1. ***高等数学常用基础知识***

1. 余切函数：

反余弦函数：

反余切函数：

正割函数：

余割函数：

1. 符号函数：；取整函数：
2. 若U=max{ f(x), g(x) }，V=min{ f(x), g(x) }，

则U+V = f(x) + g(x) U-V = | f(x) - g(x)| UV = f(x)g(x)

[推导过程](https://zhuanlan.zhihu.com/p/26351880)

1. 积化和差公式\*4

和差化积公式\*4

1. 万能公式 则
2. 因式分解公式

1. ***极限与连续***
2. 数列极限定义：任意，
3. 判断数列发散方法\*2：找到其一个发散的子列；

找到两个收敛的子列，但是收敛到不同的极限

1. 数列极限运算规则（参考函数的）
2. 证明的极限存在：证明单调不减，证明有界
3. 函数极限定义：
4. 函数极限存在的充要条件\*2
5. 左极限=右极限=A ②
6. 函数极限的性质: 唯一性；局部有界性；局部保号性；
7. 无穷小的比阶 前提：

高阶无穷小：，记为；

低阶无穷小：；

同阶无穷小：；

k阶无穷小：

等价无穷小：，记为；

1. 函数极限运算规则 前提：极限都存在
   1. ，n为正整数
2. 无穷小的运算
   1. ->加减法时低阶吸收高阶
   2. ->乘法时阶数累加
   3. 且为常数->非零常数不影响阶数
3. **★常用的等价无穷小\*9 前提： 本质：泰勒展开**

**★等价替换成**

1. 夹逼准则：

使用方法：缩放，对分母中阶数最低的缩放

对和式缩放的两种方法：

n为无穷大时，；

n为有限数时，；

1. 洛必达法则：型，且一阶导都存在
2. 海涅定理：（联系数列极限与函数极限）
3. 第一类间断点：可取间断点、跳跃间断点

第二类间断点：无穷间断点、振荡间断点

1. 数列极限计算的解法
   1. 数列通项已知
2. 夹逼准则 ②定积分定义 ③幂级数求和 ④级数收敛的必要条件
   1. 数列通项未知
3. “单调有界数列必有极限”；②求出表达式；③利用定义构造
4. 函数极限的计算步骤
   1. 判断未定式的种类。七种：
   2. 化简
      1. ：分子次数小于分母做倒代换，使分子次数大于分母次数，即倒三角形状▽
      2. ：转化成
      3. ：变形为乘除法。有分母，通分；无分母，倒代换或提取公因式
      4. ：

∵

1. **★常用函数的泰勒展开式\*8 前提： 计算时保留o(·)**

**型，适用“上下同阶”原则，即展开后分子分母同阶；**

**A-B型，适用“幂次最低”原则，即展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止；**

1. 一元函数微分学的概念与计算
2. 导数的定义\*2
3. 可导的充分必要条件：左导数和右导数存在且相等
4. 高阶导数概念：
5. 可微判别方法\*3:
   1. 写增量
   2. 写线性增量
   3. 作极限
6. 复合函数的导数(微分):
7. 反函数求导: ，记，则有

一阶

二阶

1. 参数方程求导：

二阶

1. 隐函数求导：，两边对x求导，将y看作中间变量，得到方程，求解即可得到y’
2. 对数求导法：对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子
3. 两边取对数，；②求导得
4. 幂指函数求导法：
5. n阶导数的运算方法 \*3
   1. 逐次求导。
   2. 高阶求导公式：

* 1. 写出泰勒公式or麦克劳林公式，比较系数

1. 常见函数的n阶导数 \*8

1. 变限积分求导公式：设，在上连续，

1. 基本初等函数的导数公式

2. 一元函数微分学的几何应用
3. 广义的、真正的区别：带不带等号

极值、最值的区别：领域、定义域

1. 极值点的必要条件：一阶可导
2. 判断极值的充分条件 \*3
   1. 的去心领域一阶可导
      1. 左边，；右边，，为极小值；
      2. 左边，；右边，，为极大值；
   2. 处二阶可导，且，

，极小值；，极大值

* 1. 处n阶可导，且

n为偶数，，极小值；n为偶数，，极大值

1. 凹弧：；凸弧：
2. 判断凹凸的充分条件：，凹的；，凸的
3. 拐点的必要条件:二阶可导
4. 判断拐点的充分条件 \*3
   1. 的去心领域内二阶导数存在，且左右领域变号
   2. 三阶可导，，
   3. 处n阶可导，n为奇数，
5. 斜渐近线: 例，为斜渐进曲线
6. 求闭区间的最值步骤: 求出可疑点(驻点和不可导点)和端点，比较得到最值
7. 求开区间的最值(取值范围)步骤: 求出可疑点和两端的单侧极限，比较得到最值或取值范围
8. 函数作图步骤:

①确定定义域和奇偶对称性②利用为0和不存在的点，将函数划分成几个区间，判断每一个的单调性和凹凸性③确定渐近线(如果有的话)④作图

1. ***中值定理***
2. 函数的中值定理
   1. 有界与最值定理: ，其中m、M为[a, b]上的最值
   2. 介值定理: 当，存在，使得
   3. 平均值定理: 当，在内至少存在一点，使
   4. 零点定理: 当，存在，使得
3. 导数(微分)的中值定理
   1. 费马定理: f(x0)可导且为极值，则
   2. 罗尔定理: 满足，存在，使得
   3. 拉格朗日中值定理: ，存在，使得
   4. 柯西中值定理: 条件同上，
   5. 泰勒公式
      1. 带拉格朗日余项: n+1阶可导，介于之间
      2. 带佩亚诺余项:
4. 克劳林公式: 的泰勒公式
5. 重要函数的克劳林展开式 \*7
6. 证明存在，使得: 罗尔定理、费马定理
   1. 构造辅助函数: 把改成x，对于，两边同乘，得构造函数
   2. 验证端点值相等: 转化为给定区间内找F(x)的两个不同的零点
7. ***零点问题、微分不定式***
8. 零点问题:
   1. 零点定理：证明根的存在

当，至少有一个根

* 1. 单调性: 证明根的唯一性

在内单调，至少有一个根

* 1. 罗尔定理的推论: 至多有k个根，至多有k+n个根
  2. 实系数奇次方程: 至少有一个根

1. 经典不等式

   2. 设，当且仅当时等号成立

* 1. ，则

1. 微分不等式的证明方法 \*3
   1. 利用函数的性态(单调性、凹凸性、最值)
   2. 常数变量化
   3. 中值定理
2. ***一元函数积分学的概念与计算***
3. 原函数(不定积分)存在定理: ①连续函数必有原函数；②含有第一类间断点、无穷间断点的函数在区间内没有原函数
4. 定积分的定义:
5. 定积分存在的充分条件: ①在区间上连续；②在去见善有界，只有有限个间断点

必要条件: 可积函数必有界

1. 定积分的性质:
   1. 求区间长度: 略
   2. 线性性质: 略
   3. 可加可拆性:
   4. 保号性:

特殊:

* 1. 估值定理: M、m为最大、小值，L为区间长度
  2. 中值定理: 函数连续，闭区间内至少存在一点，使得

1. 变限积分的性质: ①可积，连续；②连续，可导
2. 变限积分的求导公式: 前提: 被积函数中无x
3. 无穷区间上的反常积分: 破坏积分区间的有限性

无界函数的反常积分: 破坏被积函数的有界性

1. 奇点:”∞”和使得函数无定义的点(瑕点)
2. 不定积分计算
   1. 凑微分法:
      1. 若f(x)较复杂，对其(或其主要部分)求导可以得到g(x)的倍数(常数or函数)
      2. 得不到倍数，可将被积分函数的分子分母同乘/除一个适当的因子，来恒等变形。常用的因子有
   2. 换元法：
      1. 三角函数代换:
      2. 恒等变形后三角函数代换:
      3. 根式代换: 令

同时含有和令，l为最小公倍数

* + 1. 倒代换: 若分母幂次比分子高两次及以上，
    2. 复杂函数的直接代换: 含有，令复杂函数=t

**注意:** 当与或乘除，优先考虑分部积分法

* 1. 分部积分法:
     1. 适用于难求，而好求
     2. 积分后简单点宜作，微分后简单点宜作

与中的一个

与中的一个 任选其一

与中的一个

* + 1. 推广: u与v有直到(n+1)阶的连续导数
  1. 有理函数的积分:
     1. 方法: 把拆成若干最简有理分式之和
     2. 注意: k重因式产生k项

1. 定积分的计算
   1. 牛顿莱布尼兹公式:
   2. 换元积分:
   3. 分部积分法:
   4. 重要结论:
      1. 偶函数，
      2. 奇函数，
      3. 周期函数，
      4. 区间再现公式:
2. 凑定积分定义的方法:①提出;②凑出;③转化为
3. ~~华里士公式: P147~~
4. 反常积分的敛散性判别:
   1. 无穷区间的: 收敛，发散
   2. 无界函数的: 收敛，发散 (奇点x=0)
5. ***一元函数积分学的几何应用***
6. 计算面积

 

1. 计算体积

 

 

1. 积计算平均数：
2. 积分等式与积分不等式
3. 多元函数微分学
4. 领域、去心领域；内点、外点、边界点；有界集、无界集；开集、闭集；

连通集、开区域、闭区域、区域；单连通区域、多连通区域；

聚点: 孤立点:

1. 偏导数定义: 例如，对x，

二阶偏导数: 例如，

也叫二阶混合偏导数

1. 可微: 函数的全增量，其中，A、B仅与x,y有关

全微分:

1. 判断函数是否可微的步骤:
   1. 写出全增量
   2. 写出线性增量，其中
   3. 作极限，若为0，可微；否则，不可微
2. 判断偏导数连续性的步骤:
   1. 用定义法求，
   2. 用公式法求，
   3. 若，成立，则连续
3. 多元函数微分法则
   1. 链式求导规则:
      1. ，则
      2. ，则，
      3. ，则，
   2. 隐函数存在定理
4. 二元函数的极值
   1. 必要条件: 在点，关于x、y的一阶偏导为0
   2. 充分条件: 记:
      * 1. ，；②，非极值；③，不能判断
   3. 求最值的步骤: 目标函数，条件

①构造辅助函数

②令,

③解上面方程组得备选点，并求，取其最大值和最小值

~~④根据实际问题，比存在最值，所得即所求~~

1. 二元函数的最值计算步骤: ①求出其在区域内所有可疑点的函数值；

②在区域边界上的最值；③比较得出最值

1. 一般，除非它们在都连续
2. 二重积分
3. 二重积分的几何意义: 曲顶柱体的体积
4. 二重积分的存在性(可积性)
   1. 在有界闭区域D上连续，则在D上可积，即二重积分存在
   2. 在D上有界，且在D上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则在D上可积
5. 二重积分的定义:

1. 二重积分的性质:
   1. 求区域面积: ，A为D的面积
   2. 可积函数必有界
   3. 线性性质、可加性、保号性、估值定理、中值定理: 参考[定积分的性质](#定积分的性质)
2. 普通对称性:

轮换对称性: 把x、y对调后，区域D关于y=x对称(或不变)，则

1. 二重积分的计算
   1. 直角坐标系下: **下限≤上限**

X型:

Y型:

* 1. 极坐标系下: 先积r，后积θ

O在D外:

O在D边界上:

O在D内:

* 1. 选择的**一般**原则:

若①被积函数为等形式；②积分区域为圆或者圆的一部分优先选用极坐标系，否则使用直角坐标系

* 1. **极坐标与直角坐标的相互转化**:

①；②画好D的图形

1. 交换积分次序: **画图**，转换成二重积分，然后交换次序
2. 常微分方程
3. 微分方程：或

常微分方程：未知函数是一元函数的微分方程

1. 一阶微分方程求解
   1. 变量可分离型:
   2. 可化为变量可分离型:
      1. 形如:

令

* + 1. 形如或: 齐次微分方程

令，则

* 1. 一阶线性微分方程: 形如

通解公式

**推导:** 两边同乘，得

* 1. 伯努利方程: 形如

步骤:①变形为

②令，得，则

③求解即可

1. 二阶可降微分方程的求解
2. 无穷级数
3. 数学一、数学二专题内容
4. 多元函数积分学的基础知识
5. 三重积分、第一型曲线曲面积分
6. 第二型曲线曲面积分