Лекция Л1. Высказывания. Формулы логики высказываний. Равносильность формул. Основные равносильности

Следуя [1], введем следующие необходимые понятия и определения. Под *высказыванием* принято понимать языковое предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. «Москва – столица РФ», «$2 \neq 3$», «$2+2=3$» – высказывания. Напротив, предложения: «который час?», «$x \geq 2$» не являются высказываниями. В логике высказываний интересуются не содержанием, а лишь истинностью или ложностью высказываний. Истинностные значения *истина* и *ложь* будем обозначать буквами И и Л соответственно. Множество {И, Л} называется *множеством истинностных значений*.

Логические операции. Рассмотрим логические операции (связки) над высказываниями. *Отрицанием* высказывания P называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно. Отрицание P обозначается через $\neg P$ и читается как «не P». Отрицание высказывания также определяется таблицей истинности (см. табл. 1.1).

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания. Обозначается через $P \& Q$, читается как «P и Q». *Дизъюнкцией* двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначается через $P \vee Q$, читается как «P или Q». *Импликацией* двух высказываний P и Q называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда высказывание P истинно, а высказывание Q ложно. Обозначается через $P \supset Q$, читается как «если P, то Q» (или, иначе, «P влечет Q», «из P следует Q», «P достаточно для Q», «Q необходимо для P»). *Эквиваленцией* двух высказываний P и Q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинностные значения высказываний P и Q совпадают. Обозначается через $P \sim Q$, читается как «P эквивалентно Q» (или, иначе, «P необходимо и достаточно для Q», «P выполняется тогда и только тогда, когда выполняется Q»).

Перечисленные двухместные операции определяются также таблицами истинности (см. табл. 1.2).

P	$\neg P$
И	Л
Л	И

Табл. 1.1

P	Q	$P \& Q$	$P \vee Q$	$P \supset Q$	$P \sim Q$
И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И

Табл.1.2

Формулы логики высказываний. Дадим определение *формулы логики высказываний*. Определим ее как слово в некотором алфавите, удовлетворяющее определенным свойствам. *Алфавитом* называется любое непустое множество. Элементы этого множества называются *символами* данного алфавита. *Словом* в данном алфавите называется произвольная конечная последовательность символов (возможно, пустая). Слово A называется *подсловом* слова B, если $B = B_1AB_2$ для некоторых слов B_1, B_2.

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы: (А1) высказывательные переменные: $X_1, X_2, X_3,...$; (А2) логические символы: $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, ~; (А3) символы скобок (вспомогательные символы): (,) (открывающая и закрывающая скобки).

Слово в алфавите логики высказываний называется *формулой*, если оно удовлетворяет следующему определению: (Ф1) любая высказывательная переменная – формула; (Ф2) если *A* и *B* – формулы, то $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$ - формулы; (Ф3) те и только те слова являются формулами, для которых это следует из (Ф1) и (Ф2).

Подформулой формулы A называется любое подслово слова *A*, само являющееся формулой.

Замечание 1.1. Для упрощения записи будем опускать в формуле внешние скобки, а также считать операцию $\neg$ самой «сильной» операцией, т.е. выполняемой в первую очередь (аналогично операции возведения в степень в алгебре: мы понимаем выражение $a + b^2$ как $a + (b^2)$, но не как $(a+b)^2$).

Пример 1.1. (а) Слово $A_1 = \neg\neg\vee X_2 \sim \& X_3 \&$ не является формулой логики высказываний (не может быть получена по правилам (Ф1)-(Ф3)). (б) Слово $A_2 = (((\neg X_1) \supset X_2) \supset (X_2 \sim X_3))$ является формулой логики высказываний, полученной по правилам (Ф1)-(Ф3). (б) Слова $((\neg X_1) \supset X_2)$, $(X_2 \sim X_3)$, $(\neg X_1)$ являются подформулами формулы A_2. (б) После упрощения согласно замечанию 1.1 формула A_2 переходит в формулу $A_3 = (\neg X_1 \supset X_2) \supset (X_2 \sim X_3)$.

Если каждой высказывательной переменной, входящей в формулу придавать истинностные значения И и Л, то формула будет определять истинностную функцию, т.е. функцию, определенную на множестве {И, Л} со значениями в этом множестве. Истинностная функция может быть представлена таблицей истинности.

Пример 1.2. Таблица истинности для истинностной функции, определяемой формулой A_3 из примера 1.1 приведена в табл. 1.3.

X_1	X_2	X_3	$\neg X_1$	$\neg X_1 \supset X_2$	$X_2 \sim X_3$	$\neg(X_2 \sim X_3)$	A_3
И	И	И	Л	И	И	Л	Л
И	И	Л	Л	И	Л	И	И
И	Л	И	Л	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	Л	И	Л	И	Л	И

Табл. 1.3

Упорядоченный набор высказывательных переменных $\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\rangle$, где $i_j \neq i_l$ при $j \neq l$, назовем списком переменных формулы A, если все переменные формулы A содержатся в этом наборе. В списке переменных формулы A часть переменных может быть *фиктивной*, т.е. не входить явно в A. *Оценкой списка переменных* формулы назовем сопоставление каждой переменной списка некоторого истинностного значения.

Пример 1.3. Списками переменных формулы A_3 из примера 1.1 являются $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$, $\langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$ и т.д. Оценкой списка переменных $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ является, например, $\langle И, Л, И\rangle$. Все оценки этого списка переменных приведены в первых трех столбцах таблицы 1.3.

Упражнение 1.1. Доказать, что если $\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\rangle$ - список переменных некоторой формулы, то имеется 2^k попарно различных оценок этого списка.

Решение. Действительно, каждая из этих оценок есть результат заполнения последовательности из k ячеек. Первая ячейка, соответствующая переменной X_{i_1}, заполняется одним из двух способов (истинностными значениями И или Л). Вторая ячейка, соответствующая переменной X_{i_2}, также заполняется одним из тех же двух способов (независимо от заполнения первой ячейки) и т.д. Последняя ячейка, соответствующая переменной X_{i_k}, также заполняется одним из указанных двух способов (независимо от заполнения предыдущих ячеек). В силу этой независимости для определения общего числа результатов заполнения последовательности из k ячеек указанное количество способов заполнения каждой ячейки, т.е. число 2 перемножается k раз, что и дает нам требуемую формулу.

Замечание 1.2. Пусть A, B - некоторые формулы логики высказываний. Тогда, добавляя в списки переменных этих формул необходимые фиктивные переменные, входящие в объединение списков переменных формул A и B, можно добиться того, что списки переменных этих формул будут совпадать. Например, $\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ - общий список переменных для формул $A = (X_1 \& X_2) \vee (\neg X_1 \& X_2)$, $B = (X_3 \& X_2) \vee (\neg X_3 \& X_2)$. Совершенно аналогично можно составить общий список переменных для произвольного конечного набора формул $A, B,..., C$.

Равносильность формул. Основные равносильности. Пусть A и B - формулы логики высказываний, имеющие одинаковый список переменных (см. замечание 1.2). Будем называть их *равносильными*, если на любой оценке этого списка значения формул A и B совпадают. Равносильность формул A и B будем кратко обозначать через $A \equiv B$.

Для любых формул логики высказываний A, B, C справедливы равносильности:

1. $A \& B \equiv B \& A$ (коммутативность конъюнкции);	1′. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность дизъюнкции);
2. $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ (ассоциативность конъюнкции);	2′. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность дизъюнкции);
3. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность $\&$ относительно $\vee$);	3′. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$);
4. $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &);	4′. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$);
5. $A \& (A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения);	5′. $A \vee (A \& B) \equiv A$ (второй закон поглощения);
6. $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (первый закон де Моргана);	6′. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (второй закон де Моргана);

7. $(A \& B) \vee (A \& \neg B) \equiv A$ (первая формула расщепления);	7′. $(A \vee B) \& (A \vee \neg B) \equiv A$ (вторая формула расщепления);

8. $\neg\neg A \equiv A$ (снятие двойного отрицания);

9. $A \supset B \equiv \neg A \vee B$;

10. $A \sim B \equiv (A \supset B) \& (B \supset A) \equiv (\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$;

11. $A \sim B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$.

Любая из этих равносильностей легко может быть доказана с помощью таблиц истинности. Рассмотрим, например, равносильность 6. Пусть $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \right\rangle$ - список переменных формул A, B (см. замечание 1.2). Тогда для значений формул A, B на какой-нибудь оценке этого списка переменных имеются четыре варианта, перечисленные в первых двух столбцах табл. 1.4. Для каждого варианта, используя таблицы истинности логических операций $\neg, \&, \vee$, нетрудно определить значения левой и правой частей равносильности 6 и убедиться в том, что в любом из возможных вариантов эти значения совпадают (см. табл. 1.4).

A	B	$A \& B$	$\neg(A \& B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
И	И	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И	И	И

Табл.1.4

Будем в дальнейшем использовать следующее (см. [1, стр. 31])

Утверждение 1.1 (правило равносильных преобразований). Пусть C_A - формула, содержащая A в качестве своей подформулы. Пусть C_B получается из C_A заменой A в этом вхождении на B. Тогда, если $A \equiv B$, то $C_A \equiv C_B$.

Двойственность. Закон двойственности. Будем рассматривать в этом разделе формулы, содержащие только логические символы $\&, \vee, \neg$. Символы $\&, \vee$ называются *двойственными*. Формула A^* называется *двойственной* к формуле A, если она получена из A одновременной заменой всех символов $\&, \vee$ на двойственные.

Пример 1.4. Пусть

$$F = (\neg X_1 \& \neg X_2) \& (X_3 \vee \neg X_2).$$

Тогда

$$F^* = (\neg X_1 \vee \neg X_2) \vee (X_3 \& \neg X_2).$$

Очевидно, что $(A^*)^* = A$. Сформулируем теперь закон двойственности.

Теорема 1.1 (*принцип двойственности*). Если $A \equiv B$, то $A^* \equiv B^*$.

Принцип двойственности можно использовать для нахождения новых равносильностей. Например,

$$A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C) \Rightarrow A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C).$$

Для доказательства принципа двойственности потребуется

Определение 1.1. Пусть $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\right\rangle$ - некоторый список переменных, $\left\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k\right\rangle$ - оценка этого списка переменных. Назовем оценку $\left\langle \bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\right\rangle$ - *двойственной* к оценке $\left\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k\right\rangle$.

Пример 1.5. Пусть $\left\langle X_1, X_2, X_3\right\rangle$ - список переменных, $\left\langle Л, И, Л\right\rangle$ - его оценка. Тогда $\left\langle И, Л, И\right\rangle$ - двойственная к ней оценка.

Пусть A - формула со списком переменных $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\right\rangle$. Будем обозначать $A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle}$ - значение формулы A на оценке $\left\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k\right\rangle$.

Лемма 1.1. Пусть A - формула со списком переменных $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\right\rangle$. Тогда

$$A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И(=Л) \Leftrightarrow A^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л(=И).$$

Доказательство будем проводить индукцией по числу n логических знаков. Если $n=0$, то A совпадает с одной из переменных X_{i_j}, где $1\le j \le k$, т.е. $A = X_{i_j}$. В этом случае $A^* = X_{i_j} \Rightarrow A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И \Leftrightarrow \varepsilon_j = И \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}_j = Л \Leftrightarrow A^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л$.

Пусть утверждение леммы 1.1 справедливо при числе логических символов, меньшем n, где $n \ge 1$. Докажем, что оно справедливо при числе символов, равном n. Формула A может иметь вид: (а) $A = \neg B$, (б) $A = B \& C$, (в) $A = B \vee C$.

(а) $A = \neg B \Rightarrow A^* = \neg B^*$. Тогда $A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И \Leftrightarrow B|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л$. В формуле B^* число логических символов меньше n. Так как $(B^*)^* = B$, то

$B|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow (B^*)^* |_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow$ (в силу индуктивного предположения)

$\Leftrightarrow B^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = И \Leftrightarrow A^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = \neg B^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л$.

(б) $A = B \& C \Rightarrow A^* = B^* \vee C^*$. Тогда

$A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И \Leftrightarrow B|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И, C|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = И \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (в силу индуктивного предположения)
$\Leftrightarrow B^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л, C^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л \Leftrightarrow (B^* \vee C^*)|_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = Л$.

(в) $A = B \vee C \Rightarrow A^* = B^* \& C^*$. Тогда

$A|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow B|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л, C|_{\langle\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\rangle} = Л \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (в силу индуктивного предположения)
$\Leftrightarrow B^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = И, C^* |_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = И \Leftrightarrow (B^* \vee C^*)|_{\langle\bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k\rangle} = И$.

Докажем теперь теорему 1.1. Пусть $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k}\right\rangle$ - список переменных формул A и B. Тогда в силу леммы 1.1

$$A^* |_{\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k \rangle} = И \Leftrightarrow A(=(A^*)^*) |_{\langle \bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k \rangle} = Л \Leftrightarrow (A \equiv B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B |_{\langle \bar{\varepsilon}_1,...,\bar{\varepsilon}_k \rangle} = Л \Leftrightarrow B^* |_{\langle \varepsilon_1,...,\varepsilon_k \rangle} = И .$$