ЛЕКЦИЯ Б3. Рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность бинарных отношений. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Фактор-множество. Связь отношения эквивалентности с разбиением множества

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным,* если $\forall x \in A \ \langle x, x \rangle \in \rho$ (или $\forall x \in A \ x\rho x$).

Пример 3.1. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является рефлексивным, так как $x = x$ для любого действительного числа x. Напротив, отношение $\neq$ на R не является рефлексивным. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является рефлексивным, так как по определению каждая прямая параллельна самой себе. Напротив, бинарное отношение «перпендикулярности» на тех же множествах не является рефлексивным.

Упражнение 3.1. Исследовать на рефлексивность (а) бинарное отношение подобия на множестве треугольников на плоскости; (б) бинарное отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел R; (в) бинарное отношение $<$ на R.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *симметричным,* если $\forall x, y \in A$ $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y \in A \ x\rho y \Rightarrow y\rho x$), или, что то же самое, $\rho = \rho^{-1}$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *антисимметричным,* если $\forall x, y \in A$ $\langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, x \rangle \in \rho \Rightarrow x = y$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y \in A \ x\rho y, y\rho x \Rightarrow x = y$). Нетрудно показать, что приведенное определение эквивалентно определению: $\forall x, y \in A$ $\langle x, y \rangle \in \rho, x \neq y \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin \rho$.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 3.1. Пусть $\rho_1, \rho_2 -$ бинарные отношения на A, $\rho_1 \subseteq \rho_2$ и ρ_2 антисимметрично. Тогда ρ_1 антисимметрично.

Пример 3.2. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является симметричным, так как $\forall x, y \in \mathrm{R} \ x = y \Rightarrow y = x$. Это же отношение является антисимметричным, так $\forall x, y \in \mathrm{R} \ x = y, y = x \Rightarrow x = y$. Бинарное отношение $\neq$ на R также является симметричным, но не является антисимметричным, поскольку, например, $1 \neq 2, 2 \neq 1$, но из этого не следует, что $1 = 2$. Бинарные отношения «параллельности», а также «перпендикулярности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) симметричны. Напротив, указанные бинарные отношения не являются антисимметричными. Бинарное отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел R является антисимметричным, так как $\forall x, y \in \mathrm{R} \ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$. Это отношение не является симметричным, поскольку, например, $1 \leq 2$, но не выполняется $2 \leq 1$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *транзитивным,* если $\forall x, y, z \in A$ $\langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y, z \in A \ x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z$).

Пример 3.3. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является транзитивным, так как $\forall x, y, z \in \mathrm{R} \ x = y, y = z \Rightarrow x = z$. Бинарное отношение $\neq$ на множестве действительных чисел R не является транзитивным, поскольку, например, $1 \neq 2, 2 \neq 1$, но из этого не следует, что $1 \neq 1$. Бинарное отношение «меньше или равно» на R является транзитивным, так как $\forall x, y, z \in \mathrm{R} \ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является транзитивным.

Пример 3.4. Бинарное отношение $\subseteq$ на множестве всех подмножеств данного универсального множества U является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным (см. тему №1, стр. 4).

Упражнение 3.2. Показать, что бинарное отношение «перпендикулярности» на множестве всех прямых на плоскости (или в пространстве) не является рефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

Утверждение 3.2. Пусть ρ – бинарное отношение на A. Тогда для транзитивности ρ необходимо и достаточно, чтобы $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Доказательство. Пусть ρ транзитивно на A. Покажем, что $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Для любой пары $\langle x, z\rangle \in \rho \circ \rho$ по определению операции произведения бинарных отношений выполняется: $\exists y \in A: \langle x, y\rangle \in \rho,\ \langle y, z\rangle \in \rho$, откуда в силу транзитивности ρ на A имеем: $\langle x, z\rangle \in \rho$. Пусть теперь $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Покажем транзитивность ρ на A. Действительно, $\forall x, y, z \in A$ $\langle x, y\rangle \in \rho, \langle y, z\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z\rangle \in \rho \circ \rho \subseteq \rho$, т.е. транзитивность ρ на A доказана.

Утверждение 3.3. Пусть ρ – бинарное отношение, являющееся рефлексивным на A. Тогда $\rho \subseteq \rho \circ \rho$.

Доказательство. Пусть $\langle x, y\rangle \in \rho$. Покажем, что $\langle x, y\rangle \in \in \rho \circ \rho$. Действительно, из рефлексивности ρ на A следует, что $\langle x, x\rangle \in \rho$. Но тогда по определению операции произведения бинарных отношений получаем, что $\langle x, x\rangle \in \rho, \langle x, y\rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \rho \circ \rho$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3.4. Пусть ρ – бинарное отношение, являющееся рефлексивным и транзитивным на A. Тогда $\rho \circ \rho = \rho$.

Утверждение 3.4 является следствием утверждений 3.2,3.3.

Отношение эквивалентности. Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение ρ на множестве A называется *эквивалентностью* на A.

Пример 3.5. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «подобия» на множестве всех треугольников на плоскости является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «равновеликости» (т.е. равенства площади) на множестве всех фигур на плоскости является эквивалентностью на этом множестве.

Утверждение 3.5. Пусть $f : A \to B$ – функция. Тогда бинарное отношение ρ_f на множестве A, определяемое условием: $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, является эквивалентностью на A.

Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A$ $f(x) = f(x) \Rightarrow \Rightarrow x \rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \rho_f x_2 \Rightarrow \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 \rho_f x_1$; (в) транзитивность: $\forall x_1, x_2, x_3 \in A$ $x_1 \rho_f x_2, x_2 \rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\ f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow \Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \rho_f x_3$.

Пример 3.6. Пусть A – множество студентов МАИ и $f : A \to B$ – отображение, ставящее в соответствие каждому студенту номер группы, в которой он учится (т.е. B – множество номеров студенческих групп МАИ). Тогда $\forall x, y \in A$ $x\rho_f y \Leftrightarrow x$ и y учатся в одной студенческой группе. Из утверждения 3.5 следует, что ρ_f – эквивалентность на A.

Пусть ρ – эквивалентность на множестве A. *Классом эквивалентности (смежным классом)* элемента x по эквивалентности ρ называется множество
$[x]_\rho = x/\rho = \{y \in A \mid x\rho y\} = \{y \in A \mid y\rho x\}$.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности ρ называется *фактор-множеством* A по ρ и обозначается A/ρ. Таким образом,
$A/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in A\}$.

Пример 3.7. Возвращаясь к примеру 3.6, заключаем, что $\forall x \in A$ $[x]_{\rho_f}$ – студенческая группа, в которой учится студент x, A/ρ_f – множество студенческих групп МАИ.

Пример 3.8. График функции $y = f(x), x \in X = [0, 5],$ представляет собой ломаную (см. рис. 3.1), звенья которой параллельны координатной оси либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Эта функция порождает отношение эквивалентности ρ_f на множестве X (см. утверждение 3.5): $\forall x_1, x_2 \in X$
$x_1\rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Перечислить все классы эквивалентности.

Решение. Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0, 1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1$, $f(x_1) = f(x)$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x\}$. (б) Пусть $x \in \{1, 4\}$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{1, 4\}$. (в) Пусть $x \in (1, 2)$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{x, x_1, x_2\}$ (см. рис. 3.1). При этом из геометрических соображений получаем: $x - 1 = 4 - x_1 = x_2 - 4$, откуда $x_1 = 5 - x, x_2 = x + 3$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, x + 3\}$. (г) Пусть $x \in [2, 3] \cup \{5\}$. Заметим, что $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2, 3] \cup \{5\}$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = [2, 3] \cup \{5\}$. (д) Пусть $x \in (3, 4)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, 8 - x\}$. (е) Пусть $x \in (4, 5)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, x - 3, 8 - x\}$.

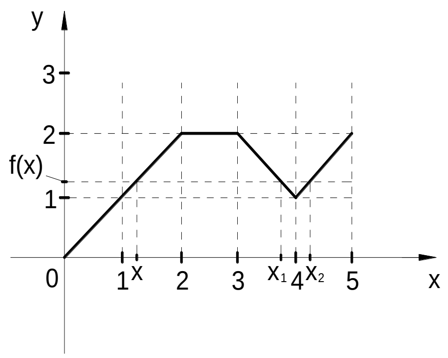

Рис. 3.1

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 3.1. Пусть ρ – эквивалентность на A, $x_1, x_2 \in A$, и выполняется: $x_1 \in [x_2]_\rho$. Тогда $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Доказательство. Покажем, что (а) $[x_1]_\rho \subseteq [x_2]_\rho$; (б) $[x_2]_\rho \subseteq \subseteq [x_1]_\rho$. (а) Пусть $x \in [x_1]_\rho$. Тогда $x \rho x_1$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_1 \rho x_2$, в силу транзитивности ρ получаем $x \rho x_2$, а следовательно, $x \in [x_2]_\rho$. В силу произвольности $x \in [x_1]_\rho$ заключаем о справедливости утверждения (а). Докажем утверждение (б). Пусть теперь $x \in [x_2]_\rho$. Тогда $x \rho x_2$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_2 \rho x_1$, в силу транзитивности ρ, получаем $x \rho x_1$, а следовательно, $x \in [x_1]_\rho$. В силу произвольности заключаем о справедливости утверждения (б). Из (а), (б) получаем, что $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Лемма 3.2. Пусть ρ – эквивалентность на A. Тогда любые два класса эквивалентности либо не пересекаются (т.е. их пересечение является пустым множеством), либо равны между собой.

Доказательство. Пусть $[x_1]_\rho$, $[x_2]_\rho$ – некоторые два класса эквивалентности. Если $[x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho \neq \varnothing$, то $\exists x \in [x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho$, и в силу леммы 3.1 выполняются равенства: $[x_1]_\rho = [x]_\rho = [x_2]_\rho$, т.е. лемма 3.2 полностью доказана.

Разбиение множества. Связь с отношением эквивалентности. *Разбиением* множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств множества A таких, что объединение этих подмножеств дает A. Таким образом, семейство множеств $\{A_i \mid i \in I\}$, где I – непустое индексное множество, будет являться разбиением множества A, если выполняются условия: (а) $A_i \subseteq A$, $i \in I$; (б) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$; (в) $\forall i, j \in I$, если $A_i \neq A_j$, то $A_i \cap A_j = \varnothing$ (или, что то же самое, если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$).

Пример 3.9. Пусть M – множество студентов МАИ, G – множество студенческих групп МАИ. Тогда G – разбиение M.

Следующая теорема показывает связь между разбиением множества и отношением эквивалентности на этом множестве.

Теорема 3.1. (1) Всякое разбиение $\{A_i \mid i \in I\}$ множества A определяет на A отношение эквивалентности ρ: $\langle x, y \rangle \in \rho \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in A_i$. (2) Всякое отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет разбиение множества A на классы эквивалентности.

Доказательство. (1) Докажем рефлексивность ρ. Пусть $x \in A$. Тогда $\exists i \in I : x \in A_i \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho.$ Докажем теперь симметричность $\rho.$ Пусть $x, y \in A$, $\langle x, y \rangle \in \rho$. Тогда $\exists i \in I : x, y \in A_i$, или, что то же самое, $y, x \in A_i$, а следовательно, $\langle y, x \rangle \in \rho$. Докажем транзитивность $\rho.$ Пусть $x, y, z \in A$, $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in \rho$. Тогда $\exists i, j \in I : x, y \in A_i,\ y, z \in A_j \Rightarrow y \in A_i \cap A_j \Rightarrow A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j \Rightarrow x, z \in A_i \Rightarrow \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$. (2) Покажем, что совокупность классов эквивалентности A по ρ является разбиением A. Требуется доказать, что (а) $\forall x \in A \quad [x]_\rho \subseteq A$; (б) $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_\rho = A$; (в) $[x_1]_\rho \neq [x_2]_\rho \Rightarrow [x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho = \varnothing$. Заметим, что (а) следует из определения $[x]_\rho$; (б) следует из того, что $\forall x \in A\ x \in [x]_\rho$; (в) является следствием леммы 3.2.