

## 目录

第1讲 高等数学常用基础知识.....	1
第2讲 极限与连续 .....	1
第3讲 一元函数微分学的概念与计算.....	3
第4讲 一元函数微分学的几何应用 .....	4
第5讲 中值定理.....	4
第6讲 零点问题、微分不定式.....	5
第7讲 一元函数积分学的概念与计算.....	6
第8讲 一元函数积分学的几何应用 .....	7

### 第1讲 高等数学常用基础知识

1. 余切函数:  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$   $\sin x$  一个门的面积为 2,  $\frac{\pi}{4} \sim \frac{3\pi}{4}$  为  $\sqrt{2}$

正割函数:  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$  余割函数:  $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

2. 符号函数:  $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ; 取整函数:  $y = [x]$

3. 若  $U = \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $V = \min\{f(x), g(x)\}$ ,

$$U + V = f + g, U - V = |f - g|, UV = fg$$

4. 组合数公式:  $C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^n C_i^k$   $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  [推导过程](#)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = (\sum_{k=1}^n k)^2 \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2C_{n+2}^3$$

5. 积化和差公式\*4  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

和差化积公式\*4  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

第9讲 积分等式与积分不等式.....	8
第10讲 多元函数微分学 .....	8
第11讲 二重积分 .....	9
第12讲 常微分方程 .....	9
第13讲 无穷级数.....	10
第14讲 数学一、数学二专题内容.....	12
第16讲 多元函数积分学的基础知识 .....	13
第17讲 三重积分、第一型曲线曲面积分 .....	14
第18讲 第二型曲线曲面积分 .....	16

6. 万能公式  $u = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$  则  $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

7. 因式分解公式

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正偶数}) \end{aligned}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正奇数})$$

8.  $f(x) + f(-x)$  为偶函数,  $f(x) - f(-x)$  为奇函数;  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数;

$$9. \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \right]$$

### 第2讲 极限与连续

1. 数列极限定义: 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$ , 恒有  $|x_n - a| < \varepsilon$

2. 判断数列发散方法\*2: 找一个发散的子列; 找两个收敛到不同极限的子列

3. 数列极限运算规则 (参考函数的)

4. 证明  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  的极限存在: 证明单调不减, 证明有界

## 5. 函数极限定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

## 6. 函数极限存在的充要条件\*2

① 左极限=右极限=A      ②脱帽法:  $f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

7. 函数极限的性质: 唯一性; 局部有界性; 局部保号性:  $X_n \geq a$ , 极限  $A \geq a$ ;

8. 无穷小的比阶 前提:  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$

高阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ;

低阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ ;      同阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ ;

k 阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$       等价无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

## 9. 函数极限运算规则      前提: 极限都存在

a)  $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$

b)  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

c)  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ , n 为正整数

d)  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

## 10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小; 有界函数与无穷小的积是无穷小

b)  $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min(mn) \rightarrow$  加减法时低阶吸收高阶

c)  $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) = x^m \cdot o(x^n) \rightarrow$  乘法时阶数累加

d)  $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$  且为常数  $\rightarrow$  非零常数不影响阶数

## 11. ★常用的等价无穷小\*9      前提: $x \rightarrow 0$      本质: 泰勒展开

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax \quad \star x \rightarrow x_0 \text{ 等价替换成 } t \rightarrow 0$$

可以先等价, 再用洛必达, 例 2.19; 注意: 减式不能用等价替换

12. 夹逼准则:  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \lim g(x) = \lim h(x) = A$ , 则  $\lim f(x) = A$

使用方法: 缩放, 对分母中阶数最低的缩放

不验等号

对和式缩放的两种方法:

$$n \text{ 为无穷大时, } n \cdot u_{\min} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max};$$

$$n \text{ 为有限数时, } 1 \cdot u_{\max} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max} \rightarrow \lim \sum_{i=1}^n u_i = u_{\max}$$

13. 洛必达法则:  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 且一阶导都存在

辅助地位      例 2.19

若结果的极限不存在, 则洛必达失效

14. 海涅定理: (联系数列极限与函数极限)

15. 第一类间断点: 可取、跳跃

第二类间断点: 无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知 ①夹逼准则; ③幂级数求和; ④级数收敛的必要条件

②定积分定义: n, i 次数相同, 若凑不出, 可以先放缩 or 夹逼

$$\star \text{定积分特殊情况: } a = 0, b = x, \int_0^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(x \frac{i}{n}\right) \frac{x}{n}$$

b) 数列通项未知

①★单调有界数列必有极限: 先做差/商证明极限存在, 再求; ②求出表达式;

③知道极限 a, 用定义构造  $|a_n - a| \leq$  某一函数, 然后拉格朗日中值定理 or 缩放, 得出  $\lim |a_n - a| = 0$

17. 函数极限的计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$$

①判断未定式的种类。七种:  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$

i.  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ : 使分子次数大于分母次数, 即倒三角形状  $\nabla$

ii.  $0 \cdot \infty$ : 转化成  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$

iii.  $\infty - \infty$ : 转为乘除法。有分母通分; 无分母倒代换  $x = \frac{1}{t}$  或提取公因式

$$\text{iv. } \infty^0, 0^0, 1^\infty: \lim u^v = e^{\lim v \ln u} = \lim \left\{ [1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}} \right\}^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{例如: } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

②题型: 比阶题; 反问题 (反求参数); 已知某一极限求另一极限

③方法: I 等价替换: 见根号用有理化; II 等价无穷小替换

III洛必达; IV泰勒展开; V夹逼准则; VI单调有界;

VII  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

18. ★常用函数的泰勒展开式\*8 前提:  $x \rightarrow 0$  计算时保留  $o(\cdot)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$\frac{A}{B}$ 型, 展开后分子分母同阶; A-B型, 展开到它们的系数不等的  $x$  的最低次幂为止;

### 第3讲 一元函数微分学的概念与计算

1. ★导数的定义\*2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

性质: 求导 or 下限为 0 的积分, 函数奇偶性互换, 周期不变

☆注: 复杂函数的求导可以用定义

四则运算不成立的时候, 用定义

例 3.10

例 3.7

2. 设  $f(x)$  在  $x = a$  处连续,  $F(x) = f(x)|x - a|$ , 则  $F(x)$  在  $x = a$  处可导  $\Leftrightarrow f(a) = 0$

3. 某点可导的充分必要条件: 函数在该点连续, 左导数和右导数存在且相等(定义)

$$4. \text{高阶导数概念: } f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

5. 可微判别方法\*3:

$$\textcircled{1} \text{写增量 } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\textcircled{2} \text{写线性增量 } A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$$

$$\textcircled{3} \text{作极限 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x}$$

6. 四则运算的前提: 函数均可导

7. 复合函数的导数(微分):  $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

8. 反函数求导:  $y = f(x), x = \varphi(y)$ , 记  $f'(x) = y'_x, \varphi'(x) = x'_y (x'_y \neq 0)$ , 则有

$$\text{一阶 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \text{二阶 } y''_{xx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

$$9. \text{参数方程求导: } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \text{一阶: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

$$\text{二阶: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

10. 隐函数求导:  $F(x, y) = 0$ , 两边对  $x$  求导, 将  $y$  看作中间变量, 得到方程, 求解即可得到  $y'$

11. 对数求导法: 对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

$$\textcircled{1} \text{两边取对数, } \ln y = \ln f(x); \textcircled{2} \text{求导得 } \frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y[\ln f(x)]'$$

12. 幂指数函数求导法:

$$[u(x)^{v(x)}]' = [e^{v(x) \ln u(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

13.  $n$  阶导数的运算方法 \*3

$$\textcircled{2} \text{高阶求导公式: } [u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

③写出泰勒公式 or 麦克劳林公式, 比较系数

①逐次求导

14. 常见函数的  $n$  阶导数 \*8

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n (a > 0, a \neq 1)$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n} (x > 0)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (x > -1)$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$$

15. 变限积分求导公式: 设  $F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x) dx$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi'_2(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi'_1(x)$$

16. 基本初等函数的导数公式 视绝对值不见

$$(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \quad (\csc)' = -\csc x \cot x \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

#### 第4讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带、不带等号；极值、最值的区别：领域、定义域

2. 极值点  $\Leftarrow$  一阶可导 驻点：  $f'(x) = 0 \Leftarrow$  极值

3. 判断极值的充分条件 \*3

a)  $x_0$  的去心领域一阶可导

i.  $x_0$  左边,  $f'(x) < 0$ ;  $x_0$  右边,  $f'(x) > 0$ , 为极小值;

ii.  $x_0$  左边,  $f'(x) > 0$ ;  $x_0$  右边,  $f'(x) < 0$ , 为极大值;

b)  $x = x_0$  处二阶可导, 且  $f'(x) = 0, f''(x_0) \neq 0$

$f''(x_0) > 0$ , 极小值;  $f''(x_0) < 0$ , 极大值

c)  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且  $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$

$n$  为偶数,  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 极小值;  $n$  为偶数,  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 极大值

4. 凹弧:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ; 凸弧:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

5. 判断凹凸的充分条件:  $f''(x) > 0$ , 凹的;  $f''(x) < 0$ , 凸的

6. 拐点, 即  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow$  二阶可导

7. 判断拐点的充分条件 \*3

a)  $x_0$  的去心领域内二阶导数存在, 且左右领域  $f''(x)$  变号

b) 三阶可导,  $f''(x) = 0, f'''(x_0) \neq 0$

c)  $x_0$  处  $n$  阶可导,  $n$  为奇数,  $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 2, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 3)$

8. 铅锤渐近线:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+ \text{ or } x_0^-} f(x) = \infty$   $x_0$  取函数无定义的点

水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ or } -\infty} f(x) = A$

斜渐近线: 令  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ , 得  $y = kx + b$

若  $f(x)$  中  $x$  的  $n$  次方,  $>1$ , 则有铅锤渐近线;  $=1$ , 斜渐近线;  $<1$ , 水平渐近线

9. 求闭区间的最值步骤: 求可疑点(驻点和不可导点)和端点, 比较得到最值

求开区间的最值步骤: 求可疑点和两端的单侧极限, 比较得到最值或取值范围

10. 函数作图步骤: ①确定定义域和奇偶对称性;

②求出  $f'(x), f''(x)$  等于 0 和其不存在的点, 将函数划分成几个区间, 画表格判断每一个的单调性和凹凸性; ③确定渐近线(如果有的话); ④作图

研究对象	研究内容
①祖孙三代 $\left\{ \begin{array}{l} f(x), f_n(x) = x^n, f_1 * f_2 * \dots * f_n \\ f'(x): \frac{df(x)}{dx^2} = \frac{1}{2x} f'(x) \\ \int_a^x f(t) dt \\ \sum a_n x^n \end{array} \right.$	①斜率 $\rightarrow$ 切线 $\rightarrow$ 法线; ②单调性、极值点 ③凹凸性、拐点; ④渐近线; ⑤取值、值域; ⑥高阶导数
②分段函数; ③参数方程; ④隐函数	

#### 第5讲 中值定理

1. 函数的中值定理  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续

a) 有界与最值定理:  $m \leq f(x) \leq M$ , 其中  $m, M$  为  $[a, b]$  上的最值

b) 介值定理: 当  $m \leq \mu \leq M$ , 存在, 使得  $f(\xi) = \mu$

c) 平均值定理: 离散的积分中值定理

当  $a < x_1 < \dots < x_n < b$ , 在  $[x_1, x_n]$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$

d) 零点定理: 当  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$

2. 导数(微分)的中值定理 对于  $f^n(x), f^{n+1}(x)$  也满足中值定理例 5.8(2)

a) 费马定理:  $f(x_0)$  可导且为极值, 则  $f'(x_0) = 0$   $x_0$  必不为端点

b) 罗尔定理:  $f(x)$  满足  $\left\{ \begin{array}{l} [a, b] \text{ 上连续} \\ (a, b) \text{ 内可导} \\ f(a) = f(b) \end{array} \right.$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

推广: 满足以下条件之一, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

①开区间, 但端点极值都为  $A$ ; ②两端同时趋于  $+\infty$  or  $-\infty$

③一端极限为  $A$ , 另一端水平渐近线为  $x = A$ ;

④定义域为 $(-\infty, +\infty)$ , 趋于两侧, 取值趋于 $+\infty$  or  $-\infty$

c) ★拉格朗日中值定理:

“无条件成立”

$[a, b]$ 连续 $(a, b)$ 可导,  $\exists \xi \in (a, b)$ ,  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

推论:  $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \rightarrow$  联系 $f$ 和 $f'$

d) 柯西中值定理: 条件同上,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  若 $g(x) = x$ , 变成拉格朗日

e) ★泰勒公式: 阶数: 余项之前的最后一项; 本质: 任何可导 $f(x) = \sum a_n x^n$

i. 带拉格朗日余项:  $n+1$  阶可导,  $\xi$  介于 $x, x_0$ 之间

证明

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项:  $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$  计算

f) ★积分中值定理: 几何意义: 积分的几何面积=底\*平均高=矩形面积

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists \xi \in [a, b]$  or  $(a, b)$ ,  $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

3. ★麦克劳林公式:  $x_0 = 0$ 的泰勒公式

4. 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林/泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

5. 重要函数的克劳林展开式 \*7

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

6. 证明存在 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $H(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ : 罗尔定理、费马定理

a) 构造辅助函数: 把 $\xi$ 改成 $x$ , 对于 $f'(x) + g(x)f(x) = 0$ , 两边同乘 $e^{\int g(x)dx}$ ,

得构造函数 $F(x) = f(x)e^{\int g(x)dx}$

b) 验证端点值相等: 转化为给定区间内找 $F(x)$ 的两个不同的零点

研究对象	研究区间	十大定理
①抽象函数 $f(x)$ 或 $\int_a^b f(x)dx$	①指定区间 $\xi \in (a, b)$	最值定理
②乘积求导公式引发: 逆向思维	②缩小区间 例 5.5	介值定理
$f(x)f'(x) \rightarrow F(x) = f^2(x)$	$\xi \in (c, d) \subset (a, b)$	平均值定理
$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \rightarrow F(x) = ff'$	③划分区间, 多中值	零点定理
$f'(x) + f(x) \rightarrow F(x) = f(x)e^x$		费马定理
$f'(x) + f(x)\varphi'(x) \rightarrow F(x) = f(x)e^{\varphi(x)}$		罗尔定理
③商的求导公式引发:		拉格朗日中值定理
$[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) \rightarrow \frac{f'}{f} \rightarrow \ln f(x)$		柯西中值定理
		泰勒公式
		积分中值定理

## 第6讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:

- a) 零点定理: 证明根的存在 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ,  $f(x) = 0$ 至少有一个根
- b) 单调性: 证明根的唯一性  $f(x) = 0$ 在 $(a, b)$ 内单调,  $f(x) = 0$ 至少有一根
- c) 罗尔定理的推论:  $f^{(n)}(x) = 0$ 至多有 $k$ 个根,  $f(x) = 0$ 至多有 $k+n$ 个根
- d) 实系数奇次方程: 至少有一个根

2. 经典不等式 函数不等式?

$$a) 2|ab| \leq a^2 + b^2 \quad |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$\text{离散情况: } |a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

$$\text{连续情况: } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, a < b$$

b) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

特殊情况:  $n = 2, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, (a, b > 0)$

$$n = 3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, (a, b, c > 0)$$

c)  $x, y, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

d)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$   
 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$

e) 柯西不等式:  $\left[ \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$  不证大题不能用

f)  $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[ \int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

g)  $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$ , 则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{b} \quad \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) (x > 0)$

$$x < \tan x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad \sin x < x (x > 0) \quad e^x \geq x + 1, x - 1 \geq \ln x$$

$$\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$$

3. 微分不等式的证明方法 \*3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值); ②常数变量化; ③中值定理

4.

### 第7讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数; ②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数

2. 定积分的定义:  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$

注:  $\left[ \int_a^x f(t) dt \right]' = f(x), a$ 任意

3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续; ②在去见善有界, 只有有限个间断点  
 必要条件: 可积函数必有界

4. 定积分的性质: ①求区间长度: 略; ②线性性质: 略

③可加可拆性:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

④保号性:  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

特殊:  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

⑥估值定理:  $M, m$  为最大、小值,  $L$  为区间长度,  $mL \leq \int_a^b f(x) dx \leq ML$

⑦中值定理: 函数连续, 闭区间内至少存在一点  $\xi$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$

5. 变限积分的性质: ①  $f(x)$  可积,  $F(x)$  连续; ②  $f(x)$  连续,  $F(x)$  可导

6. 变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无  $x$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)] \varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)] \varphi_1'(x)$$

7. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性

8. 奇点: "∞" 和使得函数无定义的点(瑕点)

9. 不定积分计算

a) 凑微分法:  $\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f[g(x)] d[g(x)] = \int f(u) du$

i. 若  $f(x)$  较复杂, 对其(或其主要部分)求导可以得到  $g(x)$  的倍数(常数 or 函数)

$$\int f(x)g(x) dx = \frac{1}{A} \int f(x)Ag(x) dx = \frac{1}{A} \int f(x) d[f(x)]$$

ii. 得不到倍数, 可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子, 来恒等变形。常用的因子有  $e^{ax}, x^{\beta}, \sin x, \cos x$

b) 换元法:  $\int f(x) dx \xrightarrow{x=g(u)} \int f[g(u)] d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u) du$

i. 三角函数代换:  $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t, \begin{cases} x > 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

ii. 恒等变形后三角函数代换:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \Rightarrow \sqrt{\varphi^2(x) + k^2}, \sqrt{\varphi^2(x) - k^2}, \sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$$

iii. 根式代换:  $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt{ae^{bx}+c} \Rightarrow \text{令 } \sqrt{*} = t$

同时含有  $\sqrt[n]{ax+b}$  和  $\sqrt[m]{ax+b} \Rightarrow \text{令 } \sqrt[l]{ax+b} = t, l \text{ 为最小公倍数}$

iv. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上,  $\frac{1}{x} = t$

v. 复杂函数的直接代换: 含有  $a^x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arctan x$ , 令复杂函数  $= t$

**注意:** 当  $\ln x, \arcsin x, \arctan x$  与  $e^x$  或  $x^n$  乘除, 优先考虑分部积分法

c) 分部积分法:  $\int u dv = uv - \int v du$

i. 适用于  $\int u dv$  难求, 而  $\int v du$  好求

ii. 积分后简单点宜作  $u$ , 微分后简单点宜作  $v$

$P_n(x)$  与  $e^{kx}, \sin ax, \cos ax$  中的一个  $\Rightarrow u = P_n(x)$

$e^{ax}$  与  $\sin ax, \cos ax$  中的一个  $\Rightarrow u$  任选其一

$P_n(x)$  与  $\ln x, \arcsin x, \arctan x$  中的一个  $\Rightarrow u \neq P_n(x)$

iii. 推广:  $u$  与  $v$  有直到  $(n+1)$  阶的连续导数

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx$$

d) 有理函数的积分:  $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx (n < m)$

i. 方法: 把  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意:  $k$  重因式产生  $k$  项

10. 定积分的计算

a) 牛顿莱布尼兹公式:  $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_a^b$

b) 换元积分:  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi'(t)]\varphi'(t) dt$

c) 分部积分法:  $\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

d) 重要结论:

i. 偶函数,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ; 奇函数,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

ii. 周期函数,  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

iii. 区间再现公式:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

iv.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases}$

11. 凑定积分定义的方法: ① 提出  $\frac{1}{n}$ ; ② 凑出  $\frac{i}{n}$ ; ③ 转化为  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$

12. 反常积分的敛散性判别:

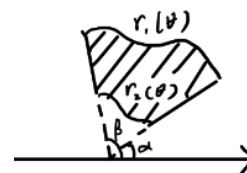
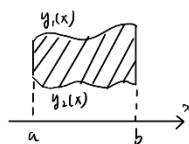
a) 无穷区间的  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ :  $p > 1$  收敛,  $p \leq 1$  发散

b) 无界函数的  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ :  $p < 1$  收敛,  $p \geq 1$  发散 (奇点  $x=0$ )

13.

## 第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

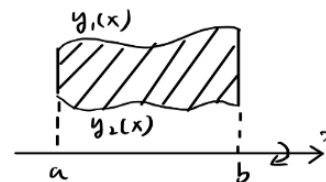
1. 计算面积

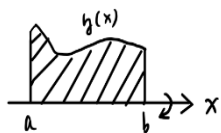


$$S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

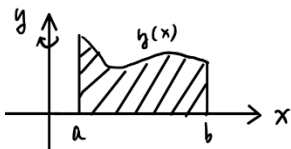
$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$$

2. 计算体积



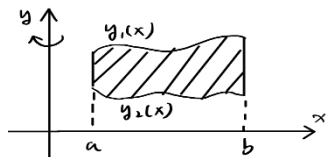


$$V = \int_a^b \pi y^2(x) dx$$



$$V_y = 2\pi \int_a^b x|y(x)| dx$$

$$V = \pi \int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)| dx$$



$$V = 2\pi \int_a^b x|y_1(x) - y_2(x)| dx$$

3. 定积分计算平均数:  $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$

### 第9讲 积分等式与积分不等式

### 第10讲 多元函数微分学

1. 领域、去心领域; 内点、外点、边界点; 有界集、无界集; 开集、闭集;  
连通集、开区域、闭区域、区域; 单连通区域、多连通区域;  
聚点: 孤立点:

2. 偏导数定义: 例如, 对  $x$ ,  $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

二阶偏导数: 例如,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$

$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$  也叫二阶混合偏导数

3. 可微: 函数的全增量  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ , 其

中  $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ ,  $A$ 、 $B$  仅与  $x, y$  有关

全微分:  $dz = A\Delta x + B\Delta y$

4. 判断函数是否可微的步骤:

a) 写出全增量  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

b) 写出线性增量  $dz = A\Delta x + B\Delta y$ , 其中  $A = f'_x(x_0, y_0)$ ,  $B = f'_y(x_0, y_0)$

c) 作极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ , 若为 0, 可微; 否则, 不可微

5. 判断偏导数连续性的步骤:

a) 用定义法求  $f'_x(x_0, y_0)$ ,  $f'_y(x_0, y_0)$

b) 用公式法求  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$

c) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$  成立, 则连续

6. 多元函数微分法则

a) 链式求导规则:  $z = f(u, v)$

i.  $u = \varphi(t), v = \psi(t)$ , 则  $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$

ii.  $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

iii.  $u = \varphi(x, y), v = \psi(y)$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dy}$

b) 隐函数存在定理

7. 二元函数的极值

a) 必要条件: 在  $(x_0, y_0)$  点, 关于  $x, y$  的一阶偏导为 0

b) 充分条件: 记  $f''_{xx}(x_0, y_0) = A$ ,  $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$ ,  $f''_{yy}(x_0, y_0) = C, \Delta = B^2 - AC$ :

①  $\Delta < 0$ ,  $\begin{cases} A < 0, & \text{极大值} \\ A > 0, & \text{极小值} \end{cases}$ ; ②  $\Delta < 0$ , 非极值; ③  $\Delta = 0$ , 不能判断

c) 求最值的步骤: 目标函数  $u = f(x, y, z)$ , 条件  $\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

① 构造辅助函数  $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$

② 令  $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x + \mu \psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda \varphi'_y + \mu \psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda \varphi'_z + \mu \psi'_z = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} F'_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

③ 解上面方程组得备选点  $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 并求  $f(P_i)$ , 取其最大值和最小值

④ 根据实际问题, 比存在最值, 所得即所求

8. 二元函数的最值计算步骤: ① 求出其在区域内所有可疑点的函数值;



②在区域边界上的最值; ③比较得出最值

9. 一般  $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0)$ , 除非它们在  $(x_0, y_0)$  都连续

10.

### 第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积

2. 二重积分的存在性(可积性)

a) 在有界闭区域  $D$  上连续, 则在  $D$  上可积, 即二重积分存在

b) 在  $D$  上有界, 且在  $D$  上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的, 则在  $D$  上可积

3. 二重积分的定义:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j\right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}$$

4. 二重积分的性质:

a) 求区域面积:  $\iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D dr = A$ ,  $A$  为  $D$  的面积

b) 可积函数必有界

c) 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理: 参考[定积分的性质](#)

5. 普通对称性:  $\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & f(x, y) = f(-x, y) \\ 0, & f(x, y) = -f(-x, y) \end{cases}$

轮换对称性: 把  $x$ 、 $y$  对调后, 区域  $D$  关于  $y=x$  对称(或不变), 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

6. 二重积分的计算

a) 直角坐标系下: 下限  $\leq$  上限

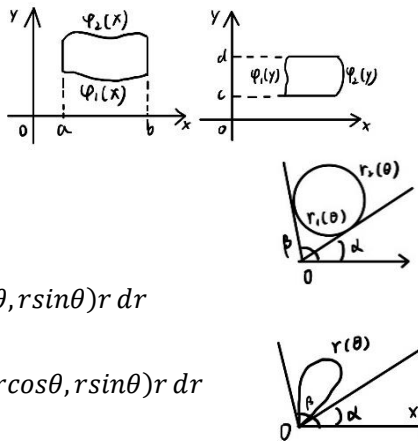
$$X \text{ 型: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

$$Y \text{ 型: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

b) 极坐标系下: 先积  $r$ , 后积  $\theta$

$$\bigcirc \text{ 在 } D \text{ 外: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

$$\bigcirc \text{ 在 } D \text{ 边界上: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$



$$\bigcirc \text{ 在 } D \text{ 内: } \iint_D f(x, y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

c) 选择的一般原则:

若①被积函数为  $f(x^2 + y^2)$ ,  $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $f\left(\frac{x}{y}\right)$  等形式; ②积分区域为圆或者圆的一部分  $\Rightarrow$

优先选用极坐标系, 否则使用直角坐标系

d) 极坐标与直角坐标的相互转化:

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}; \textcircled{2} \text{画好 } D \text{ 的图形}$$

7. 交换积分次序: **画图**, 转换成二重积分, 然后交换次序

8.

### 第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程:  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  或  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型:  $y' = f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

b) 可化为变量可分离型:

i. 形如  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ :

$$\text{令 } u = ax + by + c \Rightarrow \frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{带入原方程得}} \frac{du}{dx} = a + bf(u)$$

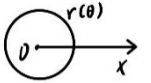
ii. 形如  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  或  $\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ : 齐次微分方程

$$\text{令 } u = \frac{y}{x}, \text{ 则 } y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \xrightarrow{\text{带入原方程}} x \frac{du}{dx} + u = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

c) 一阶线性微分方程: 形如  $y'(x) + p(x) \cdot y = q(x)$

$$\text{通解公式 } y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C \right]$$

推导: 两边同乘  $e^{\int p(x) dx}$ , 得  $e^{\int p(x) dx} y'(x) + e^{\int p(x) dx} p(x) \cdot y = e^{\int p(x) dx} q(x)$



$$[e^{\int p(x) dx} \cdot y'] = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) \Rightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot y = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C$$

d) 伯努利方程: 形如  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

步骤: ①变形为  $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$

$$\text{②令 } z = y^{1-n}, \text{ 得 } \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}, \text{ 则 } \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

③求解即可

3. 二阶可降微分方程的求解

a)  $y'' = f(x, y')$  型(不显含未知函数  $y$ )

$$\text{①令 } y' = p(x), y'' = p', \text{ 原方程变为一阶方程 } \frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

$$\text{②若求得其解为 } p = \varphi(x, C_1) = y', \text{ 则通解为 } y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2$$

b)  $y'' = f(y, y')$  型(不显含自变量  $x$ )

$$\text{①令 } y' = p, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p, \text{ 原方程变为 } p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

$$\text{②求解得 } p = \varphi(y, C_1) = \frac{dy}{dx}, \text{ 分离变量 } \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$$

$$\text{③两边积分得 } \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx + C_2, \text{ 即可求得通解}$$

4. 二阶变系数线性微分方程:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

二阶常系数线性微分方程:  $y'' + py' + qy = f(x)$

齐次:  $f(x) \equiv 0$ ;

非齐次:  $f(x) \neq 0$

5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,  $y_1(x), y_2(x)$  是其两个线性无关的解(即  $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$

常数), 则  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  为通解

b)  $y^*(x)$  为特解,  $y(x) + y^*(x)$  为特解

c)  $y_1^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  的解,  $y_2^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  的解,  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$  的解

6. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解  $y'' + py' + qy = 0$

特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$$\text{① } p^2 - 4q > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ 通解 } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\text{② } p^2 - 4q = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \text{ 通解 } y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

$$\text{③ } p^2 - 4q < 0, \lambda_1, \lambda_2 = a \pm \beta i, \text{ 通解 } y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

7. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解  $y'' + py' + qy = f(x)$

$$\text{a) } f(x) = P_n(x) e^{\alpha x} \quad \text{特解 } y^* = e^{\alpha x} Q_n(x) x^k,$$

$$\text{其中 } \begin{cases} Q_n(x) \text{ 是 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \\ 1, & \alpha = \lambda_1 \text{ 或 } \alpha = \lambda_2 \\ 2, & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$$

$$\text{特解 } y^* = e^{\alpha x} [Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x] x^k$$

$$\text{其中 } \begin{cases} l = \max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i \text{ 不是特征根} \\ 1, & \alpha \pm \beta i \text{ 是特征根} \end{cases} \end{cases}$$

8.  $n$  阶常系数齐次线性微分方程的解  $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

$$\text{特征方程 } \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$$

a) 特征根为单实根  $\lambda$ , 通解对应一项  $C e^{\lambda x}$

b) 特征根为  $k$  重实根  $\lambda$ , 通解中对应  $k$  项  $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根  $\alpha \pm \beta i (\beta > 0)$ , 通解中对应 2 项  $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

d) 特征根为  $k$  重复根  $\alpha \pm \beta i (\beta > 0)$ , 通解中对应  $2k$  项

$$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 x + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

9.  $n$  阶非齐次微分方程  $y^{(n)} = f(x)$  型的解

$$\text{①令 } y^{(n-1)} = P(x), P' = y^{(n)}, \text{ 则 } P'(x) = f(x), P(x) = y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$\text{②同理得 } y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx + C_2$$

③连续积分  $n$  次, 得含有  $n$  个任意常数的通解

10.

### 第 13 讲 无穷级数

1. 无穷级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

部分和:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

$m$  项后余项:  $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$

性质: ①  $\sum_{n=1}^{\infty} (a u_n \pm b v_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ;

②  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$  收敛

③ 收敛的必要条件:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

## 2. 正项级数: $u_n \geq 0$

a) 收敛的充分必要条件: 部分和数列  $\{S_n\}$  有界

b) 比较判别法: 大的收敛, 小的也收敛; 小的发散, 大的也发散

c) 比较判别法的极限形式:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$

i.  $A=0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛  $\Leftrightarrow u_n$  是  $v_n$  的高阶无穷小

ii.  $A=+\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散  $\Leftrightarrow$  低阶

iii.  $0 < A < +\infty$ ,  $v_n$  和  $u_n$  有相同的敛散性  $\Leftrightarrow$  同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

①  $\rho < 1$ , 收敛  $\Leftrightarrow$  前  $>$  后; ②  $\rho > 1$ , 发散  $\Leftrightarrow$  前  $<$  后;

e) 根值判别法(柯西判别法):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

①  $\rho < 1$ , 收敛  $\Leftrightarrow$  后一项多开一次更小; ②  $\rho > 1$ , 发散;

## 3. 交错级数: 各项正负相间, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

a) 莱布尼兹判别法:  $\{u_n\}$  单调不增且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则收敛

## 4. 任意项级数: 各项可正、可负、可为零, 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

绝对值级数: 给任意项级数加上绝对值, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为任意项级数, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  为任意项级数, 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛

定理: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛;

## 5. 收敛级数的性质

① 随便加括号, 仍收敛, 和不变; ② 随便加括号后发散, 原级数必发散

③ 加括号后收敛, 原级数不一定收敛; ④ 绝对收敛的级数有可交换性

## 6. 函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

幂级数:  $u_n(x)$  是  $n$  次幂函数 一般形式:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ; 标准形式:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) 阿贝尔定理:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_1 (\neq 0)$  收敛, 所有  $|x| < |x_1|$ , 绝对收敛  
 $x_2$  发散  $> |x_2|$ , 发散

b) 收敛半径的存在性:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径  $R (\geq 0)$  必存在

①  $x=0$  收敛,  $R=0$ ; ② 整个轴上都收敛,  $R=+\infty$

③  $|x| < R$ , 绝对收敛;  $|x| > R$ , 发散;  $x = \pm R$ , 可能发散可能收敛

c) 收敛半径的求法:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 +  $x = \pm R$  处的敛散性

## 7. 和函数: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

幂级数相等, 即在点  $x=0$  处的某领域内相等, 则同幂次的系数相等, 即  $a_n = b_n$

四则运算:

$$\left( \sum_{n=v}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, |x| < R = \min\{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

性质: ①

②  $S(x)$  可积, 则  $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$  的  $R$  不变,  $I$  可能扩大

③  $S(x)$  可导, 则  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$  的  $R$  不变,  $I$  可能缩小

## 8. ★重要的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \begin{cases} x \in (-1, 1), \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \alpha > 0 \end{cases}$$

9. 泰勒级数:  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

麦克劳林级数:  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x)^n$

具有任意阶导数的函数, 其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

10. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x) \in (x_0 - R, x_0 + R)$  有任意阶导数,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0, |x-x_0| < R$$

11. 幂级数展开求法

①直接算; ②间接法: 变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

12. ★重要结论:

调和级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散

p 级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases}$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{cases}$

交错调和级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$  收敛

13. 幂级数收敛域的求法

a) 具体型步骤: ①  $\Sigma u_n(x) \Rightarrow \Sigma |u_n(x)|$

②使用比值、根值判别法, 获得收敛区间; ③讨论端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  在某点  $x_1$  的敛散性

①收敛,  $R \geq |x_1 - x_0|$ ; ②发散,  $R \leq |x_1 - x_0|$ ; ③条件收敛,  $R = |x_1 - x_0|$

ii. 已知  $\Sigma a_n(x-x_1)^n$  的敛散性, 求  $\Sigma b_n(x-x_2)^m$  的敛散性

①  $(x-x_1)^n$  和  $(x-x_2)^m$  的转换: 平移收敛区间; R 不变

提出或者乘  $(x-x_0)^k$  R 不变

②  $a_n$  和  $b_n$  的转换: 逐项求导 R 不变, l 可能缩小

or 积分 R 不变, l 可能扩大

14. 幂级数和函数的求法

a) 突破口:  $(an+b)^c$  在分母上, 先导后积; 在分子上, 先积后导

b) 解题过程标注收敛域

c) 重要结果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), -1 \leq x < 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, -1 < x < 1$$

15.

### 第14讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率:  $y = f(x), \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , 则  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt}$

2. 曲率公式:  $k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$  曲率半径:  $R = \frac{1}{k} (y'' \neq 0)$

曲率圆:  $(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2$  其中  $\alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$

3. 变力沿直线做功:  $W = \int_a^b F(x) dx$  抽水做功:  $W = \rho g \int_a^b xA(x) dx$

水压力:  $P = \rho g \int_a^b x[f(x) - h(x)] dx$

4. 平面曲边梯形的形心坐标:  $\bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$   $\bar{y}$  同理

平面曲线弧长: ①  $y = y(x), s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

②  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

③  $r = r(\theta), s = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$

旋转曲面面积: ①  $y = y(x), S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

②  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, S = 2\pi \int_a^b |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

平行截面面积已知的立体体积:  $V = \int_a^b A(x) dx$

5. 欧拉方程: 形如  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$

解法: ①当  $x>0$ , 令  $x = e^t$ , 则  $t = \ln x, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ , 于是  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2}, \text{ 方程化为 } \frac{d^2y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t), \text{ 求解}$$

②当  $x<0$ , 令  $x = -e^t$ , 同理得

$$6. \text{ 傅里叶级数: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), [-\pi, \pi]$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

7. 狄利克雷收敛定理:  $[-\pi, \pi]$  上连续 or 只有有限个第一类间断点, 且最多只有有限个极值点, 则在  $[-\pi, \pi]$  上处处收敛

$$\text{和函数 } S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{且 } S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点, 其中 } f(x_0 \pm 0) \text{ 表示 } \lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$$

$$8. \text{ 傅里叶展开式: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right), [-l, l]$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$S(x)$  和傅里叶级数的类似

$$9. \text{ 正弦级数: } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\text{余弦级数: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

10.

### 第 16 讲 多元函数积分学的基础知识

$$1. \text{ 数量积: } a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$$

$$a \text{ 在 } b \text{ 上的投影: } P_{r_b} a = \frac{a \cdot b}{|b|} \quad a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$$

$$2. \text{ 向量积: } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$$

$$a \parallel b \Leftrightarrow |a \times b| = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$$3. \text{ 混合积: } [abc] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\text{三向量共面: } [abc] = 0$$

$$4. \text{ 方向余弦: } \cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos \beta, \cos \gamma$$

$$5. \text{ 单位向量: } a^0 = \frac{a}{|a|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\text{任意向量: } r = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$6. \text{ 平面方程: 一般式: } Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\text{点法式: } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{三点式: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{截距式: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

平面束: 满足某种规律的平面族

$$7. \text{ 直线方程: 一般式: 两平面的交线, 即联立方程}$$

$$\text{点向式: } \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\text{参数式: } x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt, t \text{ 为参数}$$

$$\text{两点式: } \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$8. \text{ 距离公式: 点到面: } d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\text{点 } P_0 \text{ 到线(过 } P_1): d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_0 P_1}|}{|\tau|}, \tau = (l, m, n) \text{ 为方向向量}$$

两平行直线:  $d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau|}$

两异面直线:  $d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau_1 \times \tau_2|}$

两平行平面:  $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

9. 直线关系: 方向向量  $\tau_1, \tau_2$

$\theta = \arccos \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{|\tau_1| \cdot |\tau_2|}$

平行:  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

垂直:  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

10. 平面关系: 法向量  $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2$

$\theta = \arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$

平行:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

垂直:  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

11. 平面与直线关系: 将直线的  $\tau$  当成平面的法向量

12. 空间曲线:  $\odot$  一般式  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  几何意义: 两曲面的交线

①切向量:  $\tau = \left( \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{P_0}, \dots \right)$

②切线方程:  $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程:  $\tau(0)(x-x_0) + \tau(1)(y-y_0) + \tau(2)(z-z_0) = 0$

$\odot$  参数方程  $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$

①切向量:  $\tau = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$  ②切线方程:  $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面方程:  $\tau(0)(x-x_0) + \tau(1)(y-y_0) + \tau(2)(z-z_0) = 0$

曲线在坐标面的投影: 例如在  $xOy$  的投影, 将一般式  $\Gamma$  中的  $z$  消去,

得  $\varphi(x, y) = 0$ , 曲线方程为  $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

13. 空间曲面:  $F(x, y, z) = 0$

①法向量:  $n = (F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0))$

②法线方程:  $\frac{x-x_0}{n(0)} = \frac{y-y_0}{n(1)} = \frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面:  $n(0)(x-x_0) + n(1)(y-y_0) + n(2)(z-z_0) = 0$

椭球面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

椭圆抛物面:  $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$

椭圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

双曲抛物面:  $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$

椭圆柱面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

双曲柱面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

抛物柱面:  $y = ax^2$

14. ★ 旋转曲面: 曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕直线  $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  旋转一周

解法:  $\begin{cases} \overrightarrow{M_1 P} \perp L \Rightarrow m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0 \\ |\overrightarrow{M_0 P}| = |\overrightarrow{M_0 M_1}| \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \dots = (x_1-x_0)^2 + \dots + \dots \\ \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases} \end{cases}$

15. 空间曲面面积:  $z = z(x, y), S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

16. 方向导数:  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos \alpha + u'_y(P_0) \cos \beta + u'_z(P_0) \cos \gamma$

17. 梯度:  $\text{grad } u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$

18. 方向导数和梯度得关系:  $\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{P_0} = \text{grad } u|_{P_0} \cdot l^0 = |\text{grad } u|_{P_0}| \cos \theta$

19.

### 第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分: 几何意义: 空间物体的质量

$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j, e + \frac{f-e}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \cdot \frac{f-e}{n}$$

2. 考研数学中, 三重积分总是存在的

### 3. 凑三重积分定义步骤

①提出 $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ ; ②凑出 $\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}$ ; ③ $\frac{i}{n} = 0 + \frac{i-0}{n}$ , 其他两个同理, 凑定义完成

4. 性质: 求空间区域体积:  $\iiint_{\Omega} 1 dv = \iiint_{\Omega} dv = V$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

5. 普通对称性、轮换对称性: 参考[二重积分的对称性](#)

### 6. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系:  $\iiint_D f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$

b) 柱面坐标系:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

c) 球面坐标系:  $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi, \theta)}^{r_2(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi dr \end{aligned}$$

适用范围: ①被积函数含 $f(x^2 + y^2 + z^2)$ 或 $f(x^2 + y^2)$

②积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用 ( $\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \Rightarrow \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot V$ )

7. 第一型曲线积分:  $\int_L f(x, y) ds$ 或 $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$  几何意义: 曲线的质量

8. 考研数学中, 第一型曲线积分总是存在的

9. 性质: 求曲线长度:  $\int_{\Gamma} 1 ds = l_{\Gamma}$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

10. 普通对称性、轮换对称性: 参考[二重积分的对称性](#)

### 11. 第一型曲线积分的计算

a) 空间曲线长度:  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

b) 平面曲线:

① $y = y(x)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$  类似: [平面曲线弧长](#)

② $x = x(t), y = y(t)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

③ $r = r(\theta)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta] \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

12. 第一型曲面积分:  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  几何意义: 曲面质量

13. 考研数学中, 第一型曲面积分总是存在的

14. 性质: 求曲线长度:  $\iint_{\Sigma} 1 dS = S$

可积函数必有界, 线性性质, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

15. 普通对称性、轮换对称性: 参考[二重积分的对称性](#)

### 16. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分: 三步骤 (无先后顺序)

①将 $\Sigma$ 投影到某一平面 (比如 $xOy$ 面)  $\Rightarrow$  投影区域为 $D$  (比如 $D_{xy}$ )

②将 $z = z(x, y)$ 或 $F(x, y, z) = 0$ 带入 $f(x, y, z)$

③计算 $z'_x, z'_y \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

$$\text{得到 } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

### 17. 重积分和第一型线面积分的应用

a) 面积&体积: [平面面积](#)、[空间曲线长度 \$f\(\cdot\) = 1\$](#) 、[空间曲面面积](#)

$$\text{空间体积: } V = \iint_D |f(x, y) - g(x, y)| d\sigma$$

b) 重心&形心:  $\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$  空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例: 平面薄片,  $\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$ ,  $\bar{y}$ 同理

c) 转动惯量:  $I = mr^2$  平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如: 空间物体,  $I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$ ,  $I_y, I_z, I_O$ 同理

d) 引力:  $F = G \frac{Mm}{r^2}$  平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如：光滑曲线， $F_x = Gm \int_L \frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$ ,  $F_y, F_z$ 同理

18. 重要结论：

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{5} \pi R^5$$

19.

### 第18讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分： $\int_\Gamma F(x,y,z) dr = \int_\Gamma P(x,y,z) dx + Q(x,y,z) dy + R(x,y,z) dz$

物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功

2. 考研数学中，第二型曲线积分总是存在的

3. 性质：线性性质，可加性，有向性： $\int_{AB} F \cdot dr = -\int_{BA} F \cdot dr$

对称性：假设 $\Gamma$ 关于 $yOz$ 对称，(无轮换对称性)

$$\int_\Gamma P(x,y,z) dx = \begin{cases} 2 \int_{\Gamma_1} P(x,y,z) dx, & P(x,y,z) = -P(-x,y,z) \\ 0, & P(x,y,z) = P(-x,y,z) \end{cases}$$

4. 平面第二型曲线积分的计算

a) 直接计算 (参数法)：化为定积分  $\alpha, \beta$  大小无所谓，关键对应起、终点

$$\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_\alpha^\beta \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$$

b) 格林公式：条件：封闭， $P, Q$  有一阶连续偏导

$$\oint_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

若① $L$ 不是封闭曲线：补线法；② $P, Q$ 、其偏导在 $D$ 上不连续：挖去法

5. 平面曲线积分与路径无关

6. 空间第二型曲线积分计算：斯托克斯公式

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (\text{第二型曲面积分形式})$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \quad (\text{第一型曲面积分形式})$$

7. 第二型曲面积分：物理背景：向量函数通过曲面的通量

$$\iint_\Sigma F \cdot dS = \iint_\Sigma P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy$$

8. 考研数学中，第二型曲面积分总是存在的

9. 性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考[第二型曲线积分](#)

10. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分：三步骤 (无先后顺序)

①将 $\Sigma$ 投影到某一平面 (比如 $xOy$ 面)  $\Rightarrow$  投影区域为 $D$  (比如 $D_{xy}$ )

②将 $z = z(x,y)$ 或 $F(x,y,z) = 0$ 带入 $R(x,y,z)$

③将 $dx dy$ 写成 $\pm dx dy$ ,  $\Sigma$ 方向为上取“+”

$$\text{得} \iint_\Sigma R(x,y,z) dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y)) dxdy$$

a) 高斯公式： $\oiint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_\Omega \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$

若① $\Sigma$ 不是封闭曲面：补面法；② $P, Q$ 、其偏导在 $D$ 上不连续：挖去法

11. 两类曲面积分关系：第一型与第二型

$$dydz = \cos \alpha dS, dzdx = \cos \beta dS, dxdy = \cos \gamma dS$$

转换坐标变量法： $z = z(x,y) \Rightarrow dydz = -z'_x dxdy, dzdx = -z'_y dxdy \Rightarrow$

$$\iint_\Sigma P(x,y,z) dydz = \pm \iint_\Sigma P(x,y,z(x,y)) \left( -\frac{\partial z}{\partial x} \right) dxdy$$

$Q, R$ 同理，当 $\Sigma$ 定向的法向量与 $z$ 轴夹角在 $0 \sim 90^\circ$ ，取+

12. 设置 $A(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\text{散度: } \operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{旋度: } \operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

常用公式：① $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ;

② $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$ ; ③ $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$ ;

13.



