

### Лабораторная работа №3. Смежные классы группы по ее подгруппе

**Задание 3.** Определить для заданной подгруппы  $H \subset S_4$ :

- элементы из  $H$ ;
  - левые и правые смежные классы группы  $S_4$  по  $H$ .
- $H = \langle (2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3) \rangle$

**Порядок выполнения:**

- Перечислить все элементы из  $S_4$ .
- Найти все элементы из  $H = \langle (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle$ , составив таблицу Кэли для  $H$ .
- Определить  $|H|$ ,  $|S_4/H| = |S_4|/|H|$ , является ли  $H$  подгруппой индекса 2? (т.е. содержащей  $|S_4|/2 = 4!/2 = 12$  элементов).
- Найти все левые и правые смежные классы из  $S_4/H$ .
- Проверить выполнение условия  $\forall \pi \in S_4 \quad \pi H = H\pi$ . В каких случаях это условие можно не проверять (т.е. ответ заранее известен) и почему?

**Решение:**

- Разобьем элементы из  $S_4$  на 4 попарно не пересекающихся множества:

$$S_4(1 \mapsto 1) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 1\} = \{e, (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\};$$

$$S_4(1 \mapsto 2) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 2\} = \{(1\ 2), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3)\};$$

$$S_4(1 \mapsto 3) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 3\} = \{(1\ 3), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2)\};$$

$$S_4(1 \mapsto 4) = \{\pi \in S_4 \mid \pi(1) = 4\} = \{(1\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\}.$$

- Составим таблицу Кэли для  $H$  (первоначально включаем в нее  $e$ , элементы из  $\{(1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4)\}$  и обратные к ним.

	$e$	$(1\ 4\ 3)$	$(1\ 3\ 4)$	$(2\ 3\ 4)$	$(2\ 4\ 3)$
$e$	$e$	$(1\ 4\ 3)$	$(1\ 3\ 4)$	$(2\ 3\ 4)$	$(2\ 4\ 3)$
$(1\ 4\ 3)$	$(1\ 4\ 3)$	$(1\ 3\ 4)$	$e$	$(1\ 4\ 2)$	$(1\ 4)(2\ 3)$
$(1\ 3\ 4)$	$(1\ 3\ 4)$	$e$	$(1\ 4\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 3\ 2)$
$(2\ 3\ 4)$	$(2\ 3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 4)(2\ 3)$	$(2\ 4\ 3)$	$e$
$(2\ 4\ 3)$	$(2\ 4\ 3)$	$(1\ 3)(2\ 4)$	$(1\ 2\ 4)$	$e$	$(2\ 3\ 4)$

$$(1\ 4\ 3)(2\ 3\ 4) = (1\ 4\ 2); (1\ 4\ 3)(2\ 4\ 3) = (1\ 4)(2\ 3);$$

$$(1\ 3\ 4)(2\ 3\ 4) = (1\ 3)(2\ 4); (1\ 3\ 4)(2\ 4\ 3) = (1\ 3\ 2);$$

$$(2\ 3\ 4)(1\ 4\ 3) = (1\ 2\ 3); (2\ 3\ 4)(1\ 3\ 4) = (1\ 4)(2\ 3);$$

$$(2\ 4\ 3)(1\ 4\ 3)=(1\ 3)(2\ 4); (2\ 4\ 3)(1\ 3\ 4)=(1\ 2\ 4).$$

Добавляем новые элементы в таблицу вместе с обратными к ним, т.е. добавляем

$$(1\ 4\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3):$$

	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 4 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)
$e$	$e$	(1 4 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(2 4 3)	(1 2 4)	(1 4 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)
(1 4 3)	(1 4 3)	(1 3 4)	$e$	(1 4 2)	(1 4)(2 3)	(1 2 3)	(1 3)(2 4)	(1 2)(3 4)	(2 4 3)	(1 3 2)	(2 3 4)	(1 2 4)
(1 3 4)	(1 3 4)	$e$	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)	(2 3 4)	(1 2 4)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	(1 4 2)	(1 2 3)
(2 3 4)	(2 3 4)	(1 2 3)	(1 4)(2 3)	(2 4 3)	$e$	(1 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 2)	(1 2 4)	(1 4 3)	(1 3 2)
(2 4 3)	(2 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 4)	$e$	(2 3 4)	(1 4)(2 3)	(1 3 2)	(1 4 3)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(1 2 3)	(1 4 2)
(1 2 4)	(1 2 4)	(2 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 4 2)	$e$	(1 4)(2 3)	(1 3 4)	(2 3 4)	(1 3 2)	(1 4 3)
(1 4 2)	(1 4 2)	(1 2)(3 4)	(1 3 2)	(1 4)(2 3)	(1 4 3)	$e$	(1 2 4)	(2 3 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 3)	(1 3 4)	(2 4 3)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 4)(2 3)	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	(1 2 4)	(1 3)(2 4)	(1 4 3)	(1 3 2)	$e$	(1 4 2)	(2 4 3)	(1 3 4)
(1 3 2)	(1 3 2)	(1 4 2)	(1 2)(3 4)	(1 3 4)	(1 3)(2 4)	(2 4 3)	(1 4)(2 3)	$e$	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 2 4)	(2 3 4)
(1 4)(2 3)	(1 4)(2 3)	(2 3 4)	(1 2 3)	(1 4 3)	(1 4 2)	(1 3 2)	(2 4 3)	(1 3 4)	(1 2 4)	$e$	(1 2)(3 4)	(1 3)(2 4)
(1 3)(2 4)	(1 3)(2 4)	(1 2 4)	(2 4 3)	(1 3 2)	(1 3 4)	(1 4 3)	(1 2 3)	(1 4 2)	(2 3 4)	(1 2)(3 4)	$e$	(1 4)(2 3)
(1 2)(3 4)	(1 2)(3 4)	(1 3 2)	(1 4 2)	(1 2 4)	(1 2 3)	(2 3 4)	(1 3 4)	(2 4 3)	(1 4 3)	(1 3)(2 4)	(1 4)(2 3)	$e$

Заполняем таблицу. Первая строка заполняется тривиальным образом.

**Вторая строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 4\ 3)(1\ 2\ 4)=(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 3)(1\ 4\ 2)=(1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3)(1\ 2\ 3)=(1\ 2)(3\ 4),$$

$$(1\ 4\ 3)(1\ 3\ 2)=(2\ 4\ 3), (1\ 4\ 3)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3)(1\ 3)(2\ 4)=(2\ 3\ 4).$$

Добавляем также в таблицу новый элемент  $(1\ 2)(3\ 4)$  (он обратен самому себе). При этом  $(1\ 4\ 3)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 2\ 4)$ .

**Третья строка таблицы Кэли:**

$$(1\ 3\ 4)(1\ 2\ 4)=(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3\ 4)(1\ 4\ 2)=(2\ 3\ 4), (1\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)=(1\ 2\ 4),$$

$$(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 2)=(1\ 4)(2\ 3), (1\ 3\ 4)(1\ 4)(2\ 3)=(2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 4\ 2),$$

$$(1\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 2\ 3);$$

**Четвертая строка таблицы Кэли:**

$$(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 4)=(1\ 3\ 4), (2\ 3\ 4)(1\ 4\ 2)=(1\ 2)(3\ 4), (2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)=(1\ 3)(2\ 4),$$

$$(2\ 3\ 4)(1\ 3\ 2)=(1\ 4\ 2), (2\ 3\ 4)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 4\ 3),$$

$$(2\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 3\ 2);$$

**Пятая строка таблицы Кэли:**

$$(2\ 4\ 3)(1\ 2\ 4)=(1\ 4)(2\ 3), (2\ 4\ 3)(1\ 4\ 2)=(1\ 3\ 2), (2\ 4\ 3)(1\ 2\ 3)=(1\ 4\ 3),$$

$$(2\ 4\ 3)(1\ 3\ 2)=(1\ 2)(3\ 4), (2\ 4\ 3)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 2\ 3),$$

$$(2\ 4\ 3)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 4\ 2);$$

**Шестая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 2\ 4)(1\ 4\ 3)=(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4)=(1\ 3)(2\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 4)(2\ 3\ 4)=(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 2\ 4)(2\ 4\ 3)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 4)=(1\ 4\ 2)$ ,  $(1\ 2\ 4)(1\ 2\ 3)=(1\ 4)(2\ 3)$ ,  
 $(1\ 2\ 4)(1\ 3\ 2)=(1\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 4)(1\ 4)(2\ 3)=(2\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 4)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 3\ 2)$ ,  
 $(1\ 2\ 4)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 4\ 3)$ ;

**Седьмая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 4\ 2)(1\ 4\ 3)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 3\ 4)=(1\ 3\ 2)$ ,  $(1\ 4\ 2)(2\ 3\ 4)=(1\ 4)(2\ 3)$ ,  
 $(1\ 4\ 2)(2\ 4\ 3)=(1\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 2\ 4)=e$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 4\ 2)=(1\ 2\ 4)$ ,  
 $(1\ 4\ 2)(1\ 2\ 3)=(2\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 3\ 2)=(1\ 3)(2\ 4)$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 2\ 3)$ ,  
 $(1\ 4\ 2)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 4\ 2)(1\ 2)(3\ 4)=(2\ 4\ 3)$ ;

**Восьмая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 2\ 3)(1\ 4\ 3)=(1\ 4)(2\ 3)$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 4)=(2\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  
 $(1\ 2\ 3)(2\ 4\ 3)=(1\ 2\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)=(1\ 3)(2\ 4)$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 4\ 2)=(1\ 4\ 3)$ ,  
 $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)=(1\ 3\ 2)$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 2)=e$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 4\ 2)$ ,  
 $(1\ 2\ 3)(1\ 3)(2\ 4)=(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 3\ 4)$ ;

**Девятая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 3\ 2)(1\ 4\ 3)=(1\ 4\ 2)$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 4)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 3\ 2)(2\ 3\ 4)=(1\ 3\ 4)$ ,  
 $(1\ 3\ 2)(2\ 4\ 3)=(1\ 3)(2\ 4)$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 4)=(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 4\ 2)=(1\ 4)(2\ 3)$ ,  
 $(1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3)=e$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 3\ 2)=(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 4\ 3)$ ,  
 $(1\ 3\ 2)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 2\ 4)$ ,  $(1\ 3\ 2)(1\ 2)(3\ 4)=(2\ 3\ 4)$ ;

**Десятая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 3)=(2\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 3\ 4)=(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(2\ 3\ 4)=(1\ 4\ 3)$ ,  
 $(1\ 4)(2\ 3)(2\ 4\ 3)=(1\ 4\ 2)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 2\ 4)=(1\ 3\ 2)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 4\ 2)=(2\ 4\ 3)$ ,  
 $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 2\ 3)=(1\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 3\ 2)=(1\ 2\ 4)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 4)(2\ 3)=e$ ,  
 $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 3)(2\ 4)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 4)(2\ 3)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 3)(2\ 4)$ ;

**Одиннадцатая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4\ 3)=(1\ 2\ 4)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 4)=(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(2\ 3\ 4)=(1\ 3\ 2)$ ,  
 $(1\ 3)(2\ 4)(2\ 4\ 3)=(1\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 4)=(1\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4\ 2)=(1\ 2\ 3)$ ,  
 $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2\ 3)=(1\ 4\ 2)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 3\ 2)=(2\ 3\ 4)$ ,  
 $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4)(2\ 3)=(1\ 2)(3\ 4)$ ,  $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 3)(2\ 4)=e$ ,  
 $(1\ 3)(2\ 4)(1\ 2)(3\ 4)=(1\ 4)(2\ 3)$ ;

**Двенадцатая строка таблицы Кэли:**

$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 3)=(1\ 3\ 2)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 4)=(1\ 4\ 2)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(2\ 3\ 4)=(1\ 2\ 4)$ ,  
 $(1\ 2)(3\ 4)(2\ 4\ 3)=(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 4)=(2\ 3\ 4)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 2)=(1\ 3\ 4)$ ,  
 $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 3)=(2\ 4\ 3)$ ,  $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 2)=(1\ 4\ 3)$ ,

$$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4)(2\ 3) = (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4)(1\ 3)(2\ 4) = (1\ 4)(2\ 3),$$

$$(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)(3\ 4) = e.$$

Поскольку  $|H|=12=|S_4|/2$ , то  $H$  является нормальной подгруппой и  $\forall \pi \in S_4 \quad \pi H = H\pi$ . При этом  $S_4/H$  содержит два смежных класса  $H, \sigma H$ , где  $\sigma$  - любая подстановка из  $S_4 \setminus H$ , например,  $\sigma = (1\ 2)$ .

**Ответ:** Множество  $S_4/H$  содержит два смежных класса:

$$1) H = \{e, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2),$$

$$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} = (1\ 3\ 4)H = (1\ 4\ 3)H = (2\ 3\ 4)H = (2\ 4\ 3)H =$$

$$= (1\ 2\ 3)H = (1\ 3\ 2)H = (1\ 2)(3\ 4)H = (1\ 3)(2\ 4)H = (1\ 4)(2\ 3)H;$$

$$2) (1\ 2)H = \{(1\ 2), (1\ 2)(1\ 3\ 4), (1\ 2)(1\ 4\ 3), (1\ 2)(2\ 3\ 4), (1\ 2)(2\ 4\ 3), (1\ 2)(1\ 2\ 4),$$

$$(1\ 2)(1\ 4\ 2), (1\ 2)(1\ 2\ 3), (1\ 2)(1\ 3\ 2), (1\ 2)(1\ 2)(3\ 4), (1\ 2)(1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(1\ 4)(2\ 3)\} =$$

$$= \{(1\ 2), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 3\ 2), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (2\ 4), (1\ 4), (2\ 3), (1\ 3),$$

$$(3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} = (1\ 3\ 4\ 2)H = (1\ 4\ 3\ 2)H = (1\ 2\ 3\ 4)H = (1\ 2\ 4\ 3)H =$$

$$= (2\ 4)H = (1\ 4)H = (2\ 3)H = (1\ 3)H = (3\ 4)H = (1\ 3\ 2\ 4)H = (1\ 4\ 2\ 3)H.$$