А.С. БОРТАКОВСКИЙ
Е.А. ПЕГАЧКОВА

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 1

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$

$$Ax = b$$

$$\operatorname{rg}(A \mid b) = \operatorname{rg}(\tilde{A} \mid \tilde{b}) = \begin{cases} r+1, & \text{если } \tilde{b}_{r+1} \ne 0, \\ r, & \text{если } \tilde{b}_{r+1} = 0. \end{cases}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdot \ldots \cdot(\lambda_n - \lambda)$$

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ КОМПЛЕКСЫ
КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

А.С. БОРТАКОВСКИЙ, Е.А. ПЕГАЧКОВА

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 1

Печатается по рекомендации Редакционного совета факультета «Прикладная математика и физика» Московского авиационного института (*национального исследовательского университета*)

Москва

2013

ББК 517
УДК 51
Б 82

Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.

Типовые задачи по линейной алгебре. Часть 1. (Серия «Учебно-методические комплексы кафедры математической кибернетики»): Учебное пособие. — М.: Доброе слово, 2013. — 92 с.

ISBN 978-5-89796-465-3

Пособие предназначено для проведения самостоятельной работы студентов по курсу линейной алгебры в первом семестре. Приведены основные теоретические сведения и методы решения типовых задач по 7 разделам линейной алгебры: матрицы и действия над ними, определители, ранг матрицы, обратная матрица, системы линейных алгебраических уравнений, собственные значения и собственные векторы матрицы, квадратичные формы. Составлены варианты типовых задач, письменное решение которых проверяется преподавателем. Подробное решение аналогичных задач приводится в каждом разделе. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельная работа студентов (СРС) является важной составляющей учебного процесса, которой отводится значительный объем в государственных стандартах подготовки бакалавров. Самостоятельная работа позволяет студентам закрепить навыки и умения, приобретенные на аудиторных занятиях (лекциях, семинарах, лабораторных работах), проверить правильность понимания теоретических сведений, научиться решать основные типовые задачи. Проверка СРС вместе с тестами и контрольными работами дает информацию об успеваемости студентов в течение семестра и служит для текущей аттестации. Большое значение СРС имеет для подготовки к экзамену или зачету. Она учитывается также в итоговой аттестации при рейтинговой системе оценивания.

Пособие дополняет книги [1-4], образуя вместе с ними единый методический комплекс по линейной алгебре в первом семестре. Основную часть пособия составляют 20 вариантов, содержащих типовые задачи по линейной алгебре. Каждый студент выполняет один вариант задания (номер варианта определяется порядковым номером фамилии студента в списке группы). Вариант содержит 20 задач по 7 разделам линейной алгебры [1-11]: матрицы и действия над ними, определители, ранг матрицы, обратная матрица, системы линейных алгебраических уравнений, собственные векторы и собственные значения матриц, квадратичные формы.

Умение решать типовые задачи, как правило, достаточно для получения удовлетворительной итоговой оценки. В течение семестра на каждом практическом занятии преподаватель указывает номера задач, письменное решение которых, соответственно оформленное, студенты должны сдать на проверку на следующем занятии. После проверки студентам сообщаются оценки и обсуждаются допущенные в решениях характерные ошибки.

Пособие состоит из 7 тематических разделов и вариантов заданий, собранных в разд.8. В конце пособия приводится список рекомендуемой литературы для практической подготовки. В каждом тематическом разделе содержатся необходимые теоретические сведения, описываются методы и алгоритмы решения типовых задач. Приводятся примеры решения задач, аналогичных задачам из вариантов для СРС, причем нумерации и формулировки разбираемых примеров и задач для СРС совпадают. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности действий, подробность алгебраических преобразований и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

1. Решение каждой задачи должно быть написано аккуратно, разборчивым почерком, чернилами или пастой синего (или черного) цвета на листах белой бумаги (либо в клеточку) формата А4. Текст следует писать на одной стороне листа, оставляя левое поле не менее 2 см. Листы должны быть скреплены с левой стороны степлером.

2. На каждом листе работы указываются фамилия и инициалы студента, выполнившего работу, номер учебной группы, номер варианта, дата сдачи.

3. Перед решением каждой задачи ставится ее порядковый номер, который необходимо выделить (подчеркиванием или маркером), и полностью приводится условие задачи.

4. Математические выкладки необходимо сопровождать пояснениями, раскрывающими смысл и содержание выполняемых действий. Все вычисления проводятся точно, без округления результата. В конце решения приводится ответ. Слово "*Ответ*" следует выделить (подчеркиванием или маркером).

5. Решение задачи с измененным условием или задачи из другого варианта не засчитывается. Отсутствие обоснования решения или пояснений приводит к снижению оценки. Оценка также снижается за небрежное оформление работы.

1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Матрицей размеров $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}),\ i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n.$$

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами матрицы***: a_{ij} – ее элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Далее предполагается, что элементы матриц являются действительными числами.

Две матрицы A и B называются ***равными*** ($A = B$), если они имеют одинаковые размеры ($m \times n$) и равные соответствующие элементы:

$$a_{ij} = b_{ij},\quad i = 1,\dots,m;\quad j = 1,\dots,n.$$

Если у матрицы количество строк (m) равно количеству столбцов (n), то матрицу называют ***квадратной*** (***n-го порядка***). Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют ***главную диагональ*** квадратной матрицы. Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной*** и обозначается $diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Частным случаем диагональной матрицы служит квадратная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая называется ***единичной*** (n-го порядка) и обозначается E (или E_n). Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю, то матрицу называют ***верхней треугольной*** (***нижней треугольной***). Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***.

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы одинаковых размеров $m \times n$. Матрица $C = (c_{ij})$ тех же размеров $m \times n$ называется ***суммой матриц*** A и B, если ее элементы равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$. Сумма матриц обозначается $C = A + B$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ ***на число*** λ называется матрица $C = (c_{ij})$ тех же размеров, что и матрица A, каждый элемент которой равен произведению числа λ на соответствующий элемент матрицы A: $c_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Произведение обозначается λA или $A\lambda$.

Матрица $(-1)A$ называется ***противоположной*** матрице A и обозначается $(-A)$. Сумма матриц B и $(-A)$называется ***разностью*** и обозначается $B - A$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются ***линейными операциями над матрицами***. Свойства линейных операций над матрицами совпадают со свойствами операций сложения (вычитания) алгебраических выражений (например, многочленов) и умножения алгебраического выражения на число.

Свойства линейных операций над матрицами

Для любых матриц A, B, C одинаковых размеров и любых чисел α, β справедливы равенства:

1. $A + B = B + A$; **2.** $(A + B) + C = A + (B + C)$; **3.** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; **5.** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$; **6.** $1 \cdot A = A$.

Пусть даны матрицы $A = (a_{ij})$ размеров $m \times p$ и $B = (b_{ij})$ размеров $p \times n$. Матрица C размеров $m \times n$, элементы c_{ij} которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}, \; i = 1,.., m; \; j = 1,.., n,$$

называется ***произведением*** матриц A и B и обозначается $C = AB$. Операция умножения матрицы A на матрицу B определена только для ***согласованных*** матриц, у которых число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B:

$$\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times p}{A} \; \underset{p\times n}{B}.$$

Заметим, что в общем случае $AB \neq BA$, но существуют квадратные матрицы, произведение которых не зависит от перестановки множителей. Матрицы A и B называются ***перестановочными***, если $AB = BA$. Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

Свойства умножения матриц

Пусть λ – любое число; A, B, C – произвольные матрицы, для которых определены операции умножения и сложения, записанные в левых частях следующих равенств. Тогда определены операции, указанные в правых частях, и справедливы равенства:

1. $(AB)C = A(BC)$; **2.** $A(B + C) = AB + AC$;

3. $(A + B)C = AC + BC$; **4.** $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

Для любой квадратной матрицы A (n-го порядка) определено произведение $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (матрицы A на себя). Поэтому можно говорить о целой неотрицательной ***степени матрицы***, определяя последовательно

$$A^0 = E\,,\ A^1 = A\,,\ A^2 = A\,A\,,\ A^3 = A^2\,A, \ldots,\ A^m = A^{m-1}\,A\,,\ \ldots\,.$$

Пусть $p_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ – многочлен (степени m) переменной x, A – квадратная матрица n-го порядка. Выражение вида

$$p_m(A) = a_0 \underbrace{E}_{A^0} + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_m A^m$$

называется ***многочленом от матрицы*** A. Многочлен $p_m(A)$ является квадратной матрицей n-го порядка.

Для любой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ матрица $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, получающаяся из матрицы A заменой строк соответствующими столбцами, а столбцов – соответствующими строками, называется ***транспонированной матрицей***. Чтобы по данной матрице A получить матрицу A^T, нужно первую строку матрицы A записать как первый столбец матрицы A^T, вторую строку матрицы A записать как второй столбец матрицы A^T и т.д. Эта операция называется ***транспонированием*** матрицы A. Квадратная матрица называется ***симметрической***, если $A^T = A$, и ***кососимметрической***, если $A^T = -A$.

Свойства операции транспонирования

Пусть λ – любое число; A, B – произвольные матрицы, для которых определены операции умножения и сложения, записанные в левых частях следующих равенств. Тогда определены операции, указанные в правых частях, и справедливы равенства:

1. $(\lambda A)^T = \lambda\, A^T$; **2.** $(A + B)^T = A^T + B^T$; **3.** $(A\,B)^T = B^T\, A^T$; **4.** $\left(A^T\right)^T = A$.

Блочные матрицы

Матрица A размеров $m \times n$, разделенная горизонтальными и вертикальными линиями на блоки (клетки), которые представляют собой матрицы, называется ***блочной*** (***клеточной***) ***матрицей***. Элементами блочной матрицы A являются матрицы. Операции сложения, умножения на число и произведения блочных матриц выполняются по тем же правилам, что и для обычных матриц, только вместо элементов в формулах используются блоки.

Блочные матрицы A и B называются ***согласованными***, если разбиение матрицы $A=(A_{ik})$ на блоки по столбцам совпадает с разбиением матрицы $B=(B_{kj})$ по строкам, т.е. блоки A_{ik} имеют размеры $m_i \times p_k$, а блоки B_{kj} – $p_k \times n_j$ ($k=1,2,\ldots,s$). У согласованных блочных матриц блоки A_{ik} и B_{kj} являются согласованными матрицами.

Произведением $C=AB$ согласованных ***блочных матриц*** A и B называется блочная матрица $C=(C_{ij})$, блоки которой вычисляются по следующей формуле:

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\ldots+A_{is}B_{sj}.$$

Это означает, что согласованные блочные матрицы можно перемножать обычным для матриц способом.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие ее преобразования:

I. *Перестановка двух столбцов* (*строк*) *матрицы.*

II. *Умножение всех элементов одного столбца* (*строки*) *матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.*

III. *Прибавление к элементам одного столбца* (*строки*) *соответствующих элементов другого столбца* (*строки*)*, умноженных на одно и то же число.*

Матрица B, полученная из исходной матрицы A путем конечного числа элементарных преобразований, называется ***эквивалентной***. Это обозначается $A \sim B$.

Квадратную матрицу, полученную из единичной при помощи конечного числа элементарных преобразований, будем называть ***элементарной***.

Теорема (о приведении матрицы к ступенчатому виду). *Любую матрицу при помощи элементарных преобразований ее строк можно привести к* ***ступенчатому виду***:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & * & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

Здесь высота каждой «ступеньки» составляет одну строку, символом 1 (единицей) обозначены элементы матрицы, равные единице, символом $*$ – элементы с произвольными значениями, остальные элементы матрицы – нулевые.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

1. В первом столбце выбрать элемент, отличный от нуля (***ведущий элемент***). Строку с ведущим элементом (***ведущая строка***), если она не первая, переставить на место первой строки (преобразование I типа). Если в первом столбце нет ведущего (все элементы равны нулю), то исключаем этот столбец, и продолжаем поиск ведущего элемента в оставшейся части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы или в оставшейся части матрицы все элементы нулевые.

2. Разделить все элементы ведущей строки на ведущий элемент (преобразование II типа). Если ведущая строка последняя, то на этом преобразования следует закончить.

3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такое число, чтобы элементы, стоящие под ведущим, оказались равными нулю (преобразование III типа).

4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к пункту 1, в котором все описанные действия применяются к оставшейся части матрицы.

Этот алгоритм, применяемый в дальнейшем для решения систем линейных уравнений, называют методом Гаусса.

При помощи элементарных преобразований над строками, матрицу можно привести к ***упрощенному виду***:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Здесь символом 1 обозначены ведущие элементы матрицы, равные единице, символом $*$ – элементы с произвольными значениями, остальные элементы матрицы – нулевые. В отличие от ступенчатого вида (1.1) в матрице упрощенного вида (1.2) в каждом столбце с ведущим элементом остальные элементы равны нулю. При решении примеров ведущие элементы матрицы будем выделять полужирным шрифтом.

Алгоритм приведения матрицы к упрощенному виду

Чтобы привести матрицу к упрощенному виду, нужно выполнить те же действия, что и в алгоритме приведения матрицы к ступенчатому виду, за исключение п.3, который выполняется в следующей модификации:

3'. К каждой строке матрицы, кроме ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такое число, чтобы элементы, стоящие над ведущим или под ведущим, оказались равными нулю (преобразование III типа).

Теорема (о приведении матрицы к простейшему виду). *Любую матрицу при помощи элементарных преобразований ее строк и столбцов можно привести к* ***простейшему виду****:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Левый верхний угол матрицы представляет собой единичную матрицу порядка r ($0 \le r \le \min\{m; n\}$), а остальные элементы равны нулю. Считается, что нулевая матрица уже имеет простейший вид (при $r = 0$).

Алгоритм приведения матрицы к простейшему виду

1. Выбрать в матрице элемент, отличный от нуля (***ведущий элемент***). Строку с ведущим элементом (***ведущая строка***), если она не первая, переставить на место первой строки (преобразование I типа). Столбец с ведущим элементом (***ведущий столбец***) переставить на место первого. Если в матрице нет ведущего элемента (все элементы равны нулю), то преобразования заканчиваются.

2. Разделить все элементы ведущей строки на ведущий элемент (преобразование II типа).

3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такое число, чтобы элементы, стоящие под ведущим, оказались равными нулю (преобразование III типа). Затем, прибавляя полученный ведущий столбец, умноженный на соответствующие числа, к остальным столбцам матрицы, делаем равными нулю все элементы ведущей строки, за исключением ведущего элемента. При этом получаем ведущие строку и столбец, все элементы которых равны нулю, за исключением ведущего элемента, равного единице.

4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к пункту 1, в котором все описанные действия применяются к оставшейся

части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы или все строки, либо в оставшейся части матрицы все элементы нулевые.

Модифицированный таким образом метод Гаусса называется ***методом Гаусса–Жордана***. Его применение позволяет сразу получить простейший вид матрицы, минуя ее ступенчатый вид.

Теорема (о существовании элементарных преобразующих матриц). *Для любой матрицы A размеров $m\times n$ существуют такие элементарные матрицы S и T m-го и n-го порядков соответственно, что матрица $\Lambda = S\,AT$ имеет простейший вид* (1.3):

$$\Lambda = S\,AT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \tag{1.4}$$

где $0 \le r \le \min\{m, n\}$. Матрицы S и T называются ***элементарными преобразующими матрицами***.

Алгоритм нахождения элементарных преобразующих матриц

1. Приписав к матрице A (размеров $m\times n$) справа и снизу единичные матрицы E_m и E_n соответственно, составить блочную матрицу:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_m \\ \hline E_n & \end{array}\right).$$

Элементы правого нижнего блока этой матрицы можно не указывать, так как они не участвуют в дальнейших преобразованиях, либо считать их равными нулю.

2. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками и столбцами блочной матрицы, привести ее левый верхний блок A к простейшему виду (1.4). При этом блочная матрица преобразуется к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} \Lambda & S \\ \hline T & \end{array}\right),$$

где Λ – матрица простейшего вида, а S и T – искомые преобразующие матрицы, связанные с матрицей A равенством (1.4).

Элементарные преобразующие матрицы S и T находятся неоднозначно, так как зависят от выбранной последовательности преобразований.

Если требуется найти одну из элементарных преобразующих матриц, например S, достаточно применить к матрице $(A \mid E_m)$ рассмотренный выше алгоритм. Выполняя элементарные преобразования над строками матрицы $(A \mid E_m)$ и первыми ее столбцами, входящими в левый блок, получим матрицу $(\Lambda \mid S)$, где Λ – матрица простейшего вида, а S – искомая матрица. Если требуется найти одну матрицу T, то выполняем преобразования матрицы $\left(\dfrac{A}{E_n}\right) \sim \left(\dfrac{\Lambda}{T}\right)$.

Следом квадратной матрицы называется сумма ее элементов, стоящих на главной диагонали. След квадратной матрицы A n-го порядка обозначается

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Вычислить матрицу $C = 2AB - 3B^T A^T$.

Решение. Используя правило умножения, находим

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 & 4\cdot 4 + 5\cdot 0 + 6\cdot(-3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 32 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 2}.$$

Транспонируем матрицы A и B, заменяя строки соответствующими столбцами. При транспонировании первая строка матрицы A (соответственно B) является первым столбцом матрицы A^T (соответственно B^T), вторая строка – вторым столбцом:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим их произведение

$$B^T A^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 0\cdot 2 - 3\cdot 3 & 4\cdot 4 + 0\cdot 5 - 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}}_{2\times 2}.$$

Произведения AB и $B^T A^T$ являются матрицами одинаковых размеров (2×2). Умножая на 2 каждый элемент матрицы AB, а каждый элемент $B^T A^T$ на (-3) и складывая соответствующие элементы матриц, получаем

$$C = 2AB - 3B^T A^T = 2\begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 32 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -106 \\ 79 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -14 & -106 \\ 79 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$. Найти: 1) $x^T Ay$, 2) $\operatorname{tr}(Axy^T)$.

Решение. Перемножая попарно матрицы, получаем

$$1)\ \underbrace{x^T}_{1\times 2}\underbrace{A}_{2\times 2}\underbrace{y}_{2\times 1}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1+3x_2 & 2x_1+4x_2\end{pmatrix}}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}=$$

$$=\underbrace{(x_1+3x_2)\,y_1+(2x_1+4x_2)\,y_2}_{1\times 1}=x_1y_1+3x_2y_1+2x_1y_2+4x_2y_2;$$

$$2)\ \underbrace{A}_{2\times 2}\underbrace{x}_{2\times 1}\underbrace{y^T}_{1\times 2}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}}_{1\times 2}=\underbrace{\begin{pmatrix}x_1+2x_2\\ 3x_1+4x_2\end{pmatrix}}_{2\times 1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}y_1 & y_2\end{pmatrix}}_{1\times 2}=$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}(x_1+2x_2)y_1 & (x_1+2x_2)y_2\\ (3x_1+4x_2)y_1 & (3x_1+4x_2)y_2\end{pmatrix}}_{2\times 2}.$$

Теперь, складывая элементы на главной диагонали, находим след

$$\operatorname{tr}(Axy^T)=(x_1+2x_2)y_1+(3x_1+4x_2)y_2=x_1y_1+2x_2y_1+3x_1y_2+4x_2y_2.$$

Ответ: 1) $x_1y_1+3x_2y_1+2x_1y_2+4x_2y_2$; 2) $x_1y_1+2x_2y_1+3x_1y_2+4x_2y_2$.

Пример 3. Даны многочлен $p(x)=x^2-2x+1$ и матрица $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Найти $p(A)$.

Решение. Подставляя матрицу A в выражение $p(A)=A^2-2A+E$, получаем

$$p(A)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Пример 4. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Решение. Перестановочные матрицы A и B определяются равенством $AB=BA$. Из этого равенства следует, что обе матрицы – квадратные одного и того же порядка. Пусть искомая матрица B имеет вид $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Найдем произведения

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}.$$

Из равенства матриц $AB=BA$ следует равенство соответствующих элементов

$$AB=BA \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a+3b & 2a+4b\\ c+3d & 2c+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a+3b=a+2c,\\ 2a+4b=b+2d,\\ c+3d=3a+4c,\\ 2c+4d=3b+4d.\end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $c=1{,}5b$, а из второго – $d=a+1{,}5b$. Подставляя эти выражения в остальные уравнения, получаем верные числовые равенства. Следовательно, при любых значениях a и b матрица $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 1{,}5b & a+1{,}5b\end{pmatrix}$ является перестановочной с данной матрицей A.

Ответ: $\begin{pmatrix}a & b\\ 1{,}5b & a+1{,}5b\end{pmatrix}$, где $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$.

Пример 5. Даны блочные матрицы

$$A=\left(A_{11}\mid A_{12}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right),\qquad B=\left(\begin{array}{c|c}B_{11} & B_{12}\\ \hline B_{21} & B_{22}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0\\ \hline 1 & 2 & 2\end{array}\right).$$

Найти блоки C_{11} и C_{12} блочной матрицы $C=\left(C_{11}\mid C_{12}\right)=AB$.

Решение. Блочные матрицы A и B согласованы. Матрица A разбита по столбцам на два и один (считая слева), матрица B разбита по строкам на две и одну (считая сверху). Поэтому произведение AB определено. Матрица $C=AB$ будет иметь блоки $C=\left(C_{11}\mid C_{12}\right)$. Учитывая, что A_{11} – единичная матрица, находим искомые блоки

$$C_{11}=A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & 8\end{pmatrix};$$

$$C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}(2)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $C_{11}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $C_{12}=\begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix}$.

Пример 6. Элементарными преобразованиями привести матрицу

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 5 & 1\\ 5 & 15 & 13 & -1\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

к простейшему виду $\Lambda=\left(\begin{array}{c|c}E & O\\ \hline O & O\end{array}\right)$. Найти элементарные преобразующие матрицы S и T, удовлетворяющие равенству $\Lambda=SAT$.

Решение. Припишем к матрице A справа и снизу единичные матрицы соответствующих размеров:

$$\left(\begin{array}{c|c}A & E_3\\ \hline E_4 & \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}2 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 15 & 13 & -1 & 0 & 1 & 0\\ \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

Левый верхний блок A будем приводить к простейшему виду (1.4), применяя метод Гаусса – Жордана. Выбираем в левом верхнем блоке в качестве ведущего элемент $a_{31}=1\neq 0$ (выделен полужирным шрифтом). Меняем местами первую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}2 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 15 & 13 & -1 & 0 & 1 & 0\\ \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|ccc}\mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 15 & 13 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

В полученной матрице ведущим элементом стал элемент $a_{11}=1\neq 0$, а первые строка и столбец стали ведущими. Ко второй строке прибавляем первую (т.е. ведущую строку), умноженную на (-5); к третьей – первую, умноженную на (-2):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 15 & 13 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

Ко второму столбцу прибавляем первый (т.е. ведущий столбец), умноженный на (-3), к третьему – первый, умноженный на (-2), к четвертому – первый, умноженный на (-4):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & -3 & -2 & -4 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

Исключаем из рассмотрения первый столбец и первую строку. Во втором столбце в левом верхнем блоке матрицы после исключения первой строки нет ведущего элемента (все элементы нулевые). Ищем ненулевой элемент в третьем столбце этого блока, за исключением элемента a_{13} из первой строки. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{33} = 1 \neq 0$. Можно взять любой ненулевой элемент этого блока матрицы, за исключением a_{11}. Если выбрать в качестве ведущего элемент $a_{23} = 3$, то придется выполнять арифметические действия с дробями. Меняем местами вторую и третью строки, а затем – второй и третий столбцы:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 1 & -3 & -2 & -4 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на (-3):

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -21 & 0 & 1 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

К четвертому столбцу прибавляем второй, умноженный на 7:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -7 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -18 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 7 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

В результате преобразований на месте исходной матрицы A получается матрица

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_2 & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

простейшего вида, а на месте единичных матриц – элементарные преобразующие матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убеждаемся в справедливости равенства $\Lambda = SAT$, вычисляя произведение

$$SAT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 5 & 15 & 13 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Ответ: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пусть A – квадратная матрица порядка n. ***Определителем*** (***детерминантом***) квадратной матрицы A называется число $\det A$, которое ставится в соответствие матрице и вычисляется по ее элементам согласно следующим правилам.

1. Определителем матрицы $A=\left(a_{11}\right)$ порядка $n=1$ называется единственный элемент этой матрицы: $\det\left(a_{11}\right)=a_{11}$.

2. Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка $n>1$ называется число

$$\det A=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+(-1)^{1+2}a_{12}M_{12}+\ldots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \tag{2.1}$$

где M_{1j} – определитель квадратной матрицы порядка $n-1$, полученной из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца.

Определитель матрицы обозначают, заключая матрицу в «прямые» скобки:

$$\det A=\left| A \right|=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Имея в виду это обозначение, для краткости говорят о ***порядке определителя***, ***строках*** или ***столбцах определителя***, ***элементах определителя***, опуская при этом слово «матрица».

По определению получаем ***формулу вычисления определителя второго порядка***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{2.2}$$

Определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали (см. схему на рис. 2.1).

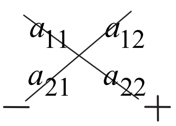

Рис. 2.1

По определению, учитывая (2.2), получаем ***формулу вычисления определителя третьего порядка***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}. \tag{2.3}$$

Определитель (2.3) представляет собой сумму шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя, стоящих в разных строках и разных столбцах. Причем три слагаемых берутся со знаком плюс, а три других – со знаком минус.

Для запоминания формулы (2.3) используется *правило треугольников*: надо сложить три произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную главной диагонали (рис. 2.2, *а*), и вычесть три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников, имеющих сторону, параллельную побочной диагонали (рис. 2.2, *б*).

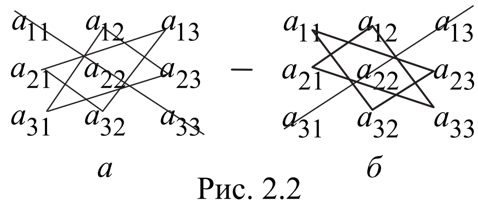

Рис. 2.2

Формула разложения определителя по элементам строки (столбца)

Пусть дана квадратная матрица A порядка n. ***Дополнительным минором*** M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется дополнительный минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема (формула разложения определителя по элементам строки (столбца)). *Определитель матрицы A равен сумме произведений элементов произвольной строки (столбца) на их алгебраические дополнения*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad \text{(разложение по } i\text{-й строке);}$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \qquad \text{(разложение по } j\text{-му столбцу).}$$

Определитель ***треугольного вида*** (определитель верхней или нижней треугольной матрицы, в частности, диагональной) равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

Основные свойства определителей

1. *Для любой квадратной матрицы* $\det A = \det(A^T)$, *т.е. при транспонировании определитель не изменяется.* Из этого свойства следует, что столбцы и строки определителя "равноправны": любое свойство, верное для столбцов, будет верным для строк.

2. *Если в определителе один из столбцов нулевой* (*все элементы столбца равны нулю*), *то определитель равен нулю.*

3. *При перестановке двух столбцов определитель меняет знак на противоположный.*

4. *Если в определителе имеются два одинаковых столбца, то он равен нулю.*

5. *Если определитель имеет два пропорциональных столбца, то он равен нулю.*

6. *При умножении всех элементов одного столбца определителя на число определитель умножается на это число.*

7. *Если* j *-й столбец определителя представляется в виде суммы двух столбцов* $a_j + b_j$, *то определитель равен сумме двух определителей, у которых* j *-ми столбцами являются* a_j *и* b_j *соответственно, а остальные столбцы одинаковы.*

8. *Определитель линеен по любому столбцу.*

9. *Определитель не изменится, если к элементам одного столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.*

10. *Сумма произведений элементов какого-либо столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю*:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j .$$

Теорема (об определителе произведения матриц). *Пусть* A *и* B *– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда*

$$\det AB = \det A \cdot \det B , \qquad (2.4)$$

т.е. *определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.*

Элементарные преобразования определителей

I. *Перестановка двух столбцов* (*строк*) *определителя* приводит к изменению его знака на противоположный.

II. *Умножение всех элементов одного столбца* (*строки*) *определителя на одно и то же число, отличное от нуля,* приводит к умножению определителя на это число.

III. *Прибавление к элементам одного столбца* (*строки*) *определителя соответствующих элементов другого столбца, умноженных на одно и то же число*, не изменяет определитель.

При помощи элементарных преобразований можно упростить определитель, т.е. привести его к виду, удобному для вычислений.

Метод приведения определителя к треугольному виду

1. При помощи элементарных преобразований привести определитель к треугольному виду.

2. Вычислить определитель треугольного вида, перемножая его элементы, стоящие на главной диагонали.

Метод понижения порядка определителя

1. При помощи элементарного преобразования III типа нужно в одном столбце (или одной строке) сделать равными нулю все элементы, за исключением одного.

2. Разложить определитель по этому столбцу (строке) и получить определитель меньшего порядка, чем исходный. Если его порядок больше 1, то следует перейти к п. 1, иначе вычисления закончить.

Пример 7. Вычислить определитель произведения матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$.

Решение. Вычисляем определители каждой матрицы по формуле (2.2)

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=-2,\quad \det B=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix}=1\cdot 7-3\cdot 5=-8.$$

Согласно (2.4) находим определитель произведения матриц

$$\det AB=\det A\cdot\det B=(-2)(-8)=16.$$

Ответ: 16.

Пример 8. Найти определители третьего порядка

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 7\\ -5 & -2 & 6\end{vmatrix},\qquad B=\begin{vmatrix}1 & -\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\sin\alpha & 4 & 3\\ \cos\alpha & -3 & 4\end{vmatrix}.$$

Решение. Каждый определитель вычисляем по формуле (2.3)

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 4 & 7\\ -5 & -2 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 4\cdot 6+2\cdot 7\cdot(-5)+(-1)\cdot 3\cdot(-2)-(-1)\cdot 4\cdot(-5)-2\cdot 3\cdot 6-1\cdot 7\cdot(-2)=$$

$$=24-70+6-20-36+14=-82;$$

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & -\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\sin\alpha & 4 & 3\\ \cos\alpha & -3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4\cdot 4+(-\sin\alpha)\cdot 3\cdot\cos\alpha+(-\sin\alpha)\cdot(-3)\cdot\cos\alpha-$$

$$-\cos\alpha\cdot 4\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha)\cdot(-\sin\alpha)\cdot 4-1\cdot(-3)\cdot 3=16-4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha+9=25-4=21.$$

Ответ: $\det A=-82$; $\det B=21$.

Пример 9. Применяя элементарные преобразования, вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычисляем определитель, понижая его порядок. Взяв элемент $a_{11} = 1$ в качестве ведущего (выделен полужирным шрифтом), все остальные элементы первого столбца сделаем равными нулю. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-1), к третьей строке – первую, умноженную на (-2), а к четвертой строке – первую, умноженную на (-3):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе третьего порядка выбираем ведущий элемент $a_{21} = 1$. Сделаем равным нулю элемент $a_{23} = -5$. Для этого прибавим к третьему столбцу первый, умноженный на 5:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по второй строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель второго порядка вычисляем по формуле (2.2):

$$-\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-3) - 6 \cdot (-5)) = 3 - 30 = -27.$$

Ответ: -27.

3. РАНГ МАТРИЦЫ

Столбец A называется ***линейной комбинацией*** столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ одинаковых размеров, если

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. В этом случае говорят, что ***столбец A разложен по столбцам*** $A_1, A_2, \ldots, A_k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называют ***коэффициентами разложения***. Аналогично формулируется определение линейной комбинации строк одинаковых размеров.

Линейная комбинация $A = 0 \cdot A_1 + \ + 0 \cdot A_2 + \ldots + 0 \cdot A_k$ с нулевыми коэффициентами называется ***тривиальной***. Набор столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ одинаковых размеров называется ***системой столбцов***. Любая часть системы столбцов называется ***подсистемой***.

Система из k столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется ***линейно зависимой***, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k = o. \tag{3.1}$$

Здесь и далее символом o обозначается нулевой столбец соответствующих размеров.

Система из k столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется ***линейно независимой***, если равенство (3.1) возможно только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, т.е. когда линейная комбинация в левой части (3.1) тривиальная. Один столбец A_1 тоже образует систему: при $A_1 = o$ – линейно зависимую, а при $A_1 \neq o$ линейно независимую. Аналогичные определения формулируются и для строк (матриц-строк).

Свойства линейно зависимых и линейно независимых столбцов

1. *Если в систему столбцов входит нулевой столбец, то она линейно зависима.*

2. *Если в системе столбцов имеются два равных столбца, то она линейно зависима.*

3. *Если в системе столбцов имеются два пропорциональных столбца* ($A_i = \lambda A_j$), *то она линейно зависима.*

4. *Система из $k > 1$ столбцов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из столбцов есть линейная комбинация остальных.*

5. *Любые столбцы, входящие в линейно независимую систему, образуют линейно независимую подсистему.*

6. *Система столбцов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.*

7. *Если система столбцов $A_1, A_2, ..., A_k$ – линейно независима, а после присоединения к ней столбца A – оказывается линейно зависимой, то столбец A можно разложить по столбцам $A_1, A_2, ..., A_k$, и притом единственным образом, т.е. коэффициенты разложения находятся однозначно*.

Поскольку понятия линейной зависимости и линейной независимости определяются для строк и столбцов одинаково, то свойства, связанные с этими понятиями, справедливые для столбцов, выполняются и для строк.

Минором k-го порядка матрицы A называется определитель матрицы k-го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A. Обозначая миноры, номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а выбранных столбцов – нижними, располагая их по возрастанию.

В матрице A размеров $m \times n$ минор r-го порядка называется ***базисным***, если он отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю или их вообще не существует.

Рангом матрицы называется порядок базисного минора. В нулевой матрице базисного минора нет. Поэтому ранг нулевой матрицы, по определению, полагают равным нулю. Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rg} A$.

Столбцы, в которых расположен базисный минор, называются ***базисными***. Базисные столбцы линейно независимы.

Алгоритм нахождения ранга матрицы методом окаймляющих миноров

1. Выбираем строку i_1 и столбец j_1 так, чтобы минор 1-го порядка $M^{i_1}_{j_1} = a_{i_1 j_1}$ был не равен нулю. Если это возможно, то $\operatorname{rg} A \geq 1$, иначе процесс завершается и $\operatorname{rg} A = 0$.

2. Окаймляем минор $M^{i_1}_{j_1} \neq 0$, добавляя к выбранным i_1-й строке и j_1-му столбцу еще строку $i_2 \neq i_1$ и столбец $j_2 \neq j_1$ так, чтобы минор $M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} \neq 0$. Если это возможно, то $\operatorname{rg} A \geq 2$, иначе процесс завершается и $\operatorname{rg} A = 1$.

3. Окаймляем минор $M^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} \neq 0$, добавляя к выбранным ранее строкам и столбцам новую строку i_3 и новый столбец j_3 так, чтобы получить минор $M^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} \neq 0$. Если это удалось, то $\operatorname{rg} A \geq 3$, иначе процесс завершается и $\operatorname{rg} A = 2$.

Продолжаем процесс окаймления, пока он не завершится. Пусть найден минор r-го порядка $M^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r} \neq 0$, т.е. $\mathrm{rg}\, A \geq r$. Однако все миноры $(r+1)$-го порядка, окаймляющие его, равны нулю $M^{i_1 i_2 \ldots i_r i_{r+1}}_{j_1 j_2 \ldots j_r j_{r+1}} = 0$ или не существуют (при $r = m$ или $r = n$). Тогда процесс завершается и $\mathrm{rg}\, A = r$.

Алгоритм нахождения ранга матрицы при помощи элементарных преобразований

1. Привести матрицу к ступенчатому виду (1.1) (см. алгоритм в разд. 1).

2. В полученной матрице вычислить количество r ненулевых строк. Это число равно рангу данной матрицы.

Если матрица приводится к ступенчатому виду, только при помощи элементарных преобразований ее строк, то базисные столбцы исходной матрицы и ее ступенчатого вида совпадают по номерам. В матрице ступенчатого вида (1.1) базисный минор образуют столбцы, содержащие ведущие элементы (отмеченные символом 1 в (1.1)).

Ранг системы столбцов (строк)

Пусть дана система столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ размеров $m \times 1$. ***Рангом системы столбцов*** называется максимальное число линейно независимых столбцов этой системы и обозначается $\mathrm{rg}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. ***Максимальной линейно независимой подсистемой столбцов*** (или ***базой системы столбцов*** [4]) называется линейно независимая подсистема, состоящая из $\mathrm{rg}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ столбцов. Максимальность здесь понимается в том смысле, что любое большее количество столбцов данной системы образует линейно зависимую подсистему. Столбцы, входящие в базу, называются ***базисными***, а остальные – ***небазисными***. ***Рангом системы строк*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ размеров $1 \times m$ называется максимальное число линейно независимых строк этой системы.

Алгоритм нахождения базы системы столбцов

1. Составить из данных столбцов матрицу $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ размеров $m \times n$.

2. Привести матрицу к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк.

3. Найти базисные столбцы в матрице ступенчатого вида (это столбцы с ведущими элементами). Столбцы матрицы A с такими же номерами, как и базисные в матрице ступенчатого вида, являются базисными в матрице A и образуют базу данной системы столбцов.

У системы столбцов может быть несколько максимальных линейно независимых подсистем, но все они состоят из одинакового количества столбцов.

Теорема (о разложении столбцов данной системы по ее базе). *Любой столбец данной системы разлагается по ее базе единственным образом.*

Пусть, например, первые r столбцов образуют базу системы столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда любой столбец A_i ($i = 1, \ldots, n$) можно представить в виде линейной комбинации базисных столбцов

$$A_i = \alpha_{i1} A_1 + \ldots + \alpha_{ir} A_r, \tag{3.2}$$

причем коэффициенты разложения (3.2) определяются однозначно. Заметим, что для базисных столбцов $A_1, \ldots, A_r$ разложение (3.2) тривиально. Например, $A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \ldots 0 \cdot A_r$. Поэтому разлагают, обычно, только небазисные столбцы $A_{r+1}, \ldots, A_n$.

Алгоритм разложения столбцов данной системы по ее базе

1. Из данных столбцов $A_1, \ldots, A_n$ составить блочную матрицу $(A^T \mid a)$, левый блок A^T которой образуют строки $A_1^T, \ldots, A_n^T$, а правый столбец $a = (a_1 \ldots a_n)^T$ – символы $a_1, \ldots, a_n$, обозначающие строки матрицы A^T.

2. При помощи элементарных преобразований II и III типа, выполняемых над строками матрицы $(A^T \mid a)$, привести ее левый блок A^T к ступенчатому виду, при этом последние $n-r$ строк в левом блоке окажутся нулевыми.

3. Каждое из последних $n-r$ выражений, полученных в правом столбце блочной матрицы, приравнять нулевой строке $o^T = (0 \quad \ldots \quad 0)$. Транспонировать обе части каждого равенства, учитывая, что $a_i^T = A_i$. Выразить из полученных уравнений небазисные столбцы через базисные.

Если базу системы образуют не первые r столбцов, то перед выполнением п.2 алгоритма нужно так переставить строки матрицы $(A^T \mid a)$, соответствующие базисным столбцам, чтобы они оказались первыми.

Пример 10. Вычислить ранги матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

двумя способами: а) методом окаймляющих миноров, б) приводя матрицы к ступенчатому виду.

Решение. М а т р и ц а A. Вычислим ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&1&1\\3&3&2&3\end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров (п. а) з а д а н и я).

1. Выбираем первую строку ($i_1=1$) и первый столбец ($j_1=1$) матрицы A, на пересечении которых стоит ненулевой элемент $a_{11}=1\neq 0$. Получаем отличный от нуля минор первого порядка $M_1^1=1\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rg} A\geq 1$.

2. Добавляем к выбранным строке и столбцу еще одну строку $i_2=2$ и еще один столбец $j_2=2$. Получаем отличный от нуля минор второго порядка $M_{1\,2}^{1\,2}=\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}=-3\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rg} A\geq 2$.

3. Добавляем к выбранным строкам и столбцам еще одну строку $i_3=3$ и еще один столбец $j_3=3$. Получаем минор третьего порядка

$$M_{1\,23}^{1\,23}=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\3&3&2\end{vmatrix}=2+6+6-3-3-8=0.$$

Выбор оказался неудачным, так как получили нулевой минор. Вместо третьего столбца возьмем четвертый. Получаем отличный от нуля минор третьего порядка

$$M_{1\,24}^{1\,23}=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\3&3&3\end{vmatrix}=3+6+6-3-3-12=-3\neq 0.$$

Следовательно, $\operatorname{rg} A\geq 3$.

4. Поскольку исчерпаны все строки матрицы A, то миноров, окаймляющих $M_{1\,24}^{1\,23}$, нет. Следовательно, $\operatorname{rg} A=3$.

Найдем ранг матрицы A при помощи элементарных преобразований (п. б) з а д а н и я).

1. Приводим матрицу A к ступенчатому виду (ведущие элементы выделены полужирным шрифтом)

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&1&1\\2&1&1&1\\3&3&2&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&1&1\\0&-\mathbf{3}&-1&-1\\0&-3&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&1&1\\0&-\mathbf{3}&-1&-1\\0&0&0&\mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

2. В этой матрице три ненулевые строки. Следовательно, $\operatorname{rg} A=3$.

М а т р и ц а B. Вычислим ранг матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров (п. а) з а д а н и я).

1. Выбираем первую строку ($i_1=1$) и первый столбец ($j_1=1$) матрицы B, на пересечении которых стоит ненулевой элемент $b_{11}=1\neq 0$. Получаем ненулевой минор $M_1^1=1\neq 0$ первого порядка. Следовательно, $\operatorname{rg} B\geq 1$.

2. Добавляем к выбранным строке и столбцу еще одну строку $i_2=2$ и еще один столбец $j_2=2$. Получаем отличный от нуля минор второго порядка $M_{1\,2}^{1\,2}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rg} B\geq 2$.

3. Добавляем к выбранным строкам и столбцам еще одну строку $i_3=3$ и еще один столбец $j_3=3$. Получаем минор третьего порядка

$$M_{1\,23}^{1\,23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-2+1+1-1+2=0.$$

Выбор оказался неудачным, так как получили нулевой минор. Вычислим остальные миноры третьего порядка, окаймляющие минор $M_{1\,2}^{1\,2}$:

$$M_{1\,24}^{1\,23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad M_{1\,23}^{1\,24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad M_{1\,24}^{1\,24}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Все они оказались равными нулю. Следовательно, нельзя найти отличный от нуля окаймляющий минор третьего порядка. Поэтому ранг матрицы B равен 2.

Найдем ранг матрицы B при помощи элементарных преобразований (п. б) з а д а н и я).

1. Приводим матрицу B к ступенчатому виду (ведущие элементы выделены полужирным шрифтом):

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. В этой матрице две ненулевые строки. Следовательно, $\operatorname{rg} B=2$.

Ответ: $\operatorname{rg} A=3$, $\operatorname{rg} B=2$.

Пример 11. Найти максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Остальные столбцы представить в виде линейной комбинации столбцов из этой подсистемы.

Решение. Применяем алгоритм нахождения базы системы столбцов.

1. Составляем из данных столбцов матрицу

$$A = (A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \quad A_5) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Приводим матрицу A к ступенчатому виду, преобразовывая только строки (ведущие элементы выделены полужирным шрифтом):

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -4 & -6 \\ 2 & -4 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'. \quad (3.3)$$

3. Первый и третий столбцы матрицы A' – базисные (это столбцы с ведущими элементами). Следовательно, в исходной матрице A базисными также являются столбцы A_1 и A_3. Они образуют искомую базу данной системы столбцов.

Применим алгоритм разложения столбцов A_2, A_4, A_5 данной системы по ее базе A_1, A_3.

1. Составим блочную матрицу $(A^T \mid a)$, дополнив матрицу A^T справа столбцом символов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обозначающих ее строки:

$$(A^T \mid a) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & a_2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & a_3 \\ 1 & -6 & -4 & 7 & a_4 \\ -4 & 2 & -6 & 5 & a_5 \end{array}\right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки, поскольку базисные столбцы A_1 и A_3.

$$(A^T \mid a) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & a_2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & a_3 \\ 1 & -6 & -4 & 7 & a_4 \\ -4 & 2 & -6 & 5 & a_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & a_3 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & a_2 \\ 1 & -6 & -4 & 7 & a_4 \\ -4 & 2 & -6 & 5 & a_5 \end{array}\right).$$

2. Приводим левый блок к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования строк блочной матрицы. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{11} = -1 \ne 0$ (ведущие элементы выделены полужирным шрифтом). Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на (-1), к третьей – первую, умноженную на 2, к четвертой – первую, к пятой – первую, умноженную на (-4). Получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & a_3 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & a_2 \\ 1 & -6 & -4 & 7 & a_4 \\ -4 & 2 & -6 & 5 & a_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & a_3+(-1)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+2a_1 \\ 0 & -6 & -6 & 9 & a_4+a_1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & a_5+(-4)a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & a_3-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+2a_1 \\ 0 & -6 & -6 & 9 & a_4+a_1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & a_5-4a_1 \end{array}\right).$$

Выбираем ведущий элемент $a_{22} = 2 \ne 0$. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на 3, а к четвертой – вторую умноженную на (-1):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & -3 & a_3-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+2a_1 \\ 0 & -6 & -6 & 9 & a_4+a_1 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & a_5-4a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & -3 & a_3-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4+a_1+3(a_3-a_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5-4a_1+(-1)(a_3-a_1) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 0 & -2 & 2 & a_1 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 & -3 & a_3-a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2+2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4-2a_1+3a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5-3a_1-a_3 \end{array}\right).$$

3. Последние три строки нулевые, т.е.

$$a_2+2a_1 = o^T, \quad a_4-2a_1+3a_3 = o^T, \quad a_5-3a_1-a_3 = o^T,$$

где $o^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ – нулевая строка. Транспонируем обе части каждого равенства, учитывая, что $a_i^T = A_i$, $i = 1,\ldots,5$:

$$A_2+2A_1 = o, \quad A_4-2A_1+3A_3 = o, \quad A_5-3A_1-A_3 = o.$$

Выражаем столбцы A_2, A_4, A_5 через базисные: $A_2 = -2A_1$, $A_4 = 2A_1-3A_3$, $A_5 = 3A_1+A_3$.

Отметим, что найденная база A_1, A_3 данной системы столбцов не является единственной. По ступенчатому виду (3.3) можно определить, что базу системы образуют любые два столбца, за исключением первых двух, которые пропорциональны.

Ответ: A_1, A_3; $A_2 = -2A_1$, $A_4 = 2A_1-3A_3$; $A_5 = 3A_1+A_3$.

4. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1}, удовлетворяющая вместе с заданной матрицей A равенствам:

$$A^{-1}A = A\,A^{-1} = E\,,$$

называется ***обратной***. Матрицу A называют ***обратимой***, если для нее существует обратная, в противном случае – ***необратимой***. По определению матрицы A и A^{-1} перестановочны.

Из определения следует, что если обратная матрица A^{-1} существует, то она квадратная того же порядка, что и A. Однако не для всякой квадратной матрицы существует обратная. Если определитель матрицы A равен нулю ($\det A = 0$), то для нее не существует обратной. Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют ***вырожденной*** (***особой***) матрицей, в противном случае – ***невырожденной*** (***неособой***).

Теорема (о существовании и единственности обратной матрицы). *Квадратная матрица* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$*, определитель которой отличен от нуля, имеет обратную матрицу и притом только одну*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}A^{+}\,, \tag{4.1}$$

где $A^{+} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ *– матрица, транспонированная для матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы* A. Матрица A^{+} называется ***присоединенной матрицей*** по отношению к матрице A.

Свойства обратной матрицы

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; **2.** $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; **3.** $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$;

4. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$; **5.** $E^{-1} = E$.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью присоединенной

1. Вычислить определитель $\det A$ данной матрицы. Если $\det A = 0$, то обратной матрицы не существует (матрица A вырожденная).

2. Составить матрицу (A_{ij}) из алгебраических дополнений $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ элементов матрицы A.

3. Транспонируя матрицу (A_{ij}), получить присоединенную матрицу $A^{+} = (A_{ij})^{T}$.

4. Найти обратную матрицу (4.1), разделив все элементы присоединенной матрицы на определитель $\det A$: $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{+}$.

Например, для невырожденных квадратных матриц второго порядка из алгоритма следует простое правило нахождения обратной матрицы:

1) поменять местами элементы на главной диагонали;

2) изменить знаки у элементов побочной диагонали;

3) поделить полученную матрицу на определитель. В результате получить обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

1. Составить блочную матрицу $(A \mid E)$, приписав к данной матрице A единичную матрицу того же порядка.

2. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы $(A \mid E)$, привести ее левый блок A к простейшему виду Λ (1.3). При этом блочная матрица приводится к виду $(\Lambda \mid S)$, где S – квадратная матрица, полученная в результате преобразований из единичной матрицы E.

3. Если $\Lambda = E$, то блок S равен обратной матрице, т.е. $S = A^{-1}$. Если $\Lambda \neq E$, то матрица A не имеет обратной.

Рассмотрим ***матричные уравнения*** вида

$$A X = B \quad \text{и} \quad Y A = B, \tag{4.3}$$

где A и B – данные матрицы, причем матрица A квадратная, а X, Y – искомые матрицы.

Теорема (о существовании и единственности решения матричного уравнения). *Если определитель матрицы* A *отличен от нуля, то матричные уравнения* (4.3) *имеют единственные решения* $X = A^{-1}B$ *и* $Y = B\,A^{-1}$ *соответственно.*

Уравнения (4.3) могут иметь бесконечно много решений или ни одного решения, если $\det A = 0$. Например, уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

не имеет решений, а уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют любые матрицы вида $X = \begin{pmatrix} 3-2a & 3-2b \\ a & b \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Пример 12. Найти матрицы, обратные данным матрицам

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а) вычисляя присоединенную матрицу; б) применяя элементарные преобразования.

Решение. Матрица A. Найдем обратную матрицу A^{-1}, вычисляя присоединенную (п. а) задания).

1. Находим определитель матрицы $\det A = 2$.

2. Находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \qquad B_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1;$$

и составляем из них матрицу $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируя матрицу (A_{ij}), получаем присоединенную матрицу

$$A^{+} = (A_{ij})^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Разделив все элементы присоединенной матрицы на определитель $\det A = 2$, получим обратную матрицу: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{+} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Такой же результат получаем, используя правило (4.2) для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} при помощи элементарных преобразований (п. б) задания).

1. Составим блочную матрицу $(A \mid E)$, приписав к матрице A единичную матрицу того же порядка:

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями строк приводим ее к виду $(E \mid A^{-1})$:

$$(A \mid E)=\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{1} & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{1} & 2 & 1 & 0\\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{1} & 0 & 2 & -1\\ 0 & \mathbf{2} & -1 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}\mathbf{1} & 0 & 2 & -1\\ 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right).$$

В правом блоке получаем обратную матрицу $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Матрица B. Найдем обратную матрицу B^{-1}, вычисляя присоединенную (п. а) задания).

1. Находим определитель матрицы $\det B=2$.

2. Находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы:

$$B_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2;\quad B_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0;\quad B_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$B_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2;\quad B_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2;\quad B_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;$$

$$B_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1;\quad B_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0;\quad B_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

и составляем из них матрицу $(B_{ij})=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. Транспонируя матрицу (B_{ij}), получаем присоединенную матрицу

$$B^{+}=(B_{ij})^{T}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Разделив все элементы присоединенной матрицы на определитель $\det B=2$, получим обратную матрицу: $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}B^{+}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Проверим равенство $B^{-1}\cdot B=E$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Найдем обратную матрицу B^{-1} при помощи элементарных преобразований (п. б) задания).

1. Составим блочную матрицу $(B \mid E)$, приписав к матрице B единичную матрицу того же порядка:

$$(B \mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями строк приводим ее к виду $(E \mid B^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad \mathbf{1}}_{E_3} & & & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

В правом блоке получаем обратную матрицу $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

Пример 13. Решить матричные уравнения

1) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3X$;

2) $X \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3X$,

3) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Уравнение 1) преобразуем, перенося в левую часть слагаемое $3X = 3EX$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида $AX = B$. Его решение $X = A^{-1}B$ находим, применяя для обращения матрицы правило (4.2):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 16 & 13 \\ -10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -13 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Уравнение 2) преобразуем, перенося в левую часть слагаемое $3X = 3XE$:

$$X \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 3X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X\left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида $XA = B$. Его решение $X = BA^{-1}$ находим, применяя для обращения матрицы правило (4.2):

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение 3) имеет вид $AXB = C$. Его решение ищем по формуле $X = A^{-1}CB^{-1}$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -34 \\ 10 & -26 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} -16 & -13 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -11 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 13 & -34 \\ 10 & -26 \end{pmatrix}$.

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \tag{5.1}$$

Числа a_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ называются ***коэффициентами системы***; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ***свободными членами***; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – ***неизвестными***. Количество m уравнений в системе может быть меньше, больше или равно числу n неизвестных.

Решением системы называется упорядоченная совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такая, что после замены неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. Система называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Если система не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***. Совместная система называется ***определенной***, если ее решение единственное, в противном случае, если решений больше чем одно, система называется ***неопределенной***.

Система (5.1) называется ***однородной***, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 . \end{cases} \tag{5.2}$$

В отличие от однородной систему общего вида (5.1) называют ***неоднородной***.

Систему (5.1) принято записывать в матричной форме. Для этого из коэффициентов системы составляем ***матрицу системы*** A, свободные члены записываем в ***столбец свободных членов*** b, а неизвестные – в ***столбец неизвестных*** x:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матричная запись неоднородной системы уравнений (5.1) имеет вид

$$Ax = b, \tag{5.3}$$

а однородной системы уравнений (5.2) –

$$Ax = o\,, \tag{5.4}$$

где символ o в правой части обозначает нулевой столбец размеров $m \times 1$.

Рассмотрим случай, когда число m уравнений равно числу n неизвестных $(m = n)$, т.е. систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\,, \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n\,, \end{cases}$$

где матрица системы – квадратная n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ее определитель обозначим

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Правило Крамера. *Если определитель Δ матрицы системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{5.5}$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов, т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.6}$$

Если $\Delta = 0$ и хотя бы один определитель $\Delta_i \ne 0$, то система несовместна. Если $\Delta = \Delta_1 = \ldots = \Delta_n = 0$, то возможны два случая: либо система несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

Теорема Кронекера–Капелли. *Система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b)$.

Теорема Кронекера–Капелли дает лишь критерий существования решения системы, но не указывает способа отыскания этого решения.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

Пусть дана система (5.1) m линейных уравнений с n неизвестными. Для ее решения нужно выполнить следующие действия:

1. Составить ***расширенную матрицу системы***:

$$\left(A \mid b\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2. Используя элементарные преобразования над строками матрицы $\left(A \mid b\right)$, привести ее к ступенчатому виду (см. разд.1). Если базисный минор матрицы A расположен в первых r строках и r столбцах, получится следующий вид:

$$\left(\widetilde{A} \mid \widetilde{b}\right)=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1r} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \widetilde{a}_{2r} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \widetilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.7}$$

3. Выяснить, совместна система или нет. Для этого определить ранги матриц A и $\left(A \mid b\right)$:

$\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}\widetilde{A}=r$ – число ненулевых строк в матрице $\widetilde{A}$;

$$\operatorname{rg}\left(A \mid b\right)=\operatorname{rg}\left(\widetilde{A} \mid \widetilde{b}\right)=\begin{cases} r+1, \text{ если } \widetilde{b}_{r+1}\neq 0, \\ r, \text{ если } \widetilde{b}_{r+1}=0. \end{cases}$$

Если $\operatorname{rg} A\neq\operatorname{rg}\left(A \mid b\right)$ при $\widetilde{b}_{r+1}\neq 0$, то система не имеет решений. Процесс решения завершен. Если $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}\left(A \mid b\right)$ при $\widetilde{b}_{r+1}=0$, то система совместна. Процесс решения продолжается.

4. Для совместной системы ($\operatorname{rg} A=\operatorname{rg}\left(A \mid b\right)=r$) привести матрицу (5.7) к ***упрощенному*** виду (см. разд. 1). Для этого при помощи элементарных преобразований над строками добиваемся того, чтобы в каждом столбце, входящем в базисный минор, все элементы были равны нулю, за исключением одного, равного единице. Если базисный минор матрицы A рас-

положен в первых r строках и первых r столбцах, то матрица приводится к упрощенному виду:

$$\left(A' \mid b'\right)=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5.8}$$

Первые четыре пункта составляют ***прямой ход*** метода Гаусса. В результате прямого хода исходная система существенно упрощается (имеет вид $A'x = b'$):

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1\,n}x_n = b'_1 , \\ \qquad \cdots \\ x_r + a'_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{r\,n}x_n = b'_r . \end{cases} \tag{5.9}$$

5. По упрощенному виду (5.8) разделяем все неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на базисные и свободные. Неизвестные, которым соответствуют столбцы, входящие в базисный минор, называются ***базисными переменными***, остальные неизвестные – ***свободными переменными***. Для системы (5.9) базисными переменными являются $x_1, x_2, \ldots, x_r$, свободными переменными – $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Выражаем в (5.9) базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{1\,n}x_n , \\ \qquad \vdots \\ x_r = b'_r - a'_{r\,r+1}x_{r+1} - \ldots - a'_{r\,n}x_n . \end{cases} \tag{5.10}$$

Если ранг r матрицы системы равен числу n неизвестных ($r = \operatorname{rg} A = n$), то левый блок матрицы (5.8) будет представлен единичной матрицей E_n:

$$\left(A' \mid b'\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{array}\right).$$

Все неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут базисными, и формула (5.10) будет определять единственное решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 , \\ x_2 = b'_2 , \\ \quad \vdots \\ x_n = b'_n . \end{cases} \tag{5.11}$$

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($\operatorname{rg} A < n$), то система имеет бесконечно много решений, задаваемых формулой (5.10).

Равенства (5.10), выражающие базисные переменные через свободные, называются ***общим решением*** системы (5.1). Решение системы, получающееся по формуле (5.10) при задании конкретных значений свободных переменных, называется ***частным решением*** системы (5.1).

Свойства формул общего решения системы

1. *При любых значениях свободных переменных* $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ *по формуле* (5.10) *получаются такие значения базисных переменных, что упорядоченный набор чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *является решением системы* (5.1);

2. *Любое решение* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *системы* (5.1) *удовлетворяет равенствам* (5.10).

Процесс решения совместной системы (5.1) заканчивается получением формулы (5.10) общего решения (в частности, определением единственного решения (5.11)). Содержание п.5 алгоритма составляет ***обратный ход*** метода Гаусса.

Общее решение однородной системы

Однородная система линейных уравнений (5.2) (или (5.4)) всегда совместна, так как имеет ***тривиальное решение*** $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ (или $x = o$). Если ранг матрицы системы равен количеству неизвестных ($\operatorname{rg} A = n$), то тривиальное решение единственное. Предположим, что $r = \operatorname{rg} A < n$. Тогда однородная система имеет бесконечно много решений.

Заметим, что расширенная матрица $(A \mid o)$ однородной системы при элементарных преобразованиях строк приводится к упрощенному виду $(A' \mid o)$, т.е. $b'_1 = b'_2 = ... = b'_r = 0$ в (5.9). Поэтому из (5.10) находим ***общее решение однородной системы***:

$$\begin{cases} x_1 = -a'_{1\,r+1}x_{r+1} - ... - a'_{1\,n}x_n\,, \\ \qquad\vdots \\ x_r = -a'_{r\,r+1}x_{r+1} - ... - a'_{r\,n}x_n\,. \end{cases} \tag{5.12}$$

Получим другую форму записи решений однородной системы. Для этого по формулам (5.12) общего решения однородной системы найдем $(n-r)$ частных решений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$, придавая свободным переменным следующие ***стандартные наборы значений*** (всякий раз полагая, что одна из свободных переменных равна единице, а остальные равны нулю):

1) $x_{r+1}=1, x_{r+2}=0,\ldots,x_n=0$: $\quad \varphi_1=\begin{pmatrix}-a'_{1\,r+1} & \cdots & -a'_{r\,r+1} & 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$;

2) $x_{r+1}=0, x_{r+2}=1,\ldots,x_n=0$: $\quad \varphi_2=\begin{pmatrix}-a'_{1\,r+2} & \cdots & -a'_{r\,r+2} & 0 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}^T$;

…

$n-r$) $x_{r+1}=0, x_{r+2}=0,\ldots,x_n=1$: $\varphi_{n-r}=\begin{pmatrix}-a'_{1\,n} & \cdots & -a'_{r\,n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$.

В результате получается $(n-r)$ решений:

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}-a'_{1\,r+1}\\ \vdots\\ -a'_{r\,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \varphi_2=\begin{pmatrix}-a'_{1\,r+2}\\ \vdots\\ -a'_{r\,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ldots,\ \varphi_{n-r}=\begin{pmatrix}-a'_{1\,n}\\ \vdots\\ -a'_{r\,n}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$

которые линейно независимы [4].

Любая совокупность $(n-r)$ линейно независимых решений $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-r}$ однородной системы называется ***фундаментальной системой* (*совокупностью*) *решений***. Заметим, что фундаментальная система решений определяется неоднозначно. Однородная система может иметь разные фундаментальные системы решений, состоящие из одного и того же количества $(n-r)$ линейно независимых решений.

Теорема (об общем решении однородной системы). *Если* $\varphi_1,\ \varphi_2,\ldots,\varphi_{n-r}$ *– фундаментальная система решений однородной системы уравнений* (5.4)*, то столбец*

$$x=C_1\,\varphi_1+C_2\,\varphi_2+\cdots+C_{n-r}\,\varphi_{n-r} \tag{5.13}$$

при любых значениях ***произвольных постоянных*** $C_1,\ C_2,\ldots,\ C_{n-r}$ *также является решением системы* (5.4), и, наоборот, *для каждого решения* x *этой системы найдутся такие значения произвольных постоянных* $C_1,\ C_2,\ldots,\ C_{n-r}$*, при которых это решение* x *удовлетворяет равенству* (5.13).

Матрица $\Phi=(\varphi_1\quad\varphi_2\quad\cdots\quad\varphi_{n-r})$, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений однородной системы, называется ***фундаментальной***. Используя фундаментальную матрицу, общее решение (5.13) однородной системы можно записать в виде

$$x=\Phi\,c\,, \tag{5.14}$$

где $c=(C_1\quad\cdots\quad C_{n-r})^T$ – столбец произвольных постоянных.

Алгоритм решения однородной системы

1–5. Выполнить первые 5 пунктов алгоритма Гаусса. При этом не требуется выяснять совместность системы, так как любая однородная система имеет решение (п.3 метода Гаусса следует пропустить). Получить формулы (5.10) общего решения, которые для однородной системы будут иметь вид (5.12).

Если ранг r матрицы системы равен числу n неизвестных ($r = \operatorname{rg} A = n$), то система имеет единственное тривиальное решение $x = o$ и процесс решения заканчивается.

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($\operatorname{rg} A < n$), то система имеет бесконечно много решений. Множество решений находим в следующих пунктах алгоритма.

6. Найти фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ решений однородной системы. Для этого подставить в (5.12) последовательно $(n-r)$ стандартных наборов значений свободных переменных, в которых все свободные переменные равны нулю, кроме одной, равной единице.

7. Записать общее решение однородной системы по формуле (5.13).

Заметим, что в п.6 алгоритма вместо стандартного набора значений свободных переменных можно использовать и другие наборы значений, лишь бы они обеспечивали линейную независимость получаемых частных решений однородной системы.

Общее решение неоднородной системы можно представить при помощи фундаментальной системы решений.

Теорема (об общем решении неоднородной системы). *Пусть* $x^{\text{н}}$ *– решение неоднородной системы, а* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ *– фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений. Тогда столбец*

$$x = x^{\text{н}} + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_{n-r}\varphi_{n-r} \tag{5.15}$$

при любых значениях произвольных постоянных C_1, $C_2, \ldots, C_{n-r}$ *является решением неоднородной системы*, и, наоборот, *для каждого решения* x *этой системы найдутся такие значения произвольных постоянных* C_1, $C_2, \ldots, C_{n-r}$, *при которых это решение* x *удовлетворяет равенству* (5.15).

Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы:

$$x = \underbrace{x^{\text{н}}}_{\substack{\text{частное решение} \\ \text{неоднородной системы}}} + \underbrace{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_{n-r}\varphi_{n-r}}_{\text{общее решение однородной системы}} .$$

Алгоритм решения неоднородной системы

1–5. Выполнить первые пять пунктов метода Гаусса решения системы уравнений и получить формулу общего решения неоднородной системы вида (5.10).

6. Найти частное решение $x^{\text{н}}$ неоднородной системы, положив в (5.10) все свободные переменные равными нулю.

7. Записав формулы (5.12) общего решения соответствующей однородной системы, составить фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ ее решений.

8. Записать общее решение неоднородной системы по формуле (5.15).

Заметим, что, используя фундаментальную матрицу Φ однородной системы $Ax = o$, решение неоднородной системы $Ax = b$ можно представить в виде

$$x = x^{\text{н}} + \Phi c, \tag{5.16}$$

где $x^{\text{н}}$ – частное решение неоднородной системы; $c = (C_1 \ \cdots \ C_{n-r})^T$ – столбец произвольных постоянных.

Решение системы линейных уравнений с применением элементарных преобразующих матриц

Нахождение решения системы (5.3) в виде (5.16) сводится к следующим действиям (рассматривается случай, когда матрица системы ненулевая):

1. Привести матрицу A системы (5.3) к простейшему виду (см. разд. 1): $\Lambda = SAT$, где $\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ – матрица тех же размеров $m \times n$, что и A. При этом находятся элементарные преобразующие матрицы S и T, порядков m и n, соответственно, а также ранг $r = \operatorname{rg} A \geq 1$.

2. Проверить условие совместности системы. При $r = m$ система совместна. Если $r < m$, то составить матрицу $\Psi = \left(O \mid E_{m-r}\right)S$ из последних $m - r$ строк матрицы S и проверить условие $\Psi b = o$. Если условие выполняется, то система совместна. В противном случае система несовместна и процесс решения заканчивается.

3. Найти частное решение неоднородной системы по формуле $x^{\text{н}} = T\Lambda^T S b$. Если $r = n$, то система имеет единственное решение $x = x^{\text{н}}$ и процесс решения заканчивается.

4. Составить фундаментальную матрицу $\Phi = T\left(\dfrac{O}{E_{n-r}}\right)$ из последних $n - r$ столбцов матрицы T.

5. Записать общее решение системы (5.3) в виде (5.16).

Свойства решений системы линейных уравнений

1. *Если столбцы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ *– решения однородной системы уравнений, то любая их линейная комбинация* $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_k \varphi_k$ *также является решением однородной системы.*

2. *Если столбцы* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ *– решения неоднородной системы уравнений, то любая их* ***аффинная комбинация*** $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_k \varphi_k$ $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1)$ *также является решением неоднородной системы.*

Напомним, что ***аффинной комбинацией*** столбцов называется такая их линейная комбинация, сумма коэффициентов которой равна единице.

Алгоритм составления однородной системы с заданным множеством решений

Чтобы составить линейную однородную систему с минимальным числом уравнений, решениями которой были все линейные комбинации столбцов $A_1, A_2 \ldots, A_k$ (одинаковых размеров $n \times 1$) и только они, нужно выполнить следующие действия.

1. Составить из заданных столбцов матрицу $A = (A_1 \quad \ldots \quad A_k)$, а затем – блочную матрицу $(A \mid E)$, приписав матрице A единичную матрицу порядка n.

2. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы $(A \mid E)$, привести ее левый блок A к ступенчатому виду $A_{\text{ст}}$ (см. разд.1). При этом блочная матрица приводится к виду $(A_{\text{ст}} \mid S)$, где S – квадратная матрица, полученная в результате преобразований из единичной. Попутно определяем ранг r матрицы A, который равен количеству ненулевых строк матрицы $A_{\text{ст}}$.

3. Если $r < n$, то составить матрицу $\Psi = (O \mid E_{n-r})S$ из последних $n-r$ строк матрицы S. Искомая однородная система имеет вид

$$\Psi x = o . \tag{5.17}$$

Если $r = n$, то искомая однородная система имеет вид (5.17) с матрицей $\Psi = o^T$, т.е.

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 .$$

Применяя этот алгоритм, получаем одну из возможных однородных систем, обладающих указанным свойством: все линейные комбинации данных столбцов и только они являются решениями системы. Однако, систем с меньшим числом уравнений, чем у составленной по алгоритму, не существует.

Алгоритм составления неоднородной системы с заданным множеством решений

Чтобы составить линейную неоднородную систему с минимальным числом уравнений, решениями которой были все аффинные комбинации столбцов $A_0, A_1, ..., A_k$ (одинаковых размеров $n\times 1$) и только они, нужно выполнить следующие действия.

1–3. Выполнить три пункта алгоритма составления однородной системы с заданными решениями для столбцов $A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_k - A_0$ и получить матрицу Ψ.

4. Вычислить столбец $b = \Psi\, A_0$ и записать искомую неоднородную систему

$$\Psi\, x = b\,. \tag{5.18}$$

Применяя этот алгоритм, составляем одну из возможных однородных систем, обладающих указанным свойством: все аффинные комбинации данных столбцов и только они являются решениями системы. Однако, систем с меньшим числом уравнений, чем у составленной по алгоритму, не существует.

Пример 14. Решить системы уравнений

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1\,, \\ -2x_1 + x_2 = 2\,; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9\,, \\ x_1 + x_2 = 3\,, \\ \ 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

по правилу Крамера.

Решение. Система 1). Составляем матрицу системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Вычисляем ее определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot(-2) = 5$. Так как определитель отличен от нуля, система уравнений имеет единственное решение. По формулам (5.6), (5.5) находим определители Δ_i и неизвестные x_i ($i = 1, 2$):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3\,,\ \ x_1 = \frac{-3}{5} = -0{,}6\,;\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot(-2) = 4\,,\ \ x_2 = \frac{4}{5} = 0{,}8\,.$$

Сделаем проверку. Подставляя найденные значения $x_1 = -0{,}6$ и $x_2 = 0{,}8$ неизвестных в уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} -0{,}6 + 2\cdot 0{,}8 = 1\,, \\ -2\cdot(-0{,}6) + 0{,}8 = 2\,. \end{cases}$$

Оба равенства верные. Значит, система 1) решена правильно.

С и с т е м а 2). Составляем матрицу системы $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вычисляем ее определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2$. Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. По формулам (5.6), (5.5) находим определители Δ_i и неизвестные x_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 6 - 7 - 6 = 2, \qquad x_1 = \frac{2}{2} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 7 - 9 = 4, \qquad x_2 = \frac{4}{2} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 18 - 12 - 14 = 6, \quad x_3 = \frac{6}{2} = 3.$$

Сделаем проверку: $\begin{cases} 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 9, \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3, \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 7. \end{cases}$ Все равенства верные. Значит, система 2) решена правильно.

Ответ: 1) $x_1 = -0{,}6$, $x_2 = 0{,}8$; 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_1 = 3$.

Пример 15. Решить неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 15x_2 + 13x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -7 \end{cases}$$

методом Гаусса:

а) получить формулы общего решения, выразив базисные переменные через свободные;

б) найти частное решение;

в) записать формулы общего решения соответствующей однородной системы уравнений, используя фундаментальную систему решений;

г) записать общее решение неоднородной системы уравнений при помощи фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Решение. Выполняем п. а) з а д а н и я , применяя метод Гаусса.

1. Составим расширенную матрицу системы:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 13 & -1 & 10 \\ \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \end{array}\right).$$

2. Используя элементарные преобразования над строками матрицы $(A \mid b)$, приводим ее к ступенчатому виду. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{31} = 1 \neq 0$ (выделен полужирным шрифтом). Меняем местами первую и третью строки:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 13 & -1 & 10 \\ \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 5 & 15 & 13 & -1 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

В полученной матрице ведущим элементом стал элемент $a_{11} = 1 \neq 0$, а ведущей строкой стала первая. Ко второй строке прибавляем первую (т.е. ведущую строку), умноженную на (-5); к третьей – первую, умноженную на (-2):

$$(A \mid b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 5 & 15 & 13 & -1 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 45 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \end{array}\right).$$

Исключаем из рассмотрения первый столбец и первую строку. Во втором столбце после исключения первой строки нет ведущего элемента (все элементы нулевые). Ищем ненулевой элемент в третьем столбце, за исключением элемента a_{13} из первой строки. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{33} = 1 \neq 0$. Меняем местами вторую и третью строки:

$$(A \mid b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 45 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 45 \end{array}\right).$$

К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на (-3):

$$(A \mid b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 3 & -21 & 45 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\widetilde{A} \mid \widetilde{b}).$$

Исключаем из рассмотрения вторую строку. Так как третья строка нулевая (нет ведущего элемента) делаем вывод, что расширенная матрица приведена к ступенчатому виду.

3. Определяем ранги матриц по количеству ненулевых строк: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A \mid b) = 2$. Согласно теореме Кронекера–Капелли, система совместна.

4. Приводим матрицу $(\widetilde{A} \mid \widetilde{b})$ к упрощенному виду. Удаляем нулевую строку. К первой строке прибавляем вторую, умноженную на (-2):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 3 & 0 & 18 & -37 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 15 \end{array}\right) = (A' \mid b').$$

5. Так как ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($\operatorname{rg} A < n$), то система имеет бесконечно много решений, задаваемых формулой (5.10). Переменные x_1, x_3 – базисные, а x_2, x_4 – свободные. Записываем общее решение неоднородной системы, выражая базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -37 - 3x_2 - 18x_4, \\ \quad x_3 = 15 + 7x_4, \end{cases} \tag{5.19}$$

где $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Выполняем п. б) задания, подставляя нулевые значения свободных переменных $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ в (5.19). Вычисляем значения базисных переменных $x_1 = -37$, $x_3 = 15$. Следовательно, столбец $x^{\text{н}} = \begin{pmatrix} -37 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}^T$ – частное решение системы.

Выполняем п. в) задания, применяя алгоритм решения однородной системы. Первые 5 пунктов метода Гаусса приведены в п. а). Ранг $r = 2$ матрицы системы меньше числа неизвестных $n = 4$. Поэтому однородная система имеет бесконечно много решений. Находим это множество решений.

6. Записываем формулы (5.12) общего решения соответствующей однородной системы. Отбрасывая свободные члены в (5.19), получаем

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 18x_4, \\ \quad x_3 = 7x_4, \end{cases} \tag{5.20}$$

где $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$. Так как $n = 4$ и $r = \operatorname{rg} A = 2$, то надо подобрать $n - r = 2$ линейно независимых решения φ_1, φ_2. Эти решения удобно получать, заполняя таблицу. Обозначения всех

Переменные	x_i	φ_1	φ_2
БП	x_1	–3	–18
СП	x_2	**1**	**0**
БП	x_3	0	7
СП	x_4	**0**	**1**

неизвестных $x_1, \ldots, x_4$ записываем во втором столбце таблицы. Слева от него (в первом столбце) указываем названия переменных в формулах общего решения: БП – базисные переменные, СП – свободные. Правее второго столбца будем записывать фундаментальную систему решений. Сначала записываем стандартные наборы значений свободных переменных. В столбце φ_1 пишем значения $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, а в столбце φ_2 – $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ (выделены в таблице полужирным шрифтом). Затем по формулам (5.20) вычисляем и заносим в таблицу соответствующие значения базисных переменных. Для $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ по формулам (5.20) получаем $x_1 = -3$, $x_3 = 0$. Этими значениями заполняем столбец φ_1. Для $x_2 = 0$, $x_4 = 1$ вычисляем $x_1 = -18$, $x_3 = 7$ и записываем в столбец φ_2. В результате получили фундаментальную систему решений φ_1, φ_2, а также фундаментальную матрицу Φ:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} -3 & -18 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

7. Записываем формулы (5.13) общего решения однородной системы

$$x = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Ответ можно записать в виде (5.14):

$$x = \begin{pmatrix} -3 & -18 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Выполняем п. г) задания, применяя алгоритм решения неоднородной системы уравнений. Первые 5 пунктов метода Гаусса приведены в п. а).

6. Частное решение $x^{\text{н}} = (-37 \quad 0 \quad 15 \quad 0)^T$ неоднородной системы было найдено в п. б).

7. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица (5.21) соответствующей однородной системы найдены в п. в).

8. Записываем общее решение неоднородной системы по формуле (5.15):

$$x = x^{\text{н}} + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Ответ можно записать в виде (5.16):

$$x=\begin{pmatrix}-37\\0\\15\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&-18\\1&0\\0&7\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: а) $\begin{cases}x_1=-37-3x_2-18x_4,\\ x_3=15+7x_4,\end{cases}$ где $x_2,x_4\in\mathbb{R}$;

б) $\begin{pmatrix}-37&0&15&0\end{pmatrix}^T$; в) $x=C_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-18\\0\\7\\1\end{pmatrix}$; где C_1, C_2 – произвольные постоянные;

г) $x=\begin{pmatrix}-37\\0\\15\\0\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-18\\0\\7\\1\end{pmatrix}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x_1+6x_2+5x_3+x_4=1,\\ 5x_1+15x_2+13x_3-x_4=10,\\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=-7\end{cases}$$

при помощи элементарных преобразующих матриц.

Решение. 1. Для матрицы системы $A=\begin{pmatrix}2&6&5&1\\5&15&13&-1\\1&3&2&4\end{pmatrix}$ при решении примера 6 были найдены простейший вид $\Lambda=SAT$, элементарные преобразующие матрицы S и T, а также ранг $r=\operatorname{rg}A$:

$$\Lambda=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 0&0&0&0\end{array}\right),\quad S=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-2\\-3&1&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&-2&-3&-18\\0&0&1&0\\0&1&0&7\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad r=2.$$

2. Проверяем условие совместности. Так как $r=2<3=m$, то составляем матрицу $\Psi=\left(O\mid E_{m-r}\right)S$, выделяя последнюю строку матрицы S:

$$\Psi=\left(0\quad 0\mid 1\right)\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-2\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1&1\end{pmatrix}.$$

Записываем условие $\Psi b = o$: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = 0$. Условие выполняется, значит, система совместна.

3. Находим частное решение неоднородной системы:

$$x^{\text{н}} = T\Lambda^T S b = T\left(\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right) S b = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Записываем фундаментальную матрицу $\Phi = T\begin{pmatrix} O \\ \hline E_{n-r} \end{pmatrix}$, составляя ее из последних $n - r = 4 - 2 = 2$ столбцов матрицы T:

$$\Phi = T\begin{pmatrix} O \\ \hline E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -18 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы образуют фундаментальную систему решений однородной системы.

5. Записываем общее решение системы:

$$x = x^{\text{н}} + \Phi c = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -18 \\ 1 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Результат совпадает с решением примера 15.

Ответ: $x = \begin{pmatrix} -37 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 17. Для системы столбцов

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

составить:

а) линейную однородную систему с минимальным количеством уравнений, решениями которой были бы все линейные комбинации столбцов A_1, A_2, A_3, A_4 и только они;

б) линейную неоднородную систему с минимальным количеством уравнений, решениями которой были бы все аффинные комбинации столбцов A_0, A_1, A_2 и только они.

Решение. Выполняем п. а) задания, применяя алгоритм составления однородной системы с заданным множеством решений.

1. Составляем из заданных столбцов матрицу $A = (A_1 \quad \dots \quad A_4)$, а затем – блочную матрицу

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы $(A \mid E)$, приводим ее левый блок A к ступенчатому виду. Выберем в качестве ведущего элемента $a_{11} = 1 \neq 0$ (выделен полужирным шрифтом), тогда первая строка будет ведущей. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (-2), к четвертой строке – первую, умноженную на (-1):

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{32} = 1 \neq 0$. Меняем местами вторую и третью строки:

$$(A \mid E) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь ведущий элемент – $a_{22} = 1$, а ведущая строка – вторая. К третьей строке прибавляем вторую, умноженную на (–7), к четвертой строке – вторую, умноженную на (–4):

$$(A \mid E) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1} & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

В результате преобразований матрица A приведена к ступенчатому виду, а из единичной матрицы получилась матрица

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Попутно найден ранг $r=2$ матрицы A, равный количеству ненулевых строк матрицы ступенчатого вида.

3. Так как $r=2<4=n$, то составляем матрицу $\Psi=(O\mid E_{n-r})S$ из последних $n-r=4-2=2$ строк матрицы S:

$$\Psi=(O\mid E_{n-r})S=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записываем искомую однородную систему (5.17)

$$\Psi\, x=o \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -2x_1+x_2-7x_3=0, \\ -x_1-4x_3+x_4=0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x_1-x_2+7x_3=0, \\ x_1+4x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Выполняем п. б) задания, применяя алгоритм составления неоднородной системы с заданным множеством решений. Для двух столбцов A_1-A_0, A_2-A_0 делаем первые три пункта алгоритма составления однородной системы.

1. Составляем матрицу $A=\begin{pmatrix}A_1-A_0 & A_2-A_0\end{pmatrix}$, а затем – блочную матрицу

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. При помощи элементарных преобразований, выполняемых над строками матрицы $(A\mid E)$, приводим ее левый блок A к ступенчатому виду. Выберем в качестве ведущего элемента $a_{11}=-1\neq 0$ (выделен полужирным шрифтом), тогда первая строка будет ведущей. Ко второй строке прибавим первую, умноженную на 3, к третьей – первую, умноженную на (–1), к четвертой строке – первую, умноженную на 2:

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Исключаем из рассмотрения первую строку и первый столбец. Выбираем в качестве ведущего элемент $a_{42} = 1 \neq 0$. Меняем местами вторую и четвертую строки:

$$(A \mid E) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Теперь ведущий элемент $a_{22} = 1 \neq 0$, а ведущая строка – вторая. К третьей и четвертой строкам прибавим вторую, умноженную на (–2):

$$(A \mid E) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{-1} & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

В результате преобразований матрица A приведена к ступенчатому виду, найден ее ранг $r = 2$, а из единичной матрицы получилась матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Так как $r = 2 < 4 = n$, то составляем матрицу $\Psi = (O \mid E_{n-r})S$ из последних $n - r = 4 - 2 = 2$ строк матрицы S:

$$\Psi = (O \mid E_{n-r})S = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Вычисляем столбец свободных членов $b = \Psi\, A_0$:

$$b = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и записываем искомую неоднородную систему (5.18):

$$\Psi\, x = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5x_1 + x_3 - 2x_4 = -7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5x_1 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

6. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦ

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Ненулевой столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условию

$$Ax = \lambda x, \tag{6.1}$$

называется ***собственным вектором*** матрицы A. Число λ в равенстве (6.1) называется ***собственным значением*** матрицы A. Говорят, что собственный вектор x ***соответствует*** (***принадлежит***) собственному значению λ.

Поставим задачу нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы. Определение (6.1) можно записать в виде

$$(A - \lambda E)x = o,$$

где E – единичная матрица n-го порядка. Таким образом, условие (6.1) представляет собой однородную систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Поскольку нас интересуют только нетривиальные решения ($x \neq o$) однородной системы, то определитель матрицы системы должен быть равен нулю:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

В противном случае по правилу Крамера система имеет единственное тривиальное решение. Таким образом, задача нахождения собственных значений матрицы свелась к решению уравнения (6.3), которое называется ***характеристическим уравнением*** матрицы A. Левая часть уравнения (6.3) представляет собой многочлен степени n переменной λ:

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Этот многочлен называется ***характеристическим многочленом*** матрицы A. Согласно основной теореме алгебры, характеристический многочлен можно представить в виде

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = a_n(\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – корни многочлена кратности $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Другими словами, характеристический многочлен имеет n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема (о собственных значениях матрицы). *Корни характеристического многочлена* (*характеристического уравнения* (6.3)) *и только они являются собственными значениями матрицы*.

По основной теореме алгебры характеристическое уравнение имеет n в общем случае комплексных корней (с учетом их кратностей). Поэтому собственные значения и собственные векторы имеются у любой квадратной матрицы. Причем собственные значения матрицы определяются однозначно (с учетом их кратности), а собственные векторы – неоднозначно. Совокупность всех собственных значений матрицы (с учетом их кратностей) называют ее ***спектром***. Спектр матрицы называется ***простым***, если собственные значения матрицы попарно различные (все корни характеристического уравнения простые).

Свойства собственных векторов

1. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы*.

2. *Ненулевая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению*.

3. *Чтобы из множества собственных векторов выделить максимальную линейно независимую систему собственных векторов, нужно для всех различных собственных значений* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *записать одну за другой системы линейно независимых собственных векторов, в частности, одну за другой фундаментальные системы решений однородных систем*

$$(A - \lambda_1 E)x = o,\ (A - \lambda_2 E)x = o, \ldots,\ (A - \lambda_k E)x = o.$$

Алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений матрицы

1. Составить характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

2. Найти все различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ характеристического уравнения $\Delta_A(\lambda) = 0$.

3. Для корня $\lambda = \lambda_1$ найти фундаментальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-r}$ решений однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)\, x = o\,,$$

где $r = \mathrm{rg}\,(A - \lambda_1 E)$.

4. Записать линейно независимые собственные векторы матрицы A, отвечающие собственному значению λ_1:

$$s_1 = C_1\varphi_1\,, \quad s_2 = C_2\varphi_2\,, \ldots, \quad s_{n-r} = C_{n-r}\varphi_{n-r}\,, \tag{6.4}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ – отличные от нуля произвольные постоянные. Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1, образуют ненулевые столбцы вида $s = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \ldots + C_{n-r}\varphi_{n-r}$. Здесь и далее собственные векторы матрицы будем обозначать буквой s.

Повторить п.3, 4 для остальных собственных значений $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Приведение матрицы к диагональному виду

Квадратные матрицы A и B n-го порядка называются ***подобными***, если существует такая невырожденная матрица S $(\det S \neq 0)$, что

$$B = S^{-1} A S\,.$$

Преобразование матрицы A по формуле $S^{-1}AS$ называется ***преобразованием подобия***, а матрица S – ***преобразующей***.

Рассмотрим задачу ***приведения квадратной матрицы к диагональному виду*** при помощи преобразования подобия. Для квадратной матрицы A требуется найти подобную диагональную матрицу $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ и преобразующую матрицу S ($\Lambda = S^{-1} A S$).

Теорема (о приведении матрицы к диагональному виду). *Для того чтобы квадратная матрица A n-го порядка приводилась к диагональному виду при помощи преобразования подобия $\Lambda = S^{-1}AS$, необходимо и достаточно, чтобы она имела n линейно независимых собственных векторов.*

Следствие. *Если матрица имеет простой спектр, то она приводится к диагональному виду.*

Диагональный вид $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ матрицы A и преобразующую матрицу S получаем, применяя следующий алгоритм.

Алгоритм приведения квадратной матрицы к диагональному виду

1-4. Находим собственные векторы и собственные значения матрицы A (выполняя п.1–4 соответствующего алгоритма).

5. Если матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов $s_1,\ldots,s_n$, то она может быть приведена к диагональному виду при помощи преобразования подобия (в этом случае перейти к п.6), иначе задача не имеет решения.

6. Из собственных векторов $s_1,\ldots,s_n$ составить преобразующую матрицу $S=(s_1 \ \cdots \ s_n)$, а по собственным значениям $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ матрицы A составить матрицу $\Lambda = diag(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ – диагональный вид матрицы A.

Пример 18. Найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матриц

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -12 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 6 & 4 & -4\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

Можно ли при помощи преобразования подобия привести каждую из заданных матриц к диагональному виду? Если можно, то указать диагональный вид и соответствующую преобразующую матрицу.

Решение. М а т р и ц а A. 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 3\\ -12 & 8-\lambda\end{vmatrix}=(-4-\lambda)(8-\lambda)+36=\lambda^2-4\lambda-32+36=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$(\lambda-2)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=2 \text{ (корень двойной).}$$

3. Для двойного корня $\lambda_1=\lambda_2=2$ составляем однородную систему уравнений $(A-\lambda_1 E)x=o$:

$$\begin{pmatrix}-4-2 & 3\\ -12 & 8-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-6 & 3\\ -12 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-6 & 3 & 0\\ -12 & 6 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $n-r=1$ решения. Выражаем базисную переменную x_2 через свободную: $x_2=2x_1$. Полагая $x_1=1$, получаем решение $\varphi_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

4. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=2$: $s_1=C_1\varphi_1=C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, где C_1 – отличная от нуля произвольная постоянная.

5. У матрицы нет двух линейно независимых собственных векторов. Все собственные векторы пропорциональны. Поэтому при помощи преобразования подобия привести матрицу к диагональному виду нельзя.

Матрица B. 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_B(\lambda)=|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -5\\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(5-\lambda)+20=\lambda^2-6\lambda+25.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-6\lambda+25=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{9-25}=3\pm 4i \text{ (простые сопряженные корни).}$$

3^1. Для простого корня $\lambda_1=3-4i$ составляем однородную систему уравнений $(B-\lambda_1E)x=o$:

$$\begin{pmatrix}-2+4i & -5\\ 4 & 2+4i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Уравнения пропорциональны, поскольку определитель матрицы равен нулю. Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $n-r=1$ решения. Поэтому первое уравнение не учитываем, а второе делим на 4 и выражаем базисную переменную x_1 через свободную x_2: $x_1=-(0{,}5+i)x_2$. Полагая, например, $x_2=-2\neq 0$, получаем $x_1=1+2i$. Столбец $\begin{pmatrix}1+2i\\-2\end{pmatrix}$ образует фундаментальную систему решений.

4^1. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1=3-4i$: $s_1=C_1\begin{pmatrix}1+2i\\-2\end{pmatrix}$, где C_1 – любое отличное от нуля комплексное число.

3^2. Для простого корня $\lambda_2=3+4i$ составляем однородную систему уравнений $(B-\lambda_2E)x=o$:

$$\begin{pmatrix} -2-4i & -5 \\ 4 & 2-4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения пропорциональны, поскольку определитель матрицы равен нулю. Ранг матрицы системы равен 1 ($r=1$), число неизвестных $n=2$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $n-r=1$ решения. Поэтому первое уравнение не учитываем, а второе делим на 4 и выражаем базисную переменную x_1 через свободную x_2: $x_1=-(0{,}5-i)x_2$. Полагая, например, $x_2=-2\neq 0$, получаем $x_1=1-2i$. Столбец $\begin{pmatrix} 1-2i \\ -2 \end{pmatrix}$ образует фундаментальную систему решений.

4^2. Записываем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2=3+4i$: $s_2=C_2\begin{pmatrix} 1-2i \\ -2 \end{pmatrix}$, где C_2 – любое отличное от нуля комплексное число.

5. Для собственных значений $\lambda_1=3-4i$ и $\lambda_2=3+4i$ возьмем соответствующие собственные векторы (полагая $C_1=1$, $C_2=1$):

$$s_1=\begin{pmatrix} 1+2i \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s_2=\begin{pmatrix} 1-2i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы линейно независимы (по свойству 1 собственных векторов).

6. Составляем из собственных векторов преобразующую матрицу

$$S=\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

а из собственных значений $\lambda_1=3-4i$ и $\lambda_2=3+4i$ – искомую диагональную матрицу Λ:

$$\Lambda=diag(3-4i,3+4i)=\begin{pmatrix} 3-4i & 0 \\ 0 & 3+4i \end{pmatrix}.$$

Проверим равенство $S\Lambda=BS$, равносильное преобразованию подобия $\Lambda=S^{-1}BS$:

$$S\Lambda=\begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-4i & 0 \\ 0 & 3+4i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1+2i)(3-4i) & (1-2i)(3+4i) \\ -2(3-4i) & -2(3+4i) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11+2i & 11-2i \\ -6+8i & -6-8i \end{pmatrix};$$

$$BS=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11+2i & 11-2i \\ -6+8i & -6-8i \end{pmatrix}.$$

Равенство верное.

М а т р и ц а C. 1. Составляем характеристический многочлен матрицы

$$\Delta_C(\lambda)=\left| C-\lambda E \right|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -2 \\ 6 & 4-\lambda & -4 \\ -3 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=(5-\lambda)(4-\lambda)^2+24-12(4-\lambda)-4(5-\lambda)=$$

$$=-\lambda^3+13\lambda^2-40\lambda+36\,.$$

2. Решаем характеристическое уравнение:

$$-\lambda^3+13\lambda^2-40\lambda+36=0\,.$$

Найдем рациональные корни (если они есть) методом подбора. Подставляя последовательно делители свободного члена в уравнение, находим корень $\lambda_1=2$. Разделив характеристический многочлен на $\lambda-2$, получаем многочлен $-\lambda^2+11\lambda-18$, который имеет два корня $\lambda_2=2$ и $\lambda_3=9$. Следовательно, спектр матрицы составляют двойной корень $\lambda_1=\lambda_2=2$ и простой корень $\lambda_3=9$.

3^1. Для двойного корня $\lambda_1=\lambda_2=2$ составляем однородную систему $\left(B-\lambda_1 E\right)x=o$. Решаем ее методом Гаусса, преобразуя расширенную матрицу системы

$$(C-2E\ |\ o)=\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен единице ($r=1$), следовательно, фундаментальная система решений состоит из двух решений ($n-r=2$). Базисную переменную x_2 выражаем через свободные: $x_2=-3x_1+2x_3$. Задавая стандартные наборы свободных переменных $x_1=1, x_3=0$ и $x_1=0, x_3=1$, получаем два решения

$$\varphi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \varphi_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4^1. Записываем множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_1=\lambda_2=2$: $s=C_1\varphi_1+C_2\varphi_2=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные, не равные нулю одновременно.

3^2. Для простого корня $\lambda_3=9$ составляем однородную систему уравнений $\left(C-\lambda_3 E\right)x=o$. Решаем эту систему методом Гаусса, приводя расширенную матрицу системы к упрощенному виду (ведущие элементы выделены полужирным шрифтом):

$$\left(C-9E \mid o\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 6 & -5 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ \mathbf{-14} & 0 & -14 & 0 \\ -7 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен 2 ($r=2$), число неизвестных $n=3$, следовательно, фундаментальная система решений состоит из $n-r=1$ решения. Выражаем базисные переменные x_1, x_2 через свободную x_3:

$$\begin{cases} x_1=-x_3\,, \\ x_2=-2x_3\,, \end{cases}$$

и, полагая, например, $x_3=-1$, получаем решение $\varphi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4^2. Записываем множество собственных векторов, соответствующих собственному значению $\lambda_3=9$: $s=C_3\varphi_3=C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, где C_3 – отличная от нуля произвольная постоянная.

5. Согласно свойству 3 максимальную линейно независимую систему собственных векторов составляют полученные фундаментальные системы решений

$$s_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad s_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\qquad s_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы C третьего порядка найдено три линейно независимых собственных вектора. Поэтому матрицу можно привести к диагональному виду.

6. Составляем из собственных векторов преобразующую матрицу

$$S=(s_1\quad s_2\quad s_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а из собственных значений $\lambda_1=\lambda_2=2$ и $\lambda_3=9$ – искомую диагональную матрицу Λ:

$$\Lambda = diag(2,2,9) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Проверим равенство $S\Lambda = C\,S$, равносильное преобразованию подобия $\Lambda = S^{-1} C\,S$:

$$S\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ -6 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix};$$

$$C\,S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ -6 & 4 & 18 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Равенство верное.

Ответ: матрица A) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, где $C_1 \neq 0$, привести к диагональному виду при помощи преобразования подобия нельзя;

матрица B) $\lambda_1 = 3 - 4i$, $C_1 \begin{pmatrix} 1+2i \\ -2 \end{pmatrix}$, где $C_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 3 + 4i$, $C_2 \begin{pmatrix} 1-2i \\ -2 \end{pmatrix}$, где $C_2 \neq 0$, матрицу можно привести к диагональному виду $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$ при помощи преобразования подобия с преобразующей матрицей $\begin{pmatrix} 1+2i & 1-2i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$;

матрица C) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, где C_1, C_2 не равны нулю одновременно, $\lambda_3 = 9$, $C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, где $C_3 \neq 0$, матрицу можно привести к диагональному виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ при помощи преобразования подобия с преобразующей матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Квадратичной формой переменных $x_1,\ldots,x_n$ называется выражение вида

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j\,, \tag{7.1}$$

в котором коэффициенты a_{ij}, не все равные нулю, удовлетворяют ***условиям симметричности*** $a_{ij}=a_{ji}$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,n$. Будем рассматривать ***вещественные*** (***действительные***) ***квадратичные формы***, коэффициенты которых являются действительными числами, а переменные принимают действительные значения.

Приводя подобные члены, квадратичную форму (7.1) можно представить в виде

$$q(x)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots+a_{nn}x_n^2\,. \tag{7.2}$$

Это вид квадратичной формы ***с приведенными подобными членами***.

Симметрическая матрица $A=(a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы (7.1), называется ***матрицей квадратичной формы***. Определитель этой матрицы называется ***дискриминантом***, а ее ранг – ***рангом квадратичной формы***. Квадратичная форма называется ***вырожденной***, если ее матрица вырожденная ($\operatorname{rg} A<n$), в противном случае, когда матрица невырожденная ($\operatorname{rg} A=n$), квадратичная форма называется ***невырожденной***.

Составляя из переменных матрицу-столбец $x=(x_1\ \cdots\ x_n)^T$, квадратичную форму можно записать в ***матричном*** виде

$$q(x)=x^T A x\,. \tag{7.3}$$

Чтобы получить матрицу A квадратичной формы (7.1), нужно:

1) записать ее в виде (7.2) с приведенными подобными членами;

2) на главной диагонали матрицы поставить коэффициенты при квадратах переменных;

3) элементы, симметричные главной диагонали, взять равными половине соответствующих коэффициентов у произведений разных переменных;

4) коэффициенты у отсутствующих членов считать равными нулю.

Преобразование квадратичной формы при линейной замене переменных

Рассмотрим, как меняются коэффициенты квадратичной формы при линейной замене переменных. Пусть переменные $x_1,\ldots,x_n$ (условно называемые ***старыми***) заменяются на переменные $y_1,\ldots,y_n$ (условно называемые ***новыми***) по формулам

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}y_1 + \ldots + s_{1n}y_n \ , \\ \qquad\vdots \\ x_n = s_{n1}y_1 + \ldots + s_{nn}y_n \ , \end{cases} \tag{7.6}$$

где s_{ij} – некоторые числа ($i = 1,\ldots,n$, $j = 1,\ldots,n$), а выражения вида $s_{i1}y_1 + \ldots + s_{in}y_n$, $i = 1,\ldots,n$, – ***линейные формы*** [4]. Такая замена переменных называется ***линейной***. Составим из коэффициентов s_{ij} в (7.6) квадратную ***матрицу линейной замены переменных*** $S = (s_{ij})$. Тогда формулы (7.6) можно записать в виде

$$x = Sy \,. \tag{7.7}$$

Линейная замена (7.7) называется ***невырожденной***, если определитель матрицы S отличен от нуля.

Приведем ***формулу изменения матрицы квадратичной формы*** (7.3) ***при линейной невырожденной замене переменных***. Подставляя (7.7) в (7.3), получаем

$$q(Sy) = (Sy)^T ASy = y^T S^T A\, Sy = y^T A'y \,,$$

т.е. квадратичную форму $\widetilde{q}(y) = y^T A'y$, матрица которой связана с матрицей заданной квадратичной формы равенством

$$A' = S^T \cdot A \cdot S \,. \tag{7.8}$$

Свойства линейных невырожденных замен переменных

1. *Если* $x = Sy$ *– линейная невырожденная замена переменных, то обратная замена* $y = S^{-1}x$, *выражающая новые переменные* ($y_1,\ldots, y_n$) *через старые* ($x_1,\ldots, x_n$), *является также линейной и невырожденной.*

2. *Если* $x = Sy$ *и* $y = Tz$ *– линейные невырожденные замены переменных, то замена* $x = STz$ *является также линейной и невырожденной.*

3. *Линейная невырожденная замена переменных не изменяет ранга квадратичной формы.*

Канонический вид квадратичной формы

Говорят, что квадратичная форма имеет ***канонический*** вид, если ее матрица диагональная, другими словами, в квадратичной форме имеются только члены с квадратами переменных, а все попарные произведения различных переменных отсутствуют (соответствующие коэффициенты равны нулю):

$$\widetilde{q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 = y^T \Lambda y \,, \tag{7.9}$$

где $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – диагональная матрица, для которой условие симметричности матрицы квадратичной формы, разумеется, выполняется. Ранг квадратичной формы равен количеству отличных от нуля коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в ее каноническом виде.

Количество положительных (отрицательных) коэффициентов в каноническом виде (7.9) называется ***положительным*** (***отрицательным***) ***индексом*** квадратичной формы, а разность положительного и отрицательного индексов – ***сигнатурой*** квадратичной формы.

Задача приведения квадратичной формы к каноническому виду формулируется следующим образом. Для данной квадратичной формы (7.1) требуется найти такую линейную невырожденную замену переменных (7.6), при которой квадратичная форма принимает канонический вид (7.9).

Теорема (о приведении квадратичной формы к каноническому виду). *Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.*

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Для приведения квадратичной формы n переменных

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + ... + a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать такую переменную (***ведущую***), которая входит в квадратичную форму во второй и в первой степенях одновременно (если в квадратичной форме есть член с квадратом переменной и с произведением этой переменной на другую переменную), и перейти к п. 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к п.3.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.

2. По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить сумму этих членов до полного квадрата (разумеется, добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма). Получим сумму полного квадрата некоторой линейной формы (в которую входит ведущая переменная) и квадратичной формы, в которую ведущая переменная не входит. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять за одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования с п. 1.

3. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется к разности квадратов двух новых переменных, т.е. в новой квадратичной форме $\widetilde{q}(y)$ будут квадраты переменных с отличными от нуля коэффициентами. Продолжить преобразования новой квадратичной формы с п.1.

Выполняя п.2, 3 алгоритма, можно определить матрицы используемых замен переменных. В результате их перемножения (в порядке нахождения) получается матрица искомой замены (согласно свойству 2 линейных невырожденных замен переменных).

Заметим, что канонический вид квадратичной формы определяется неоднозначно, так как зависит от последовательности выбора ведущих переменных.

Рассмотрим еще один метод приведения квадратичной формы к каноническому виду, который учитывает особенности преобразования (7.8) матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных.

Угловыми минорами квадратной матрицы A (n-го порядка) называются следующие миноры:

$$\Delta_1 = M_1^1 = a_{11},\ \Delta_2 = M_{1\,2}^{1\,2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_k = M_{1\,2\ldots k}^{1\,2\ldots k}, \ldots,\ \Delta_n = M_{12\ldots n}^{12\ldots n} = \det A,$$

где угловой минор $\Delta_k = M_{1\,2\ldots k}^{1\,2\ldots k}$ k-го порядка составлен из элементов матрицы A, стоящих на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы A (рис.7.1).

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис.7.1

Теорема Якоби (о каноническом виде квадратичной формы). *Если квадратичная форма* $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^T Ax$ *имеет ранг* $r = \operatorname{rg} A$ *и ее угловые миноры отличны от нуля*:

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \ldots,\ \ \Delta_r = M_{1\,2\ldots r}^{1\,2\ldots r} \neq 0, \tag{7.10}$$

то ее можно привести к каноническому виду

$$\widetilde{q}(y) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}}y_r^2,\ \text{где}\ \Delta_0 = 1, \tag{7.11}$$

при помощи линейной замены переменных $x = Sy$ *с верхней треугольной матрицей* S *вида*:

$$S=\begin{pmatrix}1 & s_{12} & \cdots & s_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & s_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

При выполнении условий теоремы Якоби для нахождения канонического вида и соответствующей матрицы S линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Составить блочную матрицу $(A \mid E)$, приписав к матрице A квадратичной формы единичную матрицу тех же размеров.

2. При помощи элементарных преобразований III типа строк блочной матрицы $(A \mid E)$ привести ее левый блок A к ступенчатому виду A', выбирая на первом шаге в качестве ведущей строки – первую, на втором шаге – вторую и т.д. В результате получить блочную матрицу $(A' \mid S^T)$, где S – искомая матрица замены переменных. Элементы главной диагонали матрицы A' равны коэффициентам в квадратичной форме (7.9):

$$\lambda_1 = a'_{11},\ \lambda_2 = a'_{22},\dots,\ \lambda_r = a'_{rr}.$$

Если надо найти только канонический вид квадратичной формы, а соответствующую замену переменных искать не требуется, то достаточно вычислить угловые миноры матрицы квадратичной формы и при выполнении условий (7.10) записать ее канонический вид (7.11).

Закон инерции квадратичных форм. *Ранг, положительный и отрицательный индексы, а также сигнатура вещественной квадратичной формы не зависят от действительной невырожденной линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду.*

Знакоопределенность квадратичных форм

Вещественная квадратичная форма $q(x)=x^T Ax$ называется ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, если $q(x)>0$ ($q(x)<0$) для любых $x \neq o$. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***определенными*** (***знакоопределенными***). Если же квадратичная форма принимает как положительные, так и отрицательные значения, то она называется ***неопределенной*** (***знакопеременной***). Определенность и неопределенность квадратичных форм обозначаются неравенствами $q(x)>0$, $q(x)<0$, $q(x) \gtrless 0$ соответственно.

Критерий Сильвестра. *Для того чтобы квадратичная форма* $q(x)=x^T Ax$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны*:

$$\Delta_1=a_{11}>0\,,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0\,,\ldots,\ \ \Delta_n=\det A>0\,. \tag{7.12}$$

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров ее матрицы чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1=a_{11}<0\,,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0\,,\ldots,\ \ (-1)^n\Delta_n=(-1)^n\det A>0\,. \tag{7.13}$$

Для неопределенности (*знакопеременности*) *квадратичной формы достаточно, чтобы хотя бы один главный минор четного порядка был отрицателен, либо два главных минора нечетного порядка имели бы разные знаки* (достаточный ***признак неопределенности*** квадратичной формы).

Пример 19. Квадратичные формы

1) $q(x)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2$;

2) $q(x)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2+4x_1x_3+x_3^2$

привести к каноническому виду: форму 1) – методом Лагранжа; форму 2) – методом Якоби. Указать соответствующие замены переменных. Вычислить ранг, положительный и отрицательный индексы, сигнатуру и дискриминант каждой квадратичной формы.

Решение. Форма 1). Применяем алгоритм метода Лагранжа.

1^1. В данную квадратичную форму переменная x_1 входит в первой и второй степенях одновременно. Выбираем ее в качестве ведущей.

2^1. По ведущей переменной (x_1) выделяем полный квадрат:

$$q(x)=x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-x_2x_3+x_3^2=[\,x_1^2+2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2\,]-$$

$$-(x_2-x_3)^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2=(x_1+x_2-x_3)^2+x_2x_3\,.$$

Обозначая $y_1=x_1+x_2-x_3$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3$, получаем новую квадратичную форму $\tilde{q}(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2y_3$. Продолжаем преобразования, переходя к п.1 алгоритма.

1^2. В квадратичной форме $\tilde{q}(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2y_3$ нет ведущих переменных, поскольку каждая переменная входит в форму либо во второй степени, либо в первой, но не в первой и второй степенях одновременно. Однако имеется произведение $y_2 y_3$ разных переменных. Переходим к п.3 алгоритма.

3^1. Заменяем выбранную пару переменных $y_2 = z_2 - z_3$, $y_3 = z_2 + z_3$. Оставшуюся старую переменную y_1 принимаем за соответствующую новую $y_1 = z_1$. Получаем квадратичную форму

$$\tilde{\tilde{q}}(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + (z_2 - z_3)(z_2 + z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 .$$

Переходим к п.1 алгоритма.

1^3. В квадратичной форме $\tilde{\tilde{q}}(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ нет ведущих переменных (все переменные входят в форму во второй степени), кроме того, нет произведений различных переменных. Следовательно, квадратичная форма имеет канонический вид с диагональной матрицей $\Lambda = diag(1, 1, -1)$.

Найдем теперь невырожденную линейную замену переменных, приводящую данную форму к каноническому виду. В п. 2^1 и 3^1 решения выполнялись замены $x = S_1 y$ и $y = S_2 z$ с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица S замены $x = Sz$ находится как произведение

$$S = S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. искомая замена переменных $x_1 = z_1 + 2z_3$, $x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_2 + z_3$.

Сделаем проверку. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ квадратичной формы по формуле (7.8) вычисляем диагональную матрицу $\Lambda = S^T A S$ квадратичной формы, приведенной к каноническому виду. Имеем

$$\Lambda = S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\Lambda = diag(1, 1, -1)$, что соответствует найденному каноническому виду.

По коэффициентам канонического вида квадратичной формы вычисляем ранг $r=3$ (количество отличных от нуля коэффициентов), положительный индекс 2 (количество положительных коэффициентов), отрицательный индекс 1 (количество отрицательных коэффициентов) и сигнатуру $2-1=1$ (разность между количествами положительных и отрицательных коэффициентов). Находим дискриминант квадратичной формы $\det A=-0{,}25$.

Ф о р м а 2). Применяем алгоритм метода Якоби.

1. Составляем матрицу A квадратичной формы, а затем – блочную матрицу $(A \mid E)$:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&0&1\end{pmatrix},\qquad (A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\1&3&0&0&1&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right).$$

2. Элементарными преобразованиями III типа, выполняемыми над строками блочной матрицы, приводим ее левый блок к ступенчатому виду:

$$(A\mid E)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1}&1&2&1&0&0\\0&\mathbf{2}&-2&-1&1&0\\0&-2&-3&-2&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-2&-1&1&0\\0&0&-5&-3&1&1\end{array}\right)=(A'\mid S^T).$$

Следовательно, квадратичная форма $q(x)$ приводится к каноническому виду $q(Sy)=y_1^2+2y_2^2-5y_3^2$ при помощи замены переменных $x=Sy$ с матрицей

$$S=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

т.е. при $x_1=y_1-y_2-3y_3$, $x_2=y_2+y_3$, $x_3=y_3$. Коэффициенты квадратичной формы $q(Sy)$ совпадают с элементами главной диагонали матрицы A')

По коэффициентам канонического вида квадратичной формы вычисляем ранг $r=3$ (количество отличных от нуля коэффициентов), положительный индекс 2 (количество положительных коэффициентов), отрицательный индекс 1 (количество отрицательных коэффициентов) и сигнатуру $2-1=1$ (разность между количествами положительных и отрицательных коэффициентов). Находим дискриминант квадратичной формы $\det A=\det A'=1\cdot 2\cdot(-5)=-10$ (как произведение элементов на главной диагонали матрицы A').

Ответ: форма 1): канонический вид $z_1^2+z_2^2-z_3^2$; замена переменных $x_1=z_1+2z_3$, $x_2=z_2-z_3$, $x_3=z_2+z_3$; ранг 3; положительный индекс 2; отрицательный индекс 1; сигнатура 1; дискриминант $-0{,}25$;

форма 2): канонический вид $y_1^2+2y_2^2-5y_3^2$; замена переменных $x_1=y_1-y_2-3y_3$, $x_2=y_2+y_3$, $x_3=y_3$; ранг 3; положительный индекс 2; отрицательный индекс 1; сигнатура 1; дискриминант -10.

Пример 20. Используя критерий Сильвестра, определить, при каких значениях a квадратичная форма $3x^2+4ay^2+11z^2+4axy-2xz+4ayz$ положительно определена.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2a & -1 \\ 2a & 4a & 2a \\ -1 & 2a & 11 \end{pmatrix}.$$

Находим угловые миноры этой матрицы

$\Delta_1=3$,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 2a \\ 2a & 4a \end{vmatrix}=12a-4a^2,$$

$$\Delta_3=\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2a & -1 \\ 2a & 4a & 2a \\ -1 & 2a & 11 \end{vmatrix}=132a-4a^2-4a^2-4a-12a^2-44a^2=128a-64a^2.$$

Записываем критерий положительной определенности квадратичной формы и решаем полученную систему неравенств:

$$\begin{cases} \Delta_1>0, \\ \Delta_2>0, \\ \Delta_3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3>0, \\ 12a-4a^2>0, \\ -64a^2+128a>0. \end{cases}$$

Первое неравенство верное. Его можно не учитывать. Решаем систему из двух последних неравенств:

$$\begin{cases} 12a-4a^2>0, \\ -64a^2+128a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a(3-a)>0, \\ 64a(2-a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(3-a)>0, \\ a(2-a)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<3, \\ 0<a<2. \end{cases}$$

Таким образом, система неравенств имеет решение $0<a<2$. Следовательно, квадратичная форма положительно определена при $a\in(0;2)$.

Ответ: $a\in(0;2)$.

8. ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Матрицы A, B, а также выражение матрицы C через A и B приведены в таблице 1. Вычислить матрицу C.

Таблица 1.

Вар.	A	B	C	**Вар.**	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$3AB-2B^TA^T$	**2**	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$3AB-2B^TA^T$
3	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$4AB-3B^TA^T$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$5AB-4B^TA^T$
5	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$3AB-2B^TA^T$	**6**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$4AB-2B^TA^T$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$4AB-3B^TA^T$	**8**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$5AB-3B^TA^T$
9	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$4AB-5B^TA^T$	**10**	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$2AB-3B^TA^T$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$3AB-4B^TA^T$	**12**	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$3AB-2B^TA^T$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$3AB-4B^TA^T$	**14**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$5AB-3B^TA^T$
15	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$2AB-4B^TA^T$	**16**	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	$3AB-2B^TA^T$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$5AB-2B^TA^T$	**18**	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$2AB-5B^TA^T$

19	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$5AB-4B^TA^T$	**20**	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$4AB-5B^TA^T$

2. Найти 1) x^TAy, 2) $\operatorname{tr}(Axy^T)$, где $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, а матрица A приведена в таблице 2.

Таблица 2.

Вар.	A	**Вар.**	A	**Вар.**	A	**Вар.**	A	**Вар.**	A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	**5**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	**7**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	**9**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Многочлен $p(x)$ и матрица A приведены в таблице 3. Найти $p(A)$.

Таблица 3.

Вар.	A	$p(x)$	**Вар.**	A	$p(x)$	**Вар.**	A	$p(x)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-2x+3	**2**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	x^2+2x-5	**3**	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-3x+2
4	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-2x+4	**5**	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	x^2-3x+1	**6**	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$2x^2-3x+1$
7	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$2x^2-x+3$	**8**	$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	x^2+2x-5	**9**	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$2x^2+x-3$
10	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$3x^2-x+1$	**11**	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$2x^2+3x+1$	**12**	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-2x+5
13	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$2x^2-3x+2$	**14**	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	x^2-3x+4	**15**	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-x^2+2x+1$
16	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$-x^2+3x+2$	**17**	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$-x^2-2x+4$	**18**	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	x^2+4x-5
19	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	x^2+4x-3	**20**	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$-x^2-x+3$			

4. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A, приведенной в таблице 2.

5. Блочные матрицы $A=\left(A_{11} \mid A_{12}\right)$ и $B=\left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$ приведены в табл.4. Найти блоки C_{11} и C_{12} блочной матрицы $C=\left(C_{11} \mid C_{12}\right)=AB$.

Таблица 4.

Вар.	A	B	**Вар.**	A	B
1	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ \hline 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$	**2**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$
3	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$	**4**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$
5	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$	**6**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 3 & -2 \\ \hline 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$
7	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$	**8**	$\left(\begin{array}{c\|cc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$
9	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$	**10**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$
11	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$	**12**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 1 & -1 \\ \hline 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$
13	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$	**14**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 3 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$
15	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$	**16**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} 4 & 3 & -1 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$
17	$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$	**18**	$\left(\begin{array}{c\|cc} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|cc} -2 & 2 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$

19	$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$	**20**	$\left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c|cc} -3 & 2 & -1 \\ \hline 4 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$

6. Элементарными преобразованиями привести матрицу A, указанную в таблице 5, к простейшему виду $\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} E & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$. Найти элементарные преобразующие матрицы S и T, удовлетворяющие равенству $\Lambda = SAT$.

Таблица 5.

Вар.	A	Вар.	A	Вар.	A	Вар.	A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 3 & 1 \\ 4 & 19 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 13 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & -5 & 8 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 5 & 8 & 9 & -1 \end{pmatrix}$	**7**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 8 & 9 & 7 & -9 \\ 1 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \\ 3 & 5 & -9 & 3 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 8 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$	**19**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 17 & 9 & 8 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

7. Матрицы A и B приведены в таблице 6. Найти произведение матриц и вычислить определитель произведения.

Таблица 6.

Вар.	A	B	Вар.	A	B	Вар.	A	B
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	**3**	$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	**5**	$\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

7	$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	**9**	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$	**11**	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$	**17**	$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$			

8. Найти определители A и B третьего порядка, приведенные в таблице 7.

Таблица 7.

Вар.	A	B	**Вар.**	A	B
1	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & \cos\alpha \\ -3 & 2 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 3 \end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & 5 & -3 \\ \sin\alpha & 3 & 5 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & \sin\alpha & 4 \\ \sin\alpha & -2 & \cos\alpha \\ -4 & \cos\alpha & 3 \end{vmatrix}$	**4**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \sin\alpha \\ -4 & 3 & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 5 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & -2 & -3 \\ \cos\alpha & 3 & -2 \end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & \cos\alpha & -3 \\ \cos\alpha & 2 & \sin\alpha \\ 3 & \sin\alpha & 4 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & \cos\alpha \\ 5 & 4 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 2 \end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & 2 & 4 \\ \sin\alpha & -4 & 2 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -5 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & \sin\alpha & 4 \\ \sin\alpha & -2 & \cos\alpha \\ -4 & \cos\alpha & 3 \end{vmatrix}$	**10**	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -2 & \sin\alpha \\ 2 & 5 & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 3 \end{vmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 3 & -7 \\ \cos\alpha & 7 & 3 \end{vmatrix}$	**12**	$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & \cos\alpha & -3 \\ \cos\alpha & 2 & \sin\alpha \\ 3 & \sin\alpha & 4 \end{vmatrix}$

13	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 5 & \cos\alpha \\ -5 & -2 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 7 \end{vmatrix}$	**14**	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -5 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & -3 & -4 \\ \sin\alpha & 4 & -3 \end{vmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & \sin\alpha & -5 \\ \sin\alpha & 3 & \cos\alpha \\ 5 & \cos\alpha & -2 \end{vmatrix}$	**16**	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & \sin\alpha \\ 2 & 3 & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 4 \end{vmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -7 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & 2 & -6 \\ \sin\alpha & 6 & 2 \end{vmatrix}$	**18**	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & \cos\alpha & -6 \\ \cos\alpha & 1 & \sin\alpha \\ 6 & \sin\alpha & -3 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 4 & \cos\alpha \\ -4 & -3 & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 2 \end{vmatrix}$	**20**	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 5 & 4 \\ \cos\alpha & -4 & 5 \end{vmatrix}$

9. Применяя элементарные преобразования, вычислить определитель A четвертого порядка, приведенный в таблице 8.

Таблица 8.

Вар.	A	**Вар.**	A	**Вар.**	A	**Вар.**	A
1	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	**2**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	**3**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	**4**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$	**6**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$	**7**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	**8**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	**10**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	**11**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	**12**	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	**14**	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	**15**	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	**16**	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

17	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ -3 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	**18**	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$	**19**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	**20**	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

10. Вычислить ранги матриц A и B, приведенных в таблице 9, двумя способами: а) методом окаймляющих миноров, б) приводя матрицы к ступенчатому виду.

Таблица 9.

Вар.	A	B	**Вар.**	A	B
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

15	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & -7 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

11. Найти максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов A_1, A_2, A_3, A_4, приведенных в таблице 10. Остальные столбцы представить в виде линейной комбинации столбцов из этой подсистемы.

Таблица 10.

Вар.	A_1	A_2	A_3	A_4	**Вар.**	A_1	A_2	A_3	A_4
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix}2\\9\\1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}11\\3\\-8\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\5\\-5\\6\end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix}3\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7\\-4\\-8\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5\\7\\7\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\7\\-2\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\4\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3\\-4\\-6\\2\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\8\\-5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix}-1\\4\\2\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\9\\7\\-7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\0\\10\\-1\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}-1\\5\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\8\\1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-8\\4\\-5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix}-1\\6\\4\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\-6\\7\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-4\\1\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\5\\1\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}-1\\7\\-6\\-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\-8\\6\\-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\-5\\4\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix}-2\\8\\6\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-7\\-3\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2\\4\\6\\5\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}-2\\9\\7\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4\\1\\1\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\3\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5\\-3\\-2\\6\end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\9\\0\\-7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\1\\-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

12. Найти матрицы, обратные матрицам A и B, указанным в таблице 11, двумя способами: а) вычисляя присоединенную матрицу; б) применяя элементарные преобразования.

Таблица 11.

Вар.	A	B	**Вар.**	A	B
1	$\begin{pmatrix}3 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\-2 & -5 & 12\\1 & 4 & -4\end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix}6 & 7\\7 & 8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\2 & 7 & -1\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}7 & 4\\9 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\-1 & 6 & 0\\-2 & 11 & 1\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}9 & -4\\11 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\-2 & 3 & -3\\1 & -3 & 10\end{pmatrix}$

5	$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 19 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -7 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 2 & -7 & -9 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & -9 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 2 & 5 & -8 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & -11 & 7 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

13. Решить матричные уравнения 1) – 3), приведенные в таблице 12.

Таблица 12.

Вар.	Уравнение 1)	Уравнение 2)	Уравнение 3)
1	$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2X$	$X \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2X$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2X$	$X \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2X$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix}3&7\\3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}3&7\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}4&1\\3&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}9&4\\7&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}15&8\\8&7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}15&8\\8&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}1&5\\1&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3&7\\4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}7&4\\7&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}7&4\\7&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}7&5\\4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}7&3\\7&6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}7&3\\7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}8&7\\7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}4&7\\7&6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}4&7\\7&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}7&5\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}7&6\\6&9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}7&6\\6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}2&5\\1&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}3&7\\3&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}3&7\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}6&5\\5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}8&7\\7&10\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}8&7\\7&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}4&5\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}3&6\\6&5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}3&6\\6&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}7&5\\3&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}5&14\\2&11\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}5&14\\2&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}3&2\\8&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}6&7\\7&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}6&7\\7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}4&7\\3&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}7&7\\3&6\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}7&7\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}3&4\\7&9\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&-3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}1&7\\4&7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}1&7\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}7&6\\6&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix}7&3\\12&9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}7&3\\12&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}6&5\\5&4\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1&5\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}2&7\\3&3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}2&7\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}4&7\\3&5\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}3&4\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix}11&4\\16&9\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}11&4\\16&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}6&7\\5&6\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

19	$\begin{pmatrix}3&3\\7&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$X\begin{pmatrix}3&3\\7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-2X$	$\begin{pmatrix}9&4\\2&1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1&5\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix}6&7\\3&7\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$X\begin{pmatrix}6&7\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2X$	$\begin{pmatrix}8&5\\3&2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}-1&3\\-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

14. Решить по правилу Крамера системы уравнений 1), 2), приведенные в таблице 13.

Таблица 13.

Вар.	Система 1)	Система 2)	**Вар.**	Система 1)	Система 2)
1	$\begin{cases}5x+2y=1,\\-2x-y=3.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3=1,\\2x_1+5x_2-8x_3=2,\\x_1+2x_2-x_3=3.\end{cases}$	**2**	$\begin{cases}x-3y=2,\\-x+2y=3.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+2x_2-5x_3=1,\\2x_1+3x_2-5x_3=3,\\x_1+x_2+x_3=2.\end{cases}$
3	$\begin{cases}5x-2y=3,\\2x-y=4.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3=1,\\2x_1-5x_2+6x_3=3,\\-x_1+2x_2-2x_3=-1.\end{cases}$	**4**	$\begin{cases}-x+2y=1,\\2x-3y=4.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-4x_2-5x_3=3,\\2x_1-7x_2-9x_3=1,\\x_1-3x_2-5x_3=2.\end{cases}$
5	$\begin{cases}-x+y=1,\\-3x+4y=2.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-3x_2-4x_3=-1,\\2x_1-5x_2-3x_3=0,\\x_1-2x_2=-1.\end{cases}$	**6**	$\begin{cases}x-2y=1,\\-3x+5y=4.\end{cases}$	$\begin{cases}-x_1-2x_2+5x_3=-1,\\2x_1+3x_2-7x_3=2,\\x_1+x_2-3x_3=4.\end{cases}$
7	$\begin{cases}x+y=3,\\-5x-4y=1.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+3x_2-6x_3=1,\\2x_1+5x_2-8x_3=2,\\-x_1-2x_2+3x_3=1.\end{cases}$	**8**	$\begin{cases}x+3y=2,\\-x-4y=1.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3=1,\\2x_1-3x_2-x_3=2,\\x_1-x_2+x_3=3.\end{cases}$
9	$\begin{cases}x-5y=1,\\-x+4y=3.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-3x_2+2x_3=1,\\-2x_1+5x_2=-2,\\x_1-4x_2+7x_3=2.\end{cases}$	**10**	$\begin{cases}x-y=2,\\-5x+6y=1.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=1,\\2x_1+7x_2-x_3=1,\\x_1+3x_2+3x_3=-1.\end{cases}$
11	$\begin{cases}2x-5y=1,\\-x+3y=2.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=2,\\x_1+3x_2-6x_3=-1,\\2x_1+5x_2-8x_3=1.\end{cases}$	**12**	$\begin{cases}x-2y=1,\\2x-5y=4.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+3x_2-5x_3=-2,\\-x_1-2x_2+5x_3=1.\end{cases}$
13	$\begin{cases}x+3y=-3,\\-2x-7y=1.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-2x_2+2x_3=2,\\2x_1-5x_2+6x_3=1,\\x_1-3x_2+5x_3=-1.\end{cases}$	**14**	$\begin{cases}x-4y=-1,\\-2x+7y=3.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-3x_2-5x_3=1,\\-2x_1+7x_2+9x_3=3,\\-x_1+4x_2+5x_3=2.\end{cases}$
15	$\begin{cases}x-2y=2,\\-2x+3y=-2.\end{cases}$	$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4,\\x_1+2x_2-3x_3=3,\\x_1+x_2-x_3=1.\end{cases}$	**16**	$\begin{cases}x+5y=3,\\-x-4y=2.\end{cases}$	$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=1,\\-2x_1+3x_2+4x_3=-2,\\-x_1+3x_2+6x_3=1.\end{cases}$

17	$\begin{cases} x-y=1, \\ 5x-6y=3. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=1, \\ 2x_1+7x_2-x_3=-2, \\ -x_1-4x_2+3x_3=3. \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x-5y=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=2, \\ 2x_1-3x_2-x_3=1, \\ -x_1+2x_2+3x_3=3. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x-7y=1, \\ x-2y=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1+7x_2-2x_3=1, \\ x_1+3x_2+2x_3=2. \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} -x+2y=3, \\ 2x-3y=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=2. \end{cases}$

15. Решить неоднородную систему уравнений, приведенную в таблице 15, методом Гаусса:

а) получить формулы общего решения, выразив базисные переменные через свободные;

б) найти частное решение;

в) записать формулы общего решения соответствующей однородной системы уравнений, используя фундаментальную систему решений;

г) записать общее решение неоднородной системы уравнений при помощи фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Таблица 15.

Вар.	Неоднородная система	**Вар.**	Неоднородная система
1	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0, \\ x_1+10x_2+3x_3+x_4=-5, \\ 4x_1+19x_2+9x_3+x_4=-5 \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=1, \\ 4x_1+13x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=-3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+5x_2+2x_4=8, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 8x_1+x_2+3x_3+x_4=7 \end{cases}$	**4**	$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+x_2+5x_3+7x_4=9, \\ 2x_1-6x_2+5x_3+3x_4=-4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3+2x_4=2, \\ x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3, \\ 7x_1+8x_2-5x_3+8x_4=9 \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=3, \\ 3x_1+2x_2+5x_3-x_4=1, \\ 5x_1+8x_2+9x_3-x_4=7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4=-1, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+9x_4=-6, \\ x_1+3x_2+2x_3+3x_4=3 \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+x_4=1, \\ 3x_1+7x_2+7x_3+3x_4=0, \\ x_1+5x_2+9x_3+x_4=4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 3x_1+2x_2+x_3+6x_4=7, \\ 2x_1+8x_2+9x_3+9x_4=3 \end{cases}$	**10**	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3-2x_4=2, \\ 5x_1+8x_2+9x_3-5x_4=4, \\ x_1+x_2+3x_3-x_4=2 \end{cases}$

11	$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+8x_3+x_4=7, \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=3 \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=3, \\ 3x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 5x_1+6x_2+7x_3-x_4=6 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=1, \\ 8x_1+9x_2+7x_3-9x_4=5, \\ x_1+8x_2+5x_3+3x_4=2 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3+2x_4=1, \\ x_1+7x_2-7x_3+5x_4=2 \\ 3x_1+5x_2-9x_3+3x_4=2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_4=2, \\ 3x_1+7x_2+4x_3+8x_4=5, \\ 2x_2-4x_3+x_4=1 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+4x_4=1, \\ 7x_1+8x_2+7x_3-2x_4=-2, \\ 3x_1+4x_2+5x_3+2x_4=0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+4x_4=-3, \\ 7x_1+8x_2+3x_3+10x_4=7, \\ 4x_1+5x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} x_1+5x_2+2x_3=6, \\ -2x_1+2x_2+3x_3+x_4=1, \\ -3x_1+9x_2+8x_3+2x_4=8 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=1, \\ 3x_1+17x_2+9x_3+8x_4=4 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2+8x_3+9x_4=-5, \\ 3x_1+9x_2+7x_3+6x_4=5 \end{cases}$

16. Решить систему уравнений, приведенную в таблице 15, при помощи элементарных преобразующих матриц.

17. Составить:

а) линейную однородную систему с минимальным количеством уравнений, решениями которой были бы все линейные комбинации столбцов A_1, A_2, A_3, A_4, приведенных в таблице 10, и только эти комбинации;

б) линейную неоднородную систему с минимальным количеством уравнений, решениями которой были бы все аффинные комбинации столбцов $A_0=(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$, A_1, A_2 и только эти комбинации.

18. Найти собственные значения и соответствующие собственные векторы матриц A, B, C, приведенных в таблице 16. Можно ли при помощи преобразования подобия привести каждую из заданных матриц к диагональному виду? Если можно, то указать диагональный вид и соответствующую преобразующую матрицу.

Таблица 16.

Вар.	A	B	C	Вар.	A	B	C
1	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\-4 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\2 & 3 & 6\\3 & 6 & 8\end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix}-2 & 2\\-8 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\4 & 1 & -6\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}1 & 1\\-4 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\3 & 5 & -3\\-2 & -4 & 1\end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix}2 & 1\\-4 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\-3 & 5 & -1\\-3 & 3 & 1\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1 & 2\\-8 & 9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\4 & -3 & -6\\-2 & 1 & 2\end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix}-3 & 1\\-4 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\2 & -3 & 6\\-3 & 6 & -8\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}-4 & 1\\-4 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\4 & -3 & 6\\-6 & 6 & -8\end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix}2 & -3\\12 & -10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\9 & 4 & -6\\-3 & -1 & 3\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\4 & -6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\-3 & -1 & 2\\6 & 4 & -3\end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix}-3 & -1\\4 & -7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\2 & 5 & -2\\-2 & -6 & 1\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}-8 & 1\\-4 & -4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\2 & 5 & 6\\3 & 6 & 10\end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix}-2 & 2\\-8 & 6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\4 & 3 & -6\\-2 & -1 & 4\end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix}5 & -2\\8 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\3 & 7 & -3\\-2 & -4 & 3\end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix}7 & -2\\8 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & -1\\1 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\2 & 7 & -2\\-2 & -6 & 3\end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix}3 & -2\\8 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 3\\-3 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & -1 & -3\\4 & -1 & -6\\-2 & 1 & 4\end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix}2 & -2\\8 & -6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\2 & -5 & 6\\-3 & 6 & -10\end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix}-1 & -1\\4 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\4 & -5 & 6\\-6 & 6 & -10\end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix}-6 & 1\\-4 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\9 & 2 & -6\\-3 & -1 & 1\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}8 & -2\\8 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 1\\-1 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\-3 & -3 & 2\\6 & 4 & -5\end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix}9 & -2\\8 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -3\\3 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\2 & 5 & 6\\-3 & -6 & -8\end{pmatrix}$

19. Квадратичные формы 1), 2), указанные в таблице 17, привести к каноническому виду: форму 1) – методом Лагранжа; форму 2) – методом Якоби. Указать соответствующие замены переменных. Вычислить ранг, положительный и отрицательный индексы, сигнатуру и дискриминант каждой квадратичной формы.

Таблица 17.

Вар.	Квадратичная форма 1)	Квадратичная форма 2)
1	$x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$	$x_1^2-x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$
2	$x_1x_2-4x_1x_3+2x_2x_3$	$x_1^2-x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$
3	$2x_1^2+18x_2^2+2x_3^2-12x_1x_2+4x_1x_3-13x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$
4	$x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$
5	$4x_1^2+x_2^2+9x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-5x_2x_3$	$x_1^2-4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$
6	$x_1x_2-3x_1x_3+2x_2x_3$	$x_1^2-4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$
7	$12x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+12x_1x_2-12x_1x_3-7x_2x_3$	$x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$
8	$x_1x_2-2x_1x_3-3x_2x_3$	$x_1^2+3x_2^2-5x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$
9	$2x_1^2+18x_2^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-23x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$
10	$x_1x_2-4x_1x_3+3x_2x_3$	$-x_1^2+4x_2^2+x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$
11	$4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+x_2x_3$	$x_1^2-4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$
12	$x_1x_2+3x_1x_3-2x_2x_3$	$x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$
13	$9x_1^2+4x_2^2+x_3^2-12x_1x_2+6x_1x_3-5x_2x_3$	$x_1^2-5x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$
14	$x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$
15	$3x_1^2+12x_2^2+12x_3^2-12x_1x_2-12x_1x_3+23x_2x_3$	$x_1^2-4x_2^2+9x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+12x_2x_3$
16	$x_1x_2-4x_1x_3-3x_2x_3$	$x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$
17	$2x_1^2+2x_2^2+18x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-11x_2x_3$	$x_1^2-5x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$
18	$x_1x_2-3x_1x_3-2x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$
19	$8x_1^2+18x_2^2+2x_3^2-24x_1x_2+8x_1x_3-13x_2x_3$	$-x_1^2+4x_2^2+x_3^2-8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$
20	$x_1x_2+2x_1x_3+3x_2x_3$	$-x_1^2+x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$

20. Используя критерий Сильвестра, определить, при каких значениях a квадратичная форма, приведенная в таблице 18, положительно определена.

Таблица 18.

Вар.	Квадратичная форма	Вар.	Квадратичная форма
1	$ax^2+3y^2+z^2+2axy+2axz+2yz$	2	$3x^2-ay^2+6z^2-2axy+4xz-2ayz$
3	$ax^2+4y^2+10z^2+2axy+2axz-4yz$	4	$2x^2-ay^2+6z^2-2axy+6xz-2ayz$
5	$ax^2+6y^2+z^2+2axy+2axz+4yz$	6	$3x^2-ay^2+3z^2-2axy+2xz-2ayz$
7	$ax^2+y^2+5z^2+2axy+2axz+4yz$	8	$6x^2-ay^2+6z^2-2axy+6xz-2ayz$
9	$ax^2+2y^2+9z^2+2axy+2axz+8yz$	10	$6x^2-ay^2+4z^2-2axy+8xz-2ayz$
11	$ax^2+4y^2+5z^2+2axy+2axz+2yz$	12	$4x^2-ay^2+7z^2-2axy+2xz-2ayz$
13	$ax^2+y^2+11z^2+2axy+2axz+6yz$	14	$3x^2-ay^2+18z^2-2axy-4xz-2ayz$
15	$ax^2+4y^2+10z^2+2axy+2axz+6yz$	16	$3x^2-ay^2+6z^2-2axy+8xz-2ayz$
17	$ax^2+6y^2+3z^2+2axy+2axz+8yz$	18	$3x^2-ay^2+11z^2-2axy-2xz-2ayz$
19	$ax^2+2y^2+z^2+2axy+2axz+2yz$	20	$3x^2-ay^2+2z^2-2axy+4xz-2ayz$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

2. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Линейная алгебра в примерах и задачах. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2010.

3. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии// Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2007.

4. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практический курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособ. с мультимедиа сопровождением. – М.: Университетская книга; Логос, 2008.

5. *Икрамов Х.Д.* Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975.

6. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

7. *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Часть 1.

8. *Ким Г.Д., Крицков Л.В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 2. – М.: ИКД "Зеркало-М, 2003.

9. *Прасолов В.В.* Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 1996.

10. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1978.

11. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1981.

Учебное издание

Бортаковский Александр Сергеевич

Пегачкова Елена Александровна

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ. Часть 1

Корректура: Яковлева С.Ю.

Издательство «Доброе слово»
www.dobroeslovo.info

Подписано в печать: 5.09.2013
П.л. 11,5. Формат 60x90/8
Тираж 50 экз.