

## ЛЕКЦИЯ. Маршруты (пути) в графах (орграфах). Минимальные маршруты (пути). Методы их нахождения

**Задача о лабиринте.** Опишем метод поиска маршрута в связном графе  $G = (V, X)$ , соединяющим заданные вершины  $v, w \in V$ ,  $v \neq w$ .

### Алгоритм 3.1 (Тэрри) поиска маршрута в связном графе

Если, исходя из вершины  $v$  и осуществляя последовательный переход от каждой достигнутой вершины к смежной ей вершине, руководствоваться следующими правилами: (1) идя по произвольному ребру, всякий раз отмечать направление, по которому оно пройдено; (2) исходя из некоторой вершины  $v'$ , всегда следовать по тому ребру, которое не было пройдено или было пройдено в противоположном направлении; (3) для всякой вершины  $v'$ , отличной от  $v$ , отмечать первое заходящее в  $v'$  ребро, если вершина  $v'$  встречается в первый раз; (4) исходя из некоторой вершины  $v'$ , отличной от  $v$ , по первому заходящему в  $v'$  ребру идти лишь тогда, когда нет других возможностей, то всегда можно найти маршрут в связном графе  $G$ , соединяющий  $v, w$ .

**Замечание 3.1.** Задача, которую решает алгоритм Тэрри, нередко называют *задачей о лабиринте*. Здесь  $v$  – начальная точка поиска,  $w$  – выход из лабиринта.

**Замечание 3.2.** Алгоритм Тэрри позволяет избежать повторного прохождения ребер в одном направлении. Если конец маршрута не задан, то, проводя поиск согласно алгоритму Тэрри, пока это возможно, мы найдем замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по разу в каждом направлении) по каждому ребру связного графа  $G$ .

**Задача о поливочной машине.** Пусть граф  $G$  соответствует схеме дорог некоторого района, которые нужно полить летом водой (соответственно посыпать песком зимой) с двух сторон (дорожки с двухсторонним движением). Вершина  $v_1$  соответствует базе, где машина заправляется водой и бензином и куда она возвращается после полива дорожек. В силу замечания 3.2, алгоритм Тэрри дает оптимальное решение этой задачи (минимальный расход бензина и воды), поскольку каждая дорожка поливается ровно по разу в каждом направлении.

**Разбор типового варианта.** Решить задачу о поливочной машине, если схема дорог описывается графом  $G = (V, X)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_7\}$ , изображенным на рис. 3.1 (см. замечание 1.1), т.е. требуется указать маршрут, обеспечивающий полный обход всех вершин и ребер графа  $G$ , начиная из вершины  $v_1$  и заканчивая в этой же вершине. При этом каждое ребро должно быть пройдено по разу в каждом направлении.

**Решение.** Для решения этой задачи действуем в соответствии с алгоритмом Тэрри (см. замечание 3.2). Для реализации алгоритма помечаем первые заходящие в вершины ребра крестиками, которые наносим на ребрах ближе к той вершине в которую в первый раз заходим, а также указываем направления прохождения ребер и последовательность прохождения ребер. Алгоритм 3.1 дает следующий возможный маршрут (см. рис. 3.1)  $v_1 v_3 v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_7 v_4 v_6 v_7 v_6 v_4 v_7 v_5 v_4 v_3 v_1$  (см. замечание 1.1).

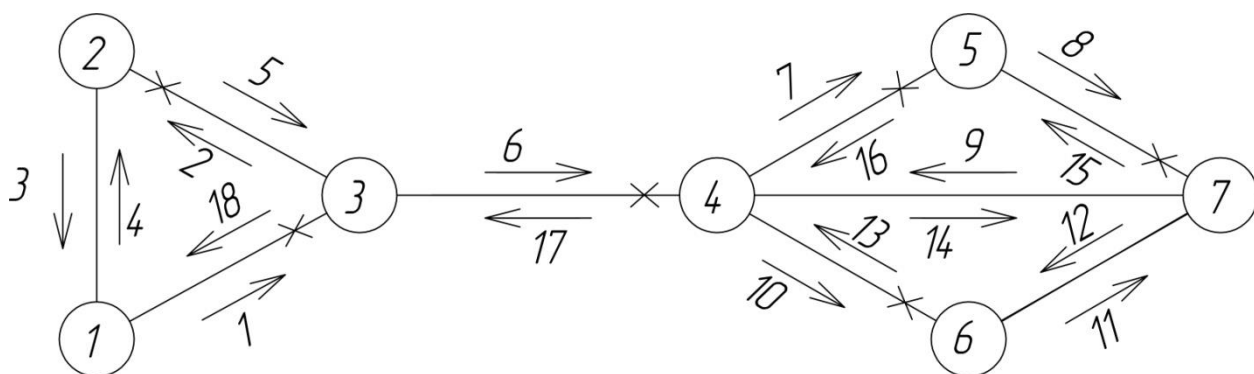


Рис 3.1

**Поиск минимальных путей в орграфах. Алгоритм «фронта волны».** Путь в орграфе  $D$  из вершины  $v$  в вершину  $w$ , где  $w \neq v$ , называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей орграфа  $D$  из  $v$  в  $w$ . Аналогично определяется минимальный маршрут в графе  $G$ . Пусть  $D = (V, X)$  – оргграф с  $n \geq 2$  вершинами,  $v, w$  – заданные вершины из  $V$ ,  $v \neq w$ . Опишем алгоритм *фронта волны* поиска минимального пути из  $v$  в  $w$  в орграфе  $D$ .

### Алгоритм 3.2 (фронта волны)

**Шаг 1.** Помечаем вершину  $v$  индексом 0, а все вершины, принадлежащие образу вершины  $v$ , индексом 1. Обозначим через  $FW_0(v), FW_1(v)$  – множества вершин, помеченных индексами 0 и 1, соответственно, т.е.  $FW_0(v) = \{v\}, FW_1(v) = D(v)$ . Полагаем  $k = 1$ .

**Шаг 2.** Если  $FW_k(v) = \emptyset$ , то вершина  $w$  не достижима из  $v$  и работа алгоритма на этом заканчивается. В противном случае переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Если  $w \notin FW_k(v)$ , то переходим к шагу 4. В противном случае существует минимальный путь из  $v$  в  $w$ , имеющий длину  $k$ . Последовательность его вершин  $vw_1 \dots w_{k-1}w$ , где

$$w_{k-1} \in FW_{k-1}(v) \cap D^{-1}(w), w_{k-2} \in FW_{k-2}(v) \cap D^{-1}(w_{k-1}), \dots, w_1 \in FW_1(v) \cap D^{-1}(w_2), \quad (3.1)$$

и есть искомый минимальный путь из  $v$  в  $w$  длины  $k$ . На этом работа алгоритма заканчивается.

**Шаг 4.** Помечаем индексом  $k+1$  все непомеченные вершины, принадлежащие образу множества вершин, помеченных индексом  $k$ . Множество вершин, помеченных индексом  $k+1$ , обозначаем  $FW_{k+1}(v)$ , т.е.  $FW_{k+1}(v) = D(FW_k(v)) \setminus \bigcup_{i=0}^k FW_i(v)$ . Увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к шагу 2.

**Замечание 3.3.** Множество  $FW_k(v)$  будем называть *фронтом волны*  $k$ -го уровня с центром в вершине  $v$ .

**Замечание 3.4.** Вершины  $w_1, \dots, w_{k-1}$  из (3.1), вообще говоря, могут быть выделены неоднозначно, что говорит о возможности существования нескольких различных минимальных путей из  $v$  в  $w$ .

**Замечание 3.5.** Аналогично описывается алгоритм поиска минимальных маршрутов в неориентированном графе  $G$ .

**Разбор типового варианта.** Оргграф  $D = (V, X)$ , где  $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$ , задан матрицей смежности  $A(D)$ , приведенной в табл.3.1. Найти все минимальные пути из  $v_1$  в  $v_{10}$ .

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$
$v_1$	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
$v_2$	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
$v_3$	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
$v_4$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$v_5$	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
$v_6$	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
$v_7$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$v_8$	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
$v_9$	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
$v_{10}$	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0

Табл.3.1

**Решение.** Действуя согласно алгоритму 3.2, последовательно определяем:

$$FW_0(v_1) = \{v_1\}, \quad FW_1(v_1) = D(v_1) = \{v_4, v_5, v_7\},$$

$$FW_2(v_1) = D(FW_1(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1)) = D(\{v_4, v_5, v_7\}) \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_7\} = \\ = \{v_1, v_5, v_6, v_8, v_9\} \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_7\} = \{v_6, v_8, v_9\},$$

$$FW_3(v_1) = D(FW_2(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1)) = D(\{v_6, v_8, v_9\}) \setminus \\ \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} \setminus \{v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_2, v_3\},$$

$$FW_4(v_1) = D(FW_3(v_1)) \setminus (FW_0(v_1) \cup FW_1(v_1) \cup FW_2(v_1) \cup FW_3(v_1)) = \\ = D(\{v_2, v_3\}) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\} \setminus \\ \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = \{v_{10}\}.$$

Таким образом,  $v_{10} \in FW_4(v_1)$ , а следовательно, согласно алгоритму 3.2 существует минимальный путь в орграфе  $D$  из  $v_1$  в  $v_{10}$  длины 4. Найдем все эти пути. На рис. 3.2 изображен подграф  $D'$  орграфа  $D$ , на котором последовательно изображены множества  $FW_k(v_1)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ , а также дуги вида  $(v, v')$ , где для некоторого  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$   $v \in FW_k(v_1)$ ,  $v' \in FW_{k+1}(v_1)$ , т.е. исходящие из вершин некоторого  $k$ -го фронта волны и заходящие в вершины следующего  $(k + 1)$ -го фронта волны.

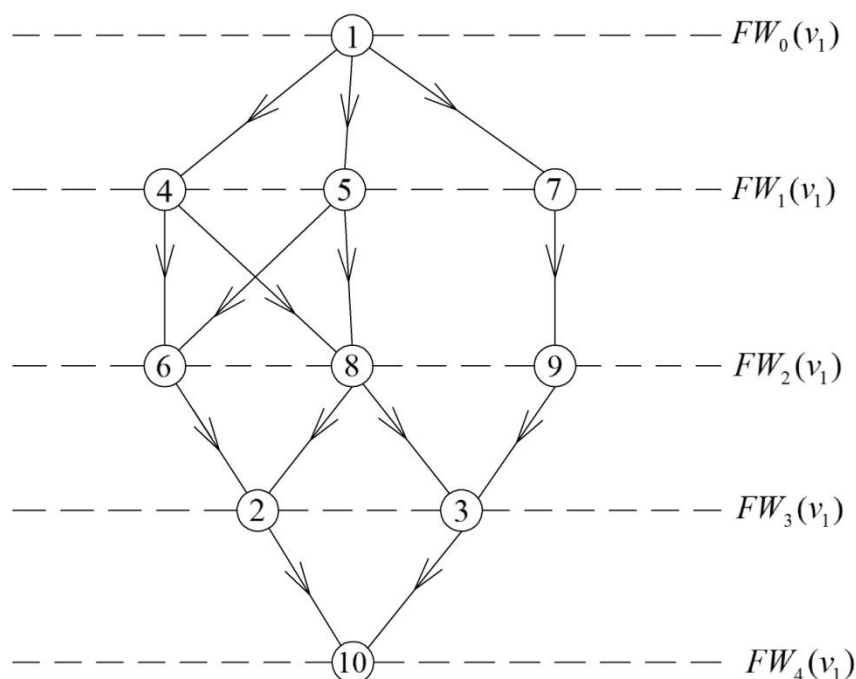


Рис. 3.2

Используя изображение  $D'$ , нетрудно выделить все минимальные пути из  $v_1$  в  $v_{10}$  в орграфе  $D$ . При этом, следуя (3.1), находим эти минимальные пути, используя орграф  $D'$ , но двигаясь в  $D'$  в обратной последовательности (т.е. не из  $v_1$  в  $v_{10}$ , а наоборот, из  $v_{10}$  в  $v_1$ ). Используя рис. 3.2, получаем, что в любом минимальном пути из  $v_1$  в  $v_{10}$  соблюдается следующая последовательность вершин. Вершиной, предшествующей вершине  $v_{10}$ , может быть любая из вершин  $v_2, v_3$ . Вершиной, предшествующей вершине  $v_2$ , может быть любая из вершин  $v_6, v_8$ , а вершиной, предшествующей вершине  $v_3$ , — любая из вершин  $v_8, v_9$  и т.д. Этими условиями однозначно определяется множество минимальных путей из  $v_1$  в  $v_{10}$ , которое компактно изображено на рис. 3.3. На этом рисунке изображены все вершины, входящие в минимальные пути из  $v_1$  в  $v_{10}$ . Для каждой из промежуточных вершин  $v$  показано множество вершин, которые могут ей предшествовать, а также соответствующие дуги (исходящие из вершин, предшествующих  $v$ , и заходящие в  $v$ ). Из рис. 3.3 видно, что всего существует семь минимальных путей из  $v_1$  в  $v_{10}$  одним из которых является  $v_1 v_4 v_6 v_2 v_{10}$ .

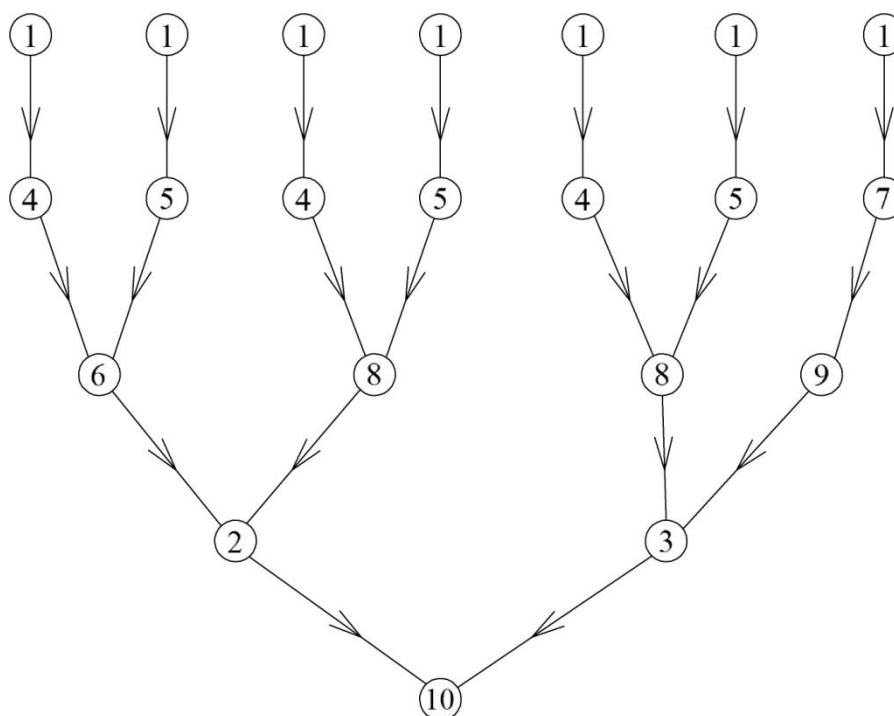


Рис. 3.3

### Поиск минимальных путей (маршрутов) в нагруженных орграфах (графах).

Назовем оргграф  $D = (V, X)$  *нагруженным*, если на множестве дуг  $X$  определена некоторая функция  $l: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Тем самым в нагруженном оргграфе  $D$  каждой дуге  $x \in X$  поставлено в соответствие некоторое действительное число  $l(x)$  – *длина дуги*  $x$ . Для любого пути  $\pi$  нагруженного оргграфа  $D$  обозначим через  $l(\pi)$  сумму длин входящих в  $\pi$  дуг; при этом каждая дуга учитывается столько раз, сколько она входит в этот путь. Будем называть  $l(\pi)$  *длиной пути*  $\pi$ . Путь в нагруженном оргграфе  $D$  из вершины  $v$  в вершину  $w$ , где  $v, w \in V$ , называется *минимальным*, если он имеет минимальную длину среди всех путей оргграфа  $D$  из  $v$  в  $w$ .

Пусть  $D = (V, X)$  – нагруженный оргграф,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 2$ . Опишем метод *Форда – Беллмана* поиска минимальных путей из начальной вершины  $v_1$  в вершины  $v_i$ ,  $i = 2, \dots, n$  (если таковые пути существуют). Если в оргграфе существует хотя бы один контур отрицательной длины, то в нем может не существовать путь минимальной длины из некоторой вершины в некоторую другую вершину.

**Пример 3.1.** Рассмотрим нагруженный оргграф  $D$ , изображенный на рис. 3.4 (около каждой дуги указана ее длина). В этом оргграфе не существует минимального пути из  $v_1$  в  $v_4$ , поскольку в нем существует контур  $\sigma = v_2 v_3 v_2$  длины  $-1$ . Действительно,  $l(v_1 v_2 v_4) = 3$ ,  $l(v_1 \sigma v_4) = 2$ ,  $l(v_1 \sigma \sigma v_4) = 1$ , ...,  $l(v_1 \underbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}_{k} v_4) = 3 - k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ .

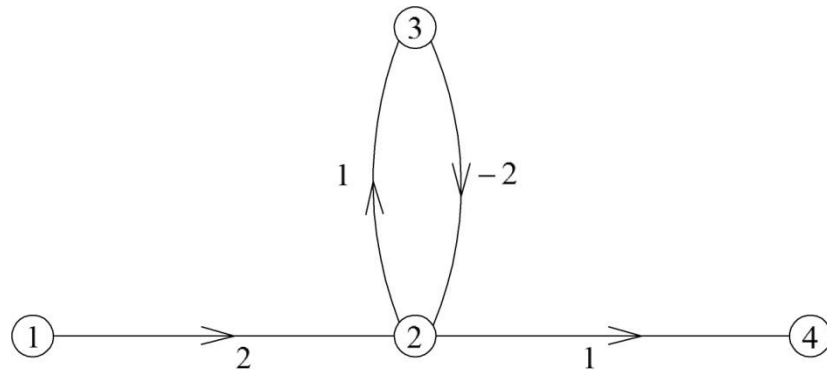


Рис.3.4

Будем для простоты считать, что все дуги в орграфе  $D$  неотрицательны. В этом случае в  $D$  отсутствуют контуры отрицательной длины. Введем величины  $\lambda_i^{(k)}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots$ . Для каждого фиксированного  $i$  и  $k$  величина  $\lambda_i^{(k)}$  равна длине минимального пути среди всех путей орграфа  $D$  из  $v_1$  в  $v_i$ , содержащих не более  $k$  дуг; если же таких путей нет, то  $\lambda_i^{(k)} = \infty$  (здесь и далее под  $\infty$  понимается  $+\infty$ ). Кроме того, если произвольную вершину  $v \in V$  считать путем из  $v$  в  $v$  нулевой длины, то величины  $\lambda_i^{(k)}$  можно ввести также и для  $k = 0$ , и при этом

$$\lambda_1^{(0)} = 0, \lambda_i^{(0)} = \infty, i = 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Поскольку по предположению в  $D$  отсутствуют контуры отрицательной длины, то

$$\lambda_1^{(k)} = 0, k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Введем также в рассмотрение квадратную матрицу  $C(D) = [c_{ij}]$  порядка  $n$  с элементами  $c_{ij} = l(v_i, v_j)$ , если  $(v_i, v_j) \in X$ , и  $c_{ij} = \infty$  – в противном случае, которую будем называть *матрицей длин дуг* нагруженного орграфа  $D$ .

Справедливы следующие утверждения.

**Утверждение 3.1.** При  $j = 2, \dots, n, k = 0, 1, \dots$  выполняется равенство

$$\lambda_j^{(k+1)} = \min_{1 \leq i \leq n} \{ \lambda_i^{(k)} + c_{ij} \}. \quad (3.4)$$

**Утверждение 3.2.** Если  $i \in \{2, \dots, n\}, \lambda_i^{(n-1)} = \infty$ , то вершина  $v_i$  не достижима из  $v_1$ . В противном случае  $v_i$  достижима из  $v_1$  и  $\lambda_i^{(n-1)}$  – длина минимального пути из  $v_1$  в  $v_i$ .

Таким образом, по величинам  $\lambda_2^{(n-1)}, \dots, \lambda_n^{(n-1)}$  можно судить о достижимости вершин  $v_2, \dots, v_n$  из  $v_1$ , а также определять длины минимальных путей из  $v_1$  во все достижимые вершины. Кроме того, по таблице  $\lambda_i^{(j)}, i = 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n-1$ , можно определять минимальные пути из  $v_1$  во все достижимые вершины. При этом, как и в алгоритме «фронта волны», движемся в обратной последовательности, т.е. из некоторой заданной вершины  $v_i$  с  $\lambda_i^{(n-1)} < \infty$ , где  $i \in \{2, \dots, n\}$ , в исходную вершину  $v_1$ , после чего восстанавливаем истинную последовательность вершин. Сначала определяем минимальный номер  $k_0$ , при котором  $\lambda_i^{(k_0)} = \lambda_i^{(n-1)}$ . Величина  $k_0$  соответствует числу дуг в минимальном пути из  $v_1$  в  $v_i$ . Предшествующей вершиной для  $v_i$  (в минимальном пути из  $v_1$  в  $v_i$ ) является вершина  $v_{i_1}$ , для которой выполняется равенство

$\lambda_i^{(k_0)} = \min_{1 \leq i' \leq n} \{ \lambda_{i'}^{(k_0-1)} + c_{i'i} \} = \lambda_{i_1}^{(k_0-1)} + c_{i_1 i}$ . Вершиной, предшествующей вершине  $v_i$  (в минимальном пути из  $v_1$  в  $v_i$ ), является вершина  $v_{i_2}$ , для которой выполняется равенство  $\lambda_{i_1}^{(k_0-1)} = \min_{1 \leq i' \leq n} \{ \lambda_{i'}^{(k_0-2)} + c_{i' i_1} \} = \lambda_{i_2}^{(k_0-2)} + c_{i_2 i_1}$  и т.д. (это рассуждение основано на равенстве (3.4)).

**Разбор типового варианта.** Нагруженный оргграф  $D$  задан матрицей длин дуг  $C(D)$  (см. табл. 3.2). Найти минимальные пути из  $v_1$  во все достижимые вершины.

Сначала определим таблицу величин  $\lambda_i^{(j)}, i=1,2,\dots,n, j=0,1,\dots,n-1$  (см. табл. 3.3), где  $n=7$ .

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$		$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$
$v_1$	$\infty$	$\infty$	9	$\infty$	$\infty$	2	12		<b>0</b>	0	0	0	0	0	0
$v_2$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	2	4		$\infty$	$\infty$	10	5	5	5	5
$v_3$	2	1	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	2		$\infty$	9	9	9	<b>6</b>	6	6
$v_4$	$\infty$	1	1	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$		$\infty$	$\infty$	$\infty$	<b>5</b>	5	5	5
$v_5$	1	2	$\infty$	2	$\infty$	$\infty$	$\infty$		$\infty$	$\infty$	<b>3</b>	3	3	3	3
$v_6$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	$\infty$	8		$\infty$	<b>2</b>	2	2	2	2	2
$v_7$	$\infty$	2	1	$\infty$	1	2	$\infty$		$\infty$	12	10	10	9	<b>8</b>	8

Табл. 3.2

Табл. 3.3

Обозначим  $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_7^{(k)})^T$ , где  $k=0,1,\dots,6$ . Это столбцы в табл. 3.3. Элементы  $\lambda_i^{(0)}$ , где  $i=1,2,\dots,7$ , столбца  $\lambda^{(0)}$  определяются согласно (3.2). Из (3.3) следует, что первая строка таблицы 3.3 состоит из нулевых элементов. Далее, используя утверждение 3.1, последовательно определяем (согласно формуле (3.4)) элементы столбца  $\lambda^{(1)}$ , используя элементы столбца  $\lambda^{(0)}$  (а также элементы матрицы  $C(D)$ ), затем находим элементы столбца  $\lambda^{(2)}$ , используя элементы столбца  $\lambda^{(1)}$  и т.д. Например,  $\lambda_2^{(3)} = \min_{1 \leq i \leq 7} \{ \lambda_i^{(2)} + c_{i2} \} = 5$ , поскольку при сложении соответствующих столбцов имеем (см. табл. 3.4):

$v_2$		$\lambda^{(2)}$		
$\infty$	+	0	=	$\infty$
$\infty$	+	10	=	$\infty$
1	+	9	=	10
1	+	$\infty$	=	$\infty$
2	+	3	=	<b>5</b>
$\infty$	+	2	=	$\infty$
2	+	10	=	12

Табл. 3.4

и число 5 является минимальным элементом в последнем столбце этой таблицы (выделено жирным шрифтом).

Длина минимального пути из  $v_1$  в  $v_7$  равна 8 (см. утверждение 3.2). В таблице 3.3 жирным шрифтом указаны величины, по которым последовательно находятся вершины в минимальном пути из  $v_1$  в  $v_7$ . Минимальное число  $k_0$ , при котором  $\lambda_7^{(k_0)} = 8$ , равно 5, поэтому выделена величина  $\lambda_7^{(5)} = 8$ . Вершиной, предшествующей  $v_7$  (в минимальном

пути из  $v_1$  в  $v_7$ ) является вершина  $v_3$ , поскольку  $\lambda_7^{(5)} = 8 = \min_{1 \leq i \leq 7} \{\lambda_i^{(4)} + c_{i7}\} = \lambda_3^{(4)} + c_{37} = 6 + 2$  (вершина  $v_3$  находится в первом столбце табл. 3.2, в котором перечисляются вершины орграфа  $D$ , напротив выделенного числа  $6 = \lambda_3^{(4)}$ ). Вершиной, предшествующей  $v_3$ , является  $v_4$  (вершина  $v_4$  находится в первом столбце табл. 3.2 напротив выделенного числа  $5 = \lambda_4^{(3)}$ ) и т.д. Таким образом, минимальным путем из  $v_1$  в  $v_7$  является  $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3 v_7$  (см. последовательность выделенных элементов в табл. 3.3). Соответственно,  $v_1 v_6 v_5 v_4 v_3$ ,  $v_1 v_6 v_5 v_4$ ,  $v_1 v_6 v_5$ ,  $v_1 v_6$  – минимальные пути из  $v_1$  в соответствующие вершины. Минимальный путь из  $v_1$  в  $v_2$  находится аналогично. Его длина равна 5. Минимальное число  $k_0$ , при котором  $\lambda_2^{(k_0)} = 5$ , равно 3. Вершиной, предшествующей  $v_2$ , является вершина  $v_5$ , поскольку  $\lambda_2^{(3)} = 5 = \min_{1 \leq i \leq 7} \{\lambda_i^{(2)} + c_{i2}\} = \lambda_5^{(2)} + c_{52} = 2 + 3$ . Далее, как было показано ранее, вершиной, предшествующей  $v_5$ , является вершина  $v_6$ , а вершиной, предшествующей вершине  $v_6$ , является вершина  $v_1$ . Таким образом, минимальным путем из  $v_1$  в  $v_2$  является  $v_1 v_6 v_5 v_2$ .