ЛЕКЦИЯ А1. Основные понятия алгебры множеств. Понятие множества. Основные принципы интуитивной теории множеств. Парадокс Рассела. Подмножества. Основные операции над множествами. Диаграммы Венна. Основные тождества алгебры множеств

Понятие *множества* будем считать первоначальным, неопределяемым, мыслимым интуитивно (аналогично понятиям точки, прямой, плоскости в школьной геометрии). Под множеством M интуитивно понимаем совокупность определенных, различимых между собой объектов, мыслимых как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества M.

Пример 1.1. Множество студентов, учащихся в МАИ, множество натуральных чисел, множество целых чисел и т.д.

Мы пишем $x \in M$, если x – элемент множества M, и $x \notin M$ – в противном случае.

Принцип объемности. Два множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Мы пишем $A = B,$ если множества A и B равны, и $A \neq B$ – в противном случае. Из определения равенства множеств следует, что $A = B \Leftrightarrow$(а) для любого $x \in A$ справедливо $x \in B$; (б) для любого $x \in B$ справедливо $x \in A$.

Если элементами множества A являются объекты $a_1, a_2, ..., a_n$ и только они, то обозначаем $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$ Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. В случае, если каждый элемент множества A является элементом множества $B,$ множество A называется *подмножеством* множества B (или A *включено в* $B;$ или B *включает в себя* A). Для любых множеств A, B, C выполняется: $\varnothing \subseteq A;$ $A \subseteq A;$ $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B;$ $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow \Rightarrow A \subseteq C.$ Количество элементов в конечном множестве A будем обозначать $|A|$.

Пример 1.2. $|\varnothing| = 0,$ $|\{\varnothing\}| = 1,$ $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$ и т.д.

Пример 1.3. (а) $\{1,2,3,4\} = \{3,4,2,1\},$ (б) $|\{1,2,3,4\}| = 4,$ $|\{\{1,2,3,4\}\}| = 1,$ $|\{\{1,2\},\{3,4\}\}| = 2.$

Принцип абстракции. Многие конечные множества трудно (или даже невозможно) описать перечислением объектов, принадлежащих этим множествам (тем более это относится к бесконечным множествам). В таких случаях часто применяется так называемый принцип абстракции. Приведем несколько определений. Языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно,* называется *высказыванием.*

Пример 1.4. «Москва – столица РФ», «$2 \neq 3$», «$2+2=3$» – высказывания. Предложения: «который час?», «$x \geq 2$» не являются высказываниями.

Под «*формой от* x» интуитивно понимается языковое предложение с вхождением в него x такое, что, если каждое вхождение в него x заменить именем некоторого объекта из рассматриваемой совокупности объектов, то в результате получится высказывание.

Пример 1.5. Пусть рассматриваемая совокупность объектов является множеством действительных чисел. Тогда предложения «$x \geq 2$», «$x = 3$», «$1 \leq x \leq 4$» являются формами от $x.$ Напротив, предложения «$x - 2$», «для любого x выполняется $x \geq 2$», «существует такое $x,$ что $1 \leq x \leq 4$» не являются формами от $x,$ так как после подстановки вместо x конкретного числа первое предложение не будет являться высказыванием, а подстановка вместо x конкретного числа в другие два предложения нарушает их смысл, т.е. такая подстановка неправомерна.

Обозначим форму от x через $P(x)$. Сформулируем теперь интуитивный принцип абстракции. Любая форма $P(x)$ определяет некоторое множество A, состоящее из тех и только тех предметов a, для которых $P(a)$ – истинное предложение. При этом обозначаем $A=\{x \mid P(x)\}$.

Пример 1.6. $\{x \mid$ «x – натуральное нечетное число, меньшее 9»$\}$ = = $\{1,3,5,7\}$.

Следующий пример иллюстрирует несовершенство интуитивных представлений о множествах. Заметим, что для множества $\mathrm{M}==\{x \mid x=x\}$ выполняется $\mathrm{M}\in\mathrm{M}$, а для множества $\varnothing$ выполняется $\varnothing\notin\varnothing$, т.е для любого множества возможны обе ситуации.

Пример 1.7 (Парадокс Рассела). Пусть $N=\{x \mid x\notin x\}$. Возможны два случая: 1) $N\in N,$ и тогда по определению N выполняется $N\notin N;$ 2) $N\notin N,$ и тогда по определению N выполняется $N\in N,$ т.е. в любом случае приходим к противоречию.

Таким образом, теория множеств в интуитивном изложении является противоречивой. Между тем, если в ходе данного рассуждения не выходить за пределы некоторого конкретного множества U (например, являющегося предметной областью какого-нибудь классического раздела математики, исследование которого никогда не приводило к противоречиям, или даже доказана непротиворечивость системы аксиом, на которой базируется указанный раздел), т.е. предполагать, что $\{x \mid P(x)\}=\{x \mid x\in U, P(x)\},$ то при удачном выборе U мы можем избежать противоречий. При этом множество U называется *универсальным* для данного рассуждения. Всюду далее будем предполагать, что универсальное множество U выбрано, при этом $U\neq\varnothing$.

Для любого множества $A\subseteq U$ обозначим $2^A=\{B \mid B\subseteq A\}$.

Пример 1.8. Пусть $A=\{1,2,3\}$. Тогда $2^A=\{\varnothing, A,\{1\},\{2\},\{3\},\ \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$.

Утверждение 1.1. Если $|A|=n,$ то $|2^A|=2^{|A|}=2^n.$

Доказательство. Пусть $A=\{a_1,..., a_n\}$. Произвольное подмножество $B\subseteq A$ есть результат заполнения n ячеек: первая ячейка соответствует элементу a_1, вторая – элементу a_2 и т.д., n-я ячейка – элементу a_n. Каждая ячейка может быть заполнена соответствующим элементом или нет (т.е. имеются две возможности для каждой ячейки) независимо от других ячеек. Тогда общее число возможностей для заполнения совокупности из n ячеек выражается формулой 2^n (перемножаем число вариантов для каждой из ячеек n раз).

Операции над множествами. Введем следующие двухместные операции: $A\cup B=\{x \mid x\in A$ или $x\in B\}$ – объединение множеств A и B; $A\cap B=\{x \mid x\in A,\ x\in B\}$ – пересечение множеств A и B; $A\setminus B==\{x \mid x\in A, x\notin B\}$ – относительное дополнение множества B до множества A; $A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ – симметрическая разность множеств A и B, а также одноместную операцию $\overline{A}=U\setminus A$ – абсолютное дополнение множества A. Для упрощения записи различных выражений в алгебре множеств последняя операция считается самой «сильной», т.е. выполняемой в первую очередь.

Основные тождества алгебры множеств. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1. $A\cup B=B\cup A$ (коммутативность объединения);	$1'$. $A\cap B=B\cap A$ (коммутативность пересечения);
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (ассоциативность объединения);	$2'$. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (ассоциативность пересечения);
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);	$3'$. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);
4. $A\cup A=A$ (идемпотентность объединения);	$4'$. $A\cap A=A$ (идемпотентность пересечения);

5. $A \cup \overline{A} = U$;

6. $A \cup \varnothing = A$;

7. $A \cup U = U$;

8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (первый закон де Моргана);

9. $A \cup (A \cap B) = A$ (первый закон поглощения);

10. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (первый закон расщепления);

5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

6′. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7′. $A \cap U = A$;

8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (второй закон де Моргана);

9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (второй закон поглощения);

10′. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (второй закон расщепления);

11. $\overline{\overline{A}} = A$;

12. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

13. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

Тождества 1, $1'$, 2, $2'$, 4–7, $4' - 7'$, 9, $9'$, 11 следует признать очевидными. Докажем тождество 3. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, x \in C \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \end{array}\right] \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Докажем тождество $3'$. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A,$$

$$\left[\begin{array}{c} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \\ x \notin B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \end{array}\right] \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \\ x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C \end{array}\right] \Rightarrow \Rightarrow x \in A, x \in B \cup C$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

Докажем тождество 8. Для любого $x \in U$ имеем: $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A, x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Докажем тождество $8'$. Применим тождество 8 к $\overline{A}, \overline{B}$ и воспользуемся очевидным тождеством 11: $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$, а следовательно, $\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$, откуда $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

Докажем тождество 10. Используя доказанное тождество 3, имеем:

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup (B \cap \overline{B}) = A \cup \varnothing = A.$$

Докажем тождество $10'$. Используя доказанное тождество $3'$, имеем:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap U = A.$$

Докажем тождество 12. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A, x \notin B \Leftrightarrow x \in A, x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}.$$

Докажем тождество 13. Используя доказанные ранее тождества, имеем:

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=$$
$$=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(B\cap\overline{B})=\varnothing\cup(A\cap\overline{B})\cup\cup(B\cap\overline{A})\cup\varnothing$$
$$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A+B.$$

Докажем теперь тождество (ассоциативность +):

$$A+(B+C)=(A+B)+C. \qquad (1.1)$$

Будем в последующих выкладках для сокращения записи вместо $A\cap B$ писать AB и считать операцию $\cap$ более «сильной» операцией, чем $\cup$, $\setminus$, $+$ (т.е. выполняемой в первую очередь). Имеем: $A+(B+C)=[A\setminus(B+C)]\cup[(B+C)\setminus A]=[A\setminus(B\overline{C}\cup C\overline{B})]\cup$
$\cup[(B\overline{C}\cup C\overline{B})\setminus A]=A\overline{(B\overline{C}\cup C\overline{B})}\cup(B\overline{C}\cup C\overline{B})\overline{A}= =A(\overline{B}\cup C)(\overline{C}\cup B)\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C=$
$A(\overline{B}\overline{C}\cup C\overline{C}\cup\overline{B}B\cup CB)\cup\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C=A\overline{B}\overline{C}\cup ABC\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C.$
(1.2)

С другой стороны, обозначив $A'=C, C'=A$ и используя (1.2), имеем:

$$(A+B)+C=C+(A+B)=C+(B+A)=A'+(B+C')=$$
$$=A'\overline{B}\overline{C}'\cup A'BC'\cup\overline{A}'B\overline{C}'\cup\overline{A}'\overline{B}C'=C\overline{B}\overline{A}\cup CBA\cup\overline{C}B\overline{A}\cup\cup\overline{C}\,\overline{B}A=$$
$$\overline{A}\overline{B}C\cup ABC\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}=A+(B+C).$$