第四章作业参考答案

- 设有如下三类模式样本集 ω_1，ω_2和 ω_3，其先验概率相等，求 S_w和 S_b

  ω_1：$\{(1\ \ 0)^T, (2\ \ 0)^T, (1\ \ 1)^T\}$

  ω_2：$\{(-1\ \ 0)^T, (0\ \ 1)^T, (-1\ \ 1)^T\}$

  ω_3：$\{(-1\ \ -1)^T, (0\ \ -1)^T, (0\ \ -2)^T\}$

解答：

类内散布矩阵：$S_w = \sum_{i=1}^{c} P(\omega_i) E\{(x-m_i)(x-m_i)^T|\omega_i\}$

类间散布矩阵：$S_b = \sum_{i=1}^{c} P(\omega_i)(m_i - m_0)(m_i - m_0)^T$

由题意：$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = 1/3$

类均值向量：$m_1 = (\frac{4}{3}\ \ \frac{1}{3})^{\mathrm{T}}$　　$m_2 = (-\frac{2}{3}\ \ \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$　　$m_3 = (-\frac{1}{3}\ \ -\frac{4}{3})^{\mathrm{T}}$

总体均值向量：$m_0 = E\{x\} = \sum_{i=1}^{3} P(\omega_i) m_i = (\frac{1}{9}\ \ -\frac{1}{9})^{\mathrm{T}}$

类间散布矩阵：$S_b = \sum_{i=1}^{3} P(\omega_i)(m_i - m_0)(m_i - m_0)^T$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{121}{81} & \frac{44}{81} \\ \frac{44}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{49}{81} & -\frac{49}{81} \\ -\frac{49}{81} & \frac{49}{81} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{16}{81} & \frac{44}{81} \\ \frac{44}{81} & \frac{121}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{62}{81} & \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} & \frac{62}{81} \end{pmatrix}$$

类内散布矩阵：$S_w = \sum_{i=1}^{3} P(\omega_i) E\{(x-m_i)(x-m_i\}^T|\omega_i\}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

- 设有如下两类样本集，其出现的概率相等：

  ω_1：$\{(0\ \ 0\ \ 0)^T,\ (1\ \ 0\ \ 0)^T,\ (1\ \ 0\ \ 1)^T,\ (1\ \ 1\ \ 0)^T\}$

  ω_2：$\{(0\ \ 0\ \ 1)^T,\ (0\ \ 1\ \ 0)^T,\ (0\ \ 1\ \ 1)^T,\ (1\ \ 1\ \ 1)^T\}$

  用 K-L 变换，分别把特征空间维数降到二维和一维，并画出样本在该空间中的位置。

解答：

总体均值向量：

$$m = E\{x\} = 0.5 * \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_{1j} + 0.5 * \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T$$

将所有这些样本的各分量都减去 0.5，便可以将所有这些样本的均值移到原点：

ω_1：$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T\right\}$

ω_2：$\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T\right\}$

此时，符合 K-L 变换进行特征压缩的最佳条件。

因 $P(\omega_1)= P(\omega_2)=0.5$，故

$$R=\sum_{i=1}^{2}P(\omega_i)E\{xx^T\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}x_{1j}x_{1j}^T\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}x_{2j}x_{2j}^T\right]=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

解特征值方程$|R-\lambda I|=0$，求 R 的特征值，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.25$

其对应的特征向量可由 $R\Phi_i=\lambda_i\Phi_i$ 求得：

$$\Phi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \Phi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \Phi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

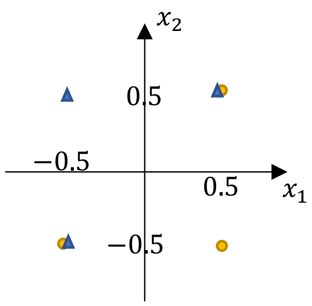
1) 把特征空间维数降到二维：

选 λ_1和 λ_2对应的特征向量Φ_1、Φ_2作变换矩阵，得到$\Phi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

由 $y=\Phi^T x$ 得变换后的二维模式特征为：

ω_1: $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T\right\}$

ω_2: $\left\{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T\right\}$



2) 把特征空间维数降到一维：

选 λ_1对应的特征向量Φ_1，得到$\Phi=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

由 $y=\Phi^T x$ 得变换后的一维模式特征为：

ω_1: $\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$

ω_2: $\left\{-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$