Практическое занятие. Графы. Основные понятия и определения. Орграф конденсации. Задача об оповещении. Разбор типового варианта

Под *графом* $G = (V, X)$ понимается пара, состоящая из конечного непустого множества $V = \{v_1, ..., v_n\}$, элементы которого называются *вершинами* графа, и конечного множества пар вершин $X = \{x_1, ..., x_m\}$. Если пары в X являются неупорядоченными, то граф G называется *неориентированным графом* (или, просто, *графом*). Если пары в X являются упорядоченными, то граф называется *ориентированным*, кратко, *орграфом*.

Элементы множества X называются *ребрами*, если G – неориентированный граф, и *дугами*, если G – орграф. Ребра неориентированного графа обозначаются в виде двухэлементных множеств $\{v, w\}$, где $v, w \in V$. При этом $\{v, w\} = \{w, v\}$. Дуги орграфа обозначаются в виде упорядоченных пар вида (v, w) (или $< v, w >$), где $v, w \in V$.

Иногда в множестве X допускается существование нескольких одинаковых пар. В этом случае граф называется *мультиграфом*. Иногда также допускаются пары с одинаковыми элементами, которые называются *петлями*. В последнем случае граф называется *псевдографом*. Одинаковые пары в X называются *кратными* (или *параллельными*). Количество одинаковых ребер (дуг) называется *кратностью* этого ребра (этой дуги).

Неориентированные графы будем обозначать буквой G или G с индексами (например, $G_0, G_1, ...$), а ориентированные – буквой D или D с индексами (например, $D_0, D_1, ...$). Кроме того, договоримся обозначать вершины буквами v, w, u (без индексов или с индексами), а ребра и дуги – буквами x, y, z (без индексов или с индексами).

Для графа $G = (V, X)$ в случае $v \in V$ ($x \in X$) будем иногда кратко писать $v \in G$ ($x \in G$). Аналогично будем поступать и для орграфов.

Графы принято изображать на плоскости в виде множества точек (маленьких кружков), соответствующих вершинам, и множества линий, соединяющих некоторые пары вершин, соответствующих ребрам. В случае орграфа на линиях, соответствующих дугам, указываются стрелки, указывающие направления дуг (от первой вершины пары до второй). На рис. 1.1 приведено изображение неориентированного графа, а на рис. 1.2 – ориентированного.

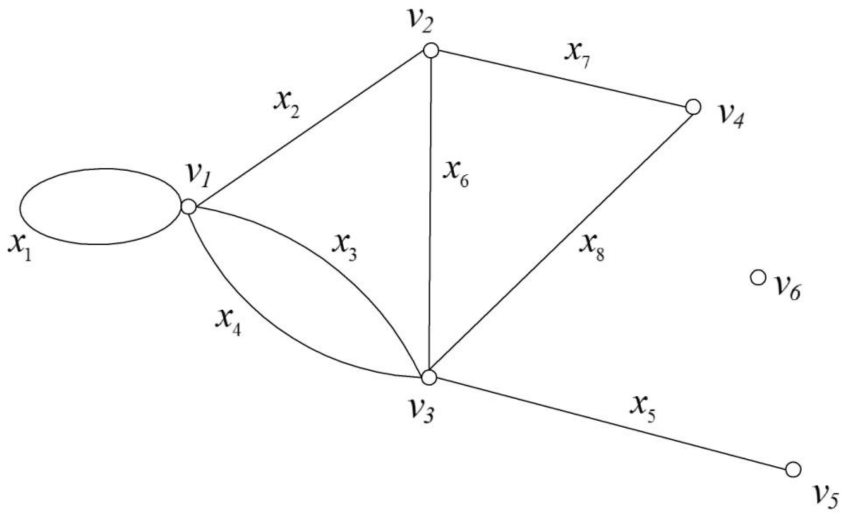


Рис. 1.1

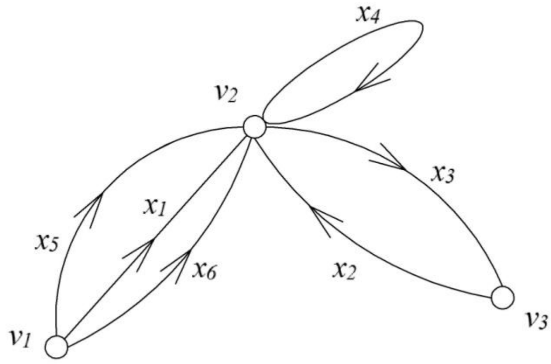
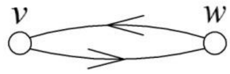


Рис. 1.2

Замечание 1.1. Для упрощения изображения графов вместо указания вершины около кружка, соответствующего этой вершине, будем иногда указывать номер этой вершины в центре этого кружка (см., например, рис. 1.8). Кроме того, будем иногда вместо изображений вида



использовать изображение

.

Если $x = \{v, w\}$ – ребро неориентированного графа, то говорят, что (а) вершины v, w – *смежные*; (б) вершины v, w – *концы* ребра x; (в) ребро x *соединяет* вершины v, w; (г) ребро x *инцидентно* вершинам v, w; (д) вершины v, w *инцидентны* ребру x.

Если $x = (v, w)$ – дуга орграфа, то говорят, что (а) вершина v – *начало* дуги x, w – *конец* дуги x; (б) дуга x *исходит* из вершины v и *заходит* в вершину w; (в) дуга x *инцидентна* вершинам v, w; (г) вершины v, w *инцидентны* дуге x.

Степень вершины. *Степенью* вершины v графа G называется число $\delta(v)$ ребер графа G, инцидентных вершине v. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а имеющая степень 1 – *висячей*. В случае псевдографа вклад петли $\{v, v\}$ в $\delta(v)$ равен 2.

Полустепенью исхода (*захода*) вершины v орграфа D называется число $\delta^+(v)$ ($\delta^-(v)$) дуг орграфа D, исходящих из вершины v (заходящих в вершину v). В случае ориентированного псевдографа вклад петли (v, v) в $\delta^+(v)$ и в $\delta^-(v)$ равен 1.

Пример 1.1.(а) Для графа, изображенного на рис. 1.1, $\delta(v_1) = 5$, $\delta(v_4) = 2$, $\delta(v_5) = 1$, $\delta(v_6) = 0$; (б) для орграфа, изображенного на рис. 1.2, $\delta^+(v_2) = 2$, $\delta^-(v_2) = 5$.

Будем количества вершин и ребер в графе G обозначать через $n(G), m(G)$, соответственно, а количества вершин и дуг в орграфе D – через $n(D), m(D)$, соответственно.

Утверждение 1.1. Для любого псевдографа $G = (V, X)$ выполняется равенство

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m(G). \qquad (1.1)$$

Доказательство. Равенство (1.1) является очевидным следствием того, что каждое ребро дает вклад, равный двум, в сумму из левой части равенства (1.1).

Приведем также соответствующее утверждение для орграфов.

Утверждение 1.2. Для любого ориентированного псевдографа $D = (V, X)$ выполняется

$$\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = m(D). \qquad (1.2)$$

Маршруты, пути. Последовательность

$$v_1 x_1 v_2 x_2 ... v_k x_k v_{k+1}, \qquad (1.3)$$

где $v_i \in V,\ x_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in X,$ называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1, v_{k+1} в графе $G = (V, X).$ Аналогично определяется путь в орграфе $D = (V, X).$ Последовательность (1.3), где $v_i \in V,\ x_i = (v_i, v_{i+1}) \in X,$ называется *путем* из v_1 в v_{k+1} в орграфе $D = (V, X).$ Вершина v_1 называется *начальной*, а v_{k+1} – *конечной* вершиной маршрута (пути), а остальные вершины – *внутренними*. *Длиной* маршрута (пути) называется количество ребер (дуг) в нем. Маршрут называется *замкнутым*, если его начальная вершина совпадает с конечной. Незамкнутый маршрут (путь), в котором ребра (дуги) попарно различны, называется *цепью*. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется *простой*. Замкнутый маршрут (путь), в котором все ребра (дуги) попарно различны, называется *циклом* (*контуром*). Цикл (контур), в котором все вершины попарно различны, называется *простым*.

Если ребро (дуга) x входит в некоторый маршрут (путь) $\eta,$ то будем кратко писать $x \in \eta.$

Замечание 1.1. Последовательность (1.3) можно однозначно восстановить по последовательности $x_1 x_2 ... x_k$, а следовательно, ее можно использовать как сокращенную форму записи маршрута или пути. Отметим далее, что в случае, когда в последовательности (1.3) $x_1, ..., x_k$ имеют кратности, равные 1, ее можно однозначно восстановить по последовательности вершин $v_1 v_2 ... v_{k+1}$, а следовательно, вместо (1.3) можно использовать и эту более короткую запись.

Говорят, что вершина w орграфа D (графа G) *достижима* из вершины $v,$ если либо $v = w,$ либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v, w).

Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. Подграфом графа $G = (V, X),$ *порожденным* множеством вершин $V_1 \subseteq V$, называется граф $G_1 = (V_1, X_1),$ где $X_1 = X \cap V_1^2$ (т.е. содержащий множество вершин V_1 и множество всех ребер графа $G,$ соединяющих вершины из V_1). Приведенные определения распространяются и на орграфы. Граф называется *связным*, если для любых двух его различных вершин существует маршрут, соединяющий их. Орграф называется сильно связным, если для любых двух его различных вершин v, w существует путь из v в w. *Компонентной связности* графа G называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G. *Компонентной сильной связности* орграфа D называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа D. У графа, изображенного на рис. 1.3, три компоненты связности. У орграфа, изображенного на рис. 1.4, три компоненты сильной связности: $D_1, D_2, D_3,$ изображенные на рис. 1.5 и выделенные пунктирными линиями на рис. 1.4.

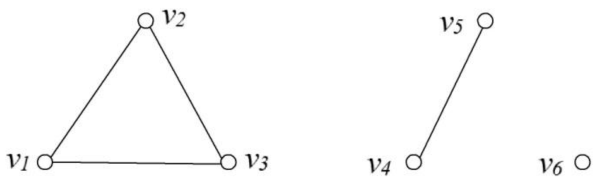


Рис. 1.3

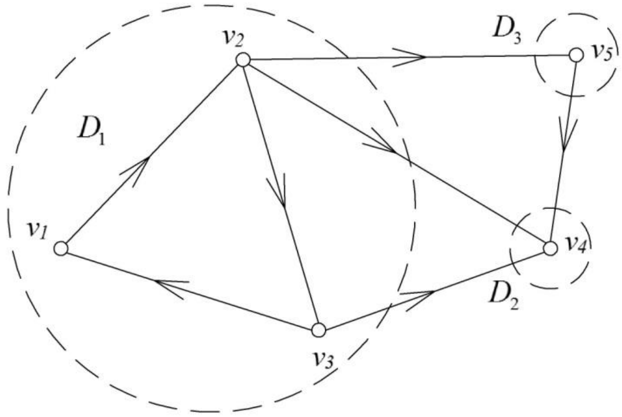


Рис. 1.4

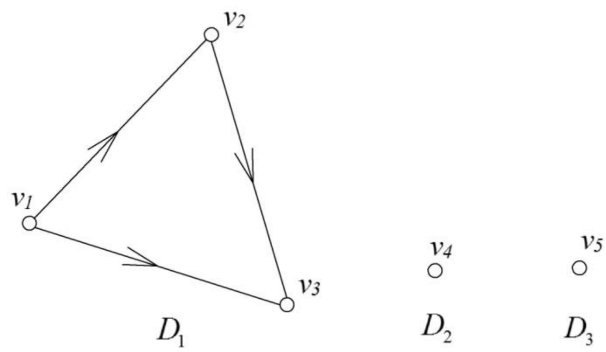


Рис. 1.5

Орграф конденсации. Орграфом конденсации орграфа $D=(V,X)$ называется орграф $D_0=(V_0,X_0)$, множеством вершин которого является совокупность компонент сильной связности орграфа D с множеством дуг X_0 таких, что $x_0=(v_0,w_0)\in X_0 \Leftrightarrow$ в компонентах сильной связности v_0, w_0 существуют вершины $v\in v_0$, $w\in w_0$ такие, что $(v,w)\in X$.

Пример 1.2. Орграфом конденсации орграфа, изображенного на рис. 1.4, является орграф, изображенный на рис. 1.6.

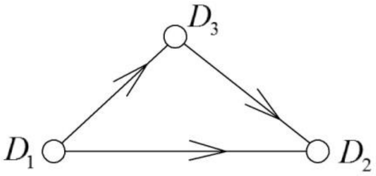


Рис. 1.6

Образ, прообраз вершины, множества вершин. Пусть $D=(V,X)$ – орграф, $v\in V$, $V_1\subseteq V$. Обозначим $D(v)=\{w\in V\mid (v,w)\in X\}$ – *образ вершины* v, $D^{-1}(v)=$ $=\{w\in V\mid (w,v)\in X\}$ – *прообраз вершины* v (см. рис. 1.7), $D(V_1)=\bigcup\limits_{v\in V_1} D(v)$ – *образ множества вершин* V_1, $D^{-1}(V_1)=\bigcup\limits_{v\in V_1} D^{-1}(v)$ – *прообраз множества вершин* V_1.

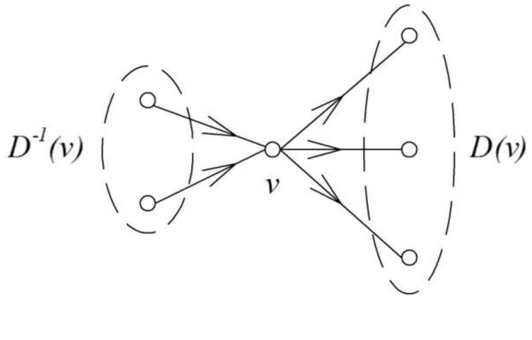


Рис. 1.7

Задача об оптимальном оповещении членов организации. Пусть в орграфе $D = (V, X)$, V – множество членов организации, X – множество дуг таких, что $x = (v, w) \in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию w. Рассмотрим следующую задачу. Требуется выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Для решения этой задачи достаточно перейти от орграфа D к орграфу конденсации $D_0 = (V_0, X_0)$ и выделить множество $W_0 = \{v_0 \in V_0 \mid D_0^{-1}(v_0) = \varnothing\}$. Тогда искомым множеством $U \subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u \in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты связности орграфа D, принадлежащей множеству W_0.

Пример 1.3. Решением указанной задачи для орграфа D, изображенного на рис. 1.4, является множество $U = \{v_1\}$ (или $U = \{v_2\}$ или $U = \{v_3\}$). Действительно, v_1 передает информацию v_2 (кратко, $v_1 \mapsto v_2$), а затем $v_2 \mapsto v_3$, $v_2 \mapsto v_4$, $v_2 \mapsto v_5$.

Разбор типового варианта. Пусть схема взаимного оповещения членов организации задана орграфом D, изображенным на рис. 1.8 (см. замечание 1.1). Выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Указать общую схему такого оповещения.

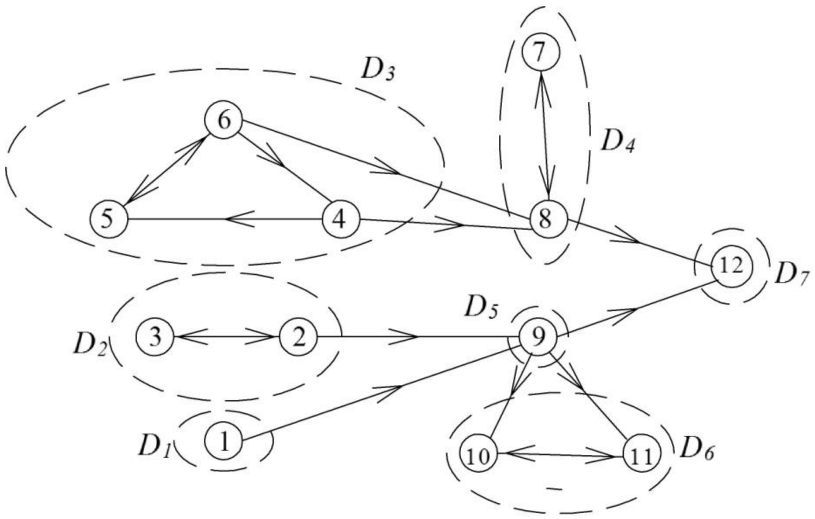


Рис. 1.8

Решение. Выделим компоненты сильной связности орграфа D: $D_1, \ldots, D_7$, (на рис. 1.8 они обведены замкнутыми пунктирными линиями). Исходя из определения орграфа конденсации, построим по орграфу D его орграф конденсации D_0 (см. изображение D_0 на рис. 1.9). Условию $D_0^{-1}(.) = \varnothing$ удовлетворяют D_1, D_2, D_3. Возможными представителями этих орграфов являются вершины v_1, v_2, v_4. Тогда можно положить $U = \{v_1, v_2, v_4\}$ и согласно рис. 1.8, одной из возможных схем оповещения является:

первоначально оповещаем v_1, v_2, v_4; далее: $v_1 \mapsto v_9 \mapsto v_{10} \mapsto v_{11}$; $v_9 \mapsto v_{12}$; $v_2 \mapsto v_3$; $v_4 \mapsto v_5 \mapsto v_6 \mapsto v_8 \mapsto v_7$.

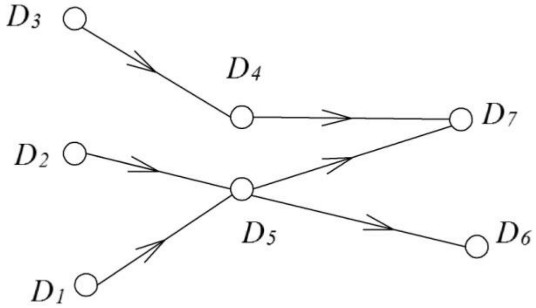


Рис. 1.9