# 第一章 实分析概要

## 第一节 集合及其运算

* **例 1.5** 证明

证明：

* **定理 1.1** 1）； 2）

## 第二节 实数的完备性

* 定理 2.1 (区间套定理)：
* **命题 2.1** 设 是一个数列，则 的充要条件是 的每一个子列都收敘而且有相同的极限值

证明：

* **定理 2.2 （列紧性定理）** 任何有界数列必有收敛子列

证明：

* 基本/柯西数列
* **定理 2.3 柯西收敛原理 (完备性定理)** 数列收敛的充分必要条件是， 它是一个基本数列。

证明：

* **定理 2.4 (单调收敛定理)** 单调有界数列（即单调增有上界数列或单调减有下界数列）必然收敛

证明：

* 六大定理：

## 第四节 直线上的点集与连续函数

* 极限点、导集、闭包、闭集
* **定理 4.2** 点 是集 的极限点的**充要**条件是存在 中的点列 使

证明：

* 定理 非空集 是闭集的**充要**条件是
* **定理 4.4** 集合 为闭集的**充要**条件是 。

证明：

* 一致连续
* **例 4.4** 设 则 在 上连续但不一致连续。

证明：

* **例 4.5** 函数列 不一致收敛于

证明：

* **例 4.6** 证明函数列，在 上一致收敛于 0 。

证明：

* 一致收敛
* **定理 4.9** 定义在点集 上的函数列 一致收敛于 的**充要**条件是: 对于 使得当 时，不等式对于所有 的成立.

证明：

## 第六节 勒贝格积分

* 定理6.6 勒贝格控制收敛定理
* 定理 6.7 设 与 都是 上的非负可测函数， 并且， 则
* **例 6.1** 已知 试计算 积分 的值.

解：

* **例 6.2** 求极限

解：

* **例6. 3** 设 是区间 上的 可积函数，称为函数 的富里哀变换，试证1） 是上的连续函数； 2）

解：

# 第二章 距离空间

## 第一节 距离空间的基本概念

* 距离满足条件\*3
* **例 1.2** 连续函数空间   
  令 为 连续函数   
  在 上定义

证明：

* **例 1.3** 有界数列空间 。 为所有有界数列( 其中 是常数 所构成的集合。

若 ，

* 例 1.4 离散距离空间
* 例 1.5 空间 。 ，
* 例 空间 。
* 如 ，

## 第二节 距离空间中的开集、闭集与连续映射

* **定理 2.5** 设 都是距离空间 ，则下列命题是等价的1) 在 连续;  
  2) 对于 的任一邻域 必存在 的邻域 使得
* 3) 对于 中任一点列 若 则必有

证明：

## 第三节 距离空间的可分性与完备性

* 基本/柯西列 完备的距离空间
* **例3.4** 是完备的距离空间

证明：

## 第四节 压缩映射原理及其应用

* 定理 4.1 设 是完备的距离空间, 是压缩映射。则 在 中存在唯一的不动点 即有
* **推论 4.1** 设 是完备的距离空间, 如 在闭球 上是压缩映射，并且 则 在 中存在唯一的不动点。

证明:

* **推论 4.2** 设 是完备的距离空间 。如存在常数 及正整数 使对任何 都有，则 存在唯一的不动点。

证明：

* **例 4.2** 微分方程解的存在性与唯一性。

设 在 上连续，且 满足

则有满足初始条件的唯一解。

证明：

* **例 4.3** 线性代数方程解的存在性与唯一性。
* 设有线性方程组
* 如对每个 ，，则该方程组有唯一解。

证明：

# 第三章 巴拿赫空间、希尔伯特空间及其线性算子

## 第一节 线性赋范空间与巴拿赫空间

* 范数公理\*3
* **线性同构、**线性同构映射
* **线性赋范空间** **巴拿赫空间**
* **定理 1.3** 线性赋范空间 X 中的球是凸集

证明：

## 第二节 有界线性算子与有界线性泛函

* **线性算子** ：

连续算子 **有界算子**

* **Ｔ的范数**：
* **定理 2.3** 有界线性算子Ｔ的范数的性质\*2

证明：

* **例2.3** 设算子 的定义如下
* 其中 为二元函数， 称为以 为核的弗莱德霍姆(Fledholm)算子。

证明：

* **例2.4** 设算子 的定义$

因为有。所以, 为线性算子。

证明：

* 线性算子空间： =

加法算子：

数乘算子：

* **泛函、有界线性泛函**
* **例 2.7** 空间 的共轭空间。  
  设 。任取 其中 设 ，则 为 上的有界线性泛函。

## 第三节 内积空间与希尔伯特空间

* 内积空间：满足\*3

希尔伯特空间：

* 许瓦尔兹不等式：
* **性质 3.1** 设 为希尔伯特空间， 中的内积 为 的连续函数，即若，则

证明：

* **性质 3.2** 中的内积与范数有下列关系:

实希尔伯特空间

复希尔伯特空间时，

证明

* **性质 3.3** 中的范数满足平行四边形公式

证明