КОНСУЛЬТАЦИЯ ДМ И8 1 сем.

5 вопросов: 1 теорет. и 4 задачи.

1. Алгебра множеств.

ЗАДАНИЕ. Доказать или опровергнуть, используя основные тождества и утверждения алгебры множеств.

++

$$A \cup C \subseteq B \cup C \Leftrightarrow \bar{C} \subseteq \overline{A \setminus B}$$

(а) Левая часть: $A \cup C \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \cup C) \setminus (B \cup C) = \varnothing \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (A \cup C) \cap (\overline{B \cup C}) = \varnothing \Leftrightarrow (A \cup C)\bar{B}\bar{C} = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\bar{B}\bar{C} \cup \underbrace{C\bar{B}\bar{C}}_{=\varnothing} = \varnothing \Leftrightarrow A\bar{B}\bar{C} = \varnothing.$$

(б) Правая часть: $\bar{C} \subseteq \overline{A \setminus B} \Leftrightarrow \bar{C} \setminus (\overline{A \setminus B}) = \varnothing \Leftrightarrow \bar{C} \cap (\overline{\overline{A \setminus B}}) = \varnothing \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{C} \cap (A \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow \bar{C} \cap (A \cap \bar{B}) = \varnothing \Leftrightarrow A\bar{B}\bar{C} = \varnothing.$$

++

Используемые утверждения и тождества:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} = A\bar{B};$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A}\bar{B};$$

$$A(B \cup C) = AB \cup BC;$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \varnothing \Leftrightarrow A\bar{B} = \varnothing;$$

$$A + B = \varnothing \Leftrightarrow A\bar{B} \cup B\bar{A} = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B;$$

2. Бинарные отношения.

ЗАДАНИЕ 1. Дано бинарное отношение ρ на $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.Исследовать на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.

++

$$x\rho y \Leftrightarrow x - y \le 10$$

(а) рефлексивность (+): $\forall x \in Z \;\; x - x = 0 \le 10 \Rightarrow x\rho x$;

(б) симметричность (-): $1 - 12 = -11 \le 10$, $12 - 1 = 11 > 10$, т.е. $<1,12> \in \rho$, но $<12,1> \notin \rho$.

(в) антисимметричность (-): $1 - 2 = -1 \le 10$, $2 - 1 = 1 \le 10$, но $1 \ne 2$ т.е. $<1,2> \in \rho, <2,1> \in \rho$, но $1 \ne 2$.

(г) транзитивность (-): $20 - 10 = 10 \le 10$, $10 - 0 = 10 \le 10$, но $20 - 0 = 20 > 10$ т.е. $<20,10> \in \rho, <10,0> \in \rho$, но $<20,0> \notin \rho$. Таким образом, при $x = 20, y = 10$, $z = 0$ выполняется: $<x,y> \in \rho, <y,z> \in \rho$, но $<x,z> \notin \rho$.

++

ЗАДАНИЕ 2. График функции $y = f(x), x \in X = [0, 5]$, представляет собой ломаную (см. рис. 3.1), звенья которой параллельны координатной оси либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Эта функция порождает отношение эквивалентности ρ_f на множестве X (см. утверждение 3.5): $\forall x_1, x_2 \in X$

$x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Перечислить все классы эквивалентности.

Решение. Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0, 1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1, f(x_1) = f(x)$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x\}$. (б) Пусть $x \in \{1, 4\}$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{1, 4\}$. (в) Пусть $x \in (1, 2)$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{x, x_1, x_2\}$ (см. рис. 3.1). При этом из геометрических соображений получаем: $x - 1 = 4 - x_1 = x_2 - 4$, откуда $x_1 = 5 - x, x_2 = x + 3$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, x + 3\}$. (г) Пусть $x \in [2, 3] \cup \{5\}$. Заметим, что $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2, 3] \cup \{5\}$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = [2, 3] \cup \{5\}$. (д) Пусть $x \in (3, 4)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, 8 - x\}$. (е) Пусть $x \in (4, 5)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, x - 3, 8 - x\}$.

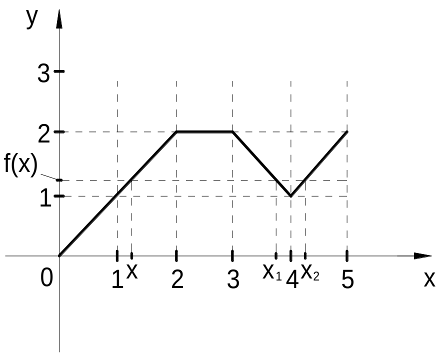


Рис. 3.1

ЗАДАНИЕ 3. Диаграмма Хассе, соответствующая частичному порядку $\preccurlyeq$, заданному на множестве $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, представлена на рис. 4.2. Определить все упорядоченные пары, принадлежащие $\preccurlyeq$, минимальные и максимальные элементы, наименьший и наибольший (если они существуют), сегмент $[a, b]$, а также расширить до линейного порядка.

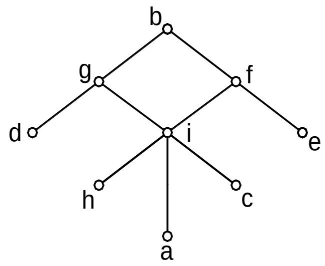
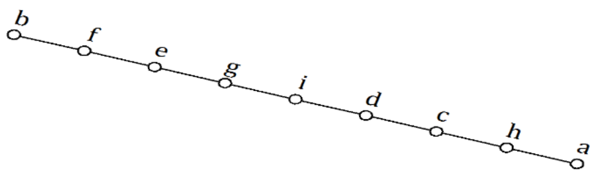


Рис. 4.2

Решение. По определению частичного порядка, бинарное отношение $\preccurlyeq$ является рефлексивным, а следовательно, ему принадлежат все пары вида $\langle x, x\rangle$, где $x \in A$. Другие пары, принадлежащие $\preccurlyeq$, определяем из диаграммы Хассе, используя соединения элементов прямолинейными отрезками и транзитивность $\preccurlyeq$. Например, для элемента a имеем: $a \prec i$; $a \prec i \prec f \Rightarrow a \prec f$; $a \prec i \prec g \Rightarrow a \prec g$; $a \prec i \prec f \prec b \Rightarrow \Rightarrow a \prec b$, откуда следует, что этому частичному порядку принадлежат пары: $\langle a,i\rangle, \langle a, f\rangle, \langle a, g\rangle, \langle a,b\rangle$. Действуя аналогичным образом, получаем следующее множество упорядоченных пар, принадлежащих $\preccurlyeq$:
$\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \ldots, \langle i,i\rangle, \langle a,i\rangle, \langle a, f\rangle, \langle a, g\rangle, \langle a,b\rangle, \langle c,i\rangle, \langle c,g\rangle, \langle c, f\rangle,$
$\langle c,b\rangle, \langle d,g\rangle, \langle d,b\rangle, \langle e, f\rangle, \langle e,b\rangle, \langle f,b\rangle, \langle g,b\rangle, \langle h,i\rangle, \langle h, f\rangle, \langle h,g\rangle, \langle h,b\rangle, \langle i,g\rangle, \langle i, f\rangle, \langle i,b\rangle\}$.
При этом b – максимален на A; a,c,d,e,h – минимальны; $[a,b] = \{x \in A \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\} = \{a,b, f, g,i\}$, элемент b является наибольшим на A, а, в силу утверждения 4.2 (см. в лмс уч. пос.«Алгебра множеств, бинарные …..»), наименьшего на A элемента нет.



++

3. Формулы математической логики.

ЗАДАНИЕ 1. Найти ВСЕ! минимальные ДНФ для булевой функции $f(X,Y,Z)$, заданной таблицей (см. табл. 5.5).

X	Y	Z	f	$X\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$X\bar{Y}$	$\bar{X}Y$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	0	0	1	1	0	1	0
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Табл. 5.5

Используя алгоритм 5.1, найдем сокращенную ДНФ булевой функции $f(X,Y,Z)$.

(1-й этап) Используя утверждение 4.2, выразим булеву функцию $f(X,Y,Z)$ формулой F, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X,Y,Z\rangle$:

$$f = F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\ \overline{Y}\ \overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}Y\overline{Z}\ .$$

(2-й этап) Производим все возможные «склеивания» элементарных конъюнкций, являющихся дизъюнктивными членами F. С учетом замечания 5.1 добавляем к формуле F новые дизъюнктивные члены, являющиеся результатом приведенных «склеиваний», т.е.

$$F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\ \overline{Y}\ \overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}Y\overline{Z} \qquad .$$

Дальнейшее «склеивание» дизъюнктивных членов в полученной расширенной формуле невозможно, т.е. мы получили требуемую для этого этапа формулу F_1.

(3-й этап) Применим к формуле F_1 второй закон поглощения: $F_1 \equiv X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}\ Y$.

Дальнейшее упрощение формулы с применением второго закона поглощения или идемпотентности $\vee$ невозможно. Следовательно, сокращенной ДНФ булевой функции f является формула $G = X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}\ Y$, выражающая f, поскольку по построению $F \equiv G$.

$$F = XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee \underset{1+}{X\overline{Z}} \vee \underset{2+}{Y\overline{Z}} \vee \underset{3+}{X\overline{Y}} \vee \underset{4+}{\overline{X}Y} \equiv$$

$$\equiv X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y$$ – сокращенная ДНФ

Составим таблицу (см. табл. 5.5) значений простых импликантов функции f. Из табл.5.5 видно, что ядровыми импликантами функции f являются: $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$. При этом собственной оценкой для $X\overline{Y}$ является $\langle 1,0,1\rangle$, а собственной оценкой для $\overline{X}Y$ является $\langle 0,1,1\rangle$ (эти оценки, а также значения булевых функций на них выделены жирным шрифтом). Рассмотрим дизъюнкцию ядровых импликантов $X\overline{Y} \vee \overline{X}Y$. Эта ДНФ не выражает булеву функцию f (см. вторую строку табл. 5.5). Добавив к $X\overline{Y} \vee \overline{X}Y$ любой из оставшихся простых импликантов $X\overline{Z}$ или $Y\overline{Z}$ получим две формулы, выражающие f, каждая из них является минимальной ДНФ, выражающей эту функцию:

$$f = X\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y,\ \ f = Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y\ .$$

Следующий пример показывает, что минимальная ДНФ, выражающая данную булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, может оказаться неединственной и не иметь ядровых импликантов.

Пример 5.3. Рассмотрим булеву функцию $f(X,Y,Z)$, заданную таблицей (см. табл. 5.6).

X	Y	Z	f	XY	YZ	$X\overline{Z}$	$\overline{Y}\ \overline{Z}$	$\overline{X}Z$	$\overline{X}\overline{Y}$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0

0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1

Табл. 5.6

Используя утверждение 4.2, а также алгоритм 5.1, найдем сокращенную ДНФ булевой функции $f(X,Y,Z)$:

$$f = F \equiv XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \equiv XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee$$
$$\vee \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \vee XY \vee YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee \overline{X}\overline{Y} \equiv XY \vee YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee \overline{X}\overline{Y}.$$

Составим таблицу (см. табл. 5.6) значений простых импликантов функции f. Из табл. 5.7 видно, что ядровых импликантов у функции f нет (на каждой оценке списка переменных, на которой $f=1$, ровно два импликанта принимают значение 1). Между тем, как видно из табл. 5.6, существуют две минимальные ДНФ, выражающие f:

$$f = XY \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z, \quad f = YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}.$$

Действительно, дизъюнкция двух простых импликантов функции f принимает значение 1 не более, чем на четырех оценках списка переменных, а следовательно, не может выражать f. При этом существуют ровно два варианта дизъюнкции трех простых импликантов, выражающих f, они и дают нам две различные минимальные ДНФ, выражающие эту булеву функцию.

ЗАДАНИЕ 2. *Найти многочлен Жегалкина для булевой функции, заданной формулой логики высказываний* $F = \neg(Y \,\&\, \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$.

$$F = \neg(Y \,\&\, \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) = \neg(Y \,\&\, \neg Z) \sim \neg(Y \vee \neg X) =$$
$$= \neg(Y \,\&\, \neg Z) \sim (\overline{Y} \,\&\, X) = \neg(Y \,\&\, \neg Z) + (\overline{Y} \,\&\, X) + 1 = Y(Z+1) + 1 + (Y+1)X + 1 =$$
$$= YZ + Y + 1 + YX + X + 1 = XY + YZ + X + Y.$$

Используемые формулы:

$$X \supset Y = \overline{X} \vee Y = \neg(X \,\&\, \overline{Y}) = X(Y+1) + 1 = XY + X + 1,$$
$$X \vee Y = \neg(\overline{X} \,\&\, \overline{Y}) = (X+1)(Y+1) + 1 = XY + X + Y + 1 + 1 = XY + X + Y,$$
$$X \sim Y = \neg(X + Y) = X + Y + 1.$$

4. Логика предикатов.

ЗАДАНИЕ 1. Привести формулу к нормальной приведенной форме.

$$F = ((\forall x)(\exists y)P^{(2)}(x,y) \& (\forall x)Q^{(1)}(x)) \supset (\exists x)(\forall y)S^{(2)}(x,y) \equiv$$
$$\equiv \neg((\forall x)(\exists y)P^{(2)}(x,y) \& (\forall x)Q^{(1)}(x)) \vee (\exists x)(\forall y)S^{(2)}(x,y) \equiv$$
$$\equiv ((\exists x)(\forall y)\neg P^{(2)}(x,y) \vee (\exists x)\neg Q^{(1)}(x)) \vee (\exists x)(\forall y)S^{(2)}(x,y) \equiv$$
$$\equiv (\exists x)[(\forall y)\neg P^{(2)}(x,y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee (\forall y(=z))S^{(2)}(x,y(=z))] \equiv$$
$$\equiv (\exists x)[(\forall y)\neg P^{(2)}(x,y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee (\forall z)S^{(2)}(x,z))] \equiv$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)[\neg P^{(2)}(x,y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee (\forall z)S^{(2)}(x,z))] \equiv$$
$$\equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)[\neg P^{(2)}(x,y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee S^{(2)}(x,z))].$$

ЗАДАНИЕ 2. Проверить правильность рассуждения. *Всякий дирижер является также хорошим музыкантом. Всякий человек, полностью ушедший в бизнес, не может быть хорошим музыкантом. Следовательно, всякий дирижер не может полностью уйти в бизнес.*

Решение. Обозначим:

Д(x) – «x – дирижер», М(x) – «x – хороший музыкант», Б(x) – «x – полностью ушел в бизнес».

Составим формулу логики предикатов, соответствующую нашему рассуждению.

F= $\{(\forall x)[Д(x) \supset М(x)]\&(\forall x)[Б(x) \supset \neg М(x)]\} \supset (\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)]$.

Предположим, что формула F не является общезначимой. Тогда найдется интерпретация **М** = <М, f>, на которой F= Л. Тогда на этой интерпретации

$$(\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)] = Л \Rightarrow \neg(\forall x)[Д(x) \supset \neg Б(x)] = И \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists x)[Д(x)\&Б(x)] = И \Rightarrow \exists x_0 \in М\text{: } Д(x_0) = И, Б(x_0) = И.$$

$$(\forall x)[Д(x) \supset М(x)] = И \Rightarrow Д(x_0) \supset М(x_0) = И \Rightarrow М(x_0) = И.$$

$$(\forall x)[Б(x) \supset \neg М(x)] = И \Rightarrow Б(x_0) \supset \neg М(x_0) = И \Rightarrow \neg М(x_0) = И \Rightarrow$$

$$\Rightarrow М(x_0) = Л.$$

Пришли к противоречию, предположив, что формула F не является общезначимой. Следовательно, формула F является общезначимой и наше рассуждение является **правильным**.

ЗАДАНИЕ 3. Проверить формулу F на выполнимость и общезначимость.

$$F = [(\forall x)\big(A(x) \supset B(x)\big)\&(\exists x)\big(A(x)\&C(x)\big)] \supset (\exists x)\big(B(x) \vee C(x)\big).$$

Выполнима на любой интерпретации **М** = <М, f>, на которой М $\neq \emptyset$ (например, М $= \{0, 1\}$), $B(x) \equiv И, C(x) \equiv И$ (например, $B(x) = C(x) =$ "$x \geq 0$").

Общезначимость? Проверим, рассуждая от противного. Предположим, что формула F не является общезначимой, а следовательно, на некоторой интерпретации **М** = <М, f>, на которой М $\neq \emptyset$, формула F принимает значение Л. Тогда на этой интерпретации (по определению $\supset$) выполняется:

1) $(\exists x)\big(B(x) \vee C(x)\big) = Л \Rightarrow (\forall x)\big(\neg B(x)\&\neg C(x)\big) = И \Rightarrow$

$\Rightarrow \neg B(x) \equiv И, \neg C(x) \equiv И \Rightarrow B(x) \equiv Л, C(x) \equiv Л.$

2) $(\exists x)\big(A(x)\&C(x)\big) = И \Rightarrow$ найдется хотя бы один элемент $x_0 \in$ М такой, что $A(x_0)\&C(x_0) = И \Rightarrow A(x_0) = И, C(x_0) = И.$

3) $(\forall x)\big(A(x) \supset B(x)\big) = И \Rightarrow$ в частности для x_0 выполняется:

$A(x_0) \supset B(x_0) = И$ и поскольку из 2) было получено: $A(x_0) = И$, то по определению $\supset$ заключаем, что $B(x_0) = И$, а это противоречит установленному в 1) условию $B(x) \equiv Л$.

Таким образом, предположение о том, что формула F не является общезначимой приводит к противоречию, а следовательно, F общезначима.

ЗАДАНИЕ 4. Проверить формулу F на выполнимость и общезначимость.

$$F = (\forall x)(\forall y)(\exists z)[\big(A(x) \supset A(z)\big)\&\big(A(z) \supset A(y)\big)].$$

Выполнима на любой интерпретации $\mathbf{M} = <\text{М}, f>$, на которой $\text{М} \neq \emptyset$ (например, $\text{М} = \{0, 1\}$), $A(x) \equiv \text{И}$ (например, $A(x) = "x \geq 0"$).

Общезначимость? Приведем конкретную интерпретацию $\mathbf{M} = <\text{М}, f>$, на которой $F = \text{Л}$. Пусть $\text{М} = \{0, 1\}$, $A(x) = "x = 0"$. Предположим, что на этой интерпретации $F = \text{И}$. Тогда по определению квантора $\forall x$ формула $(\exists z)[\big(A(x) \supset A(z)\big)\&\big(A(z) \supset A(y)\big)]$ должна принимать значение И при любых $x, y \in \text{М}$ и в частности при $x = 0, y = 1$. Таким образом,

$$(\exists z)[\big(A(0) \supset A(z)\big)\&\big(A(z) \supset A(1)\big)]=$$

$$= (\exists z)[(«0 = 0» \supset ”z = 0»)\&(”z = 0» \supset ”1 = 0”)]=$$

$$= (\exists z)[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})]=\text{И}. \qquad (1)$$

В силу выбора $\text{М} = \{0, 1\}$, возможны два варианта для $z \in \text{М} = \{0, 1\}$:

а) при $z = 0$ $[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})]= [(\text{И} \supset "0 = 0")\&("0 = 0" \supset \text{Л})]= [(\text{И} \supset \text{И})\&(\text{И} \supset \text{Л})]= \text{И}\&\text{Л}=\text{Л}$;

б) при $z = 1$ $[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})]= [(\text{И} \supset "1 = 0")\&("1 = 0" \supset \text{Л})]= [(\text{И} \supset \text{Л})\&(\text{Л} \supset \text{И})]= \text{Л}\&\text{И}=\text{Л}$,

т.е. в любом из возможных случаев предикат $[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})]$, принимает значение Л, т.е. на выбранной интерпретации $[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})] \equiv \text{Л}$, откуда $(\exists z)[(\text{И} \supset "z = 0")\&("z = 0" \supset \text{Л})]=\text{Л}$, что противоречит (1). Следовательно, F не является общезначимой.

ЗАДАНИЕ 5. Проверить формулу F на выполнимость и общезначимость.

$$F = (\forall x)(\exists y)(\forall z)[\big(A(x) \sim A(y)\big)\&(A(x) \supset (A(y) \vee (A(z)))].$$

Выполнима на любой интерпретации $\mathbf{M} = <\text{М}, f>$, на которой $\text{М} \neq \emptyset$ (например, $\text{М} = \{0, 1\}$), $A(x) \equiv \text{И}$ (например, $A(x) = "x \geq 0"$).

Общезначимость? Воспользуемся следующим приемом:

$$(\forall x)B(x, x) = \text{И} \Rightarrow (\forall x)(\exists y(= x))B(x, y) = \text{И}.$$

Покажем, что

$$(\forall x)(\forall z)[\big(A(x) \sim A(x)\big)\&(A(x) \supset (A(x) \vee (A(z)))]=\text{И}.$$

Это следует из того, что на любой интерпретации $A(x) \sim A(x) \equiv \text{И}$,

$A(x) \supset (A(x) \vee (A(z)) \equiv И$ (следует из логики высказываний: $A \sim A \equiv И$, $A \supset (A \vee B) \equiv И$).

Здесь $B(x, y) = (\forall z)[\big(A(x) \sim A(y)\big) \& (A(x) \supset (A(y) \vee (A(z)))]$,

$F = (\forall x)(\exists y)B(x, y)$,

$(\forall x)B(x, x) = (\forall x)(\forall z)[\big(A(x) \sim A(x)\big) \& (A(x) \supset (A(x) \vee (A(z)))]$.