目录

[第一章 线性方程组的解法 1](#_Toc20131703)

[第二章 行列式 1](#_Toc20131704)

[第三章 矩阵 1](#_Toc20131705)

[第四章 向量组的线性相关性 2](#_Toc20131706)

[第五章 矩阵的相似对角化 2](#_Toc20131707)

[第六章 实二次型 3](#_Toc20131708)

# 第一章 线性方程组的解法

1. 初等行变换：①交换两行；②某一行乘k；③某一行乘k后加到另一行；

# 第二章 行列式

1. **某一行的展开式**：

列同理

1. 行列式变号：交换某两行

不变：①转置； ②某一行/列乘k后加到另一行/列；

③某行所有元素为两个数之和，可以写成两个行列式之和

数乘：①某行的公因数k可以提到外面；②

1. 若A中无0且
2. [八大常见类型的行列式及其解法](八大常见类型的行列式及其解法.pdf)
3. **范德蒙德型行列式：**
4. 莫拉克法则：

# 第三章 矩阵

1. n维上/下三角方阵，
2. **B**、**C**分别为m、n阶，则，
3. 伴随矩阵： 逆矩阵：

1. 二阶方阵求逆：
2. A、B可交换： 反对称矩阵：
3. **A、B等价**：存在可逆矩阵P和Q，使得

**几何意义：两个**有限维向量空间的同一个线性映射

一个矩阵经过**初等行/列变换**后得到的任意一个矩阵与原矩阵等价

1. n维方阵A可逆 ⇔ A的列向量构成的向量空间

|A|≠0 A为非奇异矩阵 R(A)=n

A的各列/行**线性无关** AT可逆 A与E等价

0不是A的特征值 Ax=0只有零解 Ax=b只有唯一解

1. 初等矩阵：***E***经过一次初等变换 左乘⇔行变换，右乘⇔列变换

1. 求逆：

求解：

1. ①

② ③

④

⑤A可逆，则 ⑥

⑦ ⑧

⑨保秩运算：

1. 非齐次线性方程组： 齐次线性方程组：

结论：①的解的线性组合仍为其解

②为的解，则为导出组的解



# 第四章 向量组的线性相关性



线性相关：|A|=0 ⇔不全为0 ⇔不满秩 ⇔有解

线性无关：|A|≠0 ⇔全为0 ⇔满秩 ⇔无解

结论：①n+1个n维度向量必线性相关

②任何部分相关整体相关；整体无关任何部分无关

③线性无关延伸无关；线性相关缩短相关

④向量组A两两正交且非零，则其线性无关

1. 线性组合/表出/表示：有解

结论：①向量组(I)线性无关，线性相关，则可由向量组(I)线性表示，且表示方法唯一

1. 极大无关组：r组线性无关，r+1组线性相关 计算：初等行变换化为行最简形
2. 向量组等价：两个向量组可以相互线性表示⇔**(缺一不可)**

结论：①多数向量能用少数向量线性表示，多数向量一定线性相关

②向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则

1. 过渡矩阵： 坐标变换公式：
2. ★的基础解系：本质：一个极大无关组 **构成：个无关解**

计算方法：对A初等行变换得到最简形

结论：①只有零解

有非零解⇔ ⇔ A的**列**向量线性相关

**②为的两个解，其线性组合也是的解**

1. ★的通解： **构成：个无关解**

计算方法：对初等行变换得到最简形，通解=特解+基础解系

结论：①有无穷多解，则

**②为的两个解，为的解**

**③为的解，为的解，为的解，即通解=特解+基础解系**

④无解 ⇔

注意：若X为矩阵，求通解时每列都独立成向量看待，且若X阶数很小，可**直**

**接假设**矩阵中的每一个数为一个变量进行求解

1. 同解方程组结论：A经过初等行变换后与A同解
2. 求公共解：方法一：联立两个方程直接求 例4.19

方法二：求出两个方程的通解后相等

方法三：将一个通解带入另一个方程

求同解：方法一：若两个方程组可以化为相同的阶梯型，则同解

方法二：按行联立，

证明同解：分别证明一个方程的解满足另一个方程

区别：同解是两个方程的解集完全相同，公共解是两个解集的公共部分

# 第五章 矩阵的相似对角化

1. 特征值： 几何意义：伸缩比例

特征方程： （迹）

特征向量：对应的 几何意义：矩阵对向量只发生伸缩变换

结论：①不同对应的特征向量线性无关 ②，则0为A的特征值

③同一特征值对应的特征向量的线性组合还是特征向量

1. 有相同的特征向量 是它们的特征值
2. **A、B相似**： 记作

**几何意义：一个**有限维向量空间的同一个线性变换

判断相似步骤：①判断是否可相似对角化；②特征值是否相同

结论：①  ②

③的特征值为，特征向量是

④A、B的**行列式、秩、迹、特征值**相等，

⑤两个矩阵都是对称矩阵，相似的充要条件是特征值相同

1. n阶方阵A可对角化 有n个线性无关的特征向量(特征值)
2. 可相似对角化，即 ，是重特征值

是重特征值，则有个线性无关的特征向量

P的求法：先解，P由基础解系构成

结论：是的特征向量，是的特征值

1. 向量正交**内积为0**
2. 施密特正交化方法： 使用前提：重根的特征向量
3. **正交**矩阵： 行/列向量组是**单位正交**向量组
4. 实对称矩阵化为对角阵： 实对称矩阵必可相似对角化

步骤：①求出特征值；②求出特征向量，正交化，再单位化，构成正交矩阵Q

结论：①实对称矩阵A的不同对应的特征向量必正交

1. 利用**正交求特征向量**：
   1. 若有3个不同的特征向量，已知其中两个，可求第三个
   2. 若特征值有重根，已知单根的特征向量，可求重根的所有特征向量：为任意的与正交的向量，

例如，三阶方阵，，求的特征向量 P154

1. 实例：①若，则为的特征值

②若，则 or 0为的特征值

# 第六章 实二次型

1. 二次型：

**A必须为实对称矩阵** B改成实对称矩阵方法：

标准型：只含有完全平方项 （不唯一，且坐标变换也不唯一）

规范型：完全平方项前的系数为±1，与特征值的正负号保持一致

（唯一，但坐标变换不唯一）

计算方法：求出A的特征值 or 其他方法

1. (可逆)线性变换：，C为可逆矩阵 也叫坐标变换公式

理解:即坐标系\*下的坐标=另一坐标系\*下的坐标

1. 化实二次型为标准型方法
   1. 配方法： 前提：必须满足坐标变换 ~~不靠谱！~~
      1. 二次型含有完全平方项：按顺序，一次性把一个变量配到一个平方项内

例如，令

* + 1. 二次型不含完全平方项：例，令
  1. 正交变换法步骤： 必存在Q

①求出特征值；②求出特征向量，正交化，单位化，构成正交矩阵Q

1. 正惯性指数：**标准型**中正平方项的个数； 负惯性指数：负平方项的个数
2. A、B**合同**：，可逆 和有相同的正、负惯性指数

几何意义：**一个**有限维向量空间的同一个双线性函数or内积

性质：①如果A为对称矩阵，B也是对称矩阵；②；③传递性

1. 正定二次型：，都有 负定二次型：，都有

结论：正定二次型若能围成曲面，必为封闭曲面，例椭球面

1. A为正定矩阵前提：对称矩阵

**①A特征值全为正；②各阶顺序主子式都为正值**

③正惯性指数；④A、E合同；⑤正定

A为负定矩阵奇数阶顺序主子式为负值，偶数得为正值

1. 等价、相似、合同的关系
   1. 相似等价，合同等价
   2. 实对称矩阵A与B相似A与B合同