第一章 实分析概要

第一节 集合及其运算

- **例 1.5** 证明 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  证 先证明包含关系：$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  设 $x \in (A \cup B) \cap C$，则 $x \in (A \cup B)$，且 $x \in C$。从而 $x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \in C$。这就是说，$x \in A$ 且 $x \in C$，或 $x \in B$ 且 $x \in C$，故 $x \in A \cap C$，或 $x \in B \cap C$，所以 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$。

  再证明相反的包含关系：$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$

  设 $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$，则 $x \in A \cap C$，或 $x \in B \cap C$。从而 $x \in A$ 且 $x \in C$，或 $x \in B$ 且 $x \in C$。这就是说，$x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \in C$。故 $x \in A \cup B$ 且 $x \in C$，因此 $x \in (A \cup B) \cap C$。

- **定理 1.1** 设 X 为基本集，为任意集组，则1）$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcap_{\alpha \in I} (A_\alpha)^C$； 2）$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^C = \bigcup_{\alpha \in I} (A_\alpha)^C$

第二节 实数的完备性

- 定理 2.1 (区间套定理)
  设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为实数轴上的任一闭区间套, 其中 a_n 与 b_n 都是实数, 那么存在唯一的一个实数 ξ 属于一切闭区间 $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$,   即 $\xi \in \bigcap_{n=1} [a_n, b_n]$, 并且$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi$

- **命题 2.1** 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，则 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ 的充要条件是$\{x_n\}$ 的每一个子列都收敛而且有相同的极限值 a

  证明 充分性是显然的，只要证明必要性。
  因为 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, 必 $\exists N \in N^*$ 使得 $n > N$ 时，有$|x_n - a| < \varepsilon$

  取 $K = N$, 则当 $k > K$ 时，必有 $n_k > n_K \geq N$, 从而$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$，即$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$

- **定理 2.2 （列紧性定理）** 任何有界数列必有收敛子列

  证明 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，则必存在两个数 a 与 b，使得

$$a \le x_n \le b, n = 1, 2, \cdots$$

  (1) 将区间$[a,b]$等分为两个子区间，那么，其中至少有一个子区间含有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，即该子区间为$[a_1,b_1]$。（若两个子区间同时含有无穷多项，则可任取其一作为$[a_1,b_1]$）

(2) 在将$[a_1,b_1]$二等分，即其中的含有无穷多个x_n的子区间为$[a_2,b_2]$.如此继续下去，就得到一个闭子区间列$\{[a_k,b_k]\}$，

它显然满足：1）是渐缩的；2）$\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b-a}{2^k}=0$，有康托区间套定理，比有唯一的实数$\xi$属于一切$[a_k,b_k]$，并且有$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$

由于每个子区间都含有$\{x_n\}$的无穷多项，故可在子区间$[a_1,b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记作x_{n_1}；在子区间$[a_2,b_2]$中取$\{x_n\}$的一项，记作x_{n_2}，并且使$n_2>n_1$.如此继续下去，可以得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$：

$$a_k\le x_{n_k}\le b_k$$

$$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$$

由于$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=\xi$，故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{nk}=\xi$，这就是说，$\{x_{nk}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子列。

- **定理 2.3 柯西(Cauchy)收敛原理 (完备性定理)** 数列x_n收敛的充分必要条件是，它是一个基本数列。

证明 必要性　设$x_n\to a$，则对任意的$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$m,n>N$时

$$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而
$$|x_m-x_n|\le|x_m-a|+|x_n-a|<\varepsilon$$

充分性　设$\{x_n\}$是一个基本数列，则$\{x_n\}$必是有界数列，事实上，取$\varepsilon=1$，必有正整数N_0，当$m,n>N_0$时，

$$|x_m-x_n|<1$$

取$m=N_0+1$，则当$n>N_0$时

$$|x_{N_0+1}-x_n|<1$$

从而当 $n > N_0$ 时，$$|x_n| \le |x_{N_0+1}| + |x_{N_0+1} - x_n| < |x_{N_0+1}| + 1$$

而数列 $\{x_n\}$ 的前 N_0 项是 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{N_0}\}$ 有限的，因此，数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据定理 2.2，$\{x_n\}$ 中必有收敛子列 $\{x_{nk}\}$，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = a$，则任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 K，当 $k > K$ 时，

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

已知为 $\{x_n\}$ 为基本数列，故存在正整数 N_1，当 $k > N_1$（从而$n_k \ge k > N_1$）时，

$$|x_k - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N = \max(K, N_1)$，则当 $k > N$ 时

$$|x_k - a| \le |x_k - x_{nk}| + |x_{nk} - a| < \varepsilon$$

这就说明 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

- **定理 2.4 (单调收敛定理)** 单调有界数列（即单调增有上界数列或单调减有下界数列）必然收敛

  证明： **反证法：** 不妨设 $\{x_n\}$ 为单调增有上界数列，若 $\{x_n\}$ 不收敛，则由定理 2.3，存在 $\varepsilon_0 > 0$，对于任意正整数 N，不等式

  $$|x_m - x_n| < \varepsilon_0$$

  不能对一切大于或等于 N 的 m, n 成立，因而，当取 $N = 1$ 时，必有 $m_1, n_1 \ge 1$，使得

  $$|x_{m_1} - x_{n_1}| \ge \varepsilon_0$$

  不妨设 $m_1 > n_1$，取 $N = m_1 + 1$，又必有 $m_2, n_2 \ge m_1 + 1$，使得

  $$|x_{m_1} - x_{n_1}| \ge \varepsilon_0$$

  不妨设 $m_2 > n_2$。如此继续下去，可得正整数列

  $$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots < n_k < m_k < \cdots$$

  使不等式

  $$|x_{m_k} - x_{n_k}| \ge \varepsilon_0 \qquad k = 1, 2, \cdots$$

  成立。已知 $\{x_n\}$ 为单调增数列，故有 $x_{m_k} > x_{n_k}$，从而

  $$|x_{m_k} - x_{n_k}| = x_{m_k} - x_{n_k} \ge \varepsilon_0$$

  于是

  $$x_{m_k} \ge x_{n_k} + \varepsilon_0 \ge x_{m_{k-1}} + \varepsilon_0 \ge x_{n_{k-1}} + 2\varepsilon_0 \ge \cdots \ge x_{n_1} + k\varepsilon_0$$

  因此，当 k 充分大时，x_{m_k} 可以大于任意给定的正数，这与假设 $\{x_n\}$ 有上界相矛盾。

  类似可证，单调减有下界数列也是收敛的。

- 从定理2.1 (区间套定理) → 定理 2.2 （列紧性定理）→定理 2.3 柯西（Cauchy）收敛原理 (完备性定理) → 定理 2.4 (单调收敛定理)→定理 2.5 确界存在定理 → 定理 2.6 （有限覆盖定理）

第三节 可数集与不可数集

第四节 直线上的点集与连续函数

- **定理 4.2** 点 a 是集 E 的极限点的**充要**条件是存在 E 中的点列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq a)$，使$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

  证明： 必要性

  设 a 是集 E 的极限点，对于每个正整数 n，做 a 的邻域 $(a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$。由定义可知，必存在 E 中的点 $a_n, a_n \neq a, a_n \in (a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n})$，从而得一点列 $\{a_n\}$，满足

  $$|a_n - a| < \frac{1}{n}$$

  因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

  充分性：设 (α,β) 为 a 的一个邻域，取 $\varepsilon>0$，使 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$。因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a_n \neq a$，故存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|a_n - a|<\varepsilon$，即当 $n>N$ 时，$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$，

  因此 a 为 E 的极限点。

- 定理 4.3 非空集 E 是闭集的**充要**条件是 $E \subset E$

- **定理 4.4** 集合 E 为闭集的**充要**条件是 $E = \bar{E}$ 。

  证明：必要性 设 E 是闭集，由定理 4.3， $E \subset E$。故 $\bar{E} = E \cup E = E.$

  充分性 设 $E = \bar{E}$, 则由 $E \subset \bar{E} = E$ 及定理 4.3 知 E 是闭集。

- **例 4.4** 设 $f(x) = \frac{1}{x}, E = (0,1)$, 则 $f(x)$ 在 E 上连续但不一致连续。

  证明：$\forall x_0 \in E$，由$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，得$\frac{1}{x_0} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \varepsilon$

  当 $\frac{1}{x_0} - \varepsilon < 0$ 时，只要考虑右边的不等式，得$x - x_0 > -\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\alpha_0}$

  当 $\frac{1}{x_0} - \varepsilon > 0$ 时，则有$\frac{x_0}{1-\varepsilon x_0} > x > \frac{x_0}{1+\varepsilon x_0}$

  故$\frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0} > x - x_0 > -\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$。因此，只要取$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}, \frac{\varepsilon x_0^2}{1-\varepsilon x_0}\right) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$

  当 $|x - x_0| < \delta$ 时，就有不等式 (1.14) 成立，从而得知 $f(x)$ 在 E 上处处连续。但由于 δ 与 x_0 有关，因此 $f(x)$ 在 E 上不一致连续。

- **例 4.5** 考察函数列 $f_n(x) = x^n, x \in (0,1), n = 1,2,\cdots$, 显然, 当 $n \to \infty$ 时, $f_n(x) \to 0$ 。对于任给的 $\varepsilon > 0$, 由不等式$|x^n - 0| = x^n < \varepsilon$

  容易解得 $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$ (这里 $[a]$ 表示数 a 的不大于 a 得整数部分) 它既与 ε 相关，又与 x 相关，可以看成是 ε 与 x 的函数。

- **例 4.6** 证明函数列$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $n = 1,2,\cdots$，在 $E = [0,1]$ 上一致收敛于 0 。

  事实上，由于 $$0 \le f_n(x) = \frac{1}{2n} \bullet \frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n}$$

  因此，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N(\varepsilon) = [\frac{2}{\varepsilon}]$，就有

  $$|f_n(x) - 0| < \varepsilon, \qquad x \in [0,1]$$

  故 $f_n(x)$ 在[0，1]上一致收敛于 0。

- **定理 4.9** 定义在点集 $E \subset R$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 的**充要**条件是: 对于 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in N^*$, 使得当 $m,n > N(\varepsilon)$ 时，不等式$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$对于所有 $x \in E$ 的成立.

证明：必要性 设$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)$，使得当$n>N(\varepsilon)$时，对于所有的$x\in E$都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$$

故当$m,n>N(\varepsilon)$时，不等式

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f(x)|+|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对于所有的$x\in E$都成立。

充分性 假定定理的条件成立。由定理 2.3，对于任何固定的点$x\in E$，数列$\{f_n(x)\}$都收敛，设其极限为$f(x)$，现在证明$\{f_n(x)\}$在上一致收敛于$f(x)$。由已知，对于任给的$\varepsilon>0$，取$m=n+k(k=1,2,\cdots)$，对于所有的$x\in E$及k，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$|f_{n+k}(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\lim_{k\to\infty}|f_{n+k}(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

此即

$$|f(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}$$

所以当$n>N(\varepsilon)$时，不等式

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对于所有的$x\in E$都成立，故$\{f_n(x)\}$在E上一致收敛于$f(x)$。

第五节 点集的勒贝格测度与可测函数

第六节 勒贝格积分

- 定理 6.7 设 $mE<\infty, f(x)$ 与 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 都是 E 上的非负可测函数，并且 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)(a.e.)$，则$\int_E f(x)dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E u_n(x)dm$
- **例 6.1** 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，试计算 R 积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}dx$ 的值.

  因为$\ln x=\ln[1-(1-x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n},\quad x\in(0,1)$
  所以 $\frac{\ln x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n},\quad x\in(0,1)$

  在区间[0,1]内，上面级数的每一项都是非负的，利用定理 6.7，可得

  $$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{\pi^2}{6}$$

- **例 6.2** 求极限 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx=0,\quad x\in(0,1)$$

$$\left|\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right|\le\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\le\frac{nx^{1/2}}{2nx}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x(0,1)$$

而 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在区间[0,1]上 R 可积，从而 L 可积，因此，根据勒贝格控制收敛定理，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{1/2}}{1+n^2x^2}\sin^5 nxdx=0$$

- **例6. 3** 设 $f(t)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的 L 可积函数，称$\tilde{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\pi}f(t)dt$为函数 $f(t)$ 的富里哀变换，试证1）$\tilde{f}(x)$ 是上$(-\infty,+\infty)$的连续函数； 2）$\tilde{f}(x)=-\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\alpha}-1}{it}f(t)dt$

证 1） 因为

$$\tilde{f}(x+h)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h)}f(t)dt$$

而且$|e^{it(x+h)}f(t)|=|f(t)|$是 L 可积的，由勒贝格控制收敛定理立即可得

$$\lim_{h\to0}\tilde{f}(x+h)=\lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it(x+h)}f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=\tilde{f}(x)$$

因此 $\tilde{f}(x)$ 是连续函数.

2） 根据导数的定义：

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{it}f(t)dt=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}]f(t)dt$$

而

$$\left|[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}]f(x)\right|\le\left|\frac{e^{-ith}-1}{it}\right||f(t)|=\left|\frac{2\sin\frac{h}{2}t}{t}\right||f(t)|\le|h||f(t)|$$

因此，当$|h|\le1$时，被积函数为$|f(t)|$所控制，由勒贝格控制收敛定理，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{it}f(t)dt&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[\frac{e^{-it(x+h)}-1}{it}-\frac{e^{-itx}-1}{it}]f(t)dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}(\frac{e^{-itx}-1}{it})f(t)dt=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)dt=-\tilde{f}(x)\end{aligned}$$

第二章 距离空间

第一节 距离空间的基本概念

- 距离满足条件：1) 非负性, $\rho(x,y)\ge0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
  2) 对称性, $\rho(x,y)=\rho(y,x)$; 3) 三角不等式，对任意的 $x,y,z\in X$, 有
  $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$
- **例 1.2** 连续函数空间 $C[a,b]$
  令 $C[a,b]=\{x(t)\mid x(t)$ 为 [a, b] 连续函数 $\}$
  在 $C[a,b]$ 上定义$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}x(t)-y(t)|$

现在我们来证明 $\rho(x,y)$ 是距离。条件 1），2）显然满足，只需验证三角不等式就够了。

设 $x(t), y(t), z(t) \in C[a,b]$，因为对任何 $t \in [a,b]$ 均有

$$
\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &\le |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| \\
&\le \max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)| + \max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)| \\
&= \rho(x,z)+\rho(y,z)
\end{aligned}
$$

从而有

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$$

故 $C[a,b]$ 按距离(2.6)是距离空间。 ■

- **例 1.3** 有界数列空间 m 。
  设 m 表示所有的有界数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$(其中 $|\xi_i| \le k_x, i=1,2,\cdots,\quad k_x$ 是常数) 所构成的集合。如果 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in m y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in m$，定义
  $\rho(x,y)=\sup_i |\xi_i-\eta_i|$
  类似于例 1.2, 容易验证 $\rho(x,y)$ 是距离，从而 m 按这个距离构成距离空间。
- 例 1.4 离散距离空间 $\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\ 1, & x\ne y\end{cases}$
- 例 1.5 空间 $L^p(E)(p\ge 1)$。$L^p[a,b]=\left\{f\left((x)\mid\left(\int_a^b|f(x)|^p\right)^{1/p}<\infty\right\}\right.$
  $\rho(x,y)=\left(\int_E|x(t)-y(t)|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$
- 例 1.6 l^p 空间 $(p\ge 1)$。令 $l^p=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\cdots)\,|\sum_{i=1}^{\infty}|\,\xi_i|^p<+\infty\right\}$
  如 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n,\cdots)$， $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n,\cdots)\in l^p$， $\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

第二节 距离空间中的开集、闭集与连续映射

- **定理 2.5** 设 X,Y 都是距离空间， $T:X\to Y$，则下列命题是等价的。
  1) T 在 $x_0\in X$ 连续;
  2) 对于 Tx_0 的任一邻域 $s(Tx_0,\varepsilon)$, 必存在 x_0 的邻域 $s(x_0,\delta)$, 使得 $T(S(x_0,\delta))\subset S(Tx_0,\varepsilon)$
  3) 对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$, 若 $x_n\to x_0$, 则必有 $Tx_n\to Tx_0$

证明：$1)\Rightarrow 2)$，由在 x_0 连续的定义，这是显然的。

$2)\Rightarrow 3)$，设 $\{x_n\}\subset X$，且 $x_n\to x_0$，则对于 $\delta>0$，必存在 N，当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x_0)<\delta$，即当 $n>N$ 时，$x_n\in S(x_0,\delta)$，从而有 $Tx_n\in S(Tx_0,\varepsilon)$,也就是说当 $n>N$ 时, $\rho_1(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon$。故

$$Tx_n\to Tx_0$$

$3)\Rightarrow 1)$，用**反证法**，设 T 在 x_0 不连续，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任何的 $\delta>0$，都存在 x 满足 $\rho(x,x_0)<\delta$，但

$$\rho_1(Tx_n,Tx_0)\ge\varepsilon_0$$

这就是说 $x_n\to x_0$，但 Tx_n 不趋近于 Tx_0，与假设矛盾。