

## 目录

第1讲 高等数学常用基础知识.....	1
第2讲 极限与连续 .....	1
第3讲 一元函数微分学的概念与计算.....	3
第4讲 一元函数微分学的几何应用 .....	4
第5讲 中值定理.....	4
第6讲 零点问题、微分不定式.....	5
第7讲 一元函数积分学的概念与计算.....	6
第8讲 一元函数积分学的几何应用 .....	8

### 第1讲 高等数学常用基础知识

1. 余切函数:  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$   $\sin x$  一个门的面积为 2,  $\frac{\pi}{4} \sim \frac{3\pi}{4}$  为  $\sqrt{2}$

正割函数:  $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$  余割函数:  $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

2. 符号函数:  $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ; 取整函数:  $y = [x] \rightarrow$  考到了用夹逼

3. 若  $U = \max\{f(x), g(x)\}, V = \min\{f(x), g(x)\}$ ,  
 $U + V = f + g, U - V = |f - g|, UV = fg$

4. 组合数公式:  $C_{n+1}^{k+1} = \sum_{i=k}^n C_i^k$   $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  [推导过程](#)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (\sum_{k=1}^n k)^2 \quad \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 2C_{n+2}^3$$

5. 积化和差公式\*4  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

第9讲 积分等式与积分不等式.....	8
第10讲 多元函数微分学 .....	9
第11讲 二重积分 .....	9
第12讲 常微分方程 .....	10
第13讲 无穷级数.....	12
第14讲 数学一、数学二专题内容.....	14
第16讲 多元函数积分学的基础知识 .....	15
第17讲 三重积分、第一型曲线曲面积分 .....	16
第18讲 第二型曲线曲面积分 .....	17

$$\text{和差化积公式*4} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

6. 万能公式  $u = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$  则  $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

7. 因式分解公式

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正偶数}) \end{aligned}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (n \text{ 为正奇数})$$

8.  $f(x) + f(-x)$  为偶函数,  $f(x) - f(-x)$  为奇函数;  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数;

$$9. \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k} \left[ \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \right]$$

### 第2讲 极限与连续

1. 数列极限定义: 任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}_+$ , 当  $n > N$ , 恒有  $|x_n - a| < \varepsilon$

2. 判断数列发散方法\*2: 找一个发散的子列; 找两个收敛到不同极限的子列

3. 数列极限运算规则 (参考函数的)

4. 证明 $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ 的极限存在: 证明单调不减, 证明有界

5. 函数极限定义:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

6. 函数极限存在的充要条件\*2

① 左极限=右极限=A      ②脱帽法:  $f(x) = A + \alpha(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$

7. 函数极限的性质: 唯一性; 局部有界性; 局部保号性:  $X_n \geq a$ , 极限  $A \geq a$ ;

8. 无穷小的比阶 前提:  $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0, \beta(x) \neq 0$

高阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ;

低阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ ;      同阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ ;

k 阶无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$       等价无穷小:  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ;

9. 函数极限运算规则      前提: 极限都存在

a)  $\lim[kf(x) \pm lg(x)] = k \lim f(x) \pm l \lim g(x) = kA \pm lB$

b)  $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

c)  $\lim[f(x)^n] = [\lim f(x)]^n$ , n 为正整数

d)  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

10. 无穷小的运算

a) 有限个无穷小的和/积是无穷小; 有界函数与无穷小的积是无穷小

b)  $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^l), l = \min(mn) \rightarrow$  加减法时低阶吸收高阶

c)  $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) = x^m \cdot o(x^n) \rightarrow$  乘法时阶数累加

d)  $o(x^m) = o(kx^m) = k \cdot o(x^m), k \neq 0$  且为常数  $\rightarrow$  非零常数不影响阶数

11. ★常用的等价无穷小\*9      前提:  $x \rightarrow 0$       本质: 泰勒展开

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^a - 1 \sim ax$       ★  $x \rightarrow x_0$  等价替换成  $t \rightarrow 0$

可以先等价, 再用洛必达, 例 2.19; 注意: 减式不能用等价替换

12. 夹逼准则:  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), \lim g(x) = \lim h(x) = A$ , 则  $\lim f(x) = A$

使用方法: 缩放, 对分母中阶数最低的缩放      不验等号

对和式缩放的两种方法:

n 为无穷大时,  $n \cdot u_{\min} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max}$ ;

n 为有限数时,  $1 \cdot u_{\max} \leq \sum_{i=1}^n u_i \leq n \cdot u_{\max} \rightarrow \lim \sum_{i=1}^n u_i = u_{\max}$

13. 洛必达法则:  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 且一阶导都存在      辅助地位      例 2.19

若结果的极限不存在, 则洛必达失效

14. 海涅定理: (联系数列极限与函数极限)

15. 第一类间断点: 可取、跳跃      第二类间断点: 无穷、振荡

16. 数列极限计算的解法

a) 数列通项已知      ①夹逼准则; ③幂级数求和; ④级数收敛的必要条件

②定积分定义: n, i 次数相同, 若凑不出, 可以先放缩 or 夹逼

★定积分特殊情况:  $a = 0, b = x, \int_0^x f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(x \frac{i}{n}\right) \frac{x}{n}$

b) 数列通项未知

①★单调有界数列必有极限: 先做差/商证明极限存在, 再求 (令所有通项等于极值 A); ②求出表达式; ③知道极限 a, 用拉格朗日中值定理 or 缩放构造

$|a_n - a| \leq f(n)$ , 然后  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$ , 得出  $\lim |a_n - a| = 0$       习题 5.7

17. 函数极限的计算       $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$

①判断未定式的种类。七种: " $\frac{0}{0}$ " " $\frac{\infty}{\infty}$ " " $0 \cdot \infty$ " " $\infty - \infty$ " " $\infty^0$ " " $0^0$ " " $1^\infty$ "

i. " $\frac{0}{0}$ " " $\frac{\infty}{\infty}$ ": 使分子次数大于分母次数, 即倒三角形状  $\nabla$

ii. " $0 \cdot \infty$ ": 转化成 " $\frac{0}{0}$ " 或 " $\frac{\infty}{\infty}$ "

iii. " $\infty - \infty$ ": 转为乘除法。有分母通分; 无分母倒代换  $x = \frac{1}{t}$  或提取公因式

iv.  $\infty^0, 0^0, 1^\infty$ :  $\lim u^v = e^{\lim (u-1)v} = e^{\lim v \ln u}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

②题型：比阶题；反问题（反求参数）；已知某一极限求另一极限

③方法：I 等价替换：见根号用有理化；II 等价无穷小替换

III 洛必达；IV 泰勒展开；V 夹逼准则；VI 单调有界；

VII  $f(x)$  在  $x = x_0$  处连续， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln^\beta x = 0$  伪无穷： $\ln x$  真无穷： $x, e^x$

19. ★常用函数的泰勒展开式\*8 前提： $x \rightarrow 0$  计算时保留  $o(\cdot)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + o(x^2)$$

$\frac{A}{B}$  型，展开后分子分母同阶；A-B 型，展开到它们的系数不等的  $x$  的最低次幂为止；

20.

### 第3讲 一元函数微分学的概念与计算

1. ★导数的定义\*2

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

性质：求导 or 下限为 0 的积分，函数奇偶性互换，周期不变

☆注：复杂函数的求导可以用定义，例 3.10 四则运算不成立，用定义，例 3.7

2. 设  $f(x)$  在  $x = a$  处连续， $F(x) = f(x)|x - a|$ ，则  $F(x)$  在  $x = a$  处可导  $\Leftrightarrow f(a) = 0$

3. 某点可导的充分必要条件：函数在该点连续，左导数和右导数存在且相等(定义)

$$4. \text{高阶导数概念：} f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

5. 可微判别方法\*3:

①写增量  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

②写线性增量  $A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

③  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - A\Delta x}{\Delta x} = 0$ , 可微；否则不可微

6. 四则运算的前提：函数均可导

7. 复合函数的导数(微分)： $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)]g'(x)$

8. 反函数求导： $y = f(x), x = \varphi(y)$ ，记  $f'(x) = y'_x, \varphi'(x) = x'_y (x'_y \neq 0)$ ，则有

$$\text{一阶 } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}; \text{ 二阶 } y''_{xx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x'_y})}{dy} \cdot \frac{1}{x'_y} = \frac{-x''_{yy}}{(x'_y)^3}$$

9. 参数方程求导： $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$  一阶： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\text{二阶：} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

10. 隐函数求导： $F(x, y) = 0$ ，两边对  $x$  求导，将  $y$  看作中间变量，得到方程，求解即可得到  $y'$

11. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子

① 两边取对数， $\ln y = \ln f(x)$ ；② 求导得  $\frac{1}{y} y' = [\ln f(x)]' \Rightarrow y' = y[\ln f(x)]'$

12. 幂指函数求导法：

$$[u(x)^{v(x)}]' = [e^{v(x) \ln u(x)}]' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$$

13.  $n$  阶导数的运算方法 ③写出泰勒公式 or 麦克劳林公式，比较系数

②  $[u \pm v]^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$   $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$  ①逐次求导

14. 常见函数的  $n$  阶导数 \*8

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n (a > 0, a \neq 1) \quad (e^x)^{(n)} = e^x \quad \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n} (x > 0) \quad [\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} (x > -1)$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$$

15. 基本初等函数的导数公式 视绝对值不见

$$(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (a > 0, a \neq 1)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \quad (\csc)' = -\csc x \cot x \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\left[ \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) \right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

#### 第4讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带、不带等号；极值、最值的区别：领域、定义域

2. 极值点  $\Leftarrow$  一阶可导 驻点：  $f'(x) = 0 \Leftarrow$  极值

3. 判断极值的充分条件 \*3

a)  $x_0$  的去心领域一阶可导

i.  $x_0$  左边,  $f'(x) < 0$ ;  $x_0$  右边,  $f'(x) > 0$ , 为极小值;

ii.  $x_0$  左边,  $f'(x) > 0$ ;  $x_0$  右边,  $f'(x) < 0$ , 为极大值;

b)  $x = x_0$  处二阶可导, 且  $f'(x) = 0$ ,  $f''(x_0) \neq 0$

$f''(x_0) > 0$ , 极小值;  $f''(x_0) < 0$ , 极大值

c)  $x_0$  处  $n$  阶可导, 且  $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 1, 2, \dots, n-1)$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 2)$

$n$  为偶数,  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 极小值;  $n$  为偶数,  $f^{(n)}(x_0) < 0$ , 极大值

4. 凹弧:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ ; 凸弧:  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

5. 判断凹凸的充分条件:  $f''(x) > 0$ , 凹的;  $f''(x) < 0$ , 凸的

6. 判断拐点的充分条件 \*3 拐点, 即  $f''(x) = 0 \Leftarrow$  二阶可导

a)  $x_0$  的去心领域内二阶导数存在, 且左右领域  $f''(x)$  变号

b) 三阶可导,  $f''(x) = 0$ ,  $f'''(x_0) \neq 0$

c)  $x_0$  处  $n$  阶可导,  $n$  为奇数,  $f^{(m)}(x_0) = 0 (m = 2, \dots, n-1)$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0 (n \geq 3)$

7. 铅锤渐近线:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+ \text{ or } x_0^-} f(x) = \infty$   $x_0$  取函数无定义的点

水平渐近线:  $\lim_{x \rightarrow +\infty \text{ or } -\infty} f(x) = A$

斜渐近线: 令  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ , 得  $y = kx + b$

若  $f(x)$  中  $x$  的  $n$  次方,  $>1$ , 则有铅锤渐近线;  $=1$ , 斜渐近线;  $<1$ , 水平渐近线

8. 求闭区间的最值步骤: 求可疑点(驻点和不可导点)和端点, 比较得到最值

求开区间的最值步骤: 求可疑点和两端的单侧极限, 比较得到最值或取值范围

9. 函数作图步骤: ①确定定义域和奇偶对称性;

②求出  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  等于 0 和其不存在的点, 将函数划分成几个区间, 画表格

判断每一个的单调性和凹凸性; ③确定渐近线(如果有的话); ④作图

研究对象	研究内容
①祖孙三代 $\left\{ \begin{array}{l} f(x), f_n(x) = x^n, f_1 * f_2 * \dots * f_n \\ f'(x): \frac{df(x)}{dx^2} = \frac{1}{2x} f'(x) \\ \int_a^x f(t) dt \\ \sum a_n x^n \end{array} \right.$	①斜率 $\rightarrow$ 切线 $\rightarrow$ 法线; ②单调性、极值点 ③凹凸性、拐点; ④渐近线; ⑤取值、值域; ⑥高阶导数
②分段函数; ③参数方程; ④隐函数	

#### 第5讲 中值定理

1. 函数的中值定理  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续

a) 有界与最值定理:  $m \leq f(x) \leq M$ , 其中  $m$ 、 $M$  为  $[a, b]$  上的最值

b) 介值定理: 当  $m \leq \mu \leq M$ , 存在  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \mu$

$f(\xi)$  可为高阶导数,  $\mu$  可为定积分

c) 平均值定理: 离散的积分中值定理

当  $a < x_1 < \dots < x_n < b$ , 在  $[x_1, x_n]$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f(\xi) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$

d) 零点定理: 当  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$

2. 导数(微分)的中值定理 对于  $f^n(x)$ ,  $f^{n+1}(x)$  也满足中值定理例 5.8(2)

a) 费马定理:  $f(x_0)$  可导且为极值, 则  $f'(x_0) = 0$   $x_0$  必不为端点

b) 罗尔定理:  $f(x)$  满足  $\left\{ \begin{array}{l} [a, b] \text{ 上连续} \\ (a, b) \text{ 内可导} \\ f(a) = f(b) \end{array} \right.$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

推广: 满足以下条件之一, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

①开区间, 但端点极值都为  $A$ ; ②两端同时趋于  $+\infty$  or  $-\infty$

- ③一端极限为 A, 另一端水平渐近线为  $x = A$ ;  
 ④定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 趋于两侧, 取值趋于  $+\infty$  或  $-\infty$

c) ★拉格朗日中值定理: “无条件成立”

$[a, b]$  连续  $(a, b)$  可导,  $\exists \xi \in (a, b), f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

推论:  $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \rightarrow$  联系  $f$  和  $f'$

d) 柯西中值定理: 条件同上,  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  若  $g(x) = x$ , 变成拉格朗日

e) ★泰勒公式: 可用于高阶导数的计算证明  
 阶数: 余项之前的最后一项; 本质: 任何可导  $f(x) = \sum a_n x^n$

i. 带拉格朗日余项:  $n+1$  阶可导,  $\xi$  介于  $x, x_0$  之间 证明

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

ii. 带佩亚诺余项:  $f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$  计算

f) ★积分中值定理:  $\rightarrow$  联系  $f$  和  $\int f$

几何意义: 积分的几何面积 = 底 \* 平均高 = 矩形面积

$f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\exists \xi \in [a, b]$  或  $(a, b), \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

3. ★麦克劳林公式:  $x_0 = 0$  的泰勒公式  
 4. 带拉格朗日余项的一阶麦克劳林/泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2$$

5. 重要函数的麦克劳林展开式 \*7

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

6. 证明存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $H(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$ : 罗尔定理、费马定理

a) 构造辅助函数: 把  $\xi$  改成  $x$ , 对于  $f'(x) + g(x)f(x) = 0$ , 两边同乘  $e^{\int g(x)dx}$ ,

得构造函数  $F(x) = f(x)e^{\int g(x)dx}$

b) 验证端点值相等: 转化为给定区间内找  $F(x)$  的两个不同的零点

研究对象	研究区间	十大定理
①抽象函数 $f(x)$ 或 $\int_a^b f(x)dx$	①指定区间 $\xi \in (a, b)$	最值定理
②乘积求导公式引发: 逆向思维	②缩小区间 例 5.5 $\xi \in (c, d) \subset (a, b)$	介值定理
$f(x)f'(x) \rightarrow F(x) = f^2(x)$	③划分区间, 多中值	平均值定理
$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \rightarrow F(x) = ff'$		零点定理
$f'(x) + f(x) \rightarrow F(x) = f(x)e^x$		费马定理
$f'(x) + f(x)\varphi'(x) \rightarrow F(x) = f(x)e^{\varphi(x)}$		罗尔定理
③商的求导公式引发:		拉格朗日中值定理
$[f'(x)]^2 - f(x)f''(x) \rightarrow \frac{f'}{f} \rightarrow \ln f(x)$		柯西中值定理
		泰勒公式
		积分中值定理

## 第6讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:

- a) 零点定理: 证明根的存在 当  $f(a) \cdot f(b) < 0, f(x) = 0$  至少有一个根  
 b) 单调性: 证明根的唯一性  $f(x) = 0$  在  $(a, b)$  内单调,  $f(x) = 0$  至多有一根  
 c) 罗尔定理的推论:  $f^{(n)}(x) = 0$  至多有  $k$  个根,  $f(x) = 0$  至多有  $k+n$  个根  
 d) 实系数奇次方程  $x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$ : 至少有一个根

2. 经典不等式 函数不等式?

$$a) 2|ab| \leq a^2 + b^2 \quad |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$\text{离散情况: } |a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

连续情况:  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, a < b$

b) 设  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ , 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  时等号成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| \leq \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

特殊情况:  $n = 2, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, (a, b > 0)$

$$n = 3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, (a, b, c > 0)$$

c) Young 不等式:  $x, y, p, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则  $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

d)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

e) 柯西不等式:  $\left[ \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$  不证大题不能用

f)  $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \left[ \int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[ \int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

g)  $a > b > 0, \begin{cases} n > 0, a^n > b^n \\ n < 0, a^n < b^n \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < x < b \\ 0 < c < y < d \end{cases}$  则  $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$

$$\sin x < x < \tan x \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right), \sin x < x (x > 0) \quad e^x \geq x + 1, x - 1 \geq \ln x$$

$$\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1) \quad \frac{1}{1+x} < \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) < \frac{1}{x}, (x > 0)$$

h)  $|\sin x| < 1, |\cos x| < 1 \quad x \rightarrow \infty, p > 0, \ln x < x^p$

3. 微分不等式的证明方法 \*3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值); ②常数变量化; ③中值定理

### 第7讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数; ②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数

2. 定积分的定义:  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$

注:  $\left[ \int_a^x f(t) dt \right]' = f(x), a$  任意

3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续; ②在区间上有界, 只有有限个间断点

必要条件: 可积函数必有界

性质: ①求区间长度:  $L = \int_a^b dx = b - a$ ;

②线性性:  $\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx \pm k_2 \int_a^b g(x) dx$

③可加可拆性:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

④保号性:  $f(x) \leq g(x)$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

特殊:  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

⑥估值定理:  $M, m$  为最大、小值,  $L$  为区间长度,  $mL \leq \int_a^b f(x) dx \leq ML$

⑦中值定理: 函数连续,  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$

推论:  $g(x)$  不变号, 则  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

4. 变限积分的性质: ①  $f(x)$  可积,  $F(x)$  连续; ②  $f(x)$  连续,  $F(x)$  可导

★变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无  $x$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} f(t) dt \right] = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x) - f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$$

若被积函数中有  $x$ , 例  $\int_0^x u f(u^2 + x^2) du$ , 令  $y = u^2 + x^2$  例 11.20

5. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性

6. ★常用积分 奇点: "∞" 和使得函数无定义的点(瑕点)

$$\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + c \quad \text{常考: } \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad \int e^x dx = e^x + c \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$$

$$\begin{aligned}
\int \sin x dx &= -\cos x + c & \int \cos x dx &= \sin x + c \\
\int \tan x dx &= -\ln|\cos x| + c & \int \cot x dx &= \ln|\sin x| + c \\
\int \sec x dx &= \int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\sec x + \tan x| + c & \int \sec^2 x dx &= \tan x + c \\
\int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\csc x - \cot x| + c & \int \csc^2 x dx &= -\cot x + c \\
\int \sec x \tan x dx &= \sec x + c & \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + c \\
\int \sec^3 x dx &= \frac{\sec x \tan x + \int \sec x dx}{2} = \frac{\sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x)}{2} + c \\
\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c & \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + c \\
\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c \\
\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c \\
\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + c & \int \frac{dx}{\sin x + 1} &= \tan x - \sec x + c
\end{aligned}$$

[过程](#)

## 7. 不定积分计算 $d|x| = dx$

a) 凑微分法:  $\int f[g(x)]g'(x) dx = \int f[g(x)] d[g(x)] = \int f(u) du$

①  $f'(x) = Ag(x)$ , A 为常数 or 函数 注:  $f(x)dx = df(x)$

$$\int f(x)g(x) dx = \frac{1}{A} \int f(x)Ag(x) dx = \frac{1}{A} \int f(x) d[f(x)]$$

② 若不是, 可将被积分函数的分子分母同乘/除  $e^{ax}, x^\beta, \sin x, \cos x$  后恒等变形

b) ★换元法:  $\int f(x) dx \xrightarrow{x=g(u)} \int f[g(u)] d[g(u)] = \int f[g(u)]g'(u) du$

代换原则: 要有反函数, 单调函数

i. 三角函数代换:  $\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x = a \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x = a \tan t, |t| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow x = a \sec t, \begin{cases} x > 0, 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ x < 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$

ii. 恒等变形后三角函数代换:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \Rightarrow \sqrt{\varphi^2(x) + k^2}, \sqrt{\varphi^2(x) - k^2}, \sqrt{k^2 - \varphi^2(x)}$$

iii. 根式代换:  $\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt{ae^{bx}+c} \Rightarrow \text{令 } \sqrt{*} = t$

同时含有  $\sqrt[n]{ax+b}$  和  $\sqrt[m]{ax+b} \Rightarrow \text{令 } \sqrt[l]{ax+b} = t, l \text{ 为最小公倍数}$

iv. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上,  $\frac{1}{x} = t$

v. 复杂函数的直接代换: 含有  $a^x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arctan x$ , 令复杂函数 = t

注意: 当  $\ln x, \arcsin x, \arctan x$  与  $e^x$  或  $x^n$  乘除, 优先考虑分部积分法

c) 分部积分法:  $\int u dv = uv - \int v du$

i. u, v 选择依据: 微分后简单点宜作 u, 积分后简单点宜作 v

$\leftarrow u$				$v \rightarrow$
反三角	对数	幂	指	三角
$\arcsin x, \arctan x$	$\ln x$	$x^n$	$e^x$	$\sin x$

ii. 推广: u 与 v 有直到 (n+1) 阶的连续导数 表格法

$$\int uv^{(n+1)} dx = \sum_{i=0}^n (-1)^i u^{(i)} v^{(n-i+1)} + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx$$

d) 有理函数的积分:  $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx (n < m)$

i. 方法:  $Q_m(x)$  因式分解后, 把  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  拆成若干最简有理分式之和

ii. 注意: k 重因式产生 k 项, 即  $\frac{\dots}{(\dots)^k} = \frac{\dots}{(\dots)^1} + \frac{\dots}{(\dots)^2} + \dots + \frac{\dots}{(\dots)^k}$

## 8. 定积分的计算

a) 三大方法: 牛顿莱布尼兹公式:  $\int_a^b f(x) dx \xrightarrow{F'(x)=f(x)} F(x)|_a^b$

换元积分:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f[\varphi'] \varphi' dt$ ; 分部积分:  $\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b u'v dx$

b) 公式总结: ① 偶函数,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ ; 奇函数,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

注意: 平移对称轴 or 中心至  $x_0$ , 也满足



②周期函数:  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \int_a^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$

③若  $\int_0^T f(x) dx = 0, \int_a^x f(t) dt$  以  $T$  为周期

④★区间再现公式:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(a+b-x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)] dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin t\right) \frac{b-a}{2} \cos t dt = \int_0^1 (b-a) f[a + (b-a)t] dt \end{aligned}$$

⑤  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$

⑥  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x, \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x, \sin x) dx$

⑦★华里士公式:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为大于 1 的奇数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数} \end{cases} \quad \text{例 7.38}$$

★方法总结: 令  $x - \frac{b-a}{2} = t$ ,  $\begin{cases} \text{若为奇函数, 等于 0} \\ \text{若为偶函数, 三角代换后华里士公式} \end{cases} \quad \text{例 7.39}$

9. 凑定积分定义的方法: ①提出  $\frac{1}{n}$ ; ②凑出  $\frac{i}{n}$ ; ③转化为  $\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$

若不能直接凑出, 可先缩放 or 提出容易算极值的部分

习题 7.14

10. 反常积分的敛散性判别:

a) 无穷区间的  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ :  $p > 1$  收敛,  $p \leq 1$  发散

b) 无界函数的  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ :  $p < 1$  收敛,  $p \geq 1$  发散 (奇点  $x=0$ )

11.  $\int_a^b f(x)g'(x) dx + \int_a^b f'(x)g(x) dx = \int_a^b [f(x)g(x)]' dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

12. 可积不可求积: 幂级数展开后积分

例 13.35

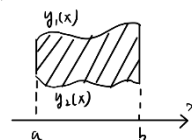
13. 参数方程积分:  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \int_a^b y dx = \int_a^b \psi(t) d\varphi(t)$

14.  $\int (1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} dx = \int \left(2 \sin^2 \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} dx = 2\sqrt{2} \int \sin^3 \frac{x}{2} dx$

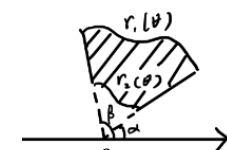
15.

### 第 8 讲 一元函数积分学的几何应用

1. 计算面积

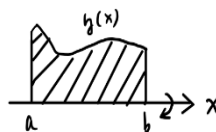


$$S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

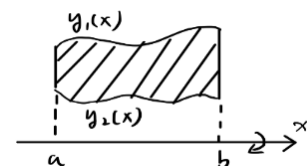


$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$$

2. 计算体积



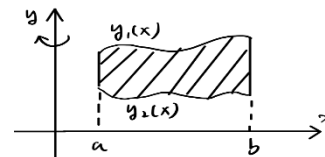
$$V_x = \int_a^b \pi y^2(x) dx$$



$$V_x = \pi \int_a^b |y_1^2(x) - y_2^2(x)| dx$$



$$V_y = 2\pi \int_a^b x |y_1(x) - y_2(x)| dx$$



$$V_y = 2\pi \int_a^b x |y_1(x) - y_2(x)| dx$$

3. 定积分计算平均数:  $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx$

4.

### 第 9 讲 积分等式与积分不等式

1. 等式问题: ①通过证一个特殊等式求特殊积分

②求  $\lim \int f(x) dx$ : 夹逼; ③带“ $\int$ ”的中值定理

2. 不等式问题: 构造辅助函数  $F(x)$

①上/下限变量化, 然后利用  $F'(x)$ 、单调性、最值等;



- ②处理被积函数: I 利用  $f(x) \leq g(x)$ ; II  $f'$ : 拉格朗日中值定理;  
 III  $f''$ : 泰勒公式 (+积分保号性); IV 放缩+夹逼;  
 V 分部积分; VI 换元法 ③先化简, 再证明

3. 和式不等式: 若  $f(x)$  在  $[1, n]$  单调递减,  $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n f(k)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k f(x) dx$$

若单调递增, 把  $\leq$  换成  $\geq$

### 第 10 讲 多元函数微分学 10 分 大题 应用

1. 多元函数求极限: 除洛必达、单调有界准则不能用外, 其余全照搬一元的

2. 偏导数定义: 例如, 对  $x$ ,  $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$  对  $y$  同理

$$\text{二阶偏导数: 例如, } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

也叫二阶混合偏导数

3. 可微: 函数的全增量  $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ , 其

$$\text{中 } \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, A, B \text{ 仅与 } x, y \text{ 有关}$$

全微分:  $dz = A\Delta x + B\Delta y$

4. 判断函数是否可微的步骤: ①写出全增量  $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

②写出线性增量  $dz = A\Delta x + B\Delta y$ , 其中  $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$

③作极限  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ , 若为 0, 可微; 否则, 不可微

5. 判断偏导数连续性的步骤:

①用定义法求  $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ ; ②用公式法求  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$

③若  $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_x(x, y) = f'_x(x_0, y_0), \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} f'_y(x, y) = f'_y(x_0, y_0)$  成立, 则连续

6. 在某点不可微  $\Rightarrow$  该点偏

偏导数连续  $\Rightarrow$  可微  $\Rightarrow$  连续  $\Rightarrow$  极限存在(全方向)

7. 多元函数微分法则

$\nearrow$  偏导数存在(某方向双侧)

$\searrow$  方向导数存在(某方向单侧)(仅数学一)

a) 链式求导规则:  $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ , 令  $\frac{\partial z}{\partial u} = f'_1, \frac{\partial z}{\partial v} = f'_2$

$$\text{则 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{则 } z''_{xx} = f''_{11}(u'_x)^2 + f''_{12}u'_x v'_x + f''_{11}u''_{xx} + f''_{22}(v'_x)^2 + f''_{21}v'_x u'_x + f'_2 v''_{xx}$$

$$z''_{xy} = f''_{11}u'_x u'_y + f''_{12}u'_x v'_y + f''_{11}u''_{xy} + f''_{22}v'_x v'_y + f''_{21}v'_x u'_y + f'_2 v''_{xy}$$

b) 隐函数求导:  $F(x, y, z) = 0$ , 两边分别对  $x, y$  求导, 将  $z$  看作中间变量, 得到方程, 求解即可得到  $z'_x, z'_y$

8. 二元函数的极值

二阶泰勒公式

a) 必要条件:  $(f'_x, f'_y)_{x_0} = 0, x_0$  为驻点

b) 充分条件: ①  $\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}_{x_0} < 0$ ,  $\begin{cases} \text{(负定)} f''_{xx}|_{x_0} < 0, \text{极大值} \\ \text{(正定)} f''_{xx}|_{x_0} > 0, \text{极小值} \end{cases}$

②  $|\cdot| > 0$ , 非极值; ③  $|\cdot| = 0$ , 不能判断

9. ★ 条件最值: 目标函数  $u = f(x, y, z)$ , 条件  $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$

①构造辅助函数  $F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z)$

②令  $\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda \varphi'_x + \mu \psi'_x = 0 \\ F'_y = 0, F'_z = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} F'_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0 \\ F'_\mu = \psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$

③解上面方程组得备选点  $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 并求  $f(P_i)$ , 取其最大值和最小值

④根据实际问题, 比存在最值, 所得即所求

10.  $f(x, y)$  在区域  $D$  中的最值: ①求出其在区域内所有可疑点的函数值;

②在区域边界上的最值; ③比较得出最值

11. 一般  $f''_{xy}(x_0, y_0) \neq f''_{yx}(x_0, y_0)$ , 除非它们在  $(x_0, y_0)$  都连续

12. 偏微分方程:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \varphi(y)$

13.  $F(x, y) \xrightarrow{\text{对 } x \text{ 求导}} F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \xrightarrow{\text{再对 } x \text{ 求导}}$

$$F''_{xx}(x, y) + F''_{xy}(x, y) \frac{dy}{dx} + \left[ F''_{yx}(x, y) + F''_{yy}(x, y) \frac{dy}{dx} \right] \frac{dy}{dx} + F'_y(x, y) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

### 第 11 讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积

2. 二重积分的存在性(可积性)

①在有界闭区域  $D$  上连续, 则在  $D$  上可积, 即二重积分存在

②在D上有界,且在D上除了有限点和有限光滑曲线外都连续,则在D上可积

3. 二重积分的定义:

$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j\right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}$$

性质: 求区域面积:  $\iint_D dr = A$ , A 为 D 的面积 可积函数必有界

线性、可加、保号、估值、中值: 参考[定积分的性质](#)

4. 普通对称性:

$\iint_D f(x,y) dx dy =$	偶 $\rightarrow 2 \iint_{D_1} f(x,y) dx dy$	奇 $\rightarrow 0$
D关于y轴对称	$f(x,y) = f(-x,y)$	$f(x,y) = -f(-x,y)$
D关于原点对称	$f(x,y) = f(-x,-y)$	$f(x,y) = -f(-x,-y)$
D关于y=x对称	$f(x,y) = f(y,x)$	$f(x,y) = -f(y,x)$
D关于y=a对称	$f(x,y) = f(x, 2a-y)$	$f(x,y) = -f(x, 2a-y)$

轮换对称性: 把 x、y 对调后, 区域 D 关于 y=x 对称(或不变), 则

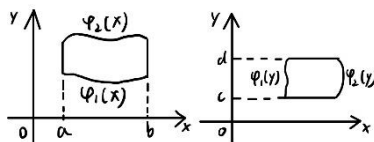
$$\iint_D f(x,y) d\sigma = \iint_D f(y,x) d\sigma$$

5. 二重积分比大小: ①用对称性; ②用保号性

6. 二重积分的计算

a) 直角坐标系与换序: 下限  $\leq$  上限

$$X \text{ 型: } \iint_D f(x,y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy$$



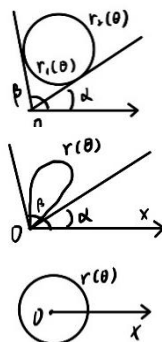
$$Y \text{ 型: } \iint_D f(x,y) d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx$$

b) 极坐标系下与换序: 先积 r, 后积 theta

$$\bigcirc \text{ 在 D 外: } \iint_D f(x,y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$\bigcirc \text{ 在 D 边界上: } \iint_D f(x,y) d\sigma = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$\bigcirc \text{ 在 D 内: } \iint_D f(x,y) d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$



c) 选择的一般原则:

若①被积函数为  $f(x^2+y^2)$ ,  $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $f\left(\frac{x}{y}\right)$  等形式; ②区域为圆或者圆的一部分

$\Rightarrow$  优先选用极坐标系, 否则使用直角坐标系

d) 极坐标与直角坐标的相互转化:

直线在极坐标下的表示用此方法!

$$\textcircled{1} \iint_{D_{xy}} f(x,y) dx dy \xrightarrow{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} \iint_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dx dy; \textcircled{2} \text{画好 D 的图形}$$

e) 关于积分区域 D

①图形变换: 平移、对称、伸缩

②直角系方程给出: 已知、未知(描特殊点、图形变换、导数)

③极坐标方程给出: 已知(附录 I)、未知(描特殊点、图形变换、极直互换)

④参数方程给出: 已知(附录 I)、未知(描特殊点、化为直角/极坐标)

⑤动区域 (含其他参数)

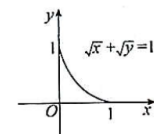
f) 关于被积函数: 分段函数 (含绝对值)、最大/小值函数、取整函数(夹逼)、符号函数、抽象函数 (复合函数、偏导函数)

$$g) \text{ 换元法: } \iint_{D_{xy}} f(x,y) dx dy \xrightarrow{\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v)}} \iint_{D_{uv}} f[x(u,v), y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

7. 交换积分次序: 画图, 转换成二重积分, 然后交换次序

$$8. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y) dy = - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x,y) dx + \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y) dx$$



9. 二重变限积分的求导公式: 参考[一阶的](#)

$$10. \text{二重积分的逆向思维: } \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(y)} dy = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)} dx dy$$

$$11. \left[ \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) dx dy \right]' = \left[ 2\pi \int_0^{2t} r f\left(\frac{1}{2}r\right) dr \right]' = 8\pi t f(t)$$

12.

## 第 12 讲 常微分方程

1. 微分方程:  $F = (x, y, y', \dots, y^{(n)})$  或  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

常微分方程: 未知函数是一元函数的微分方程

2. 一阶微分方程求解

a) 变量可分离型:  $y' = f(x)g(x)$   $\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(x)} = \int f(x) dx$

b) 可化为变量可分离型:

①  $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ : 令  $u = ax + by + c$ ,  $\frac{du}{dx} = a + b \frac{dy}{dx} \xrightarrow{\text{带入得}} \frac{du}{dx} = a + bf(u)$

②  $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  或  $\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ : 齐次微分方程

令  $u = \frac{y}{x}$ , 则  $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \xrightarrow{\text{带入原方程}} x \frac{du}{dx} + u = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x}$

c) 一阶线性微分方程: 形如  $y'(x) + p(x) \cdot y = q(x)$

通解公式  $y = e^{-\int p(x) dx} \left[ \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C \right]$

推导: 两边同乘  $e^{\int p(x) dx}$ , 得  $e^{\int p(x) dx} y' + e^{\int p(x) dx} p(x) \cdot y = e^{\int p(x) dx} q(x)$

$[e^{\int p(x) dx} \cdot y]' = e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) \Rightarrow e^{\int p(x) dx} \cdot y = \int e^{\int p(x) dx} \cdot q(x) dx + C$

d) 伯努利方程: 形如  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  即  $x$  为自变量,  $y$  为应变量

步骤: ① 变形为  $y^{-n} \cdot y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$  ③ 求解即可

② 令  $z = y^{1-n}$ , 得  $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ , 则  $\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$

### 3. 二阶可降微分方程的求解

①  $y'' = f(x, y')$  型: 令  $y' = p(x)$ ,  $y'' = p'$ , 原方程变为一阶方程  $\frac{dp}{dx} = f(x, p)$

②  $y'' = f(y, y')$  型: 令  $y' = p$ ,  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$ , 原方程变为  $p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$

4. 二阶变系数线性微分方程:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  齐次:  $f(x) \equiv 0$ ;

二阶常系数线性微分方程:  $y'' + py' + qy = f(x)$  非齐次:  $f(x) \neq 0$

### 5. 线性微分方程的解的结构

a) 对于  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ,  $y_1(x), y_2(x)$  是其两个线性无关的解(即  $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$

常数), 则  $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  为通解,  $C_1 + C_2 = 1$

b)  $y^*(x)$  为特解,  $y(x) + y^*(x)$  为通解

c)  $y_1^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$  的特解,  $y_2^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$  的特解,  $y_1^*(x) + y_2^*(x)$  是  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

### 的特解

d) 全部解 = 奇解 + 通解  $\therefore$  通解不代表所有解

6.  $y'' + py' + qy = 0$  的通解: 特征方程  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

①  $p^2 - 4q > 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , 通解  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

②  $p^2 - 4q = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , 通解  $y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$

③  $p^2 - 4q < 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 = a \pm \beta i$ , 通解  $y = e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

7.  $y'' + py' + qy = f(x)$  的特解

a)  $f(x) = P_n(x) e^{ax}$  特解  $y^* = e^{ax} Q_n(x) x^k$ ,

$k = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2 \\ 1, & \alpha = \lambda_1 \text{ or } \alpha = \lambda_2, Q_n(x) \text{ 是 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式, 通过将 } y^* \text{ 带入方程求出 } Q_n(x) \\ 2, & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$

b)  $f(x) = e^{ax} [P_m(x) \cos \beta x + P_n(x) \sin \beta x]$

特解  $y^* = e^{ax} [Q_l^{(1)}(x) \cos \beta x + Q_l^{(2)}(x) \sin \beta x] x^k$

其中  $\begin{cases} l = \max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 两个不同的 } l \text{ 次一般多项式} \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i \text{ 不是特征根} \\ 1, & \alpha \pm \beta i \text{ 是特征根} \end{cases} \end{cases}$

注意: 若  $P_n(x) = 0$ ,  $Q_l^{(2)}(x)$  不一定为 0

8.  $n$  阶常系数齐次线性微分方程的解  $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

特征方程  $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n = 0$

a) 特征根为单实根  $\lambda$ , 通解对应一项  $C e^{\lambda x}$

b) 特征根为  $k$  重实根  $\lambda$ , 通解中对应  $k$  项  $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda x}$

c) 特征根为单复根  $\alpha \pm \beta i$  ( $\beta > 0$ ), 通解中对应 2 项  $e^{ax} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

d) 特征根为  $k$  重复根  $\alpha \pm \beta i$  ( $\beta > 0$ ), 通解中对应  $2k$  项

$e^{ax} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

9.  $n$  阶非齐次微分方程  $y^{(n)} = f(x)$  型的解

① 令  $y^{(n-1)} = P(x)$ ,  $P' = y^{(n)}$ , 则  $P'(x) = f(x)$ ,  $P(x) = y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$

② 同理得  $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx + C_2$

③ 连续积分  $n$  次, 得含有  $n$  个任意常数的通解

10.

### 第13讲 无穷级数

1. 无穷级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

部分和:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

m 项后余项:  $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k} + \dots$

性质: ①  $\sum_{n=1}^{\infty} (au_n \pm bv_n) = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm b \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ;

②  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛  $\Leftrightarrow \sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$  收敛

③ 收敛的必要条件:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

2. ★ 正项级数:  $u_n \geq 0$

发散+发散=发散

a) 收敛的充分必要条件:  $\{S_n\}$  有上界, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A$

b) 比较判别法: 大的收敛, 小的也收敛; 小的发散, 大的也发散

c) 比较判别法的极限形式:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$  适用于初等级数

i.  $A=0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛  $\Leftrightarrow u_n$  是  $v_n$  的高阶无穷小

ii.  $A=+\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也发散  $\Leftrightarrow$  低阶

iii.  $0 < A < +\infty$ ,  $v_n$  和  $u_n$  同敛散  $\Leftrightarrow$  同阶

d) 比值判别法(达朗贝尔判别法):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$  适用于

①  $\rho < 1$ , 收敛; ②  $\rho > 1$ , 发散; ③  $\rho = 1$ , 不一定 (大部分发散)

e) 根值判别法(柯西判别法):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

①  $\rho < 1$ , 收敛; ②  $\rho > 1$ , 发散; ③  $\rho = 1$ , 不一定(举反例,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ )

3. 交错级数: 各项正负相间, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

a) 莱布尼兹判别法:  $\{u_n\}$  单调不增且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则收敛

b) 拆成几个级数之和并分别判断, 然后利用收敛级数的性质判断交错级数

4. 任意项级数: 可正可负可 0, 记作  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对值级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛 大多数

若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  条件收敛

定理: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  必收敛;

可以拆成正项级数和交错级数分别判断收敛, 然后总和;

5. 收敛级数的性质

敛散性推不出除了  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  外任何极限的内容

① 收敛级数随便加括号后仍收敛, 其和不变; ② 随便加括号后发散, 原级数必发散

③ 加括号后收敛, 原级数不一定收敛; ④ 绝对收敛的级数有可交换性

6. 判断敛散性步骤: ① 判断  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|$  是否为 0, ② 判别级数类型: (a) 正项级数, 五大

判别法; (b) 交错级数: 先判断  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ , 成功了变成正项, 失败则用莱布尼兹判别法

7. ★ 重要结论: 调和级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散 p 级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{array} \right.$

广义 p 级数:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{发散, } p \leq 1 \\ \text{收敛, } p > 1 \end{array} \right.$ ; 交错调和级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ , 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$  都是任意项级数

①  $a, b, c \neq 0$ , 且  $au + bv + cw = 0$ , 则只要其中两个收敛, 另一个必收敛

② 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛;  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散

③ 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$  绝对收敛  $\Leftrightarrow \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + \frac{1}{n^2})$

④ 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛:

I 收敛:  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ , 性质① 反推要加  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  的条件

$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$   $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$

$u \geq 0$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$

II 不定:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$  反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$   $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$   $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

$u$  任意  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$   $\sum_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$  反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$u$ 任意  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$  反例:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

⑤  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛:  $\begin{cases} u_n \geq 0, v_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \text{ 收敛} \\ u_n \text{ 任意}, v_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| v_n \text{ 收敛} \end{cases}$

8. 函数项级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  幂级数:  $u_n(x)$  是  $n$  次幂函数

一般形式:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ; 标准形式:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a) 阿贝尔定理:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = x_1 (\neq 0)$  收敛, 所有  $|x| < |x_1|$ , 绝对收敛  
 $x_2$  发散  $> |x_2|$ , 发散

b) 收敛半径的存在性:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径  $R (\geq 0)$  必存在

①  $x=0$  收敛,  $R=0$ ; ② 整个轴上都收敛,  $R=+\infty$   
 ③  $|x| < R$ , 绝对收敛;  $|x| > R$ , 发散;  $x = \pm R$ , 可能发散可能收敛

c)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  收敛半径:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho, R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, \rho \neq 0 \\ +\infty, \rho = 0 \\ 0, \rho = +\infty \end{cases}$

d) 收敛域 = 收敛区间 +  $x = \pm R$  处的敛散性

9. 和函数:  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

定理: 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  和  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  相等, 即在点  $x=0$  处的某领域内拥有相同的和函数, 则它们同次幂项的系数相等, 即  $a_n = b_n$

四则运算: 乘法:  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$   
 其中  $|x| < R = \min\{R_a, R_b\}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

性质: ①  $S(x)$  连续, 幂级数在  $x = R$  (or  $-R$ ) 收敛, 则  $S(x)$  在  $(-R, R)$  (or  $[-R, R]$ ) 连续

②  $S(x)$  可积, 则  $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$  的  $R$  不变, 收敛域可能扩大

③  $S(x)$  可导, 则  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R)$  的  $R$  不变, 收敛域可能缩小

10. 泰勒级数:  $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ ; 麦克劳林级数:  $\sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n$

注意: 具有任意阶导数的函数, 其泰勒级数并不都能收敛于函数本身  
 泰勒级数收敛于本身的充要条件

$f(x) \in (x_0 - R, x_0 + R)$  有任意阶导数,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0, |x-x_0| < R$$

11. 幂级数展开求法 ① 标准: 直接算; 级数展开数三考得多, 数一少

② 不标准(间接法): 变量代换、四则运算、逐项求导/积分、待定系数

12. 幂级数收敛域的求法 分析幂级数必须先求收敛域

a) 具体型步骤: ①  $\sum u_n(x) \Rightarrow \sum |u_n(x)|$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right|$  or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1$ , 得收敛区间  $(a, b)$ ; ③ 端点的敛散性

b) 抽象型 结论

i. 已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  在某点  $x_1$  的敛散性

① 收敛,  $R \geq |x_1 - x_0|$ ; ② 发散,  $R \leq |x_1 - x_0|$ ; ③ 条件收敛,  $R = |x_1 - x_0|$

ii. 已知  $\sum a_n (x-x_1)^n$  的敛散性, 求  $\sum b_n (x-x_2)^m$  的敛散性

①  $(x-x_1)^n$  和  $(x-x_2)^m$  的转换: 平移收敛区间;  $R$  不变  
 提出或者乘  $(x-x_0)^k$   $R$  不变

②  $a_n$  和  $b_n$  的转换: 逐项求导  $R$  不变,  $|$  可能缩小  $\rightarrow$  子型  
 or 积分  $R$  不变,  $|$  可能扩大  $\rightarrow$  母型

13. ★ 幂级数和函数的求法 先求收敛域 数一考得多, 数三少

a) 基本思路: ① 复杂系数拆成简单求和; ② 各项阶数、系数配齐; ③ 凑子型、母型级数; ④ 无定义的点用级数补齐

b) 突破口: ② 有递推关系, 微分方程

①  $(an+b)^c$  在分子上, 先积后导,  $S(x) = (\int S(x) dx)'$

在分母上, 先导后积,  $S(x) = \int_a^x S'(x) dx + S(a), a$  取展开点

c) 重要的幂级数展开+收敛域

子型:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{求导}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad -1 < x < 1$

$\xrightarrow{\text{求导}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \quad -1 < x < 1$

母型:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \quad -1 \leq x < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x) \quad -1 < x \leq 1$  交错

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = \arctan x \xleftarrow{\text{积分}} \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{-\ln(1-x) - [-\ln(1+x)]}{2}$$

$$\text{带阶乘: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{泊松分布期望、方差}) \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{其他: } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \begin{cases} x \in (-1, 1), \alpha \leq -1 \\ x \in (-1, 1], -1 < \alpha < 0 \\ x \in [-1, 1], \alpha > 0 \end{cases}$$

14.

#### 第14讲 数学一、数学二专题内容

$$1. \text{ 相关变化率: } y = f(x), \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ 则 } \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt}$$

$$2. \text{ 曲率公式: } k = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{曲率半径: } R = \frac{1}{k} (y'' \neq 0)$$

$$\text{曲率圆: } (X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 = R^2 \quad \text{其中 } \alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}$$

$$3. \text{ 变力沿直线做功: } W = \int_a^b F(x) dx \quad \text{抽水做功: } W = \rho g \int_a^b x A(x) dx$$

$$\text{水压力: } P = \rho g \int_a^b x [f(x) - h(x)] dx \quad f(x) - h(x) \text{ 为底宽} \quad A(x) \text{ 为底面积}$$

$$4. \text{ 平面曲边梯形的形心坐标: } \bar{x} = \frac{\iint_D x d\sigma}{\iint_D d\sigma} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad \bar{y} \text{ 同理}$$

$$\text{平面曲线弧长: } ① y = y(x), s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

$$② \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$③ r = r(\theta), s = \int_a^b \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

$$\text{旋转曲面面积: } ① y = y(x), S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

$$② \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, S = 2\pi \int_a^b |y(t)| \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\text{平行截面面积已知的立体体积: } V = \int_a^b A(x) dx$$

$$5. \text{ 微分方程的物理应用: 加速度 } a = v \frac{dv}{dx} \quad \text{引力 } F = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{注意力的方向}$$

$$\text{冷却定律 } \frac{dx}{dt} = -k(x - x_0) \quad x - x_0 \text{ 为温差, } - \text{表示温度随时间的 } \uparrow \text{ 而 } \downarrow$$

$$6. \text{ 欧拉方程: 形如 } x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + px \frac{dy}{dx} + qy = f(x)$$

$$\text{解法: } ① \text{ 当 } x > 0, \text{ 令 } x = e^t, \text{ 则 } t = \ln x, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ 于是 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2} \frac{d^2 y}{dt^2}, \text{ 方程化为 } \frac{d^2 y}{dt^2} + (p-1) \frac{dy}{dt} + qy = f(e^t), \text{ 求解}$$

$$② \text{ 当 } x < 0, \text{ 令 } x = -e^t, \text{ 同理得}$$

$$7. \text{ 傅里叶级数: } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), [-\pi, \pi] \quad \text{周期函数}$$

$$\text{傅里叶系数: } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{计算几乎不考}$$

$$8. \text{ 狄利克雷收敛定理: } [-\pi, \pi] \text{ 上连续 or 只有有限个第一类间断点, 且最多只有有限个极值点, 则在 } [-\pi, \pi] \text{ 上处处收敛}$$

$$\text{和函数 } S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases} \quad \text{其中 } f(x_0 \pm 0) \text{ 表示 } \lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x)$$

$$9. \text{ 正弦级数: } f(x) \text{ 奇函数, } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$\text{余弦级数: } f(x) \text{ 偶函数, } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$10. \text{ 延拓: 将 } [0, \pi] \text{ 上函数展位正弦 or 余弦级数}$$

$$\text{步骤: 补成 } [-\pi, \pi] \text{ 上的奇 or 偶函数, 再以 } 2\pi \text{ 为周期延拓}$$

$$11. \text{ 傅里叶展开式: } n \rightarrow \frac{n}{l}, [-\pi, \pi] \rightarrow [-l, l]$$



## 第16讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积:  $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$

$a$  在  $b$  上的投影:  $Pr_{jb} a = \frac{a \cdot b}{|b|}$   $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

2. 向量积:  $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$   $a \parallel b \Leftrightarrow |a \times b| = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

$|a \times b| = |a||b| \sin \theta$  方向: 右手定则

3. 混合积:  $[abc] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$  三向量共面:  $[abc] = 0$

4. 方向余弦:  $\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos \beta, \cos \gamma$

5. 单位向量:  $a^0 = \frac{a}{|a|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  任意向量:  $r = r(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

6. 平面方程: 法向量  $n = (A, B, C)$  平面上两不共线向量叉乘 比直线方程重要

一般式:  $Ax + By + Cz + D = 0$  ☆截距式:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

点法式:  $\overrightarrow{P_0 P} \perp \vec{n} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

三点式:  $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0$

平面束: 已知平面  $S$  过直线  $L: \begin{cases} S_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ S_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ , 且  $S$  不为其中的一个平面, 例如  $S_1$ , 则  $S$  方程为  $\mu S_1 + S_2 = 0$

7. 直线方程: 方向向量  $\tau = (l, m, n)$  一般式: 两平面的交线, 即联立方程

点向式:  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  两点式:  $\overrightarrow{P_0 P} \parallel \tau \rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

参数式:  $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$ ,  $t$  为参数  $\tau$  含0用这个

8. 距离公式: ★点到面:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  两平行平面:  $d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

其他  
几乎  
不考

点  $P_0$  到线(过  $P_1$ ):  $d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_0 P_1}|}{|\tau|} = \frac{\text{平行四边形面积}}{\text{底边}}$ ,  $\tau = (l, m, n)$  为方向向量

两平行直线:  $d = \frac{|\tau \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau|}$  两异面直线:  $d = \frac{|(\tau_1 \times \tau_2) \times \overrightarrow{P_1 P_2}|}{|\tau_1 \times \tau_2|} = \frac{\text{平行六面体体积}}{\text{底面积}}$

9. ×直线关系: 方向向量  $\tau_1, \tau_2$   $\theta = \arccos \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{|\tau_1| |\tau_2|}$

平行:  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$  垂直:  $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

10. ×平面关系: 法向量  $n_1 = (A_1, B_1, C_1), n_2$   $\theta = \arccos \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|}$

平行:  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$  垂直:  $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

11. ×平面与直线关系: 将直线的  $\tau$  当成平面的法向量

12. ★空间曲线: ○一般式  $\Gamma: F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$  几何意义: 两曲面交线

①切向量:  $\tau = \left( \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{vmatrix}_{P_0}, \dots \right)$  ②切线:  $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面:  $\tau(0)(x - x_0) + \tau(1)(y - y_0) + \tau(2)(z - z_0) = 0$   
○参数方程  $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$

①切向量:  $\tau = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$  ②切线:  $\frac{x-x_0}{\tau(0)} = \frac{y-y_0}{\tau(1)} = \frac{z-z_0}{\tau(2)}$

③法平面:  $\tau(0)(x - x_0) + \tau(1)(y - y_0) + \tau(2)(z - z_0) = 0$

★曲面在坐标面的投影: 例  $xOy$ , 将  $\Gamma$  中的  $z$  消去, 曲线方程为  $\begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

注意简单特例: 若曲面为柱面, 如  $x^2 + 4y^2 = 4$  在  $xOy$  的投影为本身

13. ★空间曲面: 隐式  $F(x, y, z) = 0$  显式  $z = z(x, y)$

①法向量:  $n = (F'_x|_{x_0}, F'_y|_{x_0}, F'_z|_{x_0})$  ②法向量:  $\frac{x-x_0}{n(0)} = \frac{y-y_0}{n(1)} = \frac{z-z_0}{n(2)}$

③切平面:  $n(0)(x - x_0) + n(1)(y - y_0) + n(2)(z - z_0) = 0$

a. 椭圆面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  b. 单叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

c. 双叶双曲面:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  d. 椭圆抛物面:  $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$



e. 椭圆锥面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

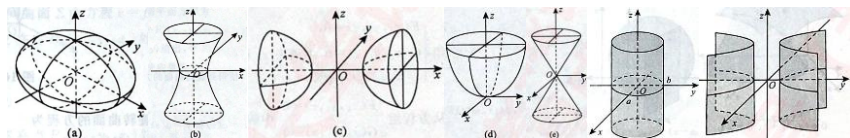
× 双曲抛物面(马鞍面):  $-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$  了解

椭圆柱面:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

双曲柱面:  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

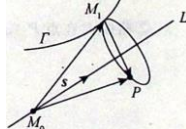
抛物柱面:  $y = ax^2$

柱面准线: 定曲线; 母线: 动直线



14. ★ 旋转曲面: 曲线  $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$  绕直线  $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$  旋转一周

解法:  $\begin{cases} |\vec{M_0P}| = |\vec{M_0M_1}| \\ \vec{M_1P} \perp s \end{cases} + \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$



15. 方向导数: 公式法  $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = u'_x(P_0) \cos \alpha + u'_y(P_0) \cos \beta + u'_z(P_0) \cos \gamma$

定义:  $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(P) - u(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$

16. 梯度:  $\text{grad } u|_{P_0} = (u'_x(P_0), u'_y(P_0), u'_z(P_0))$

17. 方向导数和梯度的关系:  $\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0} = \text{grad } u|_{P_0} \cdot l^0 = |\text{grad } u|_{P_0}| \cos \theta$

18.  $S_{\text{椭圆}} = ab\pi$   $S_{\text{球}} = 4\pi r^2$   $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$   $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$

19.

### 第 17 讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分: 几何意义: 空间物体的质量 总存在

$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i, c + \frac{d-c}{n}j, e + \frac{f-e}{n}k\right) \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} \cdot \frac{f-e}{n}$$

性质: 求空间区域体积  $\iiint_{\Omega} dv = V$  普通、轮换对称性: 参考 [二重积分的对称性](#)  
可积必有界, 线性, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

2. 凑三重积分定义步骤

① 提出  $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ ; ② 凑出  $\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}$ ; ③  $\frac{i}{n} = 0 + \frac{i-0}{n}$ , 其他两个同理, 凑定义完成

3. 三重积分的计算方法

a) 直角坐标系: 二重积分+定积分

i. 先后二, 即先定积分再二重积分: 先投影(得  $D$ ), 再穿线(得  $\alpha, \beta$ )

$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \iint_D dx dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y, z) dz$$

ii. 先二后一, 即先二重积分再定积分: 先定限(得  $\alpha, \beta$ ), 再积分(得  $D$ )

$$\iiint_D f(x, y, z) dv = \int_{\alpha}^{\beta} dz \iint_D f(x, y, z) dx dy$$

b) 柱面坐标系:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

c) 球面坐标系:  $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi$

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr$$

$$= \int_{\theta_{\pm}}^{\theta_{\mp}} d\theta \int_{\varphi_{\pm}(\theta)}^{\varphi_{\mp}(\theta)} d\varphi \int_{r_{\pm}(\varphi, \theta)}^{r_{\mp}(\varphi, \theta)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, z) r^2 \sin \varphi dr$$

适用范围: ① 被积函数含  $f(x^2 + y^2 + z^2)$  或  $f(x^2 + y^2)$

② 积分区域为球 or 锥 or 其部分

d) 利用对称性

e) 利用形心公式的逆用  $(\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x dv}{\iiint_{\Omega} dv} \Rightarrow \iiint_{\Omega} x dv = \bar{x} \cdot v)$

4. 第一型曲线积分:  $\int_L f(x, y) ds$  或  $\int_L f(x, y, z) ds$  几何意义: 曲线质量  
积分区域为曲线的定积分(面积) 总存在

性质: 求曲线长度:  $\int_L 1 ds = l_r$  普通、轮换对称性: 参考 [二重积分的对称性](#)

可积必有界, 线性, 可加、保号性, 估值、中值定理: [定积分的性质](#)

5. 第一型曲线积分的计算:

a) 平面曲线: 一投二代三计算 (伪二元)

类似: [平面曲线弧长](#)

①  $y = y(x)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x, y(x)] \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$

②  $x = x(t), y = y(t)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[x(t), y(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

③  $r = r(\theta)$   $\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta] \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$

b) 空间曲线长度: 和上面的②同理

c) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

6. 第一型曲面积分:  $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$  几何意义: 曲面质量

积分区域为曲面的二重积分(体积)

总存在

性质: 求曲面面积  $\iint_{\Sigma} 1 dS = S$  普通、轮换对称性: 参考二重积分的对称性

可积必有界, 线性, 可加、保号性, 估值、中值定理: 定积分的性质

7. 第一型曲面积分的计算

a) 化为二重积分: 三步骤(无先后顺序) 一投二代三计算(伪三元)

①将 $\Sigma$ 投影到某一平面(比如 $xOy$ 面)  $\Rightarrow$ 投影区域为 $D$ (比如 $D_{xy}$ )

若投影有重叠: ①投影到其他平面; ②拆分后投影

②将 $z = z(x, y)$ 或 $F(x, y, z) = 0$ 带入 $f(x, y, z)$   $x = x(y, z)$ 同理

③计算 $z'_x, z'_y \Rightarrow dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$

得到 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy$

b) 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

8. 重积分和第一型线面积分的应用 不同应用, 被积函数相同, 积分维度不同

a) 面积&体积: 平面面积:  $S = \int_a^b |y_1(x) - y_2(x)| dx$

空间体积:  $V = \iint_D |f(x, y) - g(x, y)| d\sigma$

空间曲线长度:  $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$

空间曲面面积:  $z = z(x, y), S = \iint_D \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy$

介于两曲线弧的柱面面积:  $S = \int_L [z_1(x, y) - z_2(x, y)] ds$

若 $r = r(\theta), ds = \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$

b) ★重心&形心 =  $\frac{\text{质量}}{\text{面积、体积、长度}}$  空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例: 平面薄片,  $\bar{x} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$ ,  $\bar{y}$ 同理  $\rho$ 为常数时, 为形心

c) 转动惯量:  $I = mr^2$  平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如: 空间物体,  $I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$ ,  $I_y, I_z, I_o$ 同理

d) 引力:  $F = G \frac{Mm}{r^2}$

平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如: 光滑曲线,  $F_x = Gm \int_L \frac{\rho(x, y, z)(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} ds$ ,  $F_y, F_z$ 同理

9.  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} (x^2 + y^2 + z^2) dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{4}{5} \pi R^5$

10.  $S$ 是以原点为圆心的球, 则 $\iint_{\Sigma} xy dS = \iint_{\Sigma} x dS = 0$  习题 17.11

### 第18讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分:  $\int_{\Gamma} F(x, y, z) dr = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$

物理背景: 变力在平面/空间曲线上做的总功

总存在

性质: 线性, 可加, 有向 $\int_{AB} F dr = -\int_{BA} F dr$ , 对称: 参考二重积分的对称性

2. 平面第二型曲线积分的计算 平面曲线积分与路径无关

a) 直接计算: 一投二代三计算  $\alpha, \beta$ 大小无所谓, 关键对应起、终点

$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\} dx$

$= \int_{\alpha}^{\beta} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\} dt$

b) ★格林公式: 条件: 封闭,  $P, Q$ 有一阶连续偏导 左手朝 $D$ 为正方向

$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$

若① $L$ 不是封闭曲线: 补线法; ② $P, Q$ 其偏导在 $D$ 上不连续: 挖去法

3. ★空间第二型曲线积分计算: 斯托克斯公式

$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$

(第二型曲面积分形式) (第一型曲面积分形式)

$l$ 为 $\Sigma$ 的边界,  $l$ 方向与 $\Sigma$ 的法向量成右手系

一般用这个

4. 平面曲线积分与路径无关的理论

①沿任意全在 $D$ 内的闭曲线 $L$ , 有 $\oint_L P dx + Q dy = 0$

② $\int_{L_{AB}} P dx + Q dy$ 在 $D$ 内与路径无关 $\Leftrightarrow P dx + Q dy$ 存在原函数, 只与 $L$ 的起、

终点  $A, B$  有关      ③  $D$  内存在  $u(x, y)$ , 使  $du = Pdx + Qdy$

④  $\text{grad } u = Pi + Qj$       ⑤  $Pdx + Qdy = 0$  为全微分方程      ⑥  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

a)  $D$  是平面有界闭区域,  $P, Q$  连续, 则①~⑤等价

b) ★  $D$  是平面单连通区域,  $P, Q$  连续且具有一阶导, ①~⑥等价

c)  $D$  是平面有界闭区域,  $P, Q$  连续且具有一阶导, ② $\Rightarrow$ ⑥

5. 第二型曲面积分:      物理背景: 向量函数通过曲面的通量      总存在

$$\iint_{\Sigma} F \cdot dS = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy$$

性质: 线性性质, 可加性, 有向性, 对称性: 参考[第二型曲线积分](#)

6. 平面第二型曲面积分的计算

a) 化为二重积分: 拆成三部分算      一投二代三计算      (无先后顺序)

① 将  $\Sigma \xrightarrow{\text{投影到某一平面}}$  投影区域为  $D$  (比如  $D_{xy}$ )      投影不能重叠

② 将  $z = z(x, y)$  或  $F(x, y, z) = 0$  带入  $R(x, y, z)$

③ 将  $dx dy$  写成  $\pm dx dy$ ,  $\Sigma$  方向为上取 "+"

$$\text{得 } \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

a) ★ 高斯公式:  $\oiint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$

若①  $\Sigma$  不是封闭曲面: 补面法; ②  $P, Q$ 、其偏导在  $D$  上不连续: 挖去法

7. 第一、二型曲面积分关系:  $dy dz = \cos \alpha dS, dz dx = \cos \beta dS, dx dy = \cos \gamma dS$

转换坐标变量法: 将原投影在一个坐标面上的曲面积分投影到另一个坐标面上

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) (-z'_x) dx dy$$

$Q, R$  同理, 当  $\Sigma$  定向的法向量与  $z$  轴夹角在  $0 \sim 90^\circ$ , 取 +

8. 设  $A(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\text{散度: } \text{div } A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{旋度: } \text{rot } A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{① } \text{div}(\text{grad } u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad \text{② } \text{rot}(\text{grad } u) = 0; \quad \text{③ } \text{div}(\text{rot } A) = 0;$$

$$9. |P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma| = |(P, Q, R)| |\vec{n}| \cos \varphi \leq |(P, Q, R)|$$