目录

[第1讲 高等数学常用基础知识 2](#_Toc20130322)

[第2讲 极限与连续 2](#_Toc20130323)

[第3讲 一元函数微分学的概念与计算 3](#_Toc20130324)

[第4讲 一元函数微分学的几何应用 4](#_Toc20130325)

[第5讲 中值定理 5](#_Toc20130326)

[第6讲 零点问题、微分不定式 5](#_Toc20130327)

[第7讲 一元函数积分学的概念与计算 6](#_Toc20130328)

[第8讲 一元函数积分学的几何应用 7](#_Toc20130329)

[第9讲 积分等式与积分不等式 8](#_Toc20130330)

[第10讲 多元函数微分学 8](#_Toc20130331)

[第11讲 二重积分 9](#_Toc20130332)

[第12讲 常微分方程 9](#_Toc20130333)

[第13讲 无穷级数 10](#_Toc20130334)

[第14讲 数学一、数学二专题内容 12](#_Toc20130335)

[第16讲 多元函数积分学的基础知识 13](#_Toc20130336)

[第17讲 三重积分、第一型曲线曲面积分 14](#_Toc20130337)

[第18讲 第二型曲线曲面积分 16](#_Toc20130338)

# 第1讲 高等数学常用基础知识

2. 余切函数：

正割函数： 余割函数：

1. 符号函数：；取整函数：
2. 若*U=max{ f(x), g(x) }，V=min{ f(x), g(x) }，*

则*U+V = f(x) + g(x) U-V = | f(x) - g(x)| UV = f(x)g(x)*

1. 组合数公式： [推导过程](https://zhuanlan.zhihu.com/p/26351880)

1. 积化和差公式\*4 和同理

和差化积公式\*4 和同理

1. 万能公式 则
2. 因式分解公式

1. 求导or下限为0的积分，函数奇偶性互换，周期不变
2. 为偶函数，为奇函数
3. 为奇函数

# 第2讲 极限与连续

1. 数列极限定义：任意，
2. 判断数列发散方法\*2：找到其一个发散的子列；

找到两个收敛的子列，但是收敛到不同的极限

1. 数列极限运算规则（参考函数的）
2. 证明的极限存在：证明单调不减，证明有界
3. 函数极限定义：
4. 函数极限存在的充要条件\*2
5. 左极限=右极限=A ②
6. 函数极限的性质: ~~唯一性~~；局部有界性；**局部保号性**：，极限；
7. 无穷小的比阶 前提：

高阶无穷小：，记为；

低阶无穷小：； 同阶无穷小：；

k阶无穷小： 等价无穷小：，记为；

1. 函数极限运算规则 前提：极限都存在

* 1. ，n为正整数

1. 无穷小的运算
   1. 有限个无穷小的和/积是无穷小；有界函数与无穷小的积是无穷小
   2. ->加减法时低阶吸收高阶
   3. ->乘法时阶数累加
   4. 且为常数->非零常数不影响阶数
2. **★常用的等价无穷小\*9 前提： 本质：泰勒展开**

**★等价替换成**

1. 夹逼准则：

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放 不验等号

对和式缩放的两种方法：

n为无穷大时，；

**n为有限数时，；**

1. 洛必达法则：型，且一阶导都存在
2. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）
3. 第一类间断点：可取、跳跃 第二类间断点：无穷、振荡
4. 数列极限计算的解法
   1. 数列通项已知 ①夹逼准则 ②定积分定义

③幂级数求和 ④级数收敛的必要条件

* 1. 数列通项未知

**①★单调有界数列必有极限**：做差/商，先证明，再求；②求出表达式；

③知道极限a的时候利用定义构造：拉格朗日中值定理or缩放

1. 函数极限的计算步骤

判断未定式的种类。七种：

* + 1. ：使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽
    2. ：转化成
    3. ：变形为乘除法。有分母，通分；无分母，倒代换或提取公因式
    4. ：

∵

1. **★常用函数的泰勒展开式\*8 前提： 计算时保留o(·)**

**型，适用“上下同阶”原则，即展开后分子分母同阶；**

**A-B型，适用“幂次最低”原则，即展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止；**

# 第3讲 一元函数微分学的概念与计算

1. 导数的定义\*2
2. 可导的充分必要条件：左导数和右导数存在且相等
3. 高阶导数概念：
4. 可微判别方法\*3: ①写增量

②写线性增量 ③作极限

1. 复合函数的导数(微分):
2. 反函数求导: ，记，则有

一阶

二阶

1. 参数方程求导：

一阶：

二阶：

1. 隐函数求导：，两边对x求导，将y看作中间变量，得到方程，求解即可得到y’
2. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子
3. 两边取对数，；②求导得
4. 幂指函数求导法：
5. n阶导数的运算方法 \*3
   1. 逐次求导。
   2. 高阶求导公式：
   3. 写出泰勒公式or麦克劳林公式，比较系数
6. 常见函数的n阶导数 \*8

1. 变限积分求导公式：设，在上连续，

1. 基本初等函数的导数公式



# 第4讲 一元函数微分学的几何应用

1. 广义的、真正的区别：带不带等号

极值、最值的区别：领域、定义域

1. 极值点的必要条件：一阶可导
2. 判断极值的充分条件 \*3
   1. 的去心领域一阶可导
      1. 左边，；右边，，为极小值；
      2. 左边，；右边，，为极大值；
   2. 处二阶可导，且，

，极小值；，极大值

* 1. 处n阶可导，且

n为偶数，，极小值；n为偶数，，极大值

1. 凹弧：；凸弧：
2. 判断凹凸的充分条件：，凹的；，凸的
3. 拐点的必要条件:二阶可导
4. 判断拐点的充分条件 \*3
   1. 的去心领域内二阶导数存在，且左右领域变号
   2. 三阶可导，，
   3. 处n阶可导，n为奇数，
5. 斜渐近线: 例，为斜渐进曲线
6. 求闭区间的最值步骤: 求出可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值
7. 求开区间的最值(取值范围)步骤: 求出可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围
8. 函数作图步骤:

①确定定义域和奇偶对称性②利用为0和不存在的点，将函数划分成几个区间，判断每一个的单调性和凹凸性③确定渐近线(如果有的话)④作图

# 第5讲 中值定理

1. 函数的中值定理
   1. 有界与最值定理: ，其中m、M为[a, b]上的最值
   2. 介值定理: 当，存在，使得
   3. 平均值定理: 当，在内至少存在一点，使
   4. 零点定理: 当，存在，使得
2. 导数(微分)的中值定理
   1. 费马定理: f(x0)可导且为极值，则
   2. 罗尔定理: 满足，存在，使得
   3. ★拉格朗日中值定理: ，，
   4. 柯西中值定理: 条件同上，
   5. 泰勒公式
      1. 带拉格朗日余项: n+1阶可导，介于之间
      2. 带佩亚诺余项:
3. 克劳林公式: 的泰勒公式
4. 重要函数的克劳林展开式 \*7
5. 证明存在，使得: 罗尔定理、费马定理
   1. 构造辅助函数: 把改成x，对于，两边同乘，得构造函数
   2. 验证端点值相等: 转化为给定区间内找F(x)的两个不同的零点

# 第6讲 零点问题、微分不定式

1. 零点问题:
   1. 零点定理：证明根的存在

当，至少有一个根

* 1. 单调性: 证明根的唯一性

在内单调，至少有一个根

* 1. 罗尔定理的推论: 至多有k个根，至多有k+n个根
  2. 实系数奇次方程: 至少有一个根

1. 经典不等式

   2. 设，当且仅当时等号成立

* 1. ，则

1. 微分不等式的证明方法 \*3

①利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)；②常数变量化；③中值定理

# 第7讲 一元函数积分学的概念与计算

1. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数
2. 定积分的定义:
3. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续；②在去见善有界，只有有限个间断点

必要条件: 可积函数必有界

1. 定积分的性质:
   1. 求区间长度: 略
   2. 线性性质: 略
   3. 可加可拆性:
   4. 保号性:

特殊:

* 1. 估值定理: M、m为最大、小值，L为区间长度
  2. 中值定理: 函数连续，闭区间内至少存在一点，使得

1. 变限积分的性质: ①可积，连续；②连续，可导
2. 变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无x
3. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性

1. 奇点:”∞”和使得函数无定义的点(瑕点)
2. 不定积分计算
   1. 凑微分法:
      1. 若f(x)较复杂，对其(或其主要部分)求导可以得到g(x)的倍数(常数or函数)
      2. 得不到倍数，可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子，来恒等变形。常用的因子有
   2. 换元法：
      1. 三角函数代换:
      2. 恒等变形后三角函数代换:
      3. 根式代换: 令

同时含有和令，l为最小公倍数

* + 1. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上，
    2. 复杂函数的直接代换: 含有，令复杂函数=t

**注意:** 当与或乘除，优先考虑分部积分法

* 1. 分部积分法:
     1. 适用于难求，而好求
     2. 积分后简单点宜作，微分后简单点宜作

与中的一个

与中的一个 任选其一

与中的一个

* + 1. 推广: u与v有直到(n+1)阶的连续导数
  1. 有理函数的积分:
     1. 方法: 把拆成若干最简有理分式之和
     2. 注意: k重因式产生k项

1. 定积分的计算
   1. 牛顿莱布尼兹公式:
   2. 换元积分:
   3. 分部积分法:
   4. 重要结论:
      1. 偶函数，
      2. 奇函数，
      3. 周期函数，
      4. 区间再现公式:
2. 凑定积分定义的方法:①提出;②凑出;③转化为
3. ~~华里士公式: P147~~
4. 反常积分的敛散性判别:
   1. 无穷区间的: 收敛，发散
   2. 无界函数的: 收敛，发散 (奇点x=0)

# 第8讲 一元函数积分学的几何应用

1. 计算面积



1. 计算体积



 

1. 积计算平均数：

# 第9讲 积分等式与积分不等式

# 第10讲 多元函数微分学

1. 领域、去心领域；内点、外点、边界点；有界集、无界集；开集、闭集；

连通集、开区域、闭区域、区域；单连通区域、多连通区域；

聚点: 孤立点:

1. 偏导数定义: 例如，对x，

二阶偏导数: 例如，

也叫二阶混合偏导数

1. 可微: 函数的全增量，其中，A、B仅与x,y有关

全微分:

1. 判断函数是否可微的步骤:
   1. 写出全增量
   2. 写出线性增量，其中
   3. 作极限，若为0，可微；否则，不可微
2. 判断偏导数连续性的步骤:
   1. 用定义法求，
   2. 用公式法求，
   3. 若，成立，则连续
3. 多元函数微分法则
   1. 链式求导规则:
      1. ，则
      2. ，则，
      3. ，则，
   2. 隐函数存在定理
4. 二元函数的极值
   1. 必要条件: 在点，关于x、y的一阶偏导为0
   2. 充分条件: 记:
      * 1. ，；②，非极值；③，不能判断
   3. 求最值的步骤: 目标函数，条件

①构造辅助函数

②令,

③解上面方程组得备选点，并求，取其最大值和最小值

~~④根据实际问题，比存在最值，所得即所求~~

1. 二元函数的最值计算步骤: ①求出其在区域内所有可疑点的函数值；

②在区域边界上的最值；③比较得出最值

1. 一般，除非它们在都连续

# 第11讲 二重积分

1. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积
2. 二重积分的存在性(可积性)
   1. 在有界闭区域D上连续，则在D上可积，即二重积分存在
   2. 在D上有界，且在D上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则在D上可积
3. 二重积分的定义:

1. 二重积分的性质:
   1. 求区域面积: ，A为D的面积
   2. 可积函数必有界
   3. 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理: 参考[定积分的性质](#定积分的性质)
2. 普通对称性:

轮换对称性: 把x、y对调后，区域D关于y=x对称(或不变)，则

1. 二重积分的计算
   1. 直角坐标系下: **下限≤上限**

X型:

Y型:

* 1. 极坐标系下: 先积r，后积θ

O在D外:

O在D边界上:

O在D内:

* 1. 选择的**一般**原则:

若①被积函数为等形式；②积分区域为圆或者圆的一部分优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系

* 1. **极坐标与直角坐标的相互转化**:

①；②画好D的图形

1. 交换积分次序: **画图**，转换成二重积分，然后交换次序

# 第12讲 常微分方程

1. 微分方程：或

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程

1. 一阶微分方程求解
   1. 变量可分离型:
   2. 可化为变量可分离型:
      1. 形如:

令

* + 1. 形如或: 齐次微分方程

令，则

* 1. 一阶线性微分方程: 形如

通解公式

**推导:** 两边同乘，得

* 1. 伯努利方程: 形如

步骤:①变形为

②令，得，则

③求解即可

1. 二阶可降微分方程的求解
   1. 型(不显含未知函数y)

①令，原方程变为一阶方程

②若求得其解为，则通解为

* 1. 型(不显含自变量x)

①令，原方程变为

②求解得，分离变量

③两边积分得，即可求得通解

1. 二阶变系数线性微分方程:

二阶常系数线性微分方程:

齐次: ； 非齐次:

1. 线性微分方程的解的结构
   1. 对于，是其两个线性无关的解(即常数)，则为通解
   2. 为特解，为特解
   3. 是的解，是的解，是+的解
2. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

特征方程

①，，通解

②，通解

③，通解

1. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

特解，

其中

特解

其中

1. n阶常系数齐次线性微分方程的解

特征方程

* 1. 特征根为单实根λ，通解对应一项
  2. 特征根为k重实根λ，通解中对应k项
  3. 特征根为单复根，通解中对应2项
  4. 特征根为k重复根，通解中对应2k项

1. n阶非齐次微分方程型的解

①令,则

②同理得

③连续积分n次，得含有n个任意常数的通解

# 第13讲 无穷级数

1. 无穷级数:

部分和:

m项后余项:

性质: ①；

②收敛收敛

③收敛的必要条件: 收敛，则

1. 正项级数:
   1. 收敛的充分必要条件: 部分和数列有界
   2. 比较判别法: 大的收敛，小的也收敛；小的发散，大的也发散
   3. 比较判别法的极限形式:
      1. A=0，收敛，也收敛 是的高阶无穷小
      2. A=+∞，发散，也发散 低阶
      3. 0＜A＜+∞，和有相同的敛散性 同阶
   4. 比值判别法(达朗贝尔判别法):

①，收敛 前＞后；②，发散 前＜后；

* 1. 根值判别法(柯西判别法):

①，收敛 后一项多开一次更小；②，发散；

1. 交错级数: 各项正负相间，即
   1. 莱布尼兹判别法: 单调不增且，则收敛
2. 任意项级数: 各项可正、可负、可为零，记作

绝对值级数: 给任意项级数加上绝对值，即

为任意项级数，若收敛，则**绝对收敛**

为任意项级数，若收敛，发散，则**条件收敛**

定理: 若收敛，必收敛；

1. 收敛级数的性质

①随便加括号，仍收敛，和不变； ②随便加括号后发散，原级数必发散

③加括号后收敛，原级数不一定收敛；④绝对收敛的级数有可交换性

1. 函数项级数:

幂级数: 是n次幂函数 一般形式: ；标准形式:

* 1. 阿贝尔定理: 在收敛，所有，绝对收敛

发散 ＞，发散

* 1. 收敛半径的存在性: 收敛半径R(≥0)必存在

①x=0收敛，R=0；②整个轴上都收敛，R=+∞

③|x|<R，绝对收敛；|x|>R，发散；x=±R，可能发散可能收敛

* 1. 收敛半径的求法: ，
  2. 收敛域 = 收敛区间 + x=±R处的敛散性

1. 和函数:

幂级数相等，即在点x=0处的某领域内相等，则同幂次的系数相等，即

四则运算:

性质: ①

②可积，则的R不变，I可能扩大

③可导，则的R不变，I可能缩小

1. ★重要的幂级数展开式

1. 泰勒级数:

麦克劳林级数:

具有任意阶导数的函数，其泰勒级数并不都能收敛于函数本身

1. 泰勒级数收敛于本身的充要条件

有任意阶导数，

1. 幂级数展开求法

①直接算；②间接法: 变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分、待定系数

1. ★**重要结论:**

调和级数: 发散 p级数:

交错调和级数: 收敛

1. 幂级数收敛域的求法
   1. 具体型步骤：①

②使用比值、根值判别法，获得收敛区间；③讨论端点的敛散性

* 1. 抽象型 结论
     1. 已知在某点的敛散性

①收敛，；②发散，；③条件收敛，

* + 1. 已知的敛散性，求的敛散性

①和的转换: 平移收敛区间； R不变

提出或者乘 R不变

②和的转换: 逐项求导 R不变，I可能缩小

or 积分 R不变，I可能扩大

1. 幂级数和函数的求法
   1. 突破口: 在分母上，先导后积；在分子上，先积后导
   2. 解题过程标注收敛域
   3. **重要结果**

# 第14讲 数学一、数学二专题内容

1. 相关变化率：，则
2. 曲率公式： 曲率半径：

曲率圆： 其中

1. 变力沿直线做功： 抽水做功：

水压力：

1. 平面曲边梯形的形心坐标： 同理

平面曲线弧长：①

②

③

旋转曲面面积：①

②

平行截面面积已知的立体体积：

1. 欧拉方程：形如

解法: ①当x>0，令，则，于是

，方程化为，求解

②当x<0，令，同理得

1. 傅里叶级数：

其中

1. 狄利克雷收敛定理：上连续or只有有限个第一类间断点，且最多只有有限个极值点，则在上处处收敛

和函数

且，其中表示

1. 傅里叶展开式：

其中

S(x)和傅里叶级数的类似

1. 正弦级数：

余弦级数：

# 第16讲 多元函数积分学的基础知识

1. 数量积：

a在b上的投影：

1. 向量积：

1. 混合积：

三向量共面：

1. 方向余弦：
2. 单位向量：

任意向量：

1. 平面方程：一般式：

点法式：

三点式：

截距式：

平面束：满足某种规律的平面族

1. 直线方程：一般式：两平面的交线，即联立方程

点向式：

参数式：，t为参数

两点式：

1. 距离公式：点到面：

点P0到线(过P1)：，为方向向量

两平行直线： 两异面直线：

两平行平面：

1. 直线关系：方向向量

平行： 垂直：

1. 平面关系：法向量

平行： 垂直：

1. 平面与直线关系：将直线的当成平面的法向量
2. 空间曲线：○一般式： 几何意义：两曲面的交线

①切向量：

②切线方程：

③法平面方程：

○参数方程：

①切向量： ②切线方程：

③法平面方程：

曲线在坐标面的投影：例如在xOy的投影，将一般式中的z消去，

得，曲线方程为

1. 空间曲面：

①法向量：

②法线方程：

③切平面：

椭球面： 单叶双曲面：

双叶双曲面： 椭圆抛物面：

椭圆锥面： 双曲抛物面：

椭圆柱面： 双曲柱面：

抛物柱面：

1. ★旋转曲面：曲线：绕直线L：旋转一周

解法：

1. 空间曲面面积：
2. 方向导数：
3. 梯度：
4. 方向导数和梯度得关系：

# 第17讲 三重积分、第一型曲线曲面积分

1. 三重积分： 几何意义：空间物体的质量
2. 考研数学中，三重积分总是存在的
3. 凑三重积分定义步骤

①提出；②凑出；③，其他两个同理，凑定义完成

1. 性质： 求空间区域体积：

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：[定积分的性质](#定积分的性质)

1. 普通对称性、轮换对称性：参考[二重积分的对称性](#二重积分的对称性)
2. 三重积分的计算方法
   1. 直角坐标系：
   2. 柱面坐标系：

* 1. 球面坐标系：

适用范围：①被积函数含或

②积分区域为球or锥or其部分

* 1. 利用对称性
  2. 利用形心公式的逆用（）

1. 第一型曲线积分：或 几何意义：曲线的质量
2. 考研数学中，第一型曲线积分总是存在的
3. 性质： 求曲线长度：

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：[定积分的性质](#定积分的性质)

1. 普通对称性、轮换对称性：参考[二重积分的对称性](#二重积分的对称性)
2. 第一型曲线积分的计算
   1. 空间曲线长度：
   2. 平面曲线：

① 类似：[平面曲线弧长](#平面曲线弧长)

②

③

* 1. 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

1. 第一型曲面积分： 几何意义：曲面质量
2. 考研数学中，第一型曲面积分总是存在的
3. 性质： 求曲线长度：

可积函数必有界，线性性质，可加、保号性，估值、中值定理：[定积分的性质](#定积分的性质)

1. 普通对称性、轮换对称性：参考[二重积分的对称性](#二重积分的对称性)
2. 第一型曲面积分的计算
   1. 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将投影到某一平面（比如面）投影区域为（比如）

②将或带入

③计算

得到

* 1. 边界方程带入被积函数、对称性、形心公式的逆用

1. 重积分和第一型线面积分的应用
   1. 面积&体积：[平面面积](#计算平面面积)、[空间曲线长度](#空间曲线长度)、[空间曲面面积](#空间曲面面积)

空间体积：

* 1. 重心&形心： 空间物体、光滑曲线、光滑曲面同理

例：平面薄片，，同理

* 1. 转动惯量： 平面薄片、光滑曲线、光滑曲面同理

例如：空间物体，，同理

* 1. 引力： 平面薄片、空间物体、光滑曲面同理

例如：光滑曲线，，同理

1. 重要结论：

# 第18讲 第二型曲线曲面积分

1. 第二型曲线积分：

物理背景：变力在平面/空间曲线上做的总功

1. 考研数学中，第二型曲线积分总是存在的
2. 性质：线性性质，可加性，有向性：

对称性：假设关于对称， （无轮换对称性）

1. 平面第二型曲线积分的计算
   1. 直接计算（参数法）：化为定积分 大小无所谓，关键对应起、终点
   2. 格林公式： 条件：封闭，P、Q有一阶连续偏导

若①L不是封闭曲线：补线法；②P、Q、其偏导在D上不连续：挖去法

1. 平面曲线积分与路径无关
2. 空间第二型曲线积分计算： 斯托克斯公式

（第二型曲面积分形式）

=（第一型曲面积分形式）

1. 第二型曲面积分： 物理背景：向量函数通过曲面的通量
2. 考研数学中，第二型曲面积分总是存在的
3. 性质：线性性质，可加性，有向性，对称性：参考[第二型曲线积分](#第二型曲线积分)
4. 平面第二型曲面积分的计算
   1. 化为二重积分：三步骤（无先后顺序）

①将投影到某一平面（比如面）投影区域为（比如）

②将或带入

③将写成，方向为上取”+”

得

* 1. 高斯公式：

若①不是封闭曲面：补面法；②P、Q、其偏导在D上不连续：挖去法

1. 两类曲面积分关系：第一型与第二型

转换坐标变量法：

同理，当定向的法向量与z轴夹角在0~90°，取＋

1. 设置

散度： 旋度：

常用公式：①；

②；③；