带入$R(x,y,z)$

③将$dx\,dy$写成$\pm dx\,dy$，Σ方向为上取"+"

得$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy$

a) 高斯公式：$\oiint_\Sigma P\,dy\,dz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

若①Σ不是封闭曲面：补面法；②P、Q、其偏导在 D 上不连续：挖去法

11. 两类曲面积分关系：第一型与第二型

$dy\,dz=\cos\alpha\,dS,dz\,dx=\cos\beta\,dS,dxdy=\cos\gamma\,dS$

转换坐标变量法：$z=z(x,y)\Rightarrow dydz=-z_x'dxdy,dzdx=-z_y'dxdy\Rightarrow$

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_\Sigma P\big(x,y,z(x,y)\big)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)dxdy$$

Q,R同理，当Σ定向的法向量与 z 轴夹角在 0~90°，取 +

12. 设置$A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$

散度：$div\,A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$　　旋度：$rot\,A=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

常用公式：①$div(grad\ u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；

②$rot(grad\ u)=0$；③$div(rot\ A)=0$；

13.