Задачи из билетов ДМ

Билет 1

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ: *Кафедра 805*

Зав. кафедрой
Пантелеев А.В.

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №1

Вопросы:

1. Пусть $M = < N, f >$, $f : S(x,y,z) \mapsto$ "$x + y = z$", $P(x,y,z) =$ "$xy = z$". Записать формулы, истинные в M тогда и только тогда, когда (а) $x = 1$; (б) $x = 2$; (в) x - четно; (г) x - нечетно.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \cup B \subseteq C \cup B \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq C$.

3. Пусть ρ - бинарное отношение на $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$: $x \rho y \Leftrightarrow \exists t \in Z : x - y = 3t$. Исследовать на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции $f(x,y,z) = (\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость:
$F = \{[(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \supset P(y,x))] \,\&\, (\forall x)\neg P(x,x)\} \supset (\exists x)(\forall y)\neg P(x,y)$.

N1

третья формула была бы ложным высказыванием.

Пример 1.30. Пусть $M = <N, f>$, где N — множество натуральных чисел, f — соответствие, сопоставляющее предикатным символам $S^{(3)}(x, y, z)$, $P^{(3)}(x, y, z)$ следующие предикаты: $S^{(3)}(x, y, z)$; $x + y = z$; $P^{(3)}(x, y, z) : x \cdot y = z$.

Запишем формулы, истинные в M тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) x — четное число; г) x — простое число; д) $x = y$; е) $x \leqslant y$; ж) x делит y; з) коммутативность сложения.

Ответы: а) $F_1(x) = (\forall y) S^{(3)}(x, y, y)$, так как $x + y = y$ для любого y тогда и только тогда, когда $x = 0$; б) $F_2(x) = (\forall y) P^{(3)}(x, y, y)$; в) $F_3(x) = (\exists y) S^{(3)}(y, y, x)$; г) $F_4(x) = \neg F_1(x) \,\&\, (\forall y)(\forall z)(P^{(3)}(y, z, x) \supset (F_2(y) \vee F_2(z)))$, где F_1, F_2 — формулы, определенные в пп. «а» и «б»; д) $F_5(x) = (\forall z)(\forall u)(S^{(3)}(x, z, u) \supset S^{(3)}(y, z, u))$; е) $F_6(x, y) = (\exists z) S^{(3)}(x, z, y)$; ж) $F_7(x, y) = (\exists z) P^{(3)}(x, z, y)$; з) $(\forall x) \times (\forall y)(\forall z)(S^{(3)}(x, y, z) \supset S^{(3)}(y, x, z))$.

Пример 1.31. Пусть $f(x)$ — произвольная фиксированная

No2

② Док-ть или опровергнуть:

$A \cup B \subseteq C \cup B \iff A \setminus B \subseteq C$

$A \cup B \subseteq C \cup B \iff (A \cup B) \setminus (C \cup B) = \varnothing \iff$

$\iff (A \cup B) \cap (\overline{C \cup B}) = \varnothing \iff (A \cup B) \cap (\bar{C} \cap \bar{B}) = \varnothing \iff$

$\iff (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup \underbrace{\cancel{(B \cap \bar{C} \cap \bar{B})}}_{\varnothing} = \varnothing \iff (A \setminus B) \setminus C = \varnothing \iff$

$\iff A \setminus B \subseteq C$

тождество доказано

No3

ρ на $\mathbb{Z}$: $x \rho y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : x - y = 3t$

(а) <u>рефлексивность</u>

Опред. $x \rho x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x \rho x \Rightarrow x - x = 3t \Rightarrow 0 = 3t \Rightarrow \exists t = 0 : x - x = 3 \cdot 0$

Следовательно: ρ - рефлексивно.

(б) <u>симметричность</u>

Опред: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\underline{x \rho y \Rightarrow} \exists t \in \mathbb{Z} : x - y = 3t \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} : y - x = -3t \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (t' = -t) \in \mathbb{Z} : y - x = 3t' \underline{\Rightarrow y \rho x}$

Следовательно ρ - симметрично.

(в) <u>антисимметричность:</u>

Опред: $x \rho y, y \rho x \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

Например: пусть $x = 3$, $y = 0$, тогда

$\underline{x \rho y, y \rho x \Rightarrow} \exists t \in \mathbb{Z} : x - y = 3t$, $\exists t' \in \mathbb{Z} : y - x = 3t' \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 0 = 3 \cdot 1 \ (t = 1 \in \mathbb{Z})$, $0 - 3 = 3 \cdot (-1) \ (t = -1 \in \mathbb{Z}) \underline{\not\Rightarrow} 3 = 0 \Rightarrow \underline{x = y}$

Следовательно: ρ - не антисимметрично

(г) <u>транзитивность.</u>

Опред: $x \rho y, y \rho z \Rightarrow x \rho z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

$\underline{x \rho y, y \rho z \Rightarrow} \exists t \in \mathbb{Z} : x - y = 3t$, $\exists t' \in \mathbb{Z} : y - z = 3t' \Rightarrow \exists t, t' \in \mathbb{Z} :$

$: x - z = 3t' = 3t \Rightarrow \exists t, t' \in \mathbb{Z} : x - z = 3(t + t') \Rightarrow \exists (t'' = t + t') \in \mathbb{Z} :$

$: x - z = 3t'' \underline{\Rightarrow x \rho z}$,

Следовательно: ρ - транзитивно.

No4

№4. $f(x,y,z) = (\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z) =$

Ядровые импликанты

x	y	z	$\bar{x}$	$\neg x \supset y$	$y \sim z$	$\neg(y \sim z)$	F	СДНФ	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$
1	1	1	0	1	1	0	0					
1	1	0	0	1	0	1	1	$xy\bar{z}$	1			
1	0	1	0	1	0	1	1	$x\bar{y}z$		1		
1	0	0	0	1	1	0	0					
0	1	1	1	1	1	0	0					
0	1	0	1	1	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$	1		1	
0	0	1	1	0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$		1		1
0	0	0	1	0	1	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$			1	1

$(x \& y \& \bar{z}) \vee (x \& \bar{y} \& z) \vee (\bar{x} \& y \& \bar{z}) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& z) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z})$

$= y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$

Ответ: min ДНФ $= \begin{cases} \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \\ \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \end{cases}$

Билет 2

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ: ***Кафедра 805***

Зав. кафедрой
Пантелеев А.В._____

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №2

Вопросы:

1. Основные тождества алгебры множеств. Доказательство дистрибутивности $\cap$ относительно $\cup$, а также дистрибутивности $\cup$ относительно $\cap$.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \setminus B \subseteq C \setminus B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$.

3. Доказать, что если ρ - транзитивное и симметричное бинарное отношение на A, и $D_\rho \cup R_\rho = A$, то ρ - эквивалентность на A.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции $f(x, y, z) = \neg(y \supset \neg z) \sim (y \vee \neg x)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость:
$F = \{[(\forall x)[P(x) \supset Q(x)] \ \& \ (\forall x)[R(x) \supset \neg Q(x)]\} \supset (\forall x)[P(x) \supset \neg R(x)]$.

No1

Основные тождества алгебры множеств. Для любых множеств A, B, C справедливы равенства:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);
4. $A \cup A = A$ (идемпотентность объединения);
5. $A \cup \overline{A} = U$;
6. $A \cup \varnothing = A$;
7. $A \cup U = U$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана);
9. $A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения);
10. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ (закон расщепления);

1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);

3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

4′. $A \cap A = A$ (идемпотентность пересечения);

5′. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

6′. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7′. $A \cap U = A$;

8′. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана);

9′. $A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения);

10′. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ (закон расщепления);

11. $\overline{\overline{A}} = A$;

12. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

13. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$.

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in B, x \in C \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B, x \in A \cup C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \notin A \Rightarrow x \in B, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \end{bmatrix} \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

Докажем тождество $3'$. Для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A,$$

$$\begin{bmatrix} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \\ x \notin B \Rightarrow x \in C \Rightarrow x \in A \cap C \end{bmatrix} \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

С другой стороны, для любого $x \in U$ имеем:

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \\ x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A, x \in C \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A, x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C).$$

No2

(2) Док-ть или опровергнуть:

$A \setminus B \subseteq C \setminus B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C = \emptyset$

$A \setminus B \subseteq C \setminus B \Leftrightarrow (A \setminus B) \setminus (C \setminus B) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap \bar{B} \cap \overline{(C \cap \bar{B})} = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap \bar{B} \cap (\bar{C} \cup B) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup \cancel{(A \cap \bar{B} \cap B)} = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap \overline{B \cup C} = \emptyset \Leftrightarrow A \setminus (B \cup C) = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C = \emptyset$

тождество доказано

№3

Определения:

- Множество $D_\rho = \{x \mid \langle x,y\rangle \in \rho\}$ называется *областью определения* бинарного отношения.
- Множество $R_\rho = \{y \mid \langle x,y\rangle \in \rho\}$ называется *множеством значений* бинарного отношения.

Решение. Докажем рефлексивность ρ. Пусть $a \in A$. В силу того, что $D_\rho \cup R_\rho = A$, $\exists x \in A$: $<x,a> \in \rho$, или $<a,x> \in \rho$. Но тогда, в силу симметричности ρ, $<a,x> \in \rho$, $<x,a> \in \rho$, откуда, используя транзитивность ρ, получаем $<a,a> \in \rho$. Таким образом $\forall a \in A$ $<a,a> \in \rho$.

№4

№4 вариант (2 вариант)

$f(x,y,z) = \neg(y \supset \bar{z}) \sim (y \vee \neg x)$

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$y \supset \bar{z}$	$\neg(y \supset \bar{z})$	$y \vee \bar{x}$	F	СДНФ	xz	yz	$x\bar{y}$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	xyz	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0		0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	$x\bar{y}z$	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	$\bar{x}yz$	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0		0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0		0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0		0	0	0

Лучшие

$(xyz) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}yz) \vee xz \vee yz \vee x\bar{y}$

Ответ: min ДНФ = $x\bar{y} \vee yz$

Билет 3

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра 805

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой
Пантелеев А.В._____

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №3

Вопросы:

1. Необходимое и достаточное условие для существования решений и множество решений системы (относительно неизвестного множества X) $\begin{cases} A \cap X = \varnothing, \\ B \cap \overline{X} = \varnothing. \end{cases}$ Привести обоснование.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $B \setminus A \subseteq C \setminus A \Leftrightarrow B \subseteq A \cup C$.

3. Пусть ρ - бинарное отношение на $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$: $x \rho y \Leftrightarrow x = y^2$. Исследовать на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.

4. Найти многочлен Жегалкина для булевой функции $f(x, y, z) = (\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$.

5. Исследовать на независимость и полноту систему булевых функций: $\{\supset, \vee\}$.

No1

Решение системы уравнений в алгебре множеств относительно неизвестного множества X. Нам понадобится следующее

Утверждение 1.11. Пусть A, B – некоторые множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества $U \neq \varnothing$. Тогда (а) система уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = \varnothing, & (1.7) \\ B \cap \overline{X} = \varnothing & (1.8) \end{cases}$$

относительно неизвестного множества X имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subseteq \overline{A}$; (б) решениями системы (1.7),(1.8) являются любые множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

Доказательство. (а) Пусть система (1.7),(1.8) имеет решение X. Тогда, используя (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Rightarrow B \subseteq X,\ X \subseteq \overline{A} \Rightarrow$ $\Rightarrow B \subseteq \overline{A}$. Обратно, пусть $B \subseteq \overline{A}$. Тогда, например, для $X = B$ (или для $X = \overline{A}$), используя (1.4), (1.5), имеем $B \subseteq X \subseteq \overline{A} \Rightarrow X \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq X \Rightarrow A \cap X = \varnothing, B \cap \overline{X} = \varnothing$, т.е. X действительно является решением системы (1.7), (1.8). (б) Пусть $B \subseteq \overline{A}$. Тогда, как доказано в (а), существует решение системы (1.7), (1.8). Причем, в силу (1.4), (1.5), имеем: (1.7), (1.8) $\Leftrightarrow X \subseteq \overline{A}, B \subseteq X \Leftrightarrow B \subseteq X \subseteq \overline{A}$, т.е. решениями системы (1.7), (1.8) являются все множества X такие, что $B \subseteq X \subseteq \overline{A}$.

No2

Билет № 3.
№ 2.

$$B \setminus A \subseteq C \setminus A \Leftrightarrow B \subseteq A \cup C$$

$$B \setminus A \subseteq C \setminus A \Leftrightarrow (B \setminus A) \setminus (C \setminus A) = \emptyset^{*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \cap \bar{A} \setminus C \cap \bar{A}^{*} \Leftrightarrow (B \cap \bar{A}) \cap (\bar{C} \cup A)^{*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup \underbrace{(B \cap \bar{A} \cap A)}_{=\emptyset}^{*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \cap \bar{A} \cap \bar{C}^{*} \Leftrightarrow B \cap \overline{A \cup C}^{*} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \setminus (A \cup C)^{*} \Leftrightarrow \underline{\underline{B \subseteq A \cup C}}$$

No3

ρ на $\mathbb{Z}$: $x\rho y \Leftrightarrow x = y^2$.

(а) рефлексивность:

Опред: $x\rho x \Leftrightarrow, \forall x \in \mathbb{Z}$

Контрпример: Пусть $x = 5$, тогда

$x\rho x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow 5 = 5^2$ неверно.

Следовательно, ρ - не рефлексивно

(б) симметричность:

Опред: $x\rho y \Leftrightarrow y\rho x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

Контрпример: Пусть $x = 9$, $y = 3$, тогда

$x\rho y \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow 9 = 3^2 \Leftrightarrow 3 = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3 \neq 9^2 \Leftrightarrow y\rho x$ - неверно

$x\rho y \not\Leftrightarrow y\rho x$

Следовательно, ρ - не симметрично.

(в) антисимметричность:

Опред: $x\rho y, y\rho x \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{x\rho y, y\rho x \Leftrightarrow}$ $x = y^2, y = x^2 \Leftrightarrow x - y = (y-x)(y+x) \Leftrightarrow (x-y)(1+x+y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + x^2 + 1 = 0 \ (D<0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x - y = 0 \underbrace{\Leftrightarrow x = y}$.

$x\rho y, y\rho x \Leftrightarrow x = y$.

Следовательно, ρ - антисимметрично.

(г) транзитивность:

Опред: $x\rho y, y\rho z \Leftrightarrow x\rho z, \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

Контрпример: пусть $x = 16$, $y = 4$, $z = 2$, тогда

$x\rho y, y\rho z \Leftrightarrow x = y^2, y = z^2 \Leftrightarrow x = (z^2)^2 \Leftrightarrow x = z^4 \not\Leftrightarrow x = z^2 \Leftrightarrow x\rho z$, т.к. $16 \neq 2^2$

Следовательно, ρ - не транзитивно.

№4

(1 способ - через СДНФ)

№4 (вариант 3)

$f(x,y,z) = (\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$

x	y	z	$\bar{x}$	$\neg x \supset y$	$(y \sim z)$	$\neg(y \sim z)$	F	СДНФ
1	1	1	0	1	1	0	0	
1	1	0	0	1	0	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	1	0	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	0	1	1	0	0	
0	1	1	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	1	0	0	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	1	0	1	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$xy(z+1) + xz(y+1) + y(x+1)(z+1) + (x+1)(y+1)z +$

$(x+1)(y+1)(z+1)) = \cancel{xyz} + \cancel{xy} + \cancel{xyz} + \cancel{xz} + \cancel{xyz} + \cancel{xy} + \cancel{yz} + \cancel{y}$

$+ \cancel{xyz} + \cancel{zx} + \cancel{yz} + \cancel{z} + xyz + \cancel{xy} + xz + x + yz + \cancel{y} + \cancel{z} + 1$

$= xyz + xy + xz + yz + x + 1$

(2 способ - через треугольник)

№ 4.

$f(x,y,z) = (\neg x \supset y) \supset \neg(y \sim z)$

x	y	z	$\bar{x}$	$\neg x \supset y$	$y \sim z$	$\neg(y \sim z)$	F
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0

F - вектор значения функции

Перепишем в строчку:

Складываем соседние числа и пишем снизу то что получилось (как в треугольнике Паскаля)

1 1 1 0 0 1 1 0
0 0 1 0 1 0 1
0 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0
1 0 0 0
1 0 0
1 0
1

Смотрим левый край большого треугольника и выписываем значение:

10011111. Эту строку значений используем, чтобы узнать, какие слагаемые войдут в полином Жегалкина. Сами слагаемые получим из исходных значений x, y, z, соединяя знаком конъюнкции значения с „1" и выписывая их. В строку „0 0 0" запишем единицу:

x	y	z	слагаемые	значения из треугол-ка
0	0	0	1	1
0	0	1	z	0
0	1	0	y	0
0	1	1	yz	1
1	0	0	x	1
1	0	1	xz	1
1	1	0	xy	1
1	1	1	xyz	1

Складываем то, что имеет „1" в самом правом столбце и получаем полином Жегалкина:

$$f(x, y, z) = 1 \oplus yz \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xyz$$

12-23

Билет 4

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ: *Кафедра 805*

Зав. кафедрой
Пантелеев А.В.

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №4

Вопросы:

1. Бинарные отношения. Операции над бинарными отношениями. Основные тождества. Доказательство тождеств: $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$, $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3$.
2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \setminus B \subseteq A \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$.
3. Пусть ρ - бинарное отношение на $Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$: $x\rho y \Leftrightarrow x = -y$. Исследовать на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.
4. Найти многочлен Жегалкина для булевой функции $f(x,y,z) = \neg(y \supset \neg z) \sim (y \vee \neg x)$.
5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость: $F = (\forall x)(\exists y)(\forall z)[((A(y) \,\&\, A(z)) \supset A(x)) \,\&\, (A(y) \supset (A(z) \vee A(x)))]$.

No1

&

Бинарные отношения. Введем понятие *бинарного отношения*. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A \times B$. Если $A = B$, то бинарное отношение ρ называется бинарным отношением на множестве A. Вместо $\langle x, y \rangle \in \rho$ часто пишут $x\rho y$.

Операции над бинарными отношениями. Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д. Абсолютным дополнением бинарного отношения ρ между элементами множеств A и B считается множество $\overline{\rho} = (A \times B) \setminus \rho$. Например, абсолютным дополнением бинарного отношения $\leq$ на R является бинарное отношение $>$ на R.

Обратным отношением для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется отношение $\rho^{-1} = \{< y, x > | < x, y > \in \rho\} \subseteq B \times A$, т.е. получаемое из ρ переворачиванием пар.

Произведением бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$ называется бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2 \subseteq A \times C$, задаваемое равенством: $\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, z \rangle \in A \times C \mid \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2\}$.

Если ρ – бинарное отношение на множестве, то будем кратко писать $\rho^2 = \rho \circ \rho$, $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$ и т.д.

Утверждение 2.1. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$ выполняется $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \subseteq C \times A$.

Доказательство. Пусть $\langle z, x \rangle \in C \times A$. Тогда $\langle z, x \rangle \in$
$\in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1,\ \langle y, z \rangle \in \rho_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y \in B : \langle z, y \rangle \in \rho_2^{-1}, \langle y, x \rangle \in \rho_1^{-1} \Leftrightarrow \langle z, x \rangle \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Утверждение 2.2. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$, $\rho_2 \subseteq B \times C$, $\rho_3 \subseteq C \times D$ выполняется $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) =$
$= (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq A \times D$.

Доказательство. Для любой пары $\langle x, u \rangle \in A \times D$ имеем:

$$\langle x, u \rangle \in \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, u \rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in B, \exists z \in C : \langle x, y \rangle \in \rho_1, \langle y, z \rangle \in \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists z \in C : \langle x, z \rangle \in \rho_1 \circ \rho_2, \langle z, u \rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow \langle x, u \rangle \in (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3.$$

No2

(2) Док-ть или опровергнуть:

$A \setminus B \subseteq A \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

$A \setminus B \subseteq A \cap C \Leftrightarrow (A \setminus B) \setminus (A \cap C) = \varnothing \Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cap \overline{(A \cap C)} = \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) = \varnothing \Leftrightarrow \cancel{(A \cap \bar{B} \cap A)} \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \varnothing \Leftrightarrow A \cap \overline{(B \cup C)} = \varnothing \Leftrightarrow A \setminus (B \cup C) = \varnothing \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \cup C = \varnothing$

тождество доказано

No3

ρ на $\mathbb{Z}$: $x \rho y \Leftrightarrow x = -y$.

(а) рефлексивность:

Опред.: $x \rho x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$x \rho x \Leftrightarrow x = -x$

Контрпример: Пусть $x = 1$, тогда $1 = -1$ неверно.

Следовательно, ρ - не рефлексивно.

(б) симметричность:

Опред.: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$x \rho y \Rightarrow x = -y \Rightarrow -x = y \Rightarrow y = -x \Rightarrow y \rho x$

Следовательно, ρ - симметрично.

(в) антисимметричность:

Опред.: $x \rho y, y \rho x \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

Контрпример: Пусть $x = 2$, $y = -2$, тогда

$x \rho y, y \rho x \Rightarrow x = -y, y = -x \Rightarrow 2 = -(-2), -2 = -(2) \not\Rightarrow x = y$, т.к. $2 \neq -2$.

Следовательно, ρ - не антисимметрично.

(г) транзитивность:

Опред.: $x \rho y, y \rho z \Rightarrow x \rho z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

Контрпример: Пусть $x = 3$, $y = -3$, $z = 3$, тогда

$x \rho y, y \rho z \Rightarrow x = -y, y = -z \Rightarrow 3 = -(-3), -3 = -(3) \not\Rightarrow x = -z \Rightarrow x \rho z$, т.к. $3 \neq -3$

Следовательно, ρ - не транзитивно.

No4

N4 Вариант 4

x	y	z	$\bar z$	$y \supset \bar z$	$(y \supset \bar z)$	$\bar x$	$y \cup \bar x$	F	СДНФ
0	0	0	1	1	0	1	1	0	
0	0	1	0	1	0	1	1	0	
0	1	0	1	1	0	1	1	0	
0	1	1	0	0	1	1	1	1	$\bar x y \bar z$
1	0	0	1	1	0	0	0	1	$x \bar y \bar z$
1	0	1	0	1	0	0	0	1	$x \bar y z$
1	1	0	1	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	1	0	1	1	xyz

$$\cancel{xy\bar z} + \cancel{xy\bar z} + xz + x(y+1)(z+1) + y(x+1)(z+1) =$$

$$= xz + xyz + xy + zx + x + xyz + xy + yz + y =$$

$$= yz + xy + x$$

Билет 5

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ: *Кафедра 805*

Зав. кафедрой
Пантелеев А.В. _____ Дисциплина: Теория графов и математическа

Экзаменационный билет №5

Вопросы:

1. Исследование на выполнимость (общезначимость) формул, содержащих 0-местн одноместные предикатные символы.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождеств алгебры множеств: $A \cap B \subseteq A \setminus C \Leftrightarrow A \cap C \subseteq \overline{B}$.

3. Доказать, что если $f: X \to Y, A \subseteq X, B \subseteq Y$, то $f(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq f^{-1}(B)$.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции $f(x,y,z) = \neg(y \supset z) \sim \neg($

5. Привести формулу к нормальной приведенной форме: $\sim\neg(z \supset x)$
$F = ((\forall x)(\exists y)P(x,y) \ \& \ (\forall x)Q(x)) \supset (\exists x)(\forall y)R(x,y)$.

№2

Билет №5 №2

$A \cap B \subseteq A \setminus C \Leftrightarrow A \cap C \subseteq \overline{B}$

$(A \cap B) \setminus (A \setminus C) = \varnothing$

$(A \cap B) \cap (\overline{A \setminus C}) = \varnothing$

$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap \overline{C}}) = \varnothing \quad (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup C) = \varnothing$

$(\underbrace{A \cap B \cap \overline{A}}_{\varnothing}) \cup (A \cap B \cap C) = \varnothing$

$A \cap B \cap C = \varnothing$

$A \cap C \cap B = \varnothing \qquad \underline{A \cap C \subseteq \overline{B}}$ чтд

No3

Пусть $f(A) \subseteq B$. Предположим, что не выполняется включение $A \subseteq f^{-1}(B)$. Тогда $\exists x \in A : x \notin f^{-1}(B)$, откуда $x \in A, f(x) \in f(A)$, $f(x) \notin B$, что противоречит включению $f(A) \subseteq B$. Пусть $A \subseteq f^{-1}(B)$. Предположим, что не выполняется включение $f(A) \subseteq B$. Тогда $\exists y \in f(A) : y \notin B$, откуда $\exists x \in A : y = f(x), y \notin B$, а следовательно, $x \in A : x \notin f^{-1}(B)$, что противоречит включению $A \subseteq f^{-1}(B)$.

No4 хуёво видно условие

Билет 6

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой
Пантелеев А.В. _____

Кафедра 805

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №6

Вопросы:

1. Равносильность формул логики предикатов. Примеры равносильных и неравносильных формул. Основные равносильности. Доказать правила переноса отрицания через кванторы.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \cap B \subseteq A \setminus C \Leftrightarrow B \cap C \subseteq \overline{A}$.

3. Бинарное отношение частичного порядка $\preccurlyeq$ задано диаграммой Хассе:

Найти все пары из $\preccurlyeq$, минимальные, максимальные, наименьший, наибольший элементы (если таковые имеются), продолжить $\preccurlyeq$ до линейного порядка $\preccurlyeq_л$, найти множество $[a,b] = \{x \in A \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$.

4. Найти многочлен Жегалкина для булевой функции:
$f(x,y,z) = \neg(y \supset z) \sim \neg(z \supset x)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость:
$F = (\forall x)(\exists y)(\exists z)[(A(x) \supset B(y)) \sim (\neg B(z) \supset \neg A(y))]$.

No1

Определение. Предикатом называется функция $P(x_1, \dots, x_n), x_i \in M, i = 1, \dots, n$ значение $P(x_1, \dots, x_i) \in \{И, Л\}$ $P: M^n \to \{И, Л\}$.

Если n = 0, то это высказывание.

Логические операции : $\neg, \&, \vee, \supset, \sim, +$;

Дополнительно существует 2 квантора :

$\forall$ -квантор общности (для любого);

$\exists$- квантор существование (существует);

Равносильность формул логики предикатов

Определение 1. Формулы $F_1 \equiv_I F_2$ равносильны в данной интерпретации $I =< M, f >$, если в этой интерпретации на любой оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинностные значения.

Определение 2. Формула $F_1 \equiv_M F_2$ равносильные на множестве М, если в любой интерпретации $I =< M, f >$, содержащей множество M на любой оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинные значения.

Определение 3. Формула $F_1 \equiv F_2$ равносильны в логике предикатов, если они равносильны на всех множествах, т.е. в $\forall$ интерпретации и на $\forall$ оценке свободных переменных они принимают одинаковые истинностные значения.

Пример.

$F_1 = (\forall x)A(x)$

$F_2 = (\exists x)A(x)$

1. $I = < \mathbb{N}, f >$

$f: A(x) \to x \geq 1$

$F_1 \equiv_I F_2 : F_1 = F_2 = И$

2. На $M = \{a\}$ – одноэлементное множество $F_1 \equiv_M F_2$

3. $F_1 \not\equiv F_2$ в ЛП

$I =< \mathbb{Z}, f > f: A(x) \leftrightarrow x -$ чётное

$F_1 = Л, F_2 = И$

Докажем тождество: $\rceil(\forall\, \boldsymbol{x})\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv\ (\exists\, \boldsymbol{x})\, \rceil \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

$A(x)$ - свободные переменные $< x, x_1, \dots, x_n >$

$(\forall\, x)\, A(x)$ - свободные переменные $< x_1, \dots, x_n >$

Рассмотрим произвольную интерпретацию $I = < M, f >$ и произвольную оценку переменных $< s_1, \dots, s_n >$.

$\rceil(\forall\, x)\, A(x) \equiv\ (\exists\, x)\, \rceil A(x)$ (1.1)

Возможны два случая:

1. $\forall\, \tilde{s} \in M \quad A(\tilde{s})|_{<s_1 \dots s_n>} = И$
2. $\exists\, s_0 \in M \quad A(s_0)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л$

1. Правая часть: $(\forall\, x)\, A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = И \quad \Rightarrow \quad \rceil(\forall\, x)\, A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л$

   Левая часть: $A(x)|_{<\tilde{s}, s_1 \dots s_n>} = И$, $\forall\, \tilde{s} \in M$

$\rceil A(x)|_{<\tilde{s}, s_1 \dots s_n>} = Л \quad \forall\, x = \tilde{s} \in M \quad \Rightarrow \quad (\exists\, x) \rceil A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л$ – левая часть

2. $\exists\, s_0 \in M \quad A(x)|_{<s_0, s_1 \dots s_n>} = Л \quad \Rightarrow \quad (\forall\, x)\, A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л$

$\rceil(\forall\, x)\, A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = И$ – левая часть

Правая часть: $A(s_0)|_{<s_1 \dots s_n>} = Л \quad \rceil A(s_0)|_{<s_1 \dots s_n>} = И \Rightarrow (\exists\, x) \rceil A(x)|_{<s_1 \dots s_n>} = И$

Докажем тождество: $\rceil(\exists\, \boldsymbol{x})\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \equiv\ (\forall\, \boldsymbol{x})\, \rceil \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$

В тождество (1.1) подставим вместо $A(x) \rightarrow \rceil A(x)$ и возьмем отрицание от левой и правой части.

$\rceil(\forall\, x)\, \rceil A(x) \equiv\ (\exists\, x) \rceil\rceil A(x) \Rightarrow \rceil\rceil(\forall\, x)\, \rceil A(x) \equiv\ \rceil(\exists\, x) A(x) \Rightarrow \rceil(\exists\, x) A(x) = (\forall\, x)\, \rceil A(x)$

Основные равносильности логики предикатов

1. Перенос отрицания через квантор: квантор меняется на противоположный.

$$\neg(\forall x)A(x) \equiv (\exists x)\neg A(x)$$
$$\neg(\exists x)A(x) \equiv (\forall x)\neg A(x)$$

2. Квантор с переменной x можно выносить за скобки, если одна формула зависит от x, а другая нет.

$(\forall\, x)\, A(x) \vee B \equiv (\forall\, x)\, (A(x) \vee B)$ $\qquad$ $(\exists\, x)\, A(x) \vee B \equiv (\exists\, x)\, (A(x) \vee B)$

$(\forall\, x)\, A(x)\, \&\, B \equiv (\forall\, x)\, (A(x)\, \&\, B)$ $\qquad$ $(\exists\, x)\, A(x)\, \&\, B \equiv (\exists\, x)\, (A(x)\, \&\, B)$

3. Если обе формулы зависят от x, то справедливы только 2 тождества из 4:

$$(\forall\, x)\, A(x)\, \&\, (\forall\, x)\, B(x) \equiv (\forall\, x)\, (A(x)\, \&\, B(x))$$
$$(\exists\, x)\, A(x) \vee (\exists\, x)\, B(x) \equiv (\exists\, x)\, (A(x) \vee B(x))$$

4. Одноимённые кванторы можно переставлять (разноимённые – нет).

$$(\forall\, x)\, (\forall\, y)\, A(x, y) \equiv (\forall\, y)\, (\forall\, x)\, A(x, y)$$
$$(\exists x)\, (\exists y)\, A(x, y) \equiv (\exists\, y)\, (\exists\, x)\, A(x, y)$$

5. Правило замены (переименования) переменной в области действия квантора. Всюду в области действия квантора связную переменную формулы можно переименовать в другую переменную, не содержащуюся в A.

$(\forall\, x)\, A(x) \equiv (\forall\, z)\, A(z)$ $\qquad$ $(\exists\, x)\, A(x) \equiv (\exists\, z)\, A(z)$

Две формулы логики предикатов A и B называются **равносильными на области** M, если они принимают одинаковые логические значения при всех значениях входящих в них переменных, отнесенных к области M.

No2

Билет № 6

№ 2.

$$A \cap B \subseteq A \setminus C \iff B \cap C \subseteq \overline{A}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A \cap B) \setminus (A \setminus C) \overset{*}{\Updownarrow}$$

$$\cancel{B \cap C \setminus \overline{A}}$$

$$(* \sim = \varnothing)$$

$$(A \cap B) \cap (\overline{A \cap \overline{C}}) \overset{*}{\iff} (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup C) \overset{*}{\iff}$$

$$\iff \underbrace{(A \cap B \cap \overline{A})}_{= \varnothing} \cup (A \cap B \cap C) \overset{*}{\iff} A \cap B \cap C \overset{*}{\iff}$$

$$\iff B \cap C \cap \overline{\overline{A}} \overset{*}{\iff} (B \cap C) \setminus \overline{A} \overset{*}{\iff} B \cap C \subseteq \overline{A} \text{ чтд.}$$

No3

Билет 6 №3

Найти все пары $\in \preceq$

а) По определению частичного порядка, бинарное отношение $\preceq$ является рефлексивным, а => в нашей принадлежат все пары вида $\langle x, x \rangle$.

Другие пары, принадлежащие $\preceq$, определяем из диаграммы Хассе, используя соединение элементов отрезками и транзитивность

писать в р/р не надо

Например, для элемента a: * $\prec$ - отношение строгого порядка

$a \prec i$; $a \prec i \prec e \Rightarrow a \prec e$; $a \prec i \prec e \prec c \Rightarrow$
$\Rightarrow a \prec c$; $a \prec i \prec e \prec c \prec b \Rightarrow a \prec b$

1) Найти все пары принадлежащие $\preceq$

$\{\langle a,a\rangle, \langle i,i\rangle, \langle e,e\rangle, \langle c,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle f,f\rangle,$
$\langle d,d\rangle, \langle g,g\rangle, \langle h,h\rangle, \langle a,e\rangle, \langle a,c\rangle,$
$\langle a,b\rangle, \langle a,f\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,h\rangle, \langle a,g\rangle,$
$\langle i,f\rangle, \langle i,d\rangle, \cancel{\langle i,g\rangle}\ \langle i,e\rangle, \langle i,c\rangle,$
$\langle i,b\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,b\rangle, \langle f,c\rangle, \langle f,b\rangle$

$\langle f, d \rangle$, $\langle h, f \rangle$, $\langle h, f \rangle$, $\langle h, c \rangle$, $\langle h, b \rangle$, $\langle h, d \rangle$ } Жена

г) минимальные: a

максимальные: g, d, b

наибольший: отсутств.

наименьший: a

3) предположить $\preceq$ до линейного порядка $\preceq_1$.

Для нахождения лин. порядка выбираем любой из максимальных эл-тов исходного мн-ва и ставим его на первое место в линейном порядке. Затем удаляем этот элимент из исходного мн-ва. Снова выбираем max

порядок не важен. главное - максимальные, говорит Алексеев.

No4

№4 (вариант Б)

$f(xyz) = \neg(y \supset z) \sim \neg(z \supset x)$

x	y	z	$y \supset z$	$\neg(y \supset z)$	$z \supset x$	$\neg(z \supset x)$	F	СДНФ
1	1	1	1	0	1	0	1	xyz
1	1	0	0	1	1	0	0	
1	0	1	1	0	1	0	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	1	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	1	0	0	1	0	
0	1	0	0	1	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	0	
0	0	0	1	0	1	0	1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$(x \& y \& z) \vee (x \& \bar{y} \& z) \vee (x \& \bar{y} \& \bar{z}) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}) =$

$xyz + xz(y+1) + x(y+1)(z+1) + (x+1)(y+1)(z+1) =$

$\cancel{xyz} + \cancel{xyz} + \cancel{xz} + \cancel{xyz} + \cancel{xy} + xz + \cancel{x} + \cancel{xyz} + \cancel{yz} + \cancel{x} + \cancel{xy} +$

$+ yz + z + y + 1 = xz + yz + z + y + 1$

Ответ: Многочлен Жегалкина: $xz + yz + z + y + 1$

Билет 7

ХЕРСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Кафедра 805

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №7

Вопросы:

1. Эквивалентность множеств. Конечные, счетные, континуальные множества. Теорема Кантора - Бернштейна (формулировка). Доказательство счетности счетного числа счетных множеств.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \cap \bar{B} \subseteq A \setminus C \Leftrightarrow A \cap C \subseteq B$.

3. Бинарное отношение частичного порядка $\preccurlyeq$ задано диаграммой Хассе:

Найти все пары из $\preccurlyeq$, минимальные, максимальные, наименьший, наибольший элементы (если таковые имеются), продолжить $\preccurlyeq$ до линейного порядка $\preccurlyeq_л$, найти множество $[a,b]=\{x \in A \mid a \preccurlyeq x \preccurlyeq b\}$.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции: $f(x,y,z)=(\neg z \vee y) \supset \neg(y \sim x)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость:
$F=(\forall x)(\exists y)(\exists z)\{[(A(x) \supset B(z)) \& \neg B(y)] \supset \neg A(z)\}$.

№1

Множество A называется *эквивалентным* множеству B (символически $A \sim B$), если между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. существует биекция $\varphi : A \to B$. Если множество A эквивалентно множеству B, то эти множества называются *равномощными*. Обозначим $N_n = \{1,2,...,n\}$, где $n \in \mathrm{N}$, $\mathrm{N} = \{1,2,...\}$ – натуральный ряд. Каждое множество A, эквивалентное N_n для некоторого $n \in \mathrm{N}$, либо пустое, называется *конечным*, а n – *числом элементов* множества A, при этом пишем $|A| = n$. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Каждое множество A, эквивалентное натуральному ряду N, называется *счетным*. Каждое множество A, эквивалентное множеству действительных чисел R, называется *континуальным*. Будем писать, что (а) $|A| = |B|$, если $A \sim B$; (б) $|A| \le |B|$, если $A \sim B_1 \subseteq B$; (в) $|A| < |B|$, если $|A| \le |B|$ и A не эквивалентно B. Из свойств биективных функций (см. тему №2) следует, что для любых множеств A, B, C $A \sim A$ (рефлексивность $\sim$); если $A \sim B$, то $B \sim A$ (симметричность $\sim$); если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$ (транзитивность $\sim$).

Теорема Кантора-Бернштейна.

Пусть A и B – произвольные множества, и существуют подмножества A_1 и B_1, такие что $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Тогда из $A_1 \sim B$ и $B_1 \sim A \Rightarrow A \sim B$. (Без док-ва).

Из теоремы следует, что возможны четыре случая:

1) Если $\exists A_1 \sim B$, $\exists B_1 \sim A$, тогда по теореме $m(A) = m(B)$
2) Если $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда $m(A) > m(B)$
3) Если $\exists B_1 \sim A_1$ не $\exists A_1 \sim B \Rightarrow m(B) > m(A)$
4) Не $\exists A_1 \sim B$, не $\exists B_1 \sim A$, тогда множества A и B – несравнимы?

Оказывается, что четвертый случай невозможен – все множества сравнимы по можности. (Доказал Цермело).

No2

Билет № 7 №2

$A \cap \bar{B} \subseteq A \setminus C \iff A \cap C \subseteq B$

$A \cap \bar{B} \setminus (A \setminus C) = \varnothing$

$(A \cap \bar{B}) \cap (\overline{A \setminus C}) = \varnothing$

$(A \cap \bar{B}) \cap (\overline{A \cap \bar{C}}) = \varnothing$

$(A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup C) = \varnothing$

$(\underbrace{A \cap \bar{B} \cap \bar{A}}_{\varnothing}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) = \varnothing$

$A \cap C \cap \bar{B} = \varnothing$

$\underline{A \cap C \subseteq B}$ ч.т.д.

No3

Билет 7 №3

Найти

1) все пары из $\preccurlyeq$.

По опр. частичного порядка бин. отн. $\preccurlyeq$ явл ся рефлексивным => ему принадлежат ~~пары вида~~ пары вида $\langle x, x\rangle$

Другие пары ищем используя соединение эл-тов отр линиями и транзитивность $\preccurlyeq$

1) получаем спер. мн-во упорядоченных пар, принадлежащих $\preccurlyeq$: $\{\langle a,a\rangle, \langle f,f\rangle, \langle e,e\rangle \dots \langle i,i\rangle$
$\langle a,f\rangle, \langle a,e\rangle, \langle a,d\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,g\rangle, \langle a,c\rangle,$
$\langle a,h\rangle, \langle a,i\rangle, \langle f,e\rangle, \langle f,d\rangle, \langle f,b\rangle, \langle f,g\rangle,$
$\langle f,c\rangle, \langle e,d\rangle, \langle e,b\rangle, \langle d,b\rangle, \langle g,c\rangle, \langle g,d\rangle,$
$\langle g,b\rangle, \langle h,i\rangle, \langle c,b\rangle\}$

2) ~~наименьший: a~~ минимальн: a

~~наиб: b, i~~ максимальн: b, i

наиб: отс.

наимен: a

3)

минимальным элементам соответствуют точки, не связанные прямолинейными отрезками с другими точками, находящимися ниже их (шуточно говоря: у них «ножек нет»). А максимальным элементам будут соответствовать точки, не связанные прямолинейными отрезками с другими точками, находящимися выше их (шуточно говоря: у них «рожек нет»).

Утверждение 4.3 позволяет представить любое частично упорядоченное конечное множество A в виде наглядной схемы, называемой *диаграммой Хассе*. Элементы из A изображаются точками (маленькими кружочками), расположенными на схеме в соответствии со следующим правилом. Если элемент y покрывает элемент x, то точка, изображающая x, располагается ниже точки, изображающей y, и при этом эти точки соединяются прямолинейным отрезком. Таким образом, в силу утверждения 4.3, $x \prec y$ равносильно тому, что на диаграмме найдется ломаная линия, «восходящая» от x к y (т.е. при движении по этой ломаной от точки x к точке y будем всегда подниматься вверх).

No4

№4 (вариант 8)

$f(x,y,z) = (\neg z \vee y) \supset \neg(y \sim x)$

x	y	z	$\bar z$	$\neg z \vee y$	$y \sim x$	$\neg(y \sim x)$	F	СДНФ	$x\bar y$	$\bar y z$	$\bar x y$	$\bar x z$
1	1	1	0	1	1	0	0					
1	1	0	1	1	1	0	0					
1	0	1	0	1	0	1	1	$x\bar y z$	1	1		
1	0	0	1	1	0	1	1	$x\bar y \bar z$	1			
0	1	1	0	0	0	1	1	$\bar x y z$			1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	$\bar x y \bar z$			1	
0	0	1	0	0	1	0	1	$\bar x \bar y z$		1		1
0	0	0	1	1	1	0	0					

Ядровые

$(x\bar y z) \vee (x\bar y \bar z) \vee (\bar x y z) \vee (\bar x \bar y \bar z) \vee (\bar x \bar y z) \Leftrightarrow x\bar y \vee \bar y z \vee \bar x y \vee \bar x z$

Ответ: min ДНФ = $\begin{cases} x\bar y \vee \bar y z \vee \bar x y \\ x\bar y \vee \bar x y \vee \bar x z \end{cases}$

Билет 8

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой
Пантелеев А.В. _____

Кафедра 805

Дисциплина: Теория графов и математическая логика

Экзаменационный билет №8

Вопросы:

1. Изоморфизм любого непустого частично упорядоченного множества A некоторой системе подмножеств множества A, упорядоченной отношением включения $\subseteq$.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \setminus C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$.

3. График функции $y = f(x)$ представляет собой ломаную, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Функция $y = f(x)$ определяет бинарное отношение ρ_f на множестве $X = [0, 5]$: $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Доказать, что ρ_f - эквивалентность на X. Перечислить все классы эквивалентности.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции: $f(x, y, z) = (x \supset y) \supset (z \sim \neg y)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость: $F = (\forall x)(\forall y)(\exists z)[(A(x) \supset A(z)) \& (A(z) \supset A(y))]$.

N1

Задача 4.10. Доказать, что любое непустое частично упорядоченное множество A изоморфно некоторой системе подмножеств множества A, упорядоченной включением $\subseteq$.

Решение. Пусть $\preccurlyeq$ – отношение частичного порядка на A. Для любого элемента $a \in A$ обозначим $A_a = \{x \in A \mid x \preccurlyeq a\}$. Очевидно, что $\forall a \in A \;\; a \in A_a$. Рассмотрим отображение $f : A \to 2^A$ такое, что $\forall a \in A \;\; f(a) = A_a$. Докажем инъективность этого отображения (а следовательно, биективность отображения $f : A \to f(A)$). Пусть $a, b \in A, f(a) = f(b)$. Покажем, что $a = b$. Действительно, $A_a = f(a) = f(b) = A_b \Rightarrow a \in A_a = A_b, b \in A_b = A_a \Rightarrow a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq a \Rightarrow$ $\Rightarrow a = b$. Докажем теперь изоморфизм $(A, \preccurlyeq), (f(A), \subseteq)$. (а) Если $a, b \in A, a \preccurlyeq b$, то $\forall x \in A \;\; x \preccurlyeq a \Rightarrow x \preccurlyeq b$, а следовательно, $f(a) =$ $= \{x \in A \mid x \preccurlyeq a\} \subseteq \{x \in A \mid x \preccurlyeq b\} = f(b)$. (б) Обратно, если $a, b \in A$, $f(a) \subseteq f(b)$, то $a \in A_a = f(a) \subseteq f(b) = A_b \Rightarrow a \in A_b \Rightarrow a \preccurlyeq b$.

№2

~~Вариант~~ №8

$A \setminus C \subseteq A \cap B \iff A \subseteq B \cup C$

$A \setminus C \subseteq A \cap B \iff (A \setminus C) \setminus (A \cap B) \iff$

$\iff (A \cap \bar{C}) \cap \overline{(A \cap B)} \iff (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \iff$

$\iff (\cancel{A \cap \bar{C} \cap \bar{A}}) \cup (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \iff A \cap \overline{(B \cup C)} =$

$\iff A \setminus (B \cup C) \iff A \subseteq B \cup C$

№3

1) докажем что данное отношение - отношение эквивалентности.
   Определение: Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение р на множестве А называется *эквивалентностью на А.*

   Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \;\; f(x) = f(x) \Rightarrow$
   $\Rightarrow x \rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A \;\; x_1 \rho_f x_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 \rho_f x_1$; (в) транзитивность:
   $\forall x_1, x_2, x_3 \in A \;\; x_1 \rho_f x_2, x_2 \rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\; f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \rho_f x_3$.

2) Перечислим все классы эквивалентности.
   Определение: Классом эквивалентности элемента x по эквивалентности р называется множество
   $[x]_p = x/p = \{y \in A \mid xpy\} = \{y \in A \mid ypx\}$.

Решение. Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0;1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1, f(x_1) = f(x)$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x\}$. (б) Пусть $x \in \{1;4\}$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{1;4\}$. (в) Пусть $x \in (1;2)$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{x, x_1, x_2\}$ (см. рис. 3.1). При этом из геометрических соображений получаем: $x - 1 = 4 - x_1 = x_2 - 4$, откуда $x_1 = 5 - x, x_2 = x + 3$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, x + 3\}$. (г) Пусть $x \in [2;3] \cup \{5\}$. Заметим, что $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2;3] \cup \{5\}$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = [2;3] \cup \{5\}$. (д) Пусть $x \in (3;4)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, 8 - x\}$. (е) Пусть $x \in (4;5)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, x - 3, 8 - x\}$.

Рис.3.1

No4

№4 (вариант 8)

$f(x,y,z) = (x \supset y) \supset (z \sim \neg y)$

x	y	z	$x \supset y$	$\bar{y}$	$z \sim \bar{y}$	F	СДНФ	xz	yz	$x\bar{y}$	$\bar{y}z$
1	1	1	1	0	0	0					
1	1	0	1	0	1	1	xyz	1	1		
1	0	1	0	1	1	1	$x\bar{y}z$			1	
1	0	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$	1		1	1
0	1	1	1	0	0	0					
0	1	0	1	0	1	1	$\bar{x}yz$		1		
0	0	1	1	1	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$				1
0	0	0	1	1	0	0					

Ядровые

$(xy\bar{z}) \vee (x\bar{y}z) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z}) \vee (\bar{x}\bar{y}z) \vee xz \vee y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$

Ответ: Min ДНФ: $y\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$

Билет 9

Экзаменационный билет №9

Вопросы:

1. Доказать счетность множества всех конечных последовательностей, состоящих из элементов счетного множества.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \cap C \subseteq B \setminus C \Leftrightarrow C \subseteq \overline{A}$.

3. График функции $y = f(x)$ представляет собой ломаную, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов, координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Функция $y = f(x)$ определяет бинарное отношение ρ_f на множестве $X = [0,5]$: $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Доказать, что ρ_f - эквивалентность на X. Перечислить все классы эквивалентности.

4. Найти минимальную ДНФ для булевой функции: $f(x,y,z) = \neg(x \supset y) \sim (y \supset z)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость:
$F = \{(\forall x)[L(x) \supset (C(x) \,\&\, O(x))] \,\&\, \neg(\forall x)[O(x) \supset C(x)]\} \supset (\exists x)\neg L(x)$.

No1

Решение. Множество всех конечных последовательностей элементов из A есть $\bigcup\limits_{n \in \mathrm{N}} A^n$

Докажем, что это это объединение счетно.

1)Для этого сначала докажем, что объединение счетных множеств счетно, т.е., что:

если множества A, $i \in \mathrm{N}$, являются счетными, то множество $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ также является счетным

Пусть $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ...\}, i \in \mathrm{N}$.

Осуществляем обход бесконечного множества $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ согласно рис. 5.2. Если очередной элемент встречался ранее, то пропускаем его, в противном случае присваиваем ему очередной номер. Тогда каждый элемент из $\bigcup_{i \in \mathrm{N}} A_i$ получит свой номер.

Рис.5.2

2) Теперь докажем, что

если множества $A_1, ..., A_n$ $(n \geq 1)$ – счетны, то множество $A_1 \times \cdots \times A_n$ счетно.

Решение. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда $n = 2$, поскольку $A_1 \times \cdots \times A_n = (...((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots \times A_n)$. Пусть $A_1 = \{ a_n \mid n \in \mathrm{N}\}$. Покажем, что множество $A_1 \times A_2$ счетное. Заметим, что $A_1 \times A_2 = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} (\{a_n\} \times A_2)$, откуда и следует счетность этого множества.

(потому что объединение счетных множеств счетно).

3) Вернемся к задаче, это множество счетно, т.к. является объединением счетных множеств.

Доказано.

№2

$A \cap C \subseteq B \setminus C \Leftrightarrow C \subseteq \bar{A}$

$(A \cap C) \setminus (B \setminus C) = \varnothing$

$(A \cap C) \setminus (B \cap \bar{C}) = \varnothing$

$(A \cap C) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} = \varnothing \quad (A \cap C) \cap (\bar{B} \cup C) = \varnothing$

$(A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C \cap C) = \varnothing$

$(A \cap C \cap \bar{B}) \cup (A \cap C) = \varnothing$

$A \cap C = \varnothing$

$C \cap A = \varnothing$

$C \subseteq \bar{A} = \varnothing \quad (z \in x) \cap (z \in x)$

№3

1) Докажем что данное отношение - отношение эквивалентности.
   Определение: Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение р на множестве А называется *эквивалентностью на А.*

   Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \;\; f(x) = f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow x \rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A \;\; x_1 \rho_f x_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 \rho_f x_1$; (в) транзитивность: $\forall x_1, x_2, x_3 \in A \;\; x_1 \rho_f x_2, x_2 \rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\; f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \rho_f x_3$.

2) Перечислим все классы эквивалентности.
   Определение: Классом эквивалентности элемента x по эквивалентности р называется множество
   $[x]_p = x/p = \{y \in A \mid xpy\} = \{y \in A \mid ypx\}$.

Решение. Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0;1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1, f(x_1) = f(x)$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x\}$. (б) Пусть $x \in \{1;4\}$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{1;4\}$. (в) Пусть $x \in (1;2)$. Тогда $[x]_{\rho_f} = \{x, x_1, x_2\}$ (см. рис. 3.1). При этом из геометрических соображений получаем: $x - 1 = 4 - x_1 = x_2 - 4$, откуда $x_1 = 5 - x, x_2 = x + 3$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, x + 3\}$. (г) Пусть $x \in [2;3] \cup \{5\}$. Заметим, что $f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in [2;3] \cup \{5\}$, а следовательно, $[x]_{\rho_f} = [2;3] \cup \{5\}$. (д) Пусть $x \in (3;4)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, 5 - x, 8 - x\}$. (е) Пусть $x \in (4;5)$. Тогда, аналогично (в), получаем $[x]_{\rho_f} = \{x, x - 3, 8 - x\}$.

Рис.3.1

No4

$\neg(x \supset y) \sim (y \supset z)$

x	y	z	$x \supset y$	$\neg(x \supset y)$	$y \supset z$	$f(x,y,z)$	СДНФ	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$ (ядровый)	$x\bar{y}$ (ядровый)
1	1	1	1	0	1	0		0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	$x y \bar{z}$	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	$x \bar{y} z$	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	$x \bar{y} \bar{z}$	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0		0	0	0
0	0	1	1	0	1	0		0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	$\bar{x} y \bar{z}$	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0		0	0	0

Правые 3 столбца – значения простых импликантов. Из данной таблицы следует, что <010> является собственной оценкой для $y\bar{z}$, а сам $y\bar{z}$ является ядровым импликантом и войдет в МДНФ. Также <001> – собственная оценка для $x\bar{y}$, и $x\bar{y}$ – ядровый импликант, войдет в МДНФ.

Рассмотрим $(y\bar{z}) \vee (x\bar{y})$. Эта ДНФ выражает булеву функцию $f_1(x,y,z)$, т.к. импликанты $y\bar{z}$, $x\bar{y}$ покрывают эту функцию.

Ответ: мин ДНФ $= y\bar{z} \vee x\bar{y}$.

Билет 10

Экзаменационный билет №10

Вопросы:

1. Частичный порядок. Монотонные функции. Изоморфизм частично упорядоченных множеств. Примеры изоморфных частично упорядоченных множеств и не являющихся таковыми.

2. Доказать или опровергнуть, используя основные утверждения и тождества алгебры множеств: $A \setminus C \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq C$.

3. График функции $y = f(x)$ представляет собой ломаную, звенья которой параллельны координатной оси, либо биссектрисам координатных углов; координаты каждой вершины ломаной являются целыми числами. Функция $y = f(x)$ определяет бинарное отношение ρ_f на множестве $X = [0,5]$: $x_1 \rho_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Доказать, что ρ_f - эквивалентность на X. Перечислить все классы эквивалентности.

4. Найти многочлен Жегалкина для булевой функции: $f(x,y,z) = (x \supset y) \supset (z \sim \neg y)$.

5. Исследовать формулу логики предикатов на выполнимость, общезначимость: $F = [(\forall x)(A(x) \supset B(x)) \,\&\, (\forall x)(C(x) \supset \neg B(x))] \supset (\forall x)(A(x) \supset \neg C(x))$.

№1

Частичный порядок. Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение ρ на множестве A называется *частичным* порядком на A.

Пример 4.1. Бинарное отношение $\leq$ на множестве действительных чисел R является частичным порядком: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \quad x \leq x$; (б) транзитивность: $\forall x, y, z \in A \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (в) антисимметричность: $\forall x, y \in A \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$.

Пример 4.2. Бинарное отношение $\leq$ на множестве R^2 определяемое следующим образом: $\langle x_1, x_2 \rangle \leq \langle y_1, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_i \leq y_i,\ i = 1,2$ (называемое *отношением Парето*), является частичным порядком. Обоснование аналогично приведенному в примере 4.1. Аналогичным образом можно задать частичный порядок на R^3, R^4 и т.д.

Линейный порядок. Пусть ρ – частичный порядок на множестве A. Элементы $x, y \in A$ называются *сравнимыми по* ρ, если выполняется либо $x\rho y$, либо $y\rho x$. Частичный порядок ρ на множестве A называется *линейным*, если любые два элемента из A сравнимы по ρ.

Множество A с заданным на нем отношением частичного (линейного) порядка ρ называется *частично (линейно) упорядоченным*.

Задача 4.7. Показать, что, если A, A_1 – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\preccurlyeq, \preccurlyeq_1$, соответственно, функция $f: A \to A_1$ (кратко пишем $f:(A,\preccurlyeq) \to (A,\preccurlyeq_1)$) осуществляет взаимно-однозначное соответствие между множествами A, A_1, функция f является *монотонной* (т.е. $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \preccurlyeq x_2 \Rightarrow f(x_1) \preccurlyeq_1 f(x_2)$), то функция $f^{-1}: A_1 \to A$ может не быть монотонной.

Решение. Пусть $A = A_1 = \{a, b, c\}$. Частично упорядочим множество A двумя способами, заданными диаграммами Хассе, изображенными на рис.4.5. Левая диаграмма соответствует частичному порядку $\preccurlyeq$, а правая – линейному порядку $\preccurlyeq_1$. Пусть $\forall x \in A \quad f(x) = x$. Тогда функция $f:(A,\preccurlyeq) \to (A,\preccurlyeq_1)$ является монотонной, а функция $f^{-1} = f:(A,\preccurlyeq_1) \to (A,\preccurlyeq)$ не является монотонной, поскольку $b \preccurlyeq_1 c$, но b и c не сравнимы по $\preccurlyeq$ (т.е. $f^{-1}(b) = b \preccurlyeq c = f^{-1}(c)$ не выполняется).

Рис.4.5

Определение. Пусть A, A_1 – частично упорядоченные множества с частичными порядками $\preccurlyeq, \preccurlyeq_1$, соответственно. Тогда, если существует биективная функция $f: A \to A_1$ такая, что функции f, f^{-1} являются монотонными, то говорят, что f является *изоморфизмом* частично упорядоченных множеств $(A,\preccurlyeq)$, $(A_1,\preccurlyeq_1)$.

Задача 4.8. Доказать, что $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \ge)$, где $\mathrm{N} = \{1,2,...\}$ – натуральный ряд, не изоморфны.

Решение. В случае изоморфизма образ минимального элемента очевидным образом снова будет минимальным, максимального – максимальным, наименьшего – наименьшим, наибольшего – наибольшим. Но тогда частичные порядки $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \ge)$ не изоморфны, поскольку в $(\mathrm{N}, \le)$ существует наименьший элемент, но отсутствует наибольший, а в $(\mathrm{N}, \ge)$ – наоборот.

Задача 4.9. Рассмотрим частичный порядок $\preccurlyeq$ на множестве натуральных чисел $\mathrm{N} = \{1,2,...\}$: $\forall k, m \in \mathrm{N} \quad 2k-1 \prec 2m$, т.е. любое нечетное число меньше любого четного, а множества четных и нечетных чисел упорядочены «естественным» образом, т.е. бинарным отношением $\le$. Доказать, что $(\mathrm{N}, \le)$, $(\mathrm{N}, \preccurlyeq)$ не изоморфны.

Решение. Предположим противное. Пусть существует изоморфизм $f:(\mathrm{N}, \le) \to (\mathrm{N}, \preccurlyeq)$, и $a = f^{-1}(2)$. Тогда $\forall k \in \mathrm{N} \quad f^{-1}(2k-1) < a$, а это противоречит конечности множества $\{1,2,...,a\}$.

№2(доделать)

№3

1) Докажем что данное отношение - отношение эквивалентности.
   Определение: Рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение р на множестве А называется *эквивалентностью на А.*

   Доказательство: (а) рефлексивность: $\forall x \in A \;\; f(x) = f(x) \Rightarrow$
   $\Rightarrow x\rho_f x$; (б) симметричность: $\forall x_1, x_2 \in A \;\; x_1\rho_f x_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2\rho_f x_1$; (в) транзитивность:
   $\forall x_1, x_2, x_3 \in A \;\; x_1\rho_f x_2, x_2\rho_f x_3 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2),\; f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow$
   $\Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1\rho_f x_3$.

2) Перечислим все классы эквивалентности.
   Определение: Классом эквивалентности элемента x по эквивалентности р называется множество
   $[x]_p = x/p = \{y \in A \mid xpy\} = \{y \in A \mid ypx\}$.

Решение: Рассмотрим случаи: (а) Пусть $x \in [0; 1)$. Тогда не существует точки $x_1 \in X$, такой, что $x \neq x_1, f(x) = f(x_1)$, а следовательно, $[x]_{f} = \{x\}$.

(б) Пусть $x \in \{1, 3, 5\}$. Тогда $[x]_{f} = \{1, 3, 5\}$.

(в) Пусть $x \in (1, 2)$. Тогда $[x]_{f} = \{x, x_1, x_2, x_3\}$ (см. рис.).
При этом из геометрических соображений получаем:
$x - 1 = 3 - x_1 = x_2 - 3 = 5 - x_3$, откуда $x_1 = 4 - x$, $x_2 = x + 2$,
$x_3 = 6 - x$, а следовательно, $[x]_{f} = \{x, 4-x, x+2, 6-x\}$.

(г) Пусть $x \in \{2, 4\}$. Тогда $[x]_{f} = \{2, 4\}$

(д) Пусть $x \in (2, 3)$. Тогда аналогично (в) получаем
$[x]_{f} = \{x, 4-x, 6-x, x+2\}$.

(е) Пусть $x \in (4, 5)$. Тогда аналогично (в) получаем:
$[x]_{f} = \{x, 6-x, x-2, 8-x\}$.

ж) Пусть $x \in (3, 4)$. Тогда аналогично (в) получаем:
$[x]_{f} = \{x, x-2, 6-x, 8-x\}$.

No4

$(x \supset y) \supset (z \sim \neg y)$

x	y	z	$x \supset y$	$\neg y$	$z \sim \neg y$	F	СДНФ
1	1	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	1	$xy\bar{z}$
1	0	1	0	1	1	1	$x\bar{y}z$
1	0	0	0	1	0	1	$x\bar{y}\bar{z}$
0	1	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0	0	1	1	1	1	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0	0	0	1	1	0	0	

$xy(z+1) + xz(y+1) + x(y+1)(z+1) + y(x+1)(z+1) + z(x+1)(y+1) = \cancel{xyz} + \cancel{xy} + \cancel{xzy} + \cancel{xz} + \cancel{xyz} + xy + xz + x + \cancel{xyz} + \cancel{xy} + \cancel{yz} + y + xyz + \cancel{xz} + \cancel{yz} + z = xyz + xz + xy + x + y + z.$

Ответ: Многочлен Жегалкина: $xyz + xz + xy + x + y + z$