Билет 1.
«Понятие множества. Основные определения. Парадокс Рассела. Операции над множествами».

Под *множеством М* интуитивно понимаем совокупность определённых, различимых между собой объектов, мыслимых как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества М.
****

Множество S это любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты – элементы множества S. символ ∈ обозначает *отношение принадлежности.* $x \in S$ значит, что x принадлежит множеству S. Если x не принадлежит множеству S , то пишут $x \overline{\in} S$. (старый учебник)

Опр. 1. «Интуитивный принцип объемности».
Множества А и В считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.
Записывают А=В , если А и В равны, А≠В – в противном случае.

Следовательно, для любого $x \in$ A справедливо $x \in$ B и наоборот.

Если элементами множества A являются объекты $a_1, a_2, ..., a_n$ и только они, то обозначаем $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. В случае, если каждый элемент множества A является элементом множества B, множество A называется *подмножеством* множества B (или A *включено в* B; или B *включает в себя* A). Для любых множеств A, B, C выполняется: $\varnothing \subseteq A$; $A \subseteq A$; $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$; $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow$ $\Rightarrow A \subseteq C$. Количество элементов в конечном множестве A будем обозначать $|A|$.

Пример 1.2. $|\varnothing| = 0$, $|\{\varnothing\}| = 1$, $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$ и т.д.

Пример 1.3. (а) $\{1,2,3,4\} = \{3,4,2,1\}$, (б) $|\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\{\{1,2,3,4\}\}| = 1$, $|\{\{1,2\}, \{3,4\}\}| = 2$.

Опр. 2. «Интуитивный принцип абстракции».
Любая форма P(x) определяет некоторое множество A, а именно множество тех и только тех предметов a, для которых P(a) – истинное предложение.
Для множества A, определяемого формой P(x), принято обозначение A = {x| P(x)|}.

Парадокс Рассела.
Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, например множество всех множеств, и такие множества, которые не являются элементами самих себя, например множество {1,2}, элементами которого являются числа 1 и 2. Рассмотрим теперь множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. Тогда, если A не есть элемент A, то, по определению, A также есть и элемент A. С другой стороны, если A есть элемент A, то A – одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т. е A не есть элемент A.

Арифметические операции.
Объединение множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого являются элементами множества A или B:
$A \cup B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:
$A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$.

Относительным дополнением множества A до множества X называется множество X\A всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:
$X \setminus A = \{x | x \in X$ и $x \overline{\in} A\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называют множество:
$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Множество U называется универсальным множеством. Тогда:

Абсолютным дополнением множества А называется множество **7**А всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству А (операция выполняется в 1 очередь):

7А = U\A.

Билет 2.
«Основные тождества алгебры множеств, доказательство дистрибутивности».

Основные тождества алгебры множеств. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);
4. $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);
5. $A \cup \overline{A} = U$;
6. $A \cup \varnothing = A$;
7. $A \cup U = U$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);
9. $A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);
10. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (закон расщепления);

1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);
3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
4′. $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения);
5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6′. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
7′. $A \cap U = A$;
8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);
9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения);
10′. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (закон расщепления);

11. $\overline{\overline{A}} = A$;
12. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
13. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, x \in C \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \end{array}\right] \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Докажем тождество $3'$. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A,$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \\ x \notin B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \end{array}\right] \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \\ x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

Билет 3.

«Основные тождества алгебры множеств, доказательство законов де Моргана, пунктов 12, 13».

Докажем тождество $8'$. Применим тождество 8 к $\overline{A}, \overline{B}$ и воспользуемся очевидным тождеством 11: $\overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$, а следовательно, $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$, откуда $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, ч.и т.д.

Докажем тождество 10. Используя доказанное тождество 3, имеем: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \varnothing = A.$

Докажем тождество $10'$. Используя доказанное тождество $3'$, имеем: $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap U = A.$

Докажем тождество 12. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B \Leftrightarrow x \in A, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}.$$

И тд

$A+B=(A\cup B)$ ...

4. Необх. и дост. усл. для существов. решения и мн-во решений системы

$$\begin{cases} A\cap X=\varnothing, \\ B\cap \overline{X}=\varnothing \end{cases}$$

... мн-в. Алгоритм решени...

Утверждение 1.11. Пусть A, B – некоторые множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества $U \neq \varnothing$. Тогда (а) система уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = \varnothing, & (1.7) \\ B \cap \overline{X} = \varnothing & (1.8) \end{cases}$$

относительно неизвестного множества X имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subseteq \overline{A}$; (б) решениями системы (1.7),(1.8) являются любые множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Доказательство. (а) Пусть система (1.7),(1.8) имеет решение X. Тогда, используя (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Rightarrow B \subseteq X,\ X \subseteq \overline{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow B \subseteq \overline{A}$. Обратно, пусть $B \subseteq \overline{A}$. Тогда, например, для $X = B$ (или для $X = \overline{A}$), используя (1.4), (1.5), имеем $B \subseteq X \subseteq \overline{A} \Rightarrow X \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq X \Rightarrow A \cap X = \varnothing, B \cap \overline{X} = \varnothing$, т.е. X действительно является решением системы (1.7), (1.8). (б) Пусть $B \subseteq \overline{A}$. Тогда, как доказано в (а), существует решение системы (1.7), (1.8). Причем, в силу (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Leftrightarrow X \subseteq \overline{A}, B \subseteq X \Leftrightarrow B \subseteq X \subseteq \overline{A}$, т.е. решениями системы (1.7), (1.8) являются все множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

$B\cap X=\varnothing$

5. Ф-лы алгебры мн-в. Алгоритм решения произвольной системы ур-ий в алг. мн-в отн-но одного неизвестного мн-ва X.

... мн-ва. Решить

$B = U$, $C = \varnothing$ рассматриваемое равенство не выполняется.

Всюду далее под *формулой алгебры множеств* будем интуитивно понимать формулу $f(A_1,..., A_n)$ (где $n \geq 1$) с переменными $A_1,..., A_n$, обозначающими произвольные множества (являющиеся подмножествами заданного универсального множества U), в которой эти переменные связаны между собой с помощью скобок, двухместных операций: $\cup, \cap, \setminus, +$, а также одноместной операцией абсолютного дополнения (строгое определение формулы аналогично определению формулы логики высказываний (см., например, [2, стр. 26,27]).

Алгоритм 1.1 решения системы уравнений (1.9)

1) Используя (1.3), (1.6), имеем: (1.9) $\Leftrightarrow f_1 + g_1 = \varnothing,..., f_m + g_m = \\ = \varnothing \Leftrightarrow (f_1 + g_1) \cup ... \cup (f_m + g_m) = \varnothing$, т.е. можно считать, что система (1.9) имеет вид: $f(A_1,..., A_n, X) = \varnothing$, где $f = (f_1 + g_1) \cup ... \cup \\ \cup (f_m + g_m)$.

2) «Избавляемся» в $f(A_1,..., A_n, X)$ от операций: $\setminus, +$, используя тождества: $A \setminus B = A\overline{B}$, $A + B = A\overline{B} \cup B\overline{A}$.

3) Используя законы де Моргана, приводим $f(A_1,..., A_n, X)$ к виду, при котором знак абсолютного дополнения может находиться только над символами множеств: $A_1,..., A_n, X$ (см. замечание 1.1). Пример:

$$f(A_1,..., A_n, X) = \overline{A}_1(\overline{A}_2 \cup \overline{X})X \cup A_3X \cup \overline{A}_4\overline{X} \cup (A_4X \cup A_5)A_5 .$$

4) Используя дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$, приводим $f(A_1,..., A_n, X)$ к виду «объединение пересечений» (аналогичному алгебраическому многочлену, где роль умножения играет $\cap$, а роль сложения – $\cup$). Пример (продолжение примера на шаге 3 алгоритма; см. также замечание 1.1):

$$f(A_1,..., A_n, X) = \overline{A}_1\overline{A}_2X \cup A_3X \cup \overline{A}_4\overline{X} \cup A_4A_5X \cup A_5 .$$

5) Группируем члены в $f(A_1,...,A_n,X)$, образуя 3 группы: «без X», «с X», «с $\overline{X}$». Во второй группе выносим X за скобки, в третьей выносим за скобки $\overline{X}$:

$$f(A_1,...,A_n,X) = h_1(A_1,...,A_n) \cup h_2(A_1,...,A_n)X \cup h_3(A_1,...,A_n)\overline{X}.$$

Пример (продолжение примера на шаге 4 алгоритма):

$$f(A_1,...,A_n,X) = A_5 \cup (\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup A_3 \cup A_4A_5)X \cup \overline{A}_4\overline{X}.$$

6) Используя (1.3), получаем: $f = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \varnothing, \\ h_2 \cap X = \varnothing, \\ h_3 \cap \overline{X} = \varnothing, \end{cases}$

откуда, в силу утверждения 1.11, необходимым и достаточным условием существования решения системы уравнений (1.9) является

$$h_1 = \varnothing,\ h_3 \subseteq \overline{h}_2, \tag{1.10}$$

и в случае выполнения (1.10) решениями системы уравнений (1.9) являются все множества X, удовлетворяющие условию: $h_3 \subseteq X \subseteq \overline{h}_2$.

Замечание 1.1. На шаге 3 алгоритма используется также тождество $\overline{\overline{A}} = A$, а на шаге 4 – тождества: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.

Замечание 1.2. Описанный алгоритм может быть применен и к системе уравнений относительно многих неизвестных $X_1,...,X_k$. При этом производится последовательное исключение неизвестных.

Замечание 1.3. Система (1.9) может также иметь иной вид (с включениями вместо равенств):

$$f_i(A_1,...,A_n,X) \subseteq g_i(A_1,...,A_n,X),\ i = 1,2,...,m. \tag{1.11}$$

В этом случае модифицируется шаг 1 алгоритма, а именно, используя (1.3),(1.4), имеем: (1.11) $\Leftrightarrow f_1 \setminus g_1 = \varnothing,..., f_m \setminus g_m = \varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f_1 \setminus g_1) \cup ... \cup (f_m \setminus g_m) = \varnothing$, т.е. система (1.11) сводится к единственному уравнению $f(A_1,...,A_n,X) = \varnothing$, где $f = (f_1 \setminus g_1) \cup ... \cup$ $\cup (f_m \setminus g_m)$.

Билет 6.

Пример 1.13. Пусть A, B, C – заданные множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества U. Решить систему уравнений относительно неизвестного множества X:

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = C. \end{cases} \tag{1.12}$$

Последовательно применяя шаги 1–6 алгоритма 1.1, получаем:

$$(1.12) \Leftrightarrow (AX + B) \cup [(A \cup X) + C] = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AX \setminus B) \cup (B \setminus AX) \cup [(A \cup X) \setminus C] \cup [C \setminus (A \cup X)] = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX\overline{B} \cup B(\overline{A} \cup \overline{X}) \cup (A \cup X)\overline{C} \cup C\overline{A}\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX\overline{B} \cup B\overline{A} \cup B\overline{X} \cup A\overline{C} \cup X\overline{C} \cup C\overline{A}\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\overline{A}B \cup A\overline{C}) \cup (A\overline{B} \cup \overline{C})X \cup (B \cup \overline{A}C)\overline{X} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{A}B \cup A\overline{C} = \varnothing, \\ (A\overline{B} \cup \overline{C}) \cap X = \varnothing, \\ (B \cup \overline{A}C) \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$$

В силу утверждений 1.11, (1.3), (1.4), необходимым и достаточным условием существования решения этой системы, равносильной (1.12), является

$$\overline{A}B \cup A\overline{C} = \varnothing,\ B \cup \overline{A}C \subseteq \overline{A\overline{B} \cup \overline{C}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}B = \varnothing, A\overline{C} = \varnothing,\ B \cup \overline{A}C \subseteq (\overline{A} \cup B)C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C, B \cup \overline{A}C \subseteq BC \cup \overline{A}C \Leftrightarrow B \subseteq A \subseteq C,$$

так как, в случае $B \subseteq C$, выполняется $BC = B, BC \cup \overline{A}C = B \cup \overline{A}C$.

В силу утверждения 1.11, единственным решением этой системы в случае $B \subseteq A \subseteq C$ является $X = B \cup \overline{A}C$.

Билет 7

Табличный метод доказательства тождеств.

Да\нет

Универсальное множество\пустое

В пример дистрибутивность

Билет 8

Утверждение 1.6. Пусть $f_1(A_1,\dots,A_n), f_2(A_1,\dots,A_n), g_1(A_1,\dots,A_n)$, $g_2(A_1,\dots,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда утверждение $f_1 = f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо тождество алгебры множеств $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2$.

Действительно, используя (1.6), а также утверждение 1.4, получаем: $[f_1 = f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow [f_1 + f_2 = \varnothing \Leftrightarrow g_1 + g_2 = \varnothing] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2$.

Утверждение 1.5. Пусть A, B – произвольные множества. Тогда

$$A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing, B = \varnothing, \tag{1.3}$$

$$A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B, \tag{1.4}$$

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}, \tag{1.5}$$

$$A + B = \varnothing \Leftrightarrow A = B. \tag{1.6}$$

Утверждение 1.4. Пусть $f(A_1,...,A_n)$, $g(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда утверждение $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$ выполняется тогда и только тогда, когда $f \equiv g$.

Действительно, если $f \equiv g$, то $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$. В обратную сторону, пусть $f=\varnothing \Leftrightarrow g=\varnothing$. Тогда, в силу утверждения 1.2, $\forall A_i \in$ $\in \{U,\varnothing\}$, $i=1,2,...,n$, $f=g$, откуда, в силу утверждения 1.3, $f \equiv g$.

Утверждение 1.7. Пусть $f_1(A_1,...,A_n), f_2(A_1,...,A_n), g_1(A_1,...,A_n)$, $g_2(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда

(а) $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 + g_2$;

(б) $[f_1 = f_2 \Leftrightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow f_1 + f_2 \equiv g_1 \setminus g_2$;

(в) $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 \setminus g_2$.

Докажем (а) (доказательство (б), (в) аналогично). Используя утверждения 1.4, (1.4),(1.6), получаем: $[f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [f_1 \setminus f_2 = \varnothing \Leftrightarrow g_1 + g_2 = \varnothing] \Leftrightarrow f_1 \setminus f_2 \equiv g_1 + g_2$.

Билет 9.

Утверждение 1.10. Пусть $f_1(A_1,...,A_n)$, $f_2(A_1,...,A_n)$, $g_1(A_1,...,A_n)$, $g_2(A_1,...,A_n)$ – формулы алгебры множеств. Тогда

(а) $[f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow (g_1 + g_2) \setminus (f_1 + f_2) \equiv \varnothing$;

(б) $[f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow (g_1 \setminus g_2) \setminus (f_1 + f_2) \equiv \varnothing$;

(в) $[f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 = g_2] \Leftrightarrow (g_1 + g_2) \setminus (f_1 \setminus f_2) \equiv \varnothing$;

(г) $[f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2] \Leftrightarrow (g_1 \setminus g_2) \setminus (f_1 \setminus f_2) \equiv \varnothing$.

Из утверждений 1.8,1.10 следует, что для любых формул алгебры множеств f_1, f_2, g_1, g_2 проверка утверждений вида: $f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 =$ $= g_2$; $f_1 = f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2$; $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 = g_2$; $f_1 \subseteq f_2 \Rightarrow g_1 \subseteq g_2$ может быть осуществлена описанным выше табличным способом.

Билет 10.

Замечание 2.1. Можно определить: $\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle$, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle = \langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle, a_4\rangle$, и т.д.

Основное свойство упорядоченных n-ок заключается в следующем:

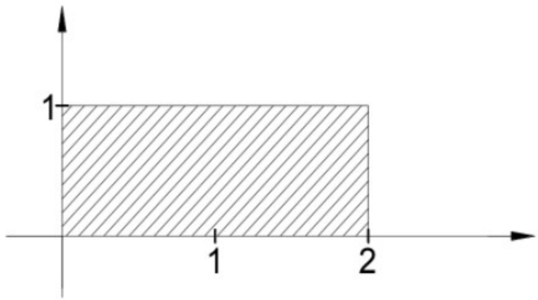
$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется множество $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{< a_1, \ldots, a_n >| \, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$. В случае $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ будем кратко писать $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = A^n$.

Прямое произведение множеств. *Упорядоченная пара* $\langle a, b\rangle$ интуитивно определяется как совокупность двух предметов a и b, расположенных в строго определенном порядке. Основное свойство упорядоченных пар состоит в том, что $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \Leftrightarrow a = c, b = d$**.**

Пример 2.1. Пусть $A = \{2;3\}, B = \{0;1;2\}$. Тогда $A \times B = \{\langle 2,0\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$, $B \times A = \{\langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$. Заметим, что в приведенном примере $A \times B \neq B \times A$, т.е. операция $\times$ в общем случае не является коммутативной.

Пример 2.2. Пусть $A = [0;2], B = [0;1]$. Тогда $A \times B = \{\langle a, b\rangle | \, a \in [0;2], b \in [0;1]\}$ – прямоугольник (см. рис.2.1).



Тождества

1. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
4. $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$.

1′. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2′. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
3′. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;
4′. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$.

Бинарные отношения. Введем понятие *бинарного отношения*. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A \times B$. Если $A = B$, то бинарное отношение ρ называется бинарным отношением на множестве A. Вместо $\langle x, y \rangle \in \rho$ часто пишут $x\rho y$.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \left\{ x \middle| \exists y : \langle x, y \rangle \in \rho \right\}$ (т.е. D_ρ – это множество всех первых элементов пар из ρ). *Множеством значений* бинарного отношения ρ называется множество $R_\rho = \left\{ y \middle| \exists x : \langle x, y \rangle \in \rho \right\}$ (т.е. R_ρ – это множество всех вторых элементов пар из ρ).

Обратным отношением для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется отношение $\rho^{-1} = \{< y, x > | < x, y > \in \rho\} \subseteq B \times A$, т.е. получаемое из ρ переворачиванием пар.

Произведением бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B, \rho_2 \subseteq B \times C$ называется бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2 \subseteq A \times C$, задаваемое равенством:
$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, z \rangle \in A \times C \mid \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2\}$.

Если ρ – бинарное отношение на множестве, то будем кратко писать $\rho^2 = \rho \circ \rho$, $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$ и т.д.

Операции над бинарными отношениями. Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д. Абсолютным дополнением бинарного отношения ρ между элементами множеств A и B считается множество $\overline{\rho} = (A \times B) \setminus \rho$. Например, абсолютным дополнением бинарного отношения $\leq$ на R является бинарное отношение $>$ на R.

Билет 11.

Приведем некоторые свойства этих операций.

Утверждение 2.1. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$ выполняется $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \subseteq C \times A$.

Доказательство. Пусть $\langle z, x \rangle \in C \times A$. Тогда $\langle z, x \rangle \in$

$\in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1,\ \langle y, z \rangle \in \rho_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \in B : \langle z, y \rangle \in \rho_2^{-1}, \langle y, x \rangle \in \rho_1^{-1} \Leftrightarrow \langle z, x \rangle \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Утверждение 2.2. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$, $\rho_3 \subseteq C \times D$ выполняется $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) =$
$= (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq A \times D$.

Доказательство. Для любой пары $\langle x, u \rangle \in A \times D$ имеем:

$\langle x, u \rangle \in \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, u \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y \in B, \exists z \in C : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z \in C : \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow \langle x, u \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$.

Утверждение 2.3. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq A \times B$, $\rho_3 \subseteq B \times C$ выполняется:

(а) $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(б) $(\rho_1 \cap \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \cap (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(в) $(\rho_1 \setminus \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \setminus (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(г) $(\rho_1 + \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) + (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$.

Доказательство. Докажем (а). Пусть $< x, z > \in A \times C$. Тогда

$$\langle x,z \rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y \in B : \langle x,y \rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y,z \rangle \in \rho_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle y,z \rangle \in \rho_3, \left[\begin{array}{c} \langle x,y \rangle \in \rho_1 \Rightarrow \langle x,z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \\ \langle x,y \rangle \notin \rho_1 \Rightarrow \langle x,y \rangle \in \rho_2 \Rightarrow \langle x,z \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x,z \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3).$$

С другой стороны, $\langle x,z \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \langle x,z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_1 \in B : \langle x,y_1 \rangle \in \rho_1, \langle y_1,z \rangle \in \rho_3 \\ \langle x,z \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_2 \in B : \langle x,y_2 \rangle \in \rho_2, \langle y_2,z \rangle \in \rho_3 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists y \in B : \langle x,y \rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y,z \rangle \in \rho_3 \Rightarrow \langle x,z \rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3.$$

Доказательство (б), (в) аналогично, (г) следует из (а), (в).

Утверждение 2.4. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$, $\rho_3 \subseteq B \times C$ выполняется:

(а) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cup \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \cup (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(б) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cap \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \cap (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(в) $\rho_1 \circ (\rho_2 \setminus \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \setminus (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$;

(г) $\rho_1 \circ (\rho_2 + \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) + (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A \times C$.

Билет 12.

Функции. Бинарное отношение f между элементами множеств X и Y называется *функцией*, если (а) $D_f = X$; (б) $R_f \subseteq Y$; (в) $\forall x \in X, \forall y_1, y_2 \in Y \ \langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$. Кратко выполнение условий (а)–(в) будем обозначать $f : X \to Y$ или говорить, что f – функция из X в Y. Если f – функция, то пишем $y = f(x)$ вместо $\langle x, y \rangle \in f$. Множество всех функций из X в Y обозначается через Y^X, т.е. $Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$.

Функция $f: X \to Y$ называется: (а) *сюръективной*, если $R_f = Y$; (б) *инъективной*, если $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; (в) *биективной,* если f одновременно сюръективна и инъективна.

Равенство функций $f = g$ по определению означает: (а) $D_f = D_g$; (б) $\forall x \in D_f = D_g \;\; f(x) = g(x)$.

Сопоставление аргументу $x \in X$ значения $f(x) \in Y$ принято обозначать при помощи ограниченной стрелки: $x \mapsto f(x)$.

Образ, прообраз множества относительно функционального отображения. *Образом* множества $A \subseteq X$ относительно $f: X \to Y$ называется множество $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$; *прообразом* множества $B \subseteq Y$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Утверждение 2.5. Для любой функции $f: X \to Y$ и любых множеств $A_1, A_2 \subseteq X$ справедливо: (а) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; (б) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$; (в) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Доказательство. (а)

$$y \in f(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x) \Rightarrow \; y = f(x),$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in A_1 \Rightarrow y \in f(A_1) \\ x \notin A_1 \Rightarrow x \in A_2 \Rightarrow y \in f(A_2) \end{array}\right] \Rightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2);$$

$$y \in f(A_1) \cup f(A_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} y \in f(A_1) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1 : y = f(x_1) \\ y \notin f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)$;

(б) $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 : y = f(x) \Rightarrow x \in A_1$, $x \in A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1), y \in f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$;

(в) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1), y \notin f(A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 :$ $y = f(x), x \notin A_2 \Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

Утверждение 2.6. Если функция $f : X \to Y$ инъективна, то справедливы равенства: (г) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$; (д) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Доказательство. (г) В силу утверждения 2.5(б), осталось доказать, что $f(A_1 \cap A_2) \supseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Действительно,

$y \in f(A_1) \cap f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1), y \in f(A_2) \Rightarrow \exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 :$

$y = f(x_1), y = f(x_2) \Rightarrow$ (в силу инъективности функции f) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x \Rightarrow x \in A_1 \cap A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1 \cap A_2)$.

(д) В силу утверждения 2.5(в) осталось доказать, что $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$. Действительно, $y \in f(A_1 \setminus A_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : y = f(x) \Rightarrow x \in A_1, x \notin A_2, y = f(x) \Rightarrow y \in f(A_1)$,

$y \notin f(A_2)$ (предположим, что $y \in f(A_2)$, тогда $\exists x' \in A_2 :$

$y = f(x') \Rightarrow f(x') = y = f(x) \Rightarrow x' = x \Rightarrow x \in A_2$, что противоречит условию $x \in A_1 \setminus A_2$) $\Rightarrow y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Билет 13.

Композиция функций. *Композицией* двух функций $g : X \to Y$ и $f : Y \to Z$ называется функция $fg : X \to Z$, определяемая равенством $(fg)(x) = f(g(x)), \forall x \in X$ (т.е. $fg = g \circ f$). *Единичной* (или *тождественной*) функцией $e_X : X \to X$ называется функция, переводящая каждый элемент x в себя, т.е. $\forall x \in X \; e_X(x) = x$.

Отметим некоторые свойства композиции функций.

(а) $\forall f : X \to Y \;\; fe_X = f$, $e_Y f = f$; (б) если $h : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $f : Z \to V$, то $f(gh) = (fg)h$; (в) если $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ – биекции, то $fg : X \to Z$ – биекция.

Доказательство (а) очевидно. Докажем (б). Заметим, что $f(gh), (fg)h : X \to V$. Осталось (см. определение равенства функций) сравнить значения этих функций на произвольном элементе $x \in X$: $[f(gh)](x) = f[(gh)(x)] = f[g(h(x))] = (fg)[h(x)] = [(fg)h](x)$. Докажем (в). **Сюрьективность**: $\{(fg)(x) \mid x \in X\} = \{f(g(x)) \mid x \in X\} = = f(g(X)) = f(Y) = Z$. **Инъективность:** $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2) \Rightarrow \Rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2)) \Rightarrow (fg)(x_1) \neq (fg)(x_2)$.

Билет 14.

Обращение функций. Если f – инъективная функция вида $f : X \to Y$, то бинарное отношение $f^{-1} \subseteq R_f \times X$ является биективной функцией вида $f^{-1} : R_f \to X$ и называется *обратной* к f. При этом $y = f(x) \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in f^{-1} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

Упражнение 2.4. Докажем, что f^{-1} – функция. Действительно,

$$\forall y \in R_f, \forall x_1, x_2 \in X \;\; \langle y, x_1 \rangle, \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle \in f \Rightarrow f(x_1) = y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Упражнение 2.5. Докажем, что функция f^{-1} сюрьективна. Очевидно, что для любого бинарного отношения ρ выполняются равенства: $D_\rho = R_{\rho^{-1}}, R_\rho = D_{\rho^{-1}}$, а следовательно, $R_{f^{-1}} = D_f = X$.

Упражнение 2.6. Докажем, что функция f^{-1} инъективна. Пусть $y_1, y_2 \in R_f, f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \in X$. Тогда $\langle y_1, x \rangle, \langle y_2, x \rangle \in \in f^{-1} \Rightarrow \langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f$, откуда, используя то, что f – функция, получаем $y_1 = y_2$.

Билет 15.

Характеристическая функция множества. Пусть U – непустое множество. Для любого подмножества A множества U введем в рассмотрение *характеристическую функцию множества* A вида $\chi_A^U : U \to \{0;1\}$, определяемую равенством $\chi_A^U(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \notin A. \end{cases}$

Упражнение 2.7. Докажем, что (а) $\chi_U^U(x) \equiv 1$; (б) $\chi_\varnothing^U(x) \equiv 0$; (в) $\chi_{\overline{A}}^U(x) = 1 - \chi_A^U(x)$; (г) $\chi_{A \cap B}^U(x) = \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$; (д) $\chi_{A \cup B}^U(x) =$ $= \chi_A^U(x) + \chi_B^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$; (е) $\chi_{A \setminus B}^U(x) = \chi_A^U(x) - \chi_A^U(x)\chi_B^U(x)$.

Решение. Утверждения (а),(б) очевидны. Случай (в) обосновывается таблицей 2.1, в которой перечислены все возможные случаи относительно произвольного элемента $x \in U$ и во всех этих случаях левая часть доказываемого равенства равна правой его части (см. совпадение двух последних столбцов):

$x \in A$	$x \in \overline{A}$	$\chi_A^U(x)$	$1 - \chi_A^U(x)$	$\chi_{\overline{A}}^U(x)$
да	нет	1	0	0
нет	да	0	1	1

Билет 16.

16. Рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность бин. отн. на мн-ве A. Пример.

Осн. утв.: ρ – рефл. $\Rightarrow \rho \circ \rho \supseteq \rho$; ρ – транз. $\Leftrightarrow$ $\Rightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$; ρ – сим. $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$; ρ – антисим. $\Rightarrow \forall \rho_1 \subseteq \rho$ ρ_1 – антисим.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *рефлексивным,* если $\forall x \in A \ \langle x, x \rangle \in \rho$ (или $\forall x \in A \ x\rho x$).

Пример 3.1. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является рефлексивным, так как $x = x$ для любого действительного числа x. Напротив, отношение $\neq$ на R не является рефлексивным. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является рефлексивным, так как по определению каждая прямая параллельна самой себе. Напротив бинарное отношение «перпендикулярности» на тех же множествах не является рефлексивным.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *симметричным,* если $\forall x, y \in A \ \langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y \in A \ x\rho y \Rightarrow y\rho x$), или, что то же самое, $\rho = \rho^{-1}$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *антисимметричным,* если $\forall x, y \in A \ \langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, x \rangle \in \rho \Rightarrow x = y$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y \in A \ x\rho y, y\rho x \Rightarrow x = y$). Нетрудно показать, что приведенное определение эквивалентно следующему определению: $\forall x, y \in A \ \langle x, y \rangle \in \rho, x \neq y \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin \rho$.

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 3.1. Пусть ρ_1, ρ_2 – бинарные отношения на A, $\rho_1 \subseteq \rho_2$ и ρ_2 антисимметрично. Тогда ρ_1 антисимметрично.

Пример 3.2. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является симметричным , так как $\forall x, y \in \mathrm{R}$ $x = y \Rightarrow y = x$. Это же отношение является антисимметричным, так $\forall x, y \in \mathrm{R} \ \ x = y, y = x \Rightarrow x = y$. Бинарное отношение $\neq$ на R также является симметричным, однако не является антисимметричным, поскольку, например, $1 \neq 2, 2 \neq 1$, однако из этого не следует, что $1 = 2$.

Бинарные отношения «параллельности», а также «перпендикулярности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) являются симметричными. Напротив, указанные бинарные отношения не являются антисимметричными. Бинарное отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел R является антисимметричным, так как $\forall x, y \in \mathrm{R} \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$. Однако это отношение не является симметричным, поскольку, например, $1 \leq 2$, однако не выполняется $2 \leq 1$.

Бинарное отношение ρ на множестве A называется *транзитивным,* если $\forall x, y, z \in A \quad \langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$ (или, в другой форме записи, $\forall x, y, z \in A \quad x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z$).

Пример 3.4. Бинарное отношение $\subseteq$ на множестве всех подмножеств данного универсального множества U является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным (см. тему №1, стр. 4).

Билет 17.

Отношение эквивалентности. Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение ρ на множестве A называется *эквивалентностью* на A.

Пример 3.5. Бинарное отношение «равенства» на множестве действительных чисел R является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «параллельности» на множестве всех прямых на плоскости (или в трехмерном пространстве) является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «подобия» на множестве всех треугольников на плоскости является эквивалентностью на этом множестве. Бинарное отношение «равновеликости» (т.е. равенства площади) на множестве всех фигур на плоскости является эквивалентностью на этом множестве.

Пример 3.6. Пусть A – множество студентов МАИ и $f : A \to B$ – отображение, ставящее в соответствие каждому студенту номер группы, в которой он учится (т.е. B – множество номеров студенческих групп МАИ). Тогда $\forall x, y \in A \;\; x\rho_f y \Leftrightarrow x$ и y учатся в одной студенческой группе. Из утверждения 3.5 следует, что ρ_f – эквивалентность на A.

Пусть ρ – эквивалентность на множестве A. *Классом эквивалентности (смежным классом)* элемента x по эквивалентности ρ называется множество $[x]_\rho = x/\rho = \{y \in A \mid x\rho y\} = \{y \in A \mid y\rho x\}$.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества A по эквивалентности ρ называется *фактор-множеством* A по ρ и обозначается A/ρ. Таким образом, $A/\rho = \{[x]_\rho \mid x \in A\}$.

Пример 3.7. Возвращаясь к примеру 3.6, заключаем, что $\forall x \in A$ $[x]_{\rho_f}$ – студенческая группа, в которой учится студент x, A/ρ_f – множество студенческих групп МАИ.

Разбиение множества. Связь с отношением эквивалентности. *Разбиением* множества A называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств множества A таких, что объединение этих подмножеств дает A. Таким образом, семейство множеств $\{A_i \mid i \in I\}$, где I – непустое индексное множество, будет являться разбиением множества A, если выполняются условия: (а) $A_i \subseteq A$, $i \in I$; (б) $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$; (в) $\forall i, j \in I$, если $A_i \neq A_j$, то $A_i \cap A_j = \varnothing$ (или, что то же самое, если $A_i \cap A_j \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$).

Пример 3.9. Пусть M – множество студентов МАИ, G – множество студенческих групп МАИ. Тогда G – разбиение M.

Следующая теорема показывает связь между разбиением множества и отношением эквивалентности на этом множестве.

Теорема 3.1. (1) Всякое разбиение $\{A_i \mid i \in I\}$ множества A определяет на A отношение эквивалентности ρ: $\langle x, y\rangle \in \rho \Leftrightarrow \exists i \in I$: $x, y \in A_i$. (2) Всякое отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет разбиение множества A на классы эквивалентности.

Билет 18.

Утверждение 3.5. Пусть $f : A \to B$ – функция. Тогда бинарное отношение ρ_f на множестве A, определяемое условием: $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, является эквивалентностью на A.

Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \;\; f(x) = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow x\rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A \;\; x_1\rho_f x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2\rho_f x_1$; (в) транзитивность: $\forall x_1, x_2, x_3 \in A \;\; x_1\rho_f x_2, x_2\rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\, f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1\rho_f x_3$.

Лемма 3.1. Пусть ρ – эквивалентность на A, $x_1, x_2 \in A$, и выполняется: $x_1 \in [x_2]_\rho$. Тогда $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Доказательство. Покажем, что (а) $[x_1]_\rho \subseteq [x_2]_\rho$; (б) $[x_2]_\rho \subseteq$ $\subseteq [x_1]_\rho$. (а) Пусть $x \in [x_1]_\rho$. Тогда $x\rho x_1$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_1 \rho x_2$, в силу транзитивности ρ получаем $x\rho x_2$, а следовательно, $x \in [x_2]_\rho$. В силу произвольности $x \in [x_1]_\rho$ заключаем о справедливости утверждения (а). Докажем утверждение (б). Пусть теперь $x \in [x_2]_\rho$. Тогда $x\rho x_2$, откуда, используя то, что из $x_1 \in [x_2]_\rho$ следует $x_2 \rho x_1$, в силу транзитивности ρ, получаем $x\rho x_1$, а следовательно, $x \in [x_1]_\rho$. В силу произвольности $x \in [x_2]_\rho$ заключаем о справедливости утверждения (б). Из (а),(б) получаем, что $[x_1]_\rho = [x_2]_\rho$.

Лемма 3.2. Пусть ρ – эквивалентность на A. Тогда любые два класса эквивалентности либо не пересекаются (т.е. их пересечение является пустым множеством), либо равны между собой.

Доказательство. Пусть $[x_1]_\rho$, $[x_2]_\rho$ – некоторые два класса эквивалентности. Тогда, если $[x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho \neq \varnothing$, то $\exists x \in [x_1]_\rho \cap [x_2]_\rho$. Но тогда в силу леммы 3.1 выполняются равенства: $[x_1]_\rho = [x]_\rho = [x_2]_\rho$, т.е. лемма 3.2 полностью доказана.

Теорема 3.1. (1) Всякое разбиение $\{A_i \mid i \in I\}$ множества A определяет на A отношение эквивалентности ρ: $\langle x, y\rangle \in \rho \Leftrightarrow \exists i \in I$: $x, y \in A_i$. (2) Всякое отношение эквивалентности ρ на множестве A определяет разбиение множества A на классы эквивалентности.

Задача 3.10. Пусть ρ_1, ρ_2 – эквивалентности на множестве A. Доказать, что $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A тогда и только тогда, когда $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

Решение. (а) Пусть $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A. Тогда бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2$ является симметричным на A, откуда, используя симметричность ρ_1, ρ_2 на A, а также утверждение 2.1 (см. тему №2), имеем $\rho_1 \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = \rho_2 \circ \rho_1$. (б) Пусть

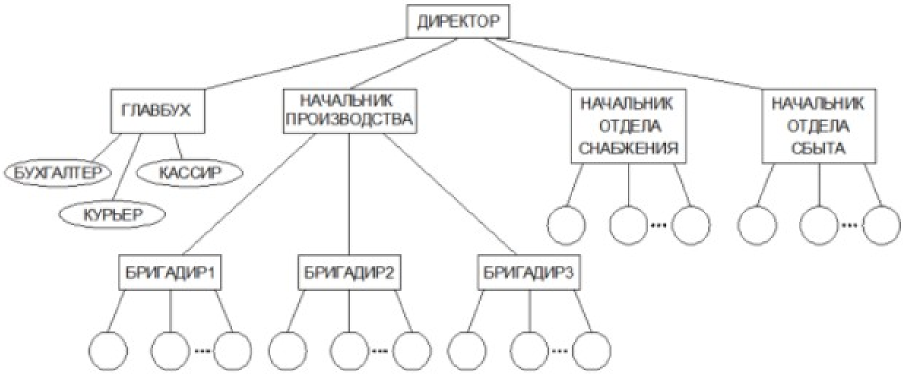
$\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. Покажем, что $\rho_1 \circ \rho_2$ – эквивалентность на A. *Рефлексивность*: см. задачу 3.5(г). *Симметричность*: $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} =$ $= \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} = \rho_2 \circ \rho_1 = \rho_1 \circ \rho_2$. *Транзитивность*. Используя утверждения 2.2,3.4, имеем $(\rho_1 \circ \rho_2) \circ (\rho_1 \circ \rho_2) = \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_1) \circ \rho_2 =$ $= \rho_1 \circ (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_2 = (\rho_1 \circ \rho_1) \circ (\rho_2 \circ \rho_2) = \rho_1 \circ \rho_2$, откуда, в силу утверждения 3.2, и следует транзитивность $\rho_1 \circ \rho_2$.

Билет 19.

Частичный порядок. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение ρ на множестве A называется *частичным* порядком на A.

Пример 4.1. Бинарное отношение $\leq$ на множестве действительных чисел R является частичным порядком: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \quad x \leq x$; (б) транзитивность: $\forall x, y, z \in A \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$; (в) антисимметричность: $\forall x, y \in A \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

Пример 4.3. Бинарное отношение $\subseteq$ на множестве 2^U всех подмножеств некоторого универсального множества $U \neq \varnothing$ (см. тему №1) является частичным порядком: (а) рефлексивность: $\forall A \in 2^U \quad A \subseteq A$; (б) транзитивность: $\forall A, B, C \in 2^U \quad A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$; (в) антисимметричность: $\forall A, B \in 2^U \quad A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$.



Линейный порядок. Пусть ρ – частичный порядок на множестве A. Элементы $x, y \in A$ называются *сравнимыми по* ρ, если выполняется либо $x\rho y$, либо $y\rho x$. Частичный порядок ρ на множестве A называется *линейным*, если любые два элемента из A сравнимы по ρ.

Пример 4.5. Отношение частичного порядка $\le$ на множестве действительных чисел R является линейным порядком на R. Действительно, $\forall x, y \in \mathrm{R}$ возможны случаи: (а) $\min(x, y) = x$, и тогда $x \le y$; (б) $\min(x, y) = y$, и тогда $y \le x$.

Пример 4.8. Бинарное отношение «подчиненности» на множестве должностей некоторого предприятия, соответствующее рис. 4.1, не является линейным порядком, так как , например, кассир не подчиняется бригадиру 1, а бригадир 1 не подчиняется кассиру.

Множество A с заданным на нем отношением частичного (линейного) порядка ρ называется *частично (линейно) упорядоченным.*

Будем далее для произвольного отношения частичного прядка вместо символа ρ (общего для всех бинарных отношений), использовать символ $\preccurlyeq$. Введем для произвольного отношения частичного порядка $\preccurlyeq$ на множестве A ассоциированное с ним отношение строгого порядка $\prec$ на множестве A, определяемое условием: $\forall x, y \in A \;\; x \prec y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y$, $x \neq y$. Из определения $\prec$ следует, что $\preccurlyeq \subseteq \prec$.

Упражнение 4.1. Доказать, что отношение строгого порядка $\prec$ на множестве A является антисимметричным и транзитивным.

Решение. Антисимметричность следует из утверждения 3.1 (см. тему №3). Покажем транзитивность. Пусть $x, y, z \in A$, $x \prec y$, $y \prec z$. Покажем, что $x \prec z$. Из $x \prec y$, $y \prec z$ следует, что $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, откуда (используем транзитивность $\preccurlyeq$) $x \preccurlyeq z$. Тогда, если предположить невыполнение условия $x \prec z$, то получаем, что $x = z$. Однако, из условий: $x = z$, $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z$, в силу антисимметричности $\preccurlyeq$, получаем, что $x = y$, а это противоречит условию $x \prec y$.

Билет 20.

Пусть A – частично упорядоченное множество, $a, b \in A$. Назовем *сегментом* множество $[a,b] = \{x \in A \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$. Например, в соответствии со схемой, приведенной на рис.4.1 (см. пример 4.4) [курьер, директор]={курьер, главбух, директор}.

Пусть A – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ называется *максимальным (минимальным)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, если

$\forall x \in A$ из того, что $a \preccurlyeq x$ ($x \preccurlyeq a$) следует, что $a = x$. Элемент $a \in A$ называется *наибольшим (наименьшим)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, если $\forall x \in A$ $x \preccurlyeq a$ ($a \preccurlyeq x$). Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 4.1. Пусть A – частично упорядоченное множество. Элемент $a \in A$ является *максимальным (минимальным)* по $\preccurlyeq$ на множестве A, тогда и только тогда, когда не существует элемента $x \in A$ такого, что $a \prec x$ ($x \prec a$).

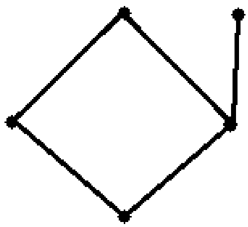
Пример 4.9. В примере 4.4 минимальными элементами будут сотрудники предприятия, которые не имеют никого в своем подчинении (обозначены кружками или овальными рамками), а наименьшие элементы отсутствуют. В этом же примере единственным максимальным, а также наибольшим элементом является директор.

Утверждение 4.2. Пусть A – частично упорядоченное множество, a – наибольший (наименьший) элемент на множестве A. Тогда a – единственный максимальный (минимальный) элемент на A.

Билет 21.

«Диаграмма Хассе. Наибольший , наименьший минимальный, максимальный элемент. Примеры».

Любое частично упорядоченное множество можно представить в виде схемы, каждый элемент которой изображен точкой на плоскости, и если y покрывает x, то эти точки соединяются отрезком. Точка, которая

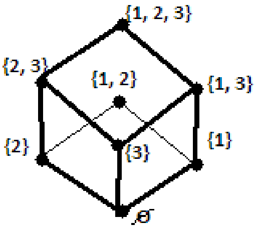


соответствует x всегда располагают ниже точки , соответствующей y. такие диаграммы называются диаграммами Хассе. Если элементы выстроены в линию, то это линейно упорядоченное множество.

Пример.

Пусть A = {1, 2, 3}. Множество A состоит из восьми элементов {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

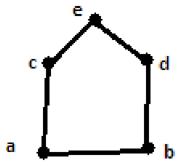
Линия между {1, 2} и {1, 2, 3} не проведена. Очевидно, что наименьший



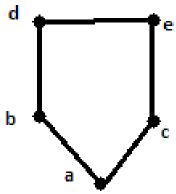
элемент на этой диаграмме это пустое множество. Он же минимальный элемент. Если бы на диаграмме присутствовало два наименьших элемента , то минимального элемента не существовало бы. Тоже самое для максимального элемента. Вот три примера диаграмм, где не существует минимального элемента (диаграмма «а») и максимального (диаграмма «б»)а также ни минимального, ни максимального(диаграмма «в»).

Для того, чтобы определить максимальный и минимальный элементы, необходимо находить минимальный элементы , начиная с низа, и вычеркивать их. Проводить эту операцию, пока не будет

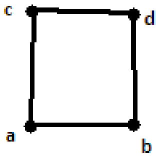
а)



б)



в)



достигнут верх

диаграммы. Первые вычеркнутые будут наименьшими, а последние-наибольшими.

Билет 22.

Определение. Пусть A , A_1 – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\preccurlyeq$, $\preccurlyeq_1$, соответственно. Тогда, если существует биективная функция $f : A \to A_1$ такая, что функции f , f^{-1} являются монотонными, то говорят, что f является *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств (A ,$\preccurlyeq$), (A_1 ,$\preccurlyeq_1$).

Задача 4.8. Доказать, что $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \ge)$, где $\mathrm{N} = \{1,2,\ldots\}$ – натуральный ряд, не изоморфны.

Решение. В случае изоморфизма образ минимального элемента очевидным образом снова будет минимальным, максимального – максимальным, наименьшего – наименьшим, наибольшего – наибольшим. Но тогда частичные порядки $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \ge)$ не изоморфны, поскольку в

(N, $\leq$) существует наименьший элемент, но отсутствует наибольший, а в (N, $\geq$) – наоборот.

Задача 4.9. Рассмотрим частичный порядок $\preccurlyeq$ на множестве натуральных чисел $N = \{1,2,...\}$: $\forall k, m \in N \quad 2k-1 \prec 2m$, т.е. любое нечетное число меньше любого четного, а множества четных и нечетных чисел упорядочены «естественным» образом, т.е. бинарным отношением $\leq$. Доказать, что (N, $\leq$), (N, $\preccurlyeq$) не изоморфны.

Решение. Предположим противное. Пусть существует изоморфизм $f :(\text{N}, \leq) \rightarrow (\text{N}, \preccurlyeq)$, и $a = f^{-1}(2)$. Тогда $\forall k \in N \quad f^{-1}(2k-1) < a$, а это противоречит конечности множества $\{1,2,..., a\}$.

Билет 23.

Задача 4.10. Доказать, что любое непустое частично упорядоченное множество A изоморфно некоторой системе подмножеств множества A , упорядоченной включением $\subseteq$.

Решение. Пусть $\preccurlyeq$ – отношение частичного порядка на A . Для любого элемента $a \in A$ обозначим $A_a = \{x \in A \mid x \preccurlyeq a\}$. Очевидно, что $\forall a \in A \;\; a \in A_a$. Рассмотрим отображение $f : A \rightarrow 2^A$ такое, что $\forall a \in A \quad f(a) = A_a$. Докажем инъективность этого отображения (а следовательно, биективность отображения $f : A \rightarrow f(A)$). Пусть $a,b \in A, f(a) = f(b)$. Покажем, что $a = b$. Действительно, $A_a = f(a) = f(b) = A_b \Rightarrow a \in A_a = A_b, b \in A_b = A_a \Rightarrow a \preccurlyeq b , b \preccurlyeq a \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b$. Докажем теперь изоморфизм (A ,$\preccurlyeq$), ($f(A)$,$\subseteq$). (а) Если $a,b \in A, a \preccurlyeq b$, то $\forall x \in A \quad x \preccurlyeq a \Rightarrow x \preccurlyeq b$, а следовательно, $f(a) =$ $= \{x \in A \mid x \preccurlyeq a\} \subseteq \{x \in A \mid x \preccurlyeq b\} = f(b)$. (б) Обратно, если $a,b \in A$, $f(a) \subseteq f(b)$, то $a \in A_a = f(a) \subseteq f(b) = A_b \Rightarrow a \in A_b \Rightarrow a \preccurlyeq b$.

Билет 24.

Задача 4.6. Построить линейный порядок на множествах: (а) N^2, где $N = \{1,2,\ldots\}$ – натуральный ряд; (б) $N \cup N^2 \cup N^3 \cup \ldots$.

Решение. (а). Обходим точки из N^2, например, согласно рис.4.4 (число около точки из N^2 является ее номером в процессе обхода)

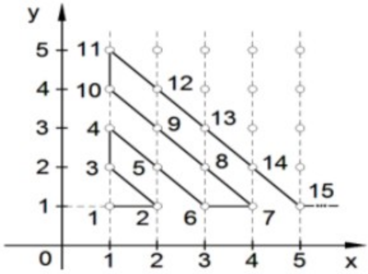


Рис.4.4

б) Опишем так называемый «лексикографический порядок» (аналогичный порядку расположения слов в словаре; например, слово «аббат» расположено в словаре раньше слова «абзац», слово «абзац» раньше слова «арба», слово «арба» раньше слова «Арбат» и т.д.) . Соответственно, в рассматриваемом случае $\forall m,n \in N = \{1,2,\ldots\}$ выполняется: $\langle x_1,\ldots,x_m \rangle \prec \langle y_1,\ldots,y_n \rangle \Leftrightarrow$ либо $x_1 < y_1$; либо $x_1 = y_1, m = 1, n \geq 2$; либо $m,n \geq 2, x_1 = y_1, x_2 < y_2$; либо $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $m = 2, n > 2$; либо $m,n \geq 3$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, x_3 < y_3$ и т.д. Для упражнения расположите в лексикографическом порядке последовательности натуральных чисел: $<1,2,3,1>, <2,2,1>, <1,1>, <1>, <1,2,1>$.

Билет 25.

Множество A называется *эквивалентным* множеству B (символически $A \sim B$) , если между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. существует биекция $\varphi : A \to B$. Если множество A эквивалентно множеству B , то эти множества называются *равномощными.* Обозначим $N_n = \{1,2,\ldots,n\}$, где $n \in N$, $N = \{1,2,\ldots\}$ – натуральный ряд. Каждое множество A , эквивалентное N_n для некоторого $n \in N$, либо пустое, называется *конечным*, а n – *числом элементов* множества A, при этом пишем $|A| = n$. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Каждое множество A, эквивалентное натуральному ряду N, называется *счетным*. Каждое множество A, эквивалентное множеству действительных чисел R, называется *континуальным*. Будем писать, что (а) $|A| = |B|$, если $A \sim B$; (б) $|A| \le |B|$, если $A \sim B_1 \subseteq B$; (в) $|A| < |B|$, если $|A| \le |B|$ и A не эквивалентно B. Из свойств биективных функций (см. тему №2) следует, что для любых множеств A, B, C $A \sim A$ (рефлексивность ~); если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность ~); если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность ~).

Для установления равномощности множеств часто используется

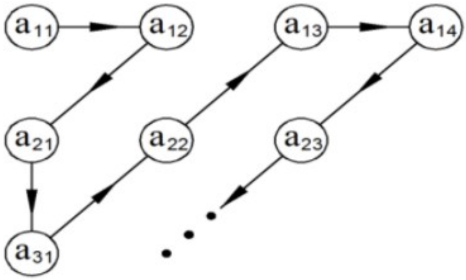
Теорема *Кантора-Бернштейна*. Если $|A| \le |B|$, $|B| \le |A|$, то $A \sim B$

Доказать

$\bigcup_{i \in N} A_i$ является счетным; (г) если множества A, $i \in$ N, являются счетными, то множество $\bigcup_{i \in N} A_i$ также является счетным; (д) если множества

элемент из $\bigcup_{i \in N} A_i$ получит свой номер. (г) Пусть $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}, i \in$ N.

Осуществляем обход бесконечного множества $\bigcup_{i \in N} A_i$ (см. задачу 5.2(а)) согласно рис. 5.2. Если очередной элемент встречался ранее, то пропускаем его, в противном случае присваиваем ему очередной номер. Тогда каждый элемент из $\bigcup_{i \in N} A_i$ получит свой номер.



Билет 26.

Задача 5.10. Доказать, что множество всех конечных последовательностей, состоящих из элементов счетного множества A, счетно.

Решение. Множество всех конечных последовательностей элементов из A есть $\bigcup_{n\in\mathrm{N}} A^n$, которое является счетным (см. задачи 5.5(г), 5.8).

Задача 5.8. Доказать, что если множества $A_1,\ldots,A_n$ $(n\geq 1)$ – счетны, то множество $A_1\times\cdots\times A_n$ счетно.

Решение. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $n=2$, поскольку $A_1\times\cdots\times A_n=(\ldots((A_1\times A_2)\times A_3)\times\cdots\times A_n)$. Пусть $A_1=\{a_n \mid n\in\mathrm{N}\}$. Покажем, что множество $A_1\times A_2$ счетное. Заметим, что $A_1\times A_2=\bigcup_{n\in\mathrm{N}}(\{a_n\}\times A_2)$, откуда (см. задачу 5.5(г)) и следует счетность этого множества.

Билет 27.

Задача 5.16. Доказать, что $(0;1)\sim[0;1]\sim(0;1]\sim[0;1)$.

Решение. Докажем, что $(0;1)\sim[0;1]$. Рассмотрение остальных случаев аналогично. Обозначим $a_n=1/(n+1),\ n\in\mathrm{N}$. Заметим, что $a_n\in(0;1), n\in\mathrm{N}$. Определим биективное отображение $\varphi:(0;1)\to[0;1]$ следующим образом: (а) $\forall x\in(0;1)\setminus\{a_n \mid n\in\mathrm{N}\}$ $\varphi(x)=x$; (б) для $x=a_n, n\in\mathrm{N}$, отображение φ задается в соответствии с таблицей:

x	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_n	$\cdots$
$\varphi(x)$	0	1	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-2}	$\cdots$

Задача 5.17. Доказать, что $(0;1)\sim\mathrm{R}$.

Решение. Положим $\psi(x)=\mathrm{ctg}\,\pi x, x\in(0;1)$. Тогда отображение $\psi:(0;1)\to\mathrm{R}$, очевидно, является биективным.

Билет 28.

Задача 5.33. Доказать, что множество всех подмножеств множества A не эквивалентно A, и при этом $|A| < |2^A|$.

Решение. Предположим, что существует биекция $\varphi : A \to 2^A$. Пусть $A_0 = \{a \in A \mid a \notin \varphi(a)\}$. Из сюръективности φ следует, что $\exists a_0 \in A : \varphi(a_0) = A_0$. Возможны два случая: 1) $a_0 \in A_0 = \varphi(a_0) \Rightarrow$ $\Rightarrow a_0 \notin A_0$; 2) $a_0 \notin A_0 = \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in A_0$. В обоих случаях приходим к противоречию. Заметим, что инъективное отображение $\psi : A \to 2^A$

строится очевидным образом: $\forall a \in A \ \ \psi(a) = \{a\}$. Таким образом, $|A| \le |2^A|$ и 2^A не эквивалентно A, а следовательно, $|A| < |2^A|$.

Билет 29.

Следуя [1], введем следующие необходимые понятия и определения. Под *высказыванием* принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. «Москва – столица РФ», «$2 \ne 3$», «$2+2=3$» – высказывания. Напротив, предложения: «который час?», «$x \ge 2$» не являются высказываниями. В логике высказываний интересуются не содержанием, а лишь истинностью или ложностью высказываний. Истинностные значения *истина* и *ложь* будем обозначать буквами И и Л соответственно. Множество {И, Л} называется *множеством истинностных значений*.

Логические операции. Рассмотрим логические операции (связки) над высказываниями. *Отрицанием* высказывания P называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно. Отрицание P обозначается через $\neg P$ и читается как «не P». Отрицание высказывания также определяется таблицей истинности (см. табл. 1.1).

P	$\neg P$
И	Л
Л	И

Табл. 1.1

P	Q	$P \& Q$	$P \vee Q$	$P \supset Q$	$P \sim Q$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается через $P \& Q$, читается как «P и Q». *Дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначается через $P \vee Q$, читается как «P или Q». *Импликацией* двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а высказывание Q ложно. Обозначается через $P \supset Q$, читается как «если P, то Q» (или, иначе, « P влечет Q», «из P следует Q», «P достаточно для Q», «Q необходимо для P»). *Эквиваленцией* двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний P и Q совпадают. Обозначается через $P \sim Q$, читается как «P эквивалентно Q» (или, иначе, « P необходимо и достаточно для Q», « P выполняется тогда и только тогда, когда выполняется Q»).

Табл.1.2

Формулы логики высказываний. Дадим определение *формулы логики высказываний*. Определим ее как слово в некотором алфавите, удовлетворяющее определенным свойствам. *Алфавитом* называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются *символами* данного алфавита. *Словом* в данном алфавите называется произвольная конечная последовательность символов (возможно, пустая). Слово A называется *подсловом* слова B, если $B = B_1 A B_2$ для некоторых слов B_1, B_2.

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы: (А1) высказывательные переменные: $X_1, X_2, X_3, ...$; (А2) логические символы: $\neg, \&, \vee, \supset, \sim$; (А3) символы скобок (вспомогательные символы): (,) (открывающая и закрывающая скобки).

Слово в алфавите логики высказываний называется *формулой*, если оно удовлетворяет следующему определению: (Ф1) любая высказывательная переменная – формула; (Ф2) если A и B – формулы, то $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$ - формулы; (Ф3) те и только те слова являются формулами, для которых это следует из (Ф1) и (Ф2).

Подформулой формулы A называется любое подслово слова A, само являющееся формулой.

Билет 30

Равносильность формул. Основные равносильности. Пусть A и B - формулы логики высказываний, имеющие одинаковый список переменных (см. замечание 1.2). Будем называть их *равносильными*, если на любой оценке этого списка значения формул A и B совпадают. Равносильность формул A и B будем кратко обозначать через $A \equiv B$.

Для любых формул логики высказываний A, B, C справедливы равносильности:

1. $A \& B \equiv B \& A$ (коммутативность конъюнкции);	1′. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
2. $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ (ассоциативность конъюнкции);	2′. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность дизъюнкции);
3. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность & относительно $\vee$);	3′. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность $\vee$ относительно &);
4. $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &);	4′. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$);
5. $A \& (A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения);	5′. $A \vee (A \& B) \equiv A$ (второй закон поглощения);
6. $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (первый закон де Моргана);	6′. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (второй закон де Моргана);
7. $(A \& B) \vee (A \& \neg B) \equiv A$ (первая формула расщепления);	7′. $(A \vee B) \& (A \vee \neg B) \equiv A$ (вторая формула расщепления);

8. $\neg\neg A \equiv A$ (снятие двойного отрицания);

9. $A \supset B \equiv \neg A \vee B$;

10. $A \sim B \equiv (A \supset B) \& (B \supset A) \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$;

11. $A \sim B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$.

Любая из этих равносильностей легко может быть доказана с помощью таблиц истинности. Рассмотрим, например, равносильность 6. Пусть $\langle X_{i_1}, ..., X_{i_k} \rangle$ - список переменных формул A, B (см. замечание 1.2). Тогда для значений формул A, B на какой-нибудь оценке этого списка переменных имеются четыре варианта, перечисленные в первых двух столбцах табл. 1.4. Для каждого варианта, используя таблицы истинности логических операций $\neg, \&, \vee$, нетрудно определить значения левой и правой частей равносильности 6 и убедиться в том, что в любом из возможных вариантов эти значения совпадают (см. табл. 1.4).

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Табл.1.4

Билет 31

Нормальные формы формул. Определим некоторые канонические формы формул (аналогичные многочленам в школьной алгебре). Всюду далее, под словом «формула» будет пониматься формула логики высказываний.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция (быть может, одночленная) формул, каждая из которых есть либо высказывательная переменная, либо отрицание высказывательной переменной. Будем говорить, что формула находится в *дизъюнктивной нормальной форме* (ДНФ), если она является дизъюнкцией (быть может, одночленной) элементарных конъюнкций.

Алгоритм 3.1 нахождения ДНФ формулы F

1-й этап. Преобразуем F в такую формулу F_1, что $F \equiv F_1$ и в F_1 отсутствуют символы операций $\supset, \sim$. Для этого, используя правило равносильных преобразований (см. утверждение 1.1) заменяем в F каждую подформулу вида $A \supset B$ на $\neg A \vee B$, а каждую подформулу вида $A \sim B$ на $(\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ или на $(A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$ (см. основные равносильности 9-11).

2-й этап. Преобразуем F_1 в такую формулу F_2, что $F \equiv F_1 \equiv F_2$ и в F_2 все отрицания находятся только перед переменными (она называется *«формулой с тесными отрицаниями»*). Для этого вносим отрицания внутрь скобок по законам обобщенного закона де Моргана (см. замечание 1.3) до тех пор, пока все отрицания не будут находиться перед переменными, уничтожая при этом пары стоящих рядом отрицаний (см. равносильность (8): $\neg\neg A \equiv A$).

3-й этап. Если полученная формула F_2 еще не находится в ДНФ, то применив необходимое число раз обобщенную дистрибутивность $\&$ относительно $\vee$ (см. замечание 1.3), последовательно преобразуем F_2 аналогично приведению алгебраического выражения, составленного из переменных, с помощью сложений и умножений к виду многочлена. Заметим, что при этом $\vee$ будет аналогична сложению, а $\&$ - умножению. Полученная в результате формула G и будет искомой.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция (быть может, одночленная) формул, каждая из которых есть либо высказывательная переменная, либо отрицание высказывательной переменной. Будем говорить, что формула находится в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ), если она является конъюнкцией (быть может, одночленной) элементарных дизъюнкций.

Алгоритм 3.2 нахождения КНФ формулы F

1-й и 2-й этапы. Выполнив первые два этапа алгоритма 3.1 нахождения ДНФ формулы F, найдем формулу F_2 такую, что $F \equiv F_2$, в F_2 отсутствуют символы операций $\supset, \sim$ и в F_2 все отрицания находятся только перед переменными. В качестве такой формулы можно взять найденную при построении ДНФ формулу F_2. Однако часто на первом этапе при нахождении КНФ выгоднее использовать формулу для выражения $\sim$ через $\&$, $\vee$, и $\neg$, отличную от той, которая использовалась при нахождении ДНФ (см. равносильности (10), (11)).

3-й этап. Если полученная формула F_2 еще не находится в ДНФ, то применив необходимое число раз обобщенную дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$ (см. замечание 1.3), последовательно преобразуем F_2 аналогично приведению алгебраического выражения, составленного из переменных, с помощью сложений и умножений к виду многочлена. Заметим, что при этом $\&$ будет аналогична сложению, а $\vee$ - умножению. Полученная в результате формула G и будет искомой.

Билет 32

Табл. 3.1

Таким образом, ДНФ не обладает свойством однозначности. Выделим среди ДНФ формулы так называемую *совершенную дизъюнктивную нормальную форму*, являющуюся единственной для данной формулы с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Пусть $\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \rangle$ - список переменных формулы F. Будем говорить, что формула F находится в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

(1) F находится в ДНФ;

(2) каждый дизъюнктивный член формулы F является k-членной конъюнкцией, причем на каждом l-м месте ($1 \le l \le k$) этой конъюнкции обязательно находится либо переменная X_{i_l}, либо ее отрицание $\neg X_{i_l}$.

(3) все дизъюнктивные члены формулы F попарно различны.

Алгоритм 3.3 нахождения СДНФ формулы F, не являющейся тождественно-ложной

1-й этап. Используя алгоритм построения ДНФ, найдем формулу G, являющуюся ДНФ формулы F.

2-й этап. Вычеркнем в G все элементарные конъюнкции, являющиеся дизъюнктивными членами формулы G, в которые одновременно входит некоторая переменная Y_i и ее отрицание $\neg Y_i$. Поскольку формула F не является тождественно-ложной, то останется по крайней мере одна невычеркнутая элементарная конъюнкция. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностями: $(B \& \neg B) \vee C \equiv C$, $(A \& B \& \neg B) \vee C \equiv C$, полученными ранее в разделе «тождественно-истинные формулы».

3-й этап. Если в некоторой элементарной конъюнкции, являющейся дизъюнктивным членом формулы G, некоторая переменная Y_i (либо $\neg Y_i$) встречается несколько раз, то оставим только одно вхождение Y_i (соответственно, $\neg Y_i$), а остальные вычеркнем. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &).

4-й этап. Если в некоторую элементарную конъюнкцию C, являющуюся дизъюнктивным членом формулы G, для некоторого номера $i \in \{1,2,..., k\}$ не входят ни переменная Y_i, ни ее отрицание $\neg Y_i$, то заменяем в формуле G элементарную конъюнкцию C на $(C \& Y_i) \vee (C \& \neg Y_i)$. Действуем так до тех пор, пока в каждую элементарную конъюнкцию, являющеюся дизъюнктивным членом формулы G, не будет входить для каждого $i \in \{1,2,..., k\}$ либо переменная Y_i либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $(A \& B) \vee (A \& \neg B) \equiv A$ (первая формула расщепления). При этом дизъюнктивными членами формулы G являются k-членные конъюнкции.

5-й этап. В каждой k-членной элементарной конъюнкции, являющейся дизъюнктивным членом формулы G, переставим конъюнктивные члены так, чтобы на каждом i-м месте ($1 \le i \le k$) этой конъюнкции обязательно находилась либо переменная Y_i, либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученную таким образом ДНФ формулы F снова обозначим через G.

6-й этап. Если в формуле G одна и та же элементарная конъюнкция, являющаяся дизъюнктивным членом формулы G, встречается несколько раз, то оставляем только одно вхождение этой конъюнкции, а остальные вычеркиваем. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$). Построенная формула G является СДНФ формулы F.

Пусть $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \right\rangle$ - список переменных формулы F. Будем говорить, что формула F находится в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ) относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

(1) F находится в КНФ;

(2) каждый конъюнктивный член формулы F является k-членной дизъюнкцией, причем на каждом l-м месте ($1 \le l \le k$) этой дизъюнкции обязательно находится либо переменная X_{i_l}, либо ее отрицание $\neg X_{i_l}$.

(3) все конъюнктивные члены формулы F попарно различны.

Алгоритм 3.4 нахождения СКНФ формулы F, не являющейся тождественно-истинной

1-й этап. Используя алгоритм построения КНФ, найдем формулу G, являющуюся КНФ формулы F.

2-й этап. Вычеркнем в G все элементарные дизъюнкции, являющиеся конъюнктивными членами формулы G, в которые одновременно входит некоторая переменная Y_i и ее отрицание $\neg Y_i$. Поскольку формула F не является тождественно-истинной, то останется по крайней мере одна невычеркнутая элементарная дизъюнкция. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностями: $(B \vee \neg B) \& C \equiv C$, $(A \vee B \vee \neg B) \& C \equiv C$, полученными ранее в разделе «тождественно-истинные формулы».

3-й этап. Если в некоторой элементарной дизъюнкции, являющейся конъюнктивным членом формулы G, некоторая переменная Y_i (либо $\neg Y_i$) встречается несколько раз, то оставим только одно вхождение Y_i (соответственно, $\neg Y_i$), а остальные вычеркнем. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$).

5-й этап. В каждой k-членной элементарной дизъюнкции, являющейся конъюнктивным членом формулы G, переставим дизъюнктивные члены так, чтобы на каждом i-м месте ($1 \le i \le k$) этой конъюнкции обязательно находилась либо переменная Y_i, либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученную таким образом КНФ формулы F снова обозначим через G.

6-й этап. Если в формуле G одна и та же элементарная дизъюнкция, являющаяся конъюнктивным членом формулы G, встречается несколько раз, то оставляем только одно вхождение этой дизъюнкции, а остальные вычеркиваем. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &). Построенная формула G является СКНФ формулы F.

Билет 33

Двойственность. Закон двойственности. Будем рассматривать в этом разделе формулы, содержащие только логические символы $\&, \vee, \neg$. Символы $\&, \vee$ называются *двойственными*. Формула A^* называется *двойственной* к формуле A, если она получена из A одновременной заменой всех символов $\&, \vee$ на двойственные.

Пример 1.4. Пусть

$$F = (\neg X_1 \& \neg X_2) \& (X_3 \vee \neg X_2).$$

Тогда

$$F^* = (\neg X_1 \vee \neg X_2) \vee (X_3 \& \neg X_2).$$

Очевидно, что $(A^*)^* = A$. Сформулируем теперь закон двойственности.

Теорема 1.1 (*принцип двойственности*). Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

Принцип двойственности можно использовать для нахождения новых равносильностей. Например,

$$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C) \Rightarrow A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C).$$

Для доказательства принципа двойственности потребуется

Определение 1.1. Пусть $\langle X_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \rangle$ - некоторый список переменных, $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle$ - оценка этого списка переменных. Назовем оценку $\langle \overline{\varepsilon}_1, \ldots, \overline{\varepsilon}_k \rangle$ - *двойственной* к оценке $\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle$.

Лемма 1.1. Пусть A - формула со списком переменных $\langle X_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \rangle$. Тогда

$$A|_{\langle \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \rangle} = И (= Л) \Leftrightarrow A^*|_{\langle \overline{\varepsilon}_1, \ldots, \overline{\varepsilon}_k \rangle} = Л (= И).$$

Докажем теперь теорему 1.1. Пусть $\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\rangle$ - список переменных формул A и B. Тогда в силу леммы 1.1

$$A^* \big|_{\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И \Leftrightarrow A(=(A^*)^*)\big|_{\langle \bar\varepsilon_1,...,\bar\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow (A \equiv B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\big|_{\langle \bar\varepsilon_1,...,\bar\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow B^* \big|_{\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И .$$

Билет 34

Булевы функции. *Булевой функцией* $f(X_1,..., X_n)$ (иначе, *функцией алгебры логики*) называется любая n-местная функция из $\{0,1\}$ в $\{0,1\}$, т.е. функция вида $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Каждую булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$ можно задать таблицей из 2^n строк, в каждой строке которой указывается одна из возможных оценок списка переменных (см. утверждение 1.1), а также значение функции на этой оценке. При этом переменные $X_1,..., X_n$ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ будем называть *булевыми*. Переменные n-местной булевой функции могут иметь и другой вид, например, $Y_1,..., Y_n$ и т.д.

Замечание 4.1. Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в каждой строке которой записывается одна из оценок списка переменных и значение функции на этой оценке. Так как длина каждого столбца равна 2^n, а различных столбцов имеется $2^{(2^n)} = 2^{2^n}$ (см. доказательство утверждения 1.1), то существует ровно 2^{2^n} попарно различных булевых функций от n переменных (n-местных булевых функций).

Представление булевых функций формулами в СДНФ и СКНФ. Пусть A - формула логики высказываний, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Будем считать, что $A^\varepsilon = A$ при $\varepsilon = 1$ и $A^\varepsilon = \neg A$ при $\varepsilon = 0$. Пусть $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n\rangle$ - оценка списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$, где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1,2,..., n$. Каждой такой оценке поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $X_1^{\varepsilon_1} \& ... \& X_n^{\varepsilon_n}$, которую будем называть *ассоциированной* с этой оценкой.

Лемма. Пусть A - формула логики высказываний, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Тогда $A^\varepsilon = 1 \Leftrightarrow A = \varepsilon$.

Утверждение 4.2. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 0. Тогда справедливо представление (единственное с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ в виде СДНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$ согласно формуле

$$f(X_1,..., X_n) = \bigvee_{f(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=1} (X_1^{\varepsilon_1} \& ... \& X_n^{\varepsilon_n}), \qquad (4.1)$$

где дизъюнкция берется по всем оценкам $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n\rangle$, для которых $f(\varepsilon_1,..., \varepsilon_n) = 1$.

Утверждение 4.3. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 1. Тогда справедливо представление (единственное с точностью до перестановки конъюнктивных членов) булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ в виде СКНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$ согласно формуле

$$f(X_1,..., X_n) = \underset{f(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=0}{\&} (X_1^{\neg\varepsilon_1} \vee \ldots \vee X_n^{\neg\varepsilon_n}),$$

где конъюнкция берется по всем оценкам $\langle\varepsilon_1,..., \varepsilon_n\rangle$, для которых $f(\varepsilon_1,..., \varepsilon_n) = 0$.

Билет 35

Утверждение 5.1. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 0. Тогда существует сокращенная ДНФ этой функции, она является единственной и выражает эту функцию.

Простой алгоритм нахождения сокращенной ДНФ дает *метод Блейка*.

Алгоритм 5.1 построения сокращенной ДНФ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не равной тождественно 0 (метод Блейка)

1-й этап. Найдем для данной булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ формулу F, выражающую f и находящуюся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$.

2-й этап. Применим к F *правило обобщенного «склеивания»*: $(C \,\&\, X_i) \vee (C \,\&\, \neg X_i) \equiv (C \,\&\, X_i) \vee (C \,\&\, \neg X_i) \vee C$, где $i \in \{1,2,..., n\}$, $(C \,\&\, X_i), (C \,\&\, \neg X_i)$ - некоторые элементарные конъюнкции, являющиеся дизъюнктивными членами формулы F (см. замечание 1.10) до тех пор, пока это возможно. В результате получим формулу F_1, находящуюся в ДНФ и выражающую функцию f.

3-й этап. Применим к F_1 равносильности: $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$), $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$ (второй закон поглощения) до тех пор, пока это возможно. В результате получим формулу F, являющуюся сокращенной ДНФ функции f.

Допустимой конъюнкцией или импликантом булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется элементарная конъюнкция C со списком переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$ (т.е. в C нет переменных, не входящих в этот список) такая, что $C \vee f = f$ и каждая переменная входит в C не более одного раза. Импликант C булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется *простым*, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции $f(X_1,..., X_n)$. Дизъюнкция всех простых импликантов булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется сокращенной ДНФ функции $f(X_1,..., X_n)$.

Простой импликант булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется *ядровым*, если удаление его из сокращенной ДНФ функции f приводит к ДНФ, не выражающей f, либо он является единственным простым импликантом функции f. Справедливо следующее очевидное

ДНФ называется *минимальной*, если она содержит наименьшее общее число вхождений высказывательных переменных среди всех равносильных ей ДНФ.

Задачей минимизации в классе ДНФ называется задача нахождения для данной булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ минимальной ДНФ, выражающей f. Для описания алгоритма нахождения минимальной ДНФ, выражающей данную булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, понадобится так называемая *сокращенная ДНФ*. Сделаем несколько опреде-

Утверждение 5.2. Минимальная ДНФ, выражающая булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, является дизъюнкцией нескольких (в частности, всех) простых импликантов функции f.

Таким образом, дизъюнктивными членами минимальной ДНФ, выражающей булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, являются дизъюнктивные члены сокращенной ДНФ этой булевой функции. Но тогда для нахождения минимальной ДНФ, выражающей булеву функцию f, достаточно перебрать все ДНФ, дизъюнктивными членами которых являются дизъюнктивные члены сокращенной ДНФ этой функции (т.е. ее простые импликанты) и выбрать всех этих ДНФ ту, которая выражает f, и содержит наименьшее общее число вхождений переменных среди аналогично составленных ДНФ, также выражающих f. Если сокращенная ДНФ булевой функции f содержит k дизъюнктивных членов, то в «худшем» случае придется перебрать $2^k - 1$ различных ДНФ (начинаем с ДНФ минимальной длины, затем переходим к ДНФ большей длины, пока не удастся выразить f). При больших k этот перебор может оказаться труднореализуемым. Рассмотрим вопрос о сокращении множества вариантов при переборе.

Утверждение 5.3. Пусть C - простой импликант булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не являющийся единственным. Тогда импликант C является ядровым тогда и только тогда, когда существует оценка списка переменных, на которой C принимает значение 1, а остальные простые импликанты функции f принимают значение 0.

Билет 36

Система булевых функций $\{f_1,..., f_m\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть выражена через функции $f_1,..., f_m$ с помощью *суперпозиций* (т.е. составления сложных функций). Приведем определение суперпозиции функций (см. [1, стр. 50]). Пусть

$$K^0 = \{f_1(X_1,..., X_{k_1}), f_2(X_1,..., X_{k_2}),..., f_m(X_1,..., X_{k_m})\}$$

- конечная система булевых функций. Функция f называется суперпозицией ранга 1 (или элементарной суперпозицией) функций $f_1,..., f_m$, если f может быть получена одним из следующих способов: (а) переименованием некоторой переменной X_j какой-нибудь функции f_i, т.е. $f = f_i(X_1,..., X_{j-1}, Y, X_{j+1},..., X_{k_i})$, где Y может совпасть с любой переменной; (б) подстановкой некоторой функции f_l $(1 \le l \le m)$ вместо какой-нибудь переменной X_j любой из функций $f_i \in K^0$, т.е. $f = f_i(X_1,..., X_{j-1}, f_l(X_1,..., X_{k_l}), X_{j+1},..., X_{k_i})$.

Суперпозиции ранга 1 образуют класс функций K^1. Класс функций, получающийся из функций класса K^{r-1} (множества суперпозиций ранга $r-1$, где $r \geq 2$) с помощью элементарных суперпозиций, обозначается K^r - класс суперпозиций ранга r. *Суперпозициями* функций из K^0 называются функции, входящие в какой-либо из классов K^r, где $r \in \{0,1,...\}$.

Утверждение 1.5. *Пусть система $\{f_1, \ldots, f_m\}$ — полная и любая из функций $f_1, \ldots, f_m$ может быть выражена с помощью суперпозиций через функции $g_1, \ldots, g_l$. Тогда система $\{g_1, \ldots, g_l\}$ тоже полная.*

Полнота системы $\{\neg, \&, \vee\}$ непосредственно следует из теорем 1.8 и 1.9.

(о сднф и скнф)

Для доказательства полноты системы $\{\neg, \vee\}$ воспользуемся полнотой системы $\{\neg, \&, \vee\}$ и утверждением 1.5, где в роли функций f_1, f_2, f_3 выступают соответственно $\neg$, $\&$, $\vee$, а в роли функций g_1, g_2 — $\neg$, $\vee$. Тогда $f_1 = g_1$ и $f_2 = X_1 \& X_2 = \neg(\neg X_1 \vee \vee \neg X_2)$, т. е. функция f_2 выражена через g_1 и g_2, а $f_3 = g_2$.

Полнота системы $\{\neg, \&\}$ доказывается аналогично предыдущему случаю с использованием равносильности $X_1 \vee X_2 = = \neg(\neg X_1 \& \neg X_2)$.

Пример 1.24. Используя утверждение 6.2, докажем полноту следующих систем булевых функций: (а) $\{\neg, \vee\}$; (б) $\{\neg, \cdot\}$; (в) $\{\neg, \supset\}$; (г) $\{|\}$ (где $X \mid Y = \neg(X \vee Y)$); (д) $\{\circ\}$ (где $X \circ Y = \neg(XY)$).

Решение. Воспользуемся полнотой системы $\{\neg, \cdot, \vee\}$. Тогда в силу утверждения 6.2 для доказательства полноты системы (а) выразим $\cdot$ через $\neg, \vee$ по формуле: $XY = \neg(\bar{X} \vee \bar{Y})$; (б) $X \vee Y = \neg \bar{X}\bar{Y}$; (в) $XY = \neg(X \supset \bar{Y})$, $X \vee Y = \neg X \supset Y$. Для доказательства полноты системы (г) воспользуемся полнотой системы (а) и выразим: $\bar{X} = \neg(X \vee X) = X \mid X$, $X \vee Y = \neg\neg(X \vee Y) = \neg(X \mid Y) = (X \mid Y) \mid (X \mid Y)$. Для доказательства полноты системы (д) воспользуемся полнотой системы (б) и выразим: $\bar{X} = \neg(XX) = X \circ X$, $XY = \neg\neg(XY) = \neg(X \circ Y) = (X \circ Y) \circ (X \circ Y)$.

Билет 37

Класс булевых функций называется *функционально замкнутым*, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.

Рассмотрим некоторые функционально замкнутые классы. Через T_0 обозначим класс булевых функций сохраняющих 0, т.е. функций, удовлетворяющих условию $f(0,...,0) = 0$. Через T_1 обозначим класс булевых функций сохраняющих 1, т.е. функций, удовлетворяющих условию $f(1,...,1) = 1$.

Заметим, что $\&, \vee, +, 0 \in T_0$; $\&, \vee, \sim, \supset, 1 \in T_1$; $\neg, \supset, \circ, |, 1 \notin T_0$; $\neg, +, \circ, |, 0 \notin T_1$.

Пусть $f(X_1,...,X_n)$ - булева функция. Функция $f^*(X_1,...,X_n)$ называется двойственной к $f(X_1,...,X_n)$, если $f^*(X_1,...,X_n) = \neg f(\bar{X}_1,...,\bar{X}_n)$. Очевидно, что

$$(X_1 \vee X_2)^* = X_1 \& X_2, (X_1 \& X_2)^* = X_1 \vee X_2, 0^* = 1, 1^* = 0.$$

Утверждение 7.1 (*принцип двойственности*). Пусть

$$F = f_1(X_1,...,X_{i-1}, f_2(X_1,...,X_{k_2}), X_{i+1},...,X_{k_1}).$$

Тогда

$$F^* = f_1^*(X_1,...,X_{i-1}, f_2^*(X_1,...,X_{k_2}), X_{i+1},...,X_{k_1}).$$

Функция $f(X_1,...,X_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(X_1,...,X_n) = f^*(X_1,...,X_n)$. Класс самодвойственных функций обозначается через S.

Класс S самодвойственных функций функционально замкнут. Это следует из утверждения 1, поскольку, если $f_1, f_2 \in S$, т.е. $f_1 = f_1^*, f_2 = f_2^*$, то $F^* = F$. Переименование переменной также, очевидно, не выводит из S.

Таким образом, самодвойственные функции от двух переменных фактически являются функциями от одной переменной, при этом $\&, \vee, +, \sim, \supset, \circ, | \notin S$. Поэтому менее тривиальные самодвойственные функции, фактически зависящие более чем от одной переменной, следует искать среди функций от трех и большего числа переменных.

Функция $f(X_1,...,X_n)$ называется *линейной*, если $f(X_1,...,X_n) = a_0 + a_1 X_1 + ... + a_n X_n$, где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 0,...,n$. Класс линейных функций обозначается через L.

Пример 7.2. Функции $0, 1, X, \neg X, X + Y, X \sim Y, X + Y + Z$ - линейные, $\&, \vee, \supset, \circ, | \notin L$.

Функция $f(X_1,...,X_n)$ называется *монотонной*, если

$$\forall \alpha, \beta \in \{0, 1\}^n \quad \alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta).$$

Класс монотонных функций обозначим через M.

Пример 7.3. Функции $0, 1, X, \&, \vee \in M$; $\neg, +, \sim, \supset, \circ, | \notin M$.

Теорема Поста. Для того, чтобы система булевых функций $\{f_1,...,f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов T_0, T_1, S, L, M нашлась функция из этой системы, не принадлежащая этому классу.

f	T_0	T_1	S	L	M
$+$	$+$	–	– строки 1, 4	$+$	– строки 1, 2
$\vee$	$+$	$+$	– строки 2, 3	– $X \vee Y = XY + X + Y$	$+$
1	–	$+$	– строки 1, 4	$+$	$+$

Билет 38

Система булевых функций G называется *независимой*, если никакая функция $f \in G$ не является суперпозицией функций системы $G \setminus \{f\}$.

1. Система функций $\{\&, \neg\}$ независимая, так как $\& \in T_1$, $\neg \notin T_1$, $\& \notin L$, $\neg \in L$.

Билет 39

Независимая система булевых функций G называется *базисом* функционально замкнутого класса K, если

1) $G \subseteq K$;

2) всякая функция из K является суперпозицией функций из G.

Пример 7.5. Система булевых функций $\{+, \vee, 1\}$ является независимой. Функцию 1 нельзя выразить через $+, \vee$. Это следует из столбца табл. 7.2, соответствующего классу T_0. Действительно, если предположить, что функция 1 является суперпозицией функций $+, \vee$, то поскольку $+, \vee \in T_0$ (см. символы $+$ в столбце для T_0), функция 1 также должна принадлежать классу T_0, что противоречит символу $-$ в столбце для T_0 напротив функции 1. Функцию $+$ нельзя выразить через функции $1, \vee$ (см. столбец табл. 7.2, соответствующий классу T_1). Функцию $\vee$ нельзя выразить через функции $1, +$ (см. столбец табл. 7.2, соответствующий классу L).

Билет 40
Тупо лекция 8 переключательные схемы
https://lms.mai.ru/pluginfile.php/547446/mod_resource/content/1/%D0%9B%D0%95%D0%9A%D0%A6%D0%98%D0%AF%20%D0%9B8.%20%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BB%D1%8E%D1%87%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D1%81%D1%85%D0%B5%D0%BC%D1%8B.pdf

Билет 41
Лекция лп1
https://lms.mai.ru/pluginfile.php/565482/mod_resource/content/1/%D0%9B%D0%95%D0%9A%D0%A6%D0%98%D0%AF%20%D0%9B%D0%9F1.%20%D0%9F%D0%A0%D0%95%D0%94%D0%98%D0%9A%D0%90%D0%A2%D0%AB%2C%20%D0%9A%D0%92%D0%90%D0%9D%D0%A2%D0%9E%D0%A0%D0%AB%2C%20%D0%A4%D0%9E%D0%A0%D0%9C%D0%A3%D0%9B%D0%AB%20%D0%9B%D0%9E%D0%93%D0%98%D0%9A%D0%98%20%D0%9F%D0%A0%D0%95%D0%94%D0%98%D0%9A%D0%90%D0%A2%D0%9E%D0%92.pdf