# 第三章作业参考答案

- 在一个 10 类的模式识别问题中，有 3 类单独满足多类情况 1，其余的类别满足多类情况 2。问该模式识别问题所需判别函数的最少数目是多少？

解答：
多类情况 1：把 M 类多类问题分成 M 个两类问题，因此共有 M 个判别函数；
多类情况 2：要分开 M 类模式，共需 M(M-1)/2 个判别函数。

所以，该模式识别问题所需判别函数的最少数目是 $3+\frac{7*(7-1)}{2}=24$

- 一个三类问题，其判别函数如下：
  $d_1(x)=-x_1$，$d_2(x)=x_1+x_2-1$，$d_3(x)=x_1-x_2-1$

1. 设这些函数是在多类情况 1 条件下确定的，绘出其判别界面和每一个模式类别的区域。
2. 设为多类情况 2，并使：$d_{12}(x)=d_1(x)$，$d_{13}(x)=d_2(x)$，$d_{23}(x)=d_3(x)$。绘出其判别界面和多类情况 2 的区域。
3. 设 $d_1(x)$, $d_2(x)$ 和 $d_3(x)$ 是在多类情况 3 的条件下确定的，绘出其判别界面和每类的区域。

解答：

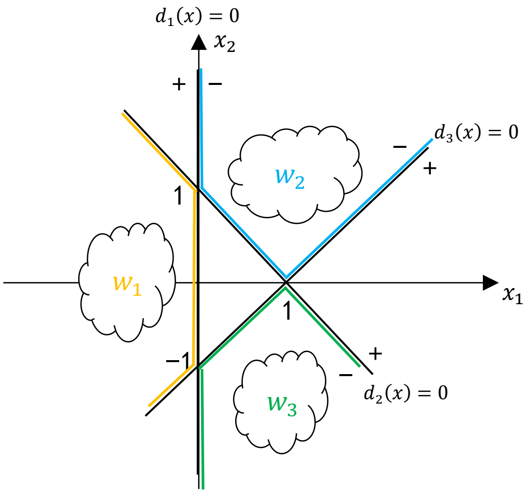
1. 判别界面如下：

   $d_1(x)=-x_1=0$

   $d_2(x)=x_1+x_2-1=0$

   $d_3(x)=x_1-x_2-1=0$

绘制其判别界面和每一个模式类别的区域如右图。




2. $d_{12}(x)=d_1(x)=-x_1=0$

   $d_{13}(x)=d_2(x)=x_1+x_2-1=0$

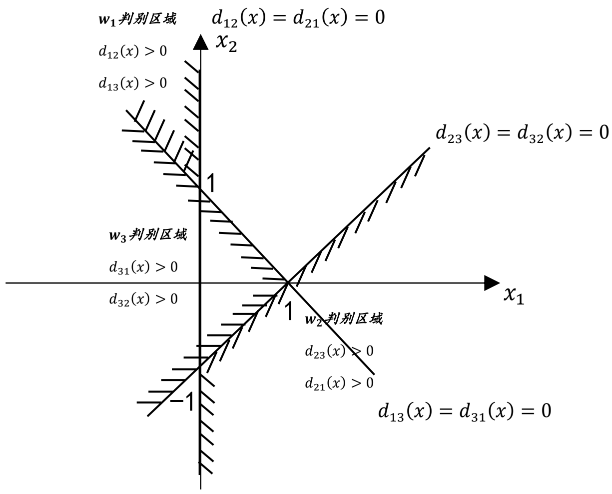
   $d_{23}(x)=d_3(x)=x_1-x_2-1=0$

   $d_{21}(x)=-d_{12}(x)=x_1=0$

   $d_{31}(x)=-d_{13}(x)=-x_1-x_2+1=0$

   $d_{32}(x)=-d_{23}(x)=-x_1+x_2+1=0$

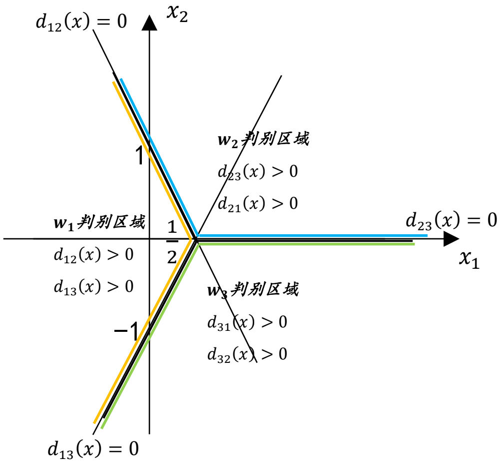
绘制其判别界面和每一个模式类别的区域如右图。



3. $d_{12}(x) = d_1(x) - d_2(x) = -2x_1 - x_2 + 1 = 0$

$d_{13}(x) = d_1(x) - d_3(x) = -2x_1 + x_2 + 1 = 0$

$d_{23}(x) = d_2(x) - d_3(x) = 2x_2 = 0$




绘制其判别界面和每一个模式类别的区域如右图。

- 两类模式，每类包括 5 个 3 维不同的模式向量，且良好分布。如果它们是线性可分的，问权向量至少需要几个系数分量？假如要建立二次的多项式判别函数，又至少需要几个系数分量？（设模式的良好分布不因模式变化而改变。）

解答：

如果它们是线性可分的，权向量至少需要 4 个系数分量；

假如要建立二次的多项式判别函数，至少需要$C_{3+2}^2 = 10$个系数分量。

- 用感知器算法求下列模式分类的解向量 w：

$\omega_1$: $\{(0\ 0\ 0)^T, (1\ 0\ 0)^T, (1\ 0\ 1)^T, (1\ 1\ 0)^T\}$

$\omega_2$: $\{(0\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T, (1\ 1\ 1)^T\}$

解答：

将属于$\omega_2$的训练样本乘以（−1），并写成增广向量的形式。

$x_①=(0\ 0\ 0\ 1)^T$，$x_②=(1\ 0\ 0\ 1)^T$，$x_③=(1\ 0\ 1\ 1)^T$，$x_④=(1\ 1\ 0\ 1)^T$

$x_⑤=(0\ 0\ -1\ -1)^T$，$x_⑥=(0\ -1\ -1\ -1)^T$，$x_⑦=(0\ -1\ 0\ -1)^T$，$x_⑧=(-1\ -1\ -1\ -1)^T$

第一轮迭代：取 C=1，$\boldsymbol{w}(1) = (0\ 0\ 0\ 0)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(1)\boldsymbol{x}_① = (0\ 0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)^T = 0 \not> 0$，故 $\boldsymbol{w}(2) = \boldsymbol{w}(1) + \boldsymbol{x}_① = (0\ 0\ 0\ 1)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(2)\boldsymbol{x}_② = (0\ 0\ 0\ 1)(1\ 0\ 0\ 1)^T = 1 > 0$，故 $\boldsymbol{w}(3) = \boldsymbol{w}(2) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(3)\boldsymbol{x}_③ = (0\ 0\ 0\ 1)(1\ 0\ 1\ 1)^T = 1 > 0$，故 $\boldsymbol{w}(4) = \boldsymbol{w}(3) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(4)\boldsymbol{x}_④ = (0\ 0\ 0\ 1)(1\ 1\ 0\ 1)^T = 1 > 0$，故 $\boldsymbol{w}(5) = \boldsymbol{w}(4) = (0\ 0\ 0\ 1)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(5)\boldsymbol{x}_⑤ = (0\ 0\ 0\ 1)(0\ 0\ -1\ -1)^T = -1 \not> 0$，故 $\boldsymbol{w}(6) = \boldsymbol{w}(5) + \boldsymbol{x}_⑤ = (0\ 0\ -1\ 0)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(6)\boldsymbol{x}_⑥ = (0\ 0\ -1\ 0)(0\ -1\ -1\ -1)^T = 1 > 0$，故 $\boldsymbol{w}(7) = \boldsymbol{w}(6) = (0\ 0\ -1\ 0)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(7)\boldsymbol{x}_⑦ = (0\ 0\ -1\ 0)(0\ -1\ 0\ -1)^T = 0 \not> 0$，故 $\boldsymbol{w}(8) = \boldsymbol{w}(7) + \boldsymbol{x}_⑦ = (0\ -1\ -1\ -1)^T$

因 $\boldsymbol{w}^T(8)\boldsymbol{x}_⑧ = (0\ -1\ -1\ -1)(-1\ -1\ -1\ -1)^T = 3 > 0$，故 $\boldsymbol{w}(9) = \boldsymbol{w}(8) = (0\ -1\ -1\ -1)^T$

这里，第 1、5、7 步为错误分类，应“罚”。

因为只有对全部模式都能正确判别的权向量才是正确的解，因此需进行第二轮迭代。

第二轮迭代：

因 $\boldsymbol{w}^{T}(9)\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(0\ -1\ -1\ -1)(0\ 0\ 0\ 1)^{T}=-1\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(10)=\boldsymbol{w}(9)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(0\ -1\ -1\ 0)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(10)\boldsymbol{x}_{\textcircled{2}}=(0\ -1\ -1\ 0)(1\ 0\ 0\ 1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(11)=\boldsymbol{w}(10)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{2}}=(1\ -1\ -1\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(11)\boldsymbol{x}_{\textcircled{3}}=(1\ -1\ -1\ 1)(1\ 0\ 1\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(12)=\boldsymbol{w}(11)=(1\ -1\ -1\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(12)\boldsymbol{x}_{\textcircled{4}}=(1\ -1\ -1\ 1)(1\ 1\ 0\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(13)=\boldsymbol{w}(12)=(1\ -1\ -1\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(13)\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(1\ -1\ -1\ 1)(0\ 0\ -1\ -1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(14)=\boldsymbol{w}(13)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(1\ -1\ -2\ 0)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(14)\boldsymbol{x}_{\textcircled{6}}=(1\ -1\ -2\ 0)(0\ -1\ -1\ -1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(15)=\boldsymbol{w}(14)=(1\ -1\ -2\ 0)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(15)\boldsymbol{x}_{\textcircled{7}}=(1\ -1\ -2\ 0)(0\ -1\ 0\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(16)=\boldsymbol{w}(15)=(1\ -1\ -2\ 0)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(16)\boldsymbol{x}_{\textcircled{8}}=(1\ -1\ -2\ 0)(-1\ -1\ -1\ -1)^{T}=2>0$，故 $\boldsymbol{w}(17)=\boldsymbol{w}(16)=(1\ -1\ -2\ 0)^{T}$

需进行第三轮迭代。

第三轮迭代：

因 $\boldsymbol{w}^{T}(17)\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(1\ -1\ -2\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(18)=\boldsymbol{w}(17)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(1\ -1\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(18)\boldsymbol{x}_{\textcircled{2}}=(1\ -1\ -2\ 1)(1\ 0\ 0\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(19)=\boldsymbol{w}(18)=(1\ -1\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(19)\boldsymbol{x}_{\textcircled{3}}=(1\ -1\ -2\ 1)(1\ 0\ 1\ 1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(20)=\boldsymbol{w}(19)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{3}}=(2\ -1\ -1\ 2)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(20)\boldsymbol{x}_{\textcircled{4}}=(2\ -1\ -1\ 2)(1\ 1\ 0\ 1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(21)=\boldsymbol{w}(20)=(2\ -1\ -1\ 2)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(21)\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(2\ -1\ -1\ 2)(0\ 0\ -1\ -1)^{T}=-1\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(22)=\boldsymbol{w}(21)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(2\ -1\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(22)\boldsymbol{x}_{\textcircled{6}}=(2\ -1\ -2\ 1)(0\ -1\ -1\ -1)^{T}=2>0$，故 $\boldsymbol{w}(23)=\boldsymbol{w}(22)=(2\ -1\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(23)\boldsymbol{x}_{\textcircled{7}}=(2\ -1\ -2\ 1)(0\ -1\ 0\ -1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(24)=\boldsymbol{w}(23)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{7}}=(2\ -2\ -2\ 0)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(24)\boldsymbol{x}_{\textcircled{8}}=(2\ -2\ -2\ 0)(-1\ -1\ -1\ -1)^{T}=2>0$，故 $\boldsymbol{w}(25)=\boldsymbol{w}(24)=(2\ -2\ -2\ 0)^{T}$

需进行第四轮迭代。

第四轮迭代：

因 $\boldsymbol{w}^{T}(25)\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(2\ -2\ -2\ 0)(0\ 0\ 0\ 1)^{T}=0\ngtr 0$，故 $\boldsymbol{w}(26)=\boldsymbol{w}(25)+\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(26)\boldsymbol{x}_{\textcircled{2}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 0\ 0\ 1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(27)=\boldsymbol{w}(26)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(27)\boldsymbol{x}_{\textcircled{3}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 0\ 1\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(28)=\boldsymbol{w}(27)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(28)\boldsymbol{x}_{\textcircled{4}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 1\ 0\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(29)=\boldsymbol{w}(28)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(29)\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ 0\ -1\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(30)=\boldsymbol{w}(29)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(30)\boldsymbol{x}_{\textcircled{6}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ -1\ -1\ -1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(31)=\boldsymbol{w}(30)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(31)\boldsymbol{x}_{\textcircled{7}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ -1\ 0\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(32)=\boldsymbol{w}(31)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(32)\boldsymbol{x}_{\textcircled{8}}=(2\ -2\ -2\ 1)(-1\ -1\ -1\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(33)=\boldsymbol{w}(32)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

需进行第五轮迭代。

第五轮迭代：

因 $\boldsymbol{w}^{T}(33)\boldsymbol{x}_{\textcircled{1}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ 0\ 0\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(34)=\boldsymbol{w}(33)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(34)\boldsymbol{x}_{\textcircled{2}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 0\ 0\ 1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(35)=\boldsymbol{w}(34)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(35)\boldsymbol{x}_{\textcircled{3}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 0\ 1\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(36)=\boldsymbol{w}(35)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(36)\boldsymbol{x}_{\textcircled{4}}=(2\ -2\ -2\ 1)(1\ 1\ 0\ 1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(37)=\boldsymbol{w}(36)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(37)\boldsymbol{x}_{\textcircled{5}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ 0\ -1\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(38)=\boldsymbol{w}(37)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(38)\boldsymbol{x}_{\textcircled{6}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ -1\ -1\ -1)^{T}=3>0$，故 $\boldsymbol{w}(39)=\boldsymbol{w}(38)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(39)\boldsymbol{x}_{\textcircled{7}}=(2\ -2\ -2\ 1)(0\ -1\ 0\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(40)=\boldsymbol{w}(39)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

因 $\boldsymbol{w}^{T}(40)\boldsymbol{x}_{\textcircled{8}}=(2\ -2\ -2\ 1)(-1\ -1\ -1\ -1)^{T}=1>0$，故 $\boldsymbol{w}(41)=\boldsymbol{w}(40)=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

该轮的迭代全部正确，因此解向量 $\boldsymbol{w}=(2\ -2\ -2\ 1)^{T}$

**编写求解上述问题的感知器算法程序。**

Python 代码

```
#coding=UTF-8
import numpy as np
def perception(W, w1):
    flag = False
    n=0
    while flag != True:
        flag = True
        for i in range(len(w1)):
            t1 = 0
            for j in range(len(W)):
                t1 += W[j] * w1[i][j]
            #只要有一次结果小于等于 0，则标记为错误，需进行下一轮迭代
            if(t1 <= 0):
                for j in range(len(W)):
                    W[j] += w1[i][j]
                flag = False
            else:
                W[j]=W[j]
        n=n+1
        print("第%d 轮迭代 W 为："%(n))
        print(W)
    print"解向量 w 为："
    print(W)
    return W
if __name__ == '__main__':
    W = [0, 0, 0, 0]
    w1 = [[0, 0, 0], [1, 0, 0], [1, 0, 1], [1, 1, 0]]
    w2 = [[0, 0, 1], [0, 1, 1], [0, 1, 0], [1, 1, 1]]
    #变为增广向量
    for i in range(len(w1)):
          w1[i].extend([1])
    #w2 类变为增广向量，并乘以-1
    for i in range(len(w2)):
```

```
        w2[i].extend([1])
        for j in range(len(W)):
            w2[i][j]=-1*w2[i][j]
#处理后的两类样本可合并到一个列表中，进行迭代运算
w1.extend(w2)
W = perception(W, w1)
```

运行结果：

```
F:\Perception>python perception.py
第1轮迭代W为：
[0, -1, -1, -1]
第2轮迭代W为：
[1, -1, -2, 0]
第3轮迭代W为：
[2, -2, -2, 0]
第4轮迭代W为：
[2, -2, -2, 1]
第5轮迭代W为：
[2, -2, -2, 1]
解向量w为：
[2, -2, -2, 1]
```

- 用多类感知器算法求下列模式的判别函数：

  $\omega_1$：$(-1\ \ -1)^T$

  $\omega_2$：$(0\ \ 0)^T$

  $\omega_3$：$(1\ \ 1)^T$

解答：

将模式样本写成增广形式：

$\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ 1)^T$，$\boldsymbol{x}_{②}=(0\ \ 0\ \ 1)^T$，$\boldsymbol{x}_{③}=(1\ \ 1\ \ 1)^T$

取初始值$\boldsymbol{w}_1(1)=\boldsymbol{w}_2(1)=\boldsymbol{w}_3(1)=(0\ \ 0\ \ 0)^T$，C=1。

第一轮迭代（k=1）：以 $\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ 1)^T$作为训练样本

$d_1(1)=\boldsymbol{w}_1^T(1)\boldsymbol{x}_{①}=(0\ \ 0\ \ 0)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=0$

$d_2(1)=\boldsymbol{w}_2^T(1)\boldsymbol{x}_{①}=(0\ \ 0\ \ 0)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=0$

$d_3(1)=\boldsymbol{w}_3^T(1)\boldsymbol{x}_{①}=(0\ \ 0\ \ 0)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=0$

因 $d_1(1)\ngtr d_2(1)$，$d_1(1)\ngtr d_3(1)$，故

$\boldsymbol{w}_1(2)=\boldsymbol{w}_1(1)+\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ 1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(2)=\boldsymbol{w}_2(1)-\boldsymbol{x}_{①}=(1\ \ 1\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_3(2)=\boldsymbol{w}_3(1)-\boldsymbol{x}_{①}=(1\ \ 1\ \ -1)^T$

第二轮迭代（k=2）：以 $\boldsymbol{x}_{②}=(0\ \ 0\ \ 1)^T$作为训练样本

$d_1(2)=\boldsymbol{w}_1^T(2)\boldsymbol{x}_{②}=(-1\ \ -1\ \ 1)(0\ \ 0\ \ 1)^T=1$

$d_2(2)=\boldsymbol{w}_2^T(2)\boldsymbol{x}_{②}=(1\ \ 1\ \ -1)(0\ \ 0\ \ 1)^T=-1$

$d_3(2)=\boldsymbol{w}_3^T(2)\boldsymbol{x}_{②}=(1\ \ 1\ \ -1)(0\ \ 0\ \ 1)^T=-1$

因 $d_2(2)\ngtr d_1(2)$，$d_2(2)\ngtr d_3(2)$，故

$\boldsymbol{w}_1(3)=\boldsymbol{w}_1(2)-\boldsymbol{x}_{②}=(-1\ \ -1\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_2(3)=\boldsymbol{w}_2(2)+\boldsymbol{x}_{②}=(1\ \ 1\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_3(3)=\boldsymbol{w}_3(2)-\boldsymbol{x}_{②}=(1\ \ 1\ \ -2)^T$

第三轮迭代（k=3）：以 $\boldsymbol{x}_{③}=(1\ \ 1\ \ 1)^T$作为训练样本

$d_1(3)=\boldsymbol{w}_1^T(3)\boldsymbol{x}_{③}=(-1\ \ -1\ \ 0)(\ 1\ \ 1\ \ 1)^T=-2$

$d_2(3)=\boldsymbol{w}_2^T(3)\boldsymbol{x}_{③}=(1\ \ 1\ \ 0)(1\ \ 1\ \ 1)^T=2$

$d_3(3)=\boldsymbol{w}_2^T(3)\boldsymbol{x}_{③}=(1\ \ 1\ \ -2)(1\ \ 1\ \ 1)^T=0$

因 $d_3(3)>d_1(3)$，$d_3(3)\ngtr d_2(3)$，故

$\boldsymbol{w}_1(4)=\boldsymbol{w}_1(3)=(-1\ \ -1\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_2(4)=\boldsymbol{w}_2(3)-\boldsymbol{x}_{③}=(0\ \ 0\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_3(4)=\boldsymbol{w}_3(3)+\boldsymbol{x}_{③}=(2\ \ 2\ \ -1)^T$

第四轮迭代（k=4）：以 $\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ 1)^T$作为训练样本

$d_1(4)=\boldsymbol{w}_1^T(4)\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ 0)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=2$

$d_2(4)=\boldsymbol{w}_2^T(4)\boldsymbol{x}_{①}=(0\ \ 0\ \ -1)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=-1$

$d_3(4)=\boldsymbol{w}_3^T(4)\boldsymbol{x}_{①}=(2\ \ 2\ \ -1)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=-5$

因 $d_1(4)>d_2(4)$，$d_1(4)>d_3(4)$，故

$\boldsymbol{w}_1(5)=\boldsymbol{w}_1(4)=(-1\ \ -1\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_2(5)=\boldsymbol{w}_2(4)=(0\ \ 0\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_3(5)=\boldsymbol{w}_3(4)=(2\ \ 2\ \ -1)^T$

第五轮迭代（k=5）：以 $\boldsymbol{x}_{②}$=(0 0 1)$^T$作为训练样本

$d_1(5)=\boldsymbol{w}_1^T(5)\boldsymbol{x}_{②}=(-1\ \ -1\ \ 0)(0\ \ 0\ \ 1)^T=0$

$d_2(5)=\boldsymbol{w}_2^T(5)\boldsymbol{x}_{②}=(0\ \ 0\ \ -1)(0\ \ 0\ \ 1)^T=-1$

$d_3(5)=\boldsymbol{w}_3^T(5)\boldsymbol{x}_{②}=(2\ \ 2\ \ -1)(0\ \ 0\ \ 1)^T=-1$

因 $d_2(5)\ngtr d_1(5)$，$d_2(5)\ngtr d_3(5)$，故

$\boldsymbol{w}_1(6)=\boldsymbol{w}_1(5)-\boldsymbol{x}_{②}=(-1\ \ -1\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(6)=\boldsymbol{w}_2(5)+\boldsymbol{x}_{②}=(0\ \ 0\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_3(6)=\boldsymbol{w}_3(5)-\boldsymbol{x}_{②}=(2\ \ 2\ \ -2)^T$

第六轮迭代（k=6）：以 $\boldsymbol{x}_{③}$=(1 1 1)$^T$作为训练样本

$d_1(6)=\boldsymbol{w}_1^T(6)\boldsymbol{x}_{③}=(-1\ \ -1\ \ -1)(1\ \ 1\ \ 1)^T=-3$

$d_2(6)=\boldsymbol{w}_2^T(6)\boldsymbol{x}_{③}=(0\ \ 0\ \ 0)(1\ \ 1\ \ 1)^T=0$

$d_3(6)=\boldsymbol{w}_3^T(6)\boldsymbol{x}_{③}=(2\ \ 2\ \ -2)(1\ \ 1\ \ 1)^T=2$

因 $d_3(6)>d_1(6)$，$d_3(6)>d_2(6)$，故

$\boldsymbol{w}_1(7)=\boldsymbol{w}_1(6)=(-1\ \ -1\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(7)=\boldsymbol{w}_2(6)=(0\ \ 0\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_3(7)=\boldsymbol{w}_3(6)=(2\ \ 2\ \ -2)^T$

第七轮迭代（k=7）：以 $\boldsymbol{x}_{①}$=(-1 -1 1)$^T$作为训练样本

$d_1(7)=\boldsymbol{w}_1^T(7)\boldsymbol{x}_{①}=(-1\ \ -1\ \ -1)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=1$

$d_2(7)=\boldsymbol{w}_2^T(7)\boldsymbol{x}_{①}=(0\ \ 0\ \ 0)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=0$

$d_3(7)=\boldsymbol{w}_3^T(7)\boldsymbol{x}_{①}=(2\ \ 2\ \ -2)(-1\ \ -1\ \ 1)^T=-6$

因 $d_1(7)>d_2(7)$，$d_1(7)>d_3(7)$，故

$\boldsymbol{w}_1(8)=\boldsymbol{w}_1(7)=(-1\ \ -1\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(8)=\boldsymbol{w}_2(7)=(0\ \ 0\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_3(8)=\boldsymbol{w}_3(7)=(2\ \ 2\ \ -2)^T$

第八轮迭代（k=8）：以 $\boldsymbol{x}_{②}$=(0 0 1)$^T$作为训练样本

$d_1(7)=\boldsymbol{w}_1^T(7)\boldsymbol{x}_{②}=(-1\ \ -1\ \ -1)(\ 0\ \ 0\ \ 1)^T=-1$

$d_2(7)=\boldsymbol{w}_2^T(7)\boldsymbol{x}_{②}=(0\ \ 0\ \ 0)(0\ \ 0\ \ 1)^T=0$

$d_3(7)=\boldsymbol{w}_3^T(7)\boldsymbol{x}_{②}=(2\ \ 2\ \ -2)(0\ \ 0\ \ 1)^T=-2$

因 $d_2(8)>d_1(8)$，$d_2(8)>d_1(8)$，故

$\boldsymbol{w}_1(9)=\boldsymbol{w}_1(8)=(-1\ \ -1\ \ -1)^T$

$\boldsymbol{w}_2(9)=\boldsymbol{w}_2(8)=(0\ \ 0\ \ 0)^T$

$\boldsymbol{w}_3(9)=\boldsymbol{w}_3(8)=(2\ \ 2\ \ -2)^T$

由于第六、七、八次迭代中 $\boldsymbol{x}_{①}$、$\boldsymbol{x}_{②}$、$\boldsymbol{x}_{③}$均已正确分类，所以权向量的解为：

$\boldsymbol{w}_1=(-1\ \ -1\ \ -1)^T$　　$\boldsymbol{w}_2=(0\ \ 0\ \ 0)^T$　　$\boldsymbol{w}_3=(2\ \ 2\ \ -2)^T$

三个判别函数：

$d_1(\boldsymbol{x})=-x_1-x_2-1$

$d_2(\boldsymbol{x})=0$

$d_3(\boldsymbol{x})=2x_1+2x_2-2$

- 采用梯度法和准则函数

$$J(w,x,b)=\frac{1}{8\|x\|^2}\left[(w^T x-b)-|w^T x-b|\right]^2$$

式中实数 b>0，试导出两类模式的分类算法。

解答：

根据准则函数，实数 b>0，可得$J$对$w$的微分式：

$$\frac{\partial J}{\partial w}=\frac{1}{4\|x\|^2}[(w^T x-b)-|w^T x-b|][x-x\cdot sign(w^T x-b)]$$

定义：

$$sign(w^T x-b)=\begin{cases}+1 & if\ w^T x-b>0\\ -1 & if\ w^T x-b\le 0\end{cases}$$

则由梯度法中$w(k+1)$和$w(k)$的关系有：

$$w(k+1)=w(k)-\frac{C}{4\|x_k\|^2}[(w^T x_k-b)-|w^T x_k-b|][x_k-x_k\cdot sign(w^T(k)x_k-b)]$$

其中$x_k$是训练模式样本，$k$是指第$k$次迭代。

$$w(k+1)=w(k)-C\cdot\begin{cases}0 & if\ w^T x-b>0\\ \dfrac{(w^T x_k-b)x_k}{\|x_k\|^2} & if\ w^T x-b\le 0\end{cases}$$

那么，当 $w^T x-b>0$时，则$w(k+1)=w(k)$，此时不对权向量进行修正；当 $w^T x-b\le 0$时，则$w(k+1)=w(k)-\frac{C\cdot(w^T x_k-b)x_k}{\|x_k\|^2}$，需对权向量进行校正。其中，初始权向量$w(1)$的值可任选， $C$是预先选好的固定值。

- 用二次埃尔米特多项式的势函数算法求解以下模式的分类问题

  $\omega_1$: $\{(0\ 1)^T,\ (0\ -1)^T\}$

  $\omega_2$: $\{(1\ 0)^T,\ (-1\ 0)^T\}$

解答：

1) 建立二维的正交函数集

二维的正交函数集可由任意一对一维的正交函数组成，这里取 Hermite 的第 1、3 项

$H_0(x)=1$，$H_2(x)=4x^2-2$，则

其形成的几个二维正交函数为：

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x)=\phi_1(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_0(x_2)=1\\
\phi_2(x)=\phi_2(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_1(x_2)=2x_2\\
\phi_3(x)=\phi_3(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_2(x_2)=4x_2^2-2\\
\phi_4(x)=\phi_4(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_0(x_2)=2x_1\\
\phi_5(x)=\phi_5(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_1(x_2)=4x_1x_2\\
\phi_6(x)=\phi_6(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_2(x_2)=2x_1(4x_2^2-2)\\
\phi_7(x)=\phi_7(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_0(x_2)=4x_1^2-2\\
\phi_8(x)=\phi_8(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_1(x_2)=2x_2(4x_1^2-2)\\
\phi_9(x)=\phi_9(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_2(x_2)=(4x_1^2-2)(4x_2^2-2)
\end{aligned}
$$

根据定义，得到第一类势函数：

$$
K(x,x_k)=\sum_{i=1}^{9}\phi_i(x)\phi_i(x_k)
$$

$x_k\in\omega_1$ 且 $K_{k-1}(x_k)>0$ 或 $x_k\in\omega_2$ 且 $K_{k-1}(x_k)<0$ 分类正确 $K_k(x)=K_{k-1}(x)$；
$x_k\in\omega_1$ 且 $K_{k-1}(x_k)<0$ 分类错误， $K_k(x)=K_{k-1}(x)+K(x,x_k)$；
$x_k\in\omega_2$ 且 $K_{k-1}(x_k)>0$ 分类错误， $K_k(x)=K_{k-1}(x)-K(x,x_k)$。

1. 记 $x_1=(0,1)^T$、$x_2=(0,-1)^T$、$x_3=(1,0)^T$、$x_4=(-1,0)^T$；
2. $K_1(x)=K(x,x_1)=-15+24x_1^2+20x_2-32x_1^2x_2+40x_2^2-64x_1^2x_2^2$；
3. $x_2\in\omega_1$， $K_1(x_2)=5>0$，分类正确，因此 $K_2(x)=K_1(x)$；
4. $x_3\in\omega_2$， $K_2(x_3)=9\geq 0$，分类错误，
   $K_3(x)=K_2(x)-K(x,x_3)=-20x_1+20x_2-16x_1^2+16x_2^2$；
5. $x_4\in\omega_2$， $K_3(x_4)=4\geq 0$，分类错误，
   $K_4(x)=K_3(x)-K(x,x_4)=15+20x_2-56x_1^2-8x_2^2-32x_1^2x_2+64x_1^2x_2^2$；
6. $x_1\in\omega_1$， $K_4(x_1)=27>0$，分类正确，因此 $K_5(x)=K_4(x)$；
7. $x_2\in\omega_1$， $K_5(x_2)=-13\leq 0$，分类错误，因此
   $K_6(x)=K_5(x)+K(x,x_2)=-32x_1^2+32x_2^2$;
8. $x_3\in\omega_2$， $K_6(x_3)=-32<0$，分类正确，因此 $K_7(x)=K_6(x)$；
9. $x_4\in\omega_2$， $K_7(x_4)=-32<0$，分类正确，因此 $K_8(x)=K_7(x)$；
10. $x_1\in\omega_1$， $K_8(x_1)=32>0$，分类正确，因此 $K_9(x)=K_8(x)$；
11. $x_1\in\omega_1$， $K_9(x_2)=32>0$，分类正确，因此 $K_{10}(x)=K_9(x)$；
   所有样本分类正确，停止迭代。

判别函数为

$$
d(x)=K_{10}(x)=-32x_1^2+32x_2^2
$$

---

- 用下列势函数

$$K(x,x_k)=e^{-\alpha\|x-x_k\|^2}$$

求解以下模式的分类问题

$\omega_1$：{(0 1)$^T$, (0 −1)$^T$}

$\omega_2$：{(1 0)$^T$, (−1 0)$^T$}

解答：

取α=1，在二维情况下势函数为

$$K(x,x_k)=e^{-\|x-x_k\|^2}=e^{-[(x_1-x_{k_1})^2+(x_2-x_{k_2})^2]}$$

这里：$\omega_1$类为 $\boldsymbol{x}_{①}$=(0 1)$^T$，$\boldsymbol{x}_{②}$=(0 −1)$^T$

$\omega_2$类为 $\boldsymbol{x}_{③}$=(1 0)$^T$，$\boldsymbol{x}_{④}$=(−1 0)$^T$

第一步：取 $\boldsymbol{x}_{①}$=(0 1)$^T\in\omega_1$，则

$K_1(\boldsymbol{x})=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{①})=e^{-[(x_1-0)^2+(x_2-1)^2]}=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}$

第二步：取 $\boldsymbol{x}_{②}$=(0 −1)$^T\in\omega_1$，因 $K_1(\boldsymbol{x}_{②})=e^{-(0+4)}=e^{-4}>0$，故 $K_2(\boldsymbol{x})=K_1(\boldsymbol{x})=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}$

第三步：取 $\boldsymbol{x}_{③}$=(1 0)$^T\in\omega_2$，因 $K_2(\boldsymbol{x}_{③})=e^{-(1+1)}=e^{-2}>0$，故

$K_3(\boldsymbol{x})=K_2(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{③})=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2{}^2]}$

第四步：取 $\boldsymbol{x}_{④}$=(−1 0)$^T\in\omega_2$，因 $K_3(\boldsymbol{x}_{④})=e^{-(1+1)}-e^{-(4+0)}=e^{-2}-e^{-4}>0$，故

$K_4(\boldsymbol{x})=K_3(\boldsymbol{x})-K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{④})=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2{}^2]}-e^{-[(x_1+1)^2+x_2{}^2]}$

需对全部训练样本重复迭代一次

第五步：取 $\boldsymbol{x}_{⑤}=\boldsymbol{x}_{①}$=(0 1)$^T\in\omega_1$，$K_4(\boldsymbol{x}_{⑤})=e^0-e^{-2}-e^{-2}=1-2e^{-2}>0$，故 $K_5(\boldsymbol{x})=K_4(\boldsymbol{x})$

第六步：取 $\boldsymbol{x}_{⑥}=\boldsymbol{x}_{②}$=(0 −1)$^T\in\omega_1$，$K_5(\boldsymbol{x}_{⑥})=e^{-4}-e^{-2}-e^{-2}=e^{-4}-2e^{-2}<0$，故

$K_6(\boldsymbol{x})=K_5(\boldsymbol{x})+K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_{⑥})=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2{}^2]}-e^{-[(x_1+1)^2+x_2{}^2]}+e^{-[x_1^2+(x_2+1)^2]}$

第七步：取 $\boldsymbol{x}_{⑦}=\boldsymbol{x}_{③}$=(1 0)$^T\in\omega_2$，$K_6(\boldsymbol{x}_{⑦})=e^{-2}-e^0-e^{-4}+e^{-2}=2e^{-2}-e^{-4}-1<0$，故 $K_7(\boldsymbol{x})=K_6(\boldsymbol{x})$

第八步：取 $\boldsymbol{x}_{⑧}=\boldsymbol{x}_{④}$=(−1 0)$^T\in\omega_2$，$K_7(\boldsymbol{x}_{⑧})=e^{-2}-e^{-4}-e^0+e^{-2}=2e^{-2}-e^{-4}-1<0$，故 $K_8(\boldsymbol{x})=K_7(\boldsymbol{x})$

第九步：取 $\boldsymbol{x}_{⑨}=\boldsymbol{x}_{①}$=(0 1)$^T\in\omega_1$，$K_8(\boldsymbol{x}_{⑨})=e^0-e^{-2}-e^{-2}+e^{-4}=1+e^{-4}-2e^{-2}>0$，故 $K_9(\boldsymbol{x})=K_8(\boldsymbol{x})$

第十步：取 $\boldsymbol{x}_{⑩}=\boldsymbol{x}_{②}$=(−1 0)$^T\in\omega_1$，$K_9(\boldsymbol{x}_{⑩})=e^{-2}-e^{-4}-e^0+e^{-2}=1-e^{-4}+2e^{-2}>0$，故 $K_{10}(\boldsymbol{x})=K_9(\boldsymbol{x})$

经过上述迭代，全部模式都已正确分类，因此算法收敛于判别函数：

$$d(\boldsymbol{x})=e^{-[x_1^2+(x_2-1)^2]}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2{}^2]}-e^{-[(x_1+1)^2+x_2{}^2]}+e^{-[x_1^2+(x_2+1)^2]}$$