ЛЕКЦИЯ ЛП3. Выполнимость, общезначимость формул логики предикатов

Рассмотрим формулу A и некоторую её интерпретацию с множеством М. Говорят, что формула *A выполнима в данной интерпретации*, если существует набор $<a_1,\ldots,a_n>$, $a_i \in$ М, значений свободных переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ формулы A такой, что $A|_{<a_1,\ldots,a_n>}$ = И .

Говорят, что формула *A истинна в данной интерпретации*, если она принимает значение И на любом наборе $<a_1,\ldots,a_n>$, $a_i \in$ М, значений своих свободных переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$.

Говорят, что формула *A общезначима* или тождественно-истинна (в логике предикатов), если она истинна в каждой интерпретации.

Говорят, что формула *A выполнима* (в логике предикатов), если существует интерпретация, в которой A выполнима.

Формула A общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является выполнимой, и формула A выполнима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является общезначимой.

Очевидно, что если F и G – равносильные (в логике предикатов) формулы, то $F \sim G$ – общезначимая формула. Применив это утверждение к формулам, равносильность которых доказана в разд. 1.4.2, получим общезначимые формулы.

Докажем общезначимость некоторых других формул.

Утверждение 1.18. *Формула*

$$(\forall x)A(x) \supset A(y) \qquad (1.11)$$

где переменная y не входит в формулу $A(x)$, общезначима.

Пусть $x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ – все свободные переменные формулы $A(x)$. Тогда $y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ – перечень свободных переменных формулы (1.11). Рассмотрим произвольную интерпретацию с множеством М.

Пусть $<b, a_1, \ldots, a_n>$, где $b \in$ М, $a_i \in M$ $(1 \leq i \leq n)$ – произвольный набор значений свободных переменных формулы (1.11). Докажем, что

$$[(\forall x)A(x) \ \supset A(y)]\ |_{<b,a_1,\ldots,a_n>} = \text{ И}.$$

Действительно, для формулы $A(x)$ либо существует элемент $a_0 \in M$ такой, что на наборе $<a_0, a_1, \ldots, a_n>$ значений свободных переменных $x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$

$$A(x)\ |_{<a_0,a_1,\ldots,a_n>} = \text{ Л},$$

либо для любого элемента $a \in$ М на наборе $<a, a_1, \ldots, a_n>$ значений свободных переменных $x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$

$$A(x)\ |_{<a,a_1,\ldots,a_n>} = \text{ И}.$$

В первом случае

$(\forall x)A(x)\,|_{< a_1,\ldots,a_n>} = $ Л,

и тогда

$[(\forall x)A(x) \supset A(y)]\,|_{<b,a_1,\ldots,a_n>} = $ И.

Во втором случае

$(\forall x)A(x)\,|_{< a_1,\ldots,a_n>} = $ И; $A(y)\,|_{<b,a_1,\ldots,a_n>} = $ И,

и тогда

$[(\forall x)A(x) \supset A(y)]\,|_{<b,a_1,\ldots,a_n>} = $ И.

Утверждение 1.19. *Формула $A(y) \supset (\exists x)A(x)$, где переменная y не входит в формулу $A(x)$, общезначима.*

В силу утверждения 1.18 формула $(\forall x)\neg A(x) \supset \neg$A(y) общезначима. Имеем

$(\forall x)\neg A(x) \supset \neg \mathrm{A}(y) \equiv \neg(\forall x)\neg A(x) \vee \neg \mathrm{A}(y) \equiv$

$\equiv (\exists x)\neg\neg \mathrm{A}(x) \vee \neg \mathrm{A}(y) \equiv (\exists x)\mathrm{A}(x) \vee \neg \mathrm{A}(y) \equiv$

$\equiv A(y) \supset (\exists x)A(x)$.

Следовательно, формула $\mathrm{A}(y) \supset (\exists x)A(x)$ общезначима.

Как говорилось выше, одноименные кванторы можно переставлять, следовательно, формулы

$(\exists x)(\exists y)A(x,y) \sim (\exists y)(\exists x)A(x,y)$,

$(\forall x)(\forall y)A(x,y) \sim (\forall y)(\forall x)A(x,y)$

общезначимы.

Общезначимой является также формула

$(\exists x)(\forall y)A(x,y) \supset (\forall y)(\exists x)A(x,y)$

(доказательство будет приведено в конце разд. 1.4.4). Однако формула $(\forall x)(\exists y)A(x,y) \supset (\exists y)(\forall x)A(x,y)$ не является общезначимой. Действительно, пусть формула $A(x,y)$ – атомарная формула $A_1^{(2)}(x,y)$. Рассмотрим интерпретацию, областью которой является множество целых чисел; символу $A_1^{(2)}(x,y)$ поставим в соответствие предикат $x < y$. Тогда формула $(\forall x)\,(\exists y)A_1^{(2)}(x,y)$ истинна в этой интерпретации, а формула $(\exists y)(\forall x)A_1^{(2)}(x,y)$ ложна.

Утверждение 1.20. *Пусть A – тождественно-истинная формула логики высказываний, $X_{i_1},\ldots,X_{i_n}$ – список ее переменных. Подставив вместо каждой переменной X_{i_k}, $k = 1,2,\ldots,n$, формулы логики предикатов B_k (так, чтобы при этом не нарушались пп. 1-4 определения формулы см. с. 74), получим общезначимую формулу логики предикатов.*

Задача распознавания общезначимости формул логики предикатов существенно сложнее, чем формул логики высказываний. Так же, как и в логике высказываний, она называется *проблемой разрешимости* и ставится следующим образом: указать эффективный способ (алгоритм) распознавания общезначимости формул (т.е. является ли данная формула общезначимой или нет). (Подробно понятие алгоритма будет осуждаться в разд. 1.5.) В общем случае эта проблема в логике предикатов неразрешима. Приведем это утверждение без доказательства.

Теорема Черча. *Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.*

Однако в некоторых частных случаях проблема разрешимости решается. Например, если рассматривать формулы логики предикатов, содержащие только одноместные предикатные символы, то такой алгоритм существует. Логика, в которой употребляются только одноместные предикаты, соответствует логике, которая была описана ещё Аристотелем.

Алгоритм проверки общезначимости формул, содержащих только одноместные предикатные символы, основан на следующем утверждении.

Утверждение 1.21. *Пусть F – формула, содержащая ровно* n *одноместных предикатных символов. Для того, чтобы формула F была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы она была выполнимой во всех интерпретациях* $<\mathrm{M}, f>$ *с множеством* M*, содержащим не более* 2^n *элементов.*

Приведем схему доказательства этого утверждения. Пусть в интерпретациях $\mathbf{M}_1 = <\mathrm{M}_1, f_1>$ и $\mathbf{M}_2 = <\mathrm{M}_2, f_2>$ одноместным предикатным символам $A_j^{(1)}$ формулы поставлены в соответствие предикаты P_j и Q_j, $j = 1, 2, \ldots$ Говорят, что интерпретации $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ *гомоморфны*, если существует сюръекция φ: $\mathrm{M}_1 \longrightarrow \mathrm{M}_2$ такая, что для любого $a \in \mathrm{M}_1$ и для любого $j = 1, 2, \ldots$ $P_j(a) = Q_j\big(\varphi(a)\big)$. Тогда, как следует из индуктивного определения, формула, содержащая только одноместные предикатные символы, в гомоморфных интерпретациях одновременно либо выполнима, либо невыполнима.

Покажем, что если формула F, содержащая ровно n одноместных предикатных символов $A_1^{(1)}, \ldots, A_n^{(1)}$, выполнима, то она выполнима и в некоторой интерпретации с конечным множеством M, содержащим не более 2^n элементов. Пусть $\mathbf{M}_1 = <\mathrm{M}_1, f_1>$ – интерпретация, в которой выполнима формула F, и пусть в этой интерпретации предикатным символам $A_j^{(1)}$ соответствуют предикаты $P_j, j = 1, 2, \ldots, n$. Для любого $a \in \mathrm{M}_1$ рассмотрим подмножество $\mathrm{M}_a \subseteq \mathrm{M}_1$, состоящее из таких элементов b, что

$<P_1(a), \ldots, P_n(a)>=<P_1(b), \ldots, P_n(b)>$.

Число таких подмножеств M_a не превышает числа наборов из И и Л длины n, то есть не превышает 2^n. Выберем в каждом из этих подмножеств по одному представителю и составим из них множество M. Тогда интерпретации $\mathbf{M}_1 = <\mathrm{M}_1, f_1>$ и $\mathbf{M}_2 = <\mathrm{M}, f>$, где f – ограничение функции f_1 на $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}_1$, гомоморфны, и, следовательно, формула F выполнима в интерпретации $\mathbf{M}_2$ с множеством M, содержащим не более 2^n элементов. Отсюда и следует утверждение 1.21.

Пример 1. Проверить правильность рассуждения. Всякий дирижер является также хорошим музыкантом. Всякий человек, полностью ушедший в бизнес, не может быть хорошим музыкантом. Следовательно, всякий дирижер не может полностью уйти в бизнес.

Решение. Обозначим:

$Д(x)$ – «x – дирижер», $М(x)$ – «x – хороший музыкант», $Б(x)$ – «x – полностью ушел в бизнес».

Составим формулу логики предикатов, соответствующую нашему рассуждению.

$$F = \{(\forall x)[Д(x) \supset М(x)] \& (\forall x)[Б(x) \supset \neg М(x)]\} \supset (\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)].$$

Предположим, что формула F не является общезначимой. Тогда найдется интерпретация $\mathbf{M} = <М, f>$, на которой $F =$ Л. Тогда на этой интерпретации

$$(\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)] = Л \Rightarrow \neg(\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)] = И \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x)[Д(x) \& Б(x)] = И \Rightarrow \exists x_0 \in М\colon Д(x_0) = И, Б(x_0) = И.$$

$$(\forall x)[Д(x) \supset М(x)] = И \Rightarrow Д(x_0) \supset М(x_0) = И \Rightarrow М(x_0) = И.$$

$$(\forall x)[Б(x) \supset \neg М(x)] = И \Rightarrow Б(x_0) \supset \neg М(x_0) = И \Rightarrow \neg М(x_0) = И \Rightarrow$$

$$\Rightarrow М(x_0) = Л.$$

Пришли к противоречию, предположив, что формула F не является общезначимой. Следовательно, формула F является общезначимой и наше рассуждение является **правильным**.