Лекция Л2. Тождественно-истинные формулы логики высказываний. Правильные рассуждения

Нам понадобится следующее

Замечание 2.1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ - формулы логики высказываний. Заметим, что в силу ассоциативности операций & и $\vee$ (см. теорему 0.1 из [1]), как бы мы не расставляли скобки в выражениях $A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_k$, $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k$, всегда будем приходить к равносильным формулам. Поэтому будем считать каждое из этих выражений формулой и называть соответственно *(многочленной) конъюнкцией и дизъюнкцией* формул $A_1, A_2, \ldots,$ A_k. Для этих формул, используя метод математической индукции, нетрудно получить равносильности, выражающие обобщенную дистрибутивность:

$$(A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_k) \vee (B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_l) \equiv (A_1 \vee B_1) \& (A_1 \vee B_2) \& \ldots \& (A_1 \vee B_l) \& \\ \& (A_2 \vee B_1) \& (A_2 \vee B_2) \& \ldots \& (A_2 \vee B_l) \& \ldots \& (A_k \vee B_1) \& (A_k \vee B_2) \& \ldots \& (A_k \vee B_l);$$

$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_k) \& (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_l) \equiv (A_1 \& B_1) \vee (A_1 \& B_2) \vee \ldots \vee (A_1 \& B_l) \vee \\ \vee (A_2 \& B_1) \vee (A_2 \& B_2) \vee \ldots \vee (A_2 \& B_l) \vee \ldots \vee (A_k \& B_1) \vee (A_k \& B_2) \vee \ldots \vee (A_k \& B_l),$$

а также обобщенные законы де Моргана:

$$\neg(A_1 \& \ldots \& A_k) \equiv \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_k; \ \neg(A_1 \vee \ldots \vee A_k) \equiv \neg A_1 \& \ldots \& \neg A_k.$$

Тождественно-истинные формулы. Пусть A - формула логики высказываний. Формула A называется *тождественно-истинной* (*тождественно-ложной*), если на любой оценке списка переменных этой формулы она принимает значение И (Л). При этом пишем $A \equiv \text{И}$ ($A \equiv \text{Л}$). Очевидно, что если $A \equiv \text{И}$ ($A \equiv \text{Л}$) относительно некоторого списка переменных формулы A, то $A \equiv \text{И}$ ($A \equiv \text{Л}$) и относительно любого другого списка переменных этой формулы. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 2.1. Для любых формул логики высказываний A, B выполняется: (а) $A \equiv \text{И} \Leftrightarrow \neg \text{A} \equiv \text{Л}$; (б) $A \equiv B \Leftrightarrow \text{A} \sim B \equiv \text{И}$.

Приведем некоторые свойства тождественно-истинных (тождественно-ложных) формул. Пусть A, B, C - некоторые произвольные формулы логики высказываний, а для формул логики высказываний I, L выполняется: $I \equiv \text{И}, L \equiv \text{Л}$. Тогда

1. $A \& \neg A \equiv \text{Л}$;	$1'$. $A \vee \neg A \equiv \text{И}$;
2. $A \& I \equiv A$;	$2'$. $A \vee I \equiv \text{И}$;
3. $A \& L \equiv \text{Л}$;	$3'$. $A \vee L \equiv \text{A}$;
4. $(A \& \neg A) \vee B \equiv B$;	$4'$. $(A \vee \neg A) \& B \equiv B$;
5. $(A \& B \& \neg B) \vee C \equiv C$;	$5'$. $(A \vee B \vee \neg B) \& C \equiv C$.

Утверждения 1-3, $1'-3'$ очевидны. Утверждения 4,5 являются следствиями утверждений 1,3, $2'$, а утверждения $4', 5'$ - следствиями утверждений $1', 3'$, 2.

Приведем примеры тождественно-истинных формул логики высказываний. Для любых формул A, B выполняется:

$$(A \& B) \supset A \equiv \text{И}; \tag{2.1}$$

$$A \supset (A \vee B) \equiv \text{И}; \tag{2.2}$$

$$A \supset (B \supset A) \equiv \text{И}; \tag{2.3}$$

$$A \supset (B \supset (A \& B)) \equiv \text{И}; \tag{2.4}$$

$$((A \supset B) \supset A) \supset A \equiv \text{И}. \qquad (2.5)$$

Утверждения (2.1)-(2.5) легко проверяются с помощью таблиц истинности. Другим распространенным методом проверки тождественной истинности формулы является рассуждение от противного. Проверим, например, тождественную истинность формулы в левой части утверждения (2.4). Предположим, что эта формула принимает значение Л на некоторой оценке своего списка переменных. Тогда по определению операции $\supset$ на этой оценке $A = \text{И}$, $B \supset (A \& B) = \text{Л}$. Из второго равенства по определению $\supset$ получаем, что на этой оценке $B = \text{И}$, $A \& B = \text{Л}$, что противоречит определению &, так как при $A = \text{И}$, $B = \text{И}$ выполняется $A \& B = \text{И}$.

Замечание 2.2. С одной стороны проверка тождественной истинности некоторой формулы логики высказываний F, зависящей от списка переменных $\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \rangle$, с помощью таблиц истинности представляется наиболее простой. Однако следует иметь в виду, что эта таблица содержит 2^k строк (см. упражнение 1.1), а при больших k (например, при $k = 100$) число 2^k становится настолько большим, что табличный способ становится невозможным даже с использованием самых мощных современных компьютеров. В таких случаях может помочь метод рассуждения от противного. По крайней мере рассуждения от противного могут помочь значительно сузить множество возможных оценок списка переменных $\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \rangle$, на которых формула F может принимать значение Л.

Правильные рассуждения. При доказательстве утверждений различных математических теорий помимо фактов этих теорий обычно используют логические рассуждения, которые на языке логики высказываний можно выразить формулами. Будем рассматривать рассуждения следующего типа. Пусть $P_1,..., P_n$ - некоторые исходные высказывания, которые будем называть *посылками* (этого рассуждения), а D - высказывание, рассматриваемое как следствие этих посылок, и которое будем называть *заключением* (этого рассуждения). Рассуждения указанного типа будем записывать в виде двухстрочной записи

$$\frac{P_1,..., P_n}{D} \qquad (2.6)$$

Рассуждение (2.6) называется *правильным*, если всякий раз, когда посылки $P_1,..., P_n$ истинны, заключение D также истинно. Из определения операций & и $\supset$ следует, что для правильности рассуждения (2.6) необходима и достаточна тождественная истинность формулы

$$F = (P_1 \& \ldots \& P_n) \supset D. \qquad (2.7)$$

Распространенными схемами правильных рассуждений являются:

$$\frac{A \supset B, A}{B}, \quad \frac{A \supset B, \neg B}{\neg A}, \quad \frac{A \supset B}{\neg B \supset \neg A}.$$

Докажем, например, правильность второго рассуждения. Соответствующая этому рассуждению формула (2.7) имеет вид $F = ((A \supset B) \& \neg B) \supset \neg A.$ Проверим тождественную истинность этой формулы рассуждением от противного. Предположим, что формула F принимает значение Л на некоторой оценке своего списка переменных. Тогда по определению операции $\supset$ на этой оценке $(A \supset B) \& \neg B = \text{И}$, $\neg A = \text{Л}$. Из этих равенств по определению $\&$ и $\neg$ получаем, что на этой оценке $A \supset B = \text{И}$, $B = \text{Л}$, $A = \text{И}$, что противоречит определению $\supset$, так как при $A = \text{И}$, $B = \text{Л}$ выполняется $A \supset B = \text{Л}$.

Упражнение 2.1. Проверим правильность рассуждения. Если Петр болеет, то у него повышается температура. У Петра повысилась температура. Следовательно, Петр болеет. Введем обозначения для элементарных (т.е. не составленных из более простых) высказываний рассматриваемого рассуждения: X_1 - «Петр болеет», X_2 - «у Петра повысилась температура». При помощи этих переменных составим формулы для двух посылок и заключения нашего рассуждения: $P_1 = X_1 \supset X_2$, $P_2 = X_2$, $D = X_1$. Таким образом, имеем рассуждение, построенное по следующей схеме $\dfrac{X_1 \supset X_2, X_2}{X_1}$. Проверим его правильность. Соответствующая этому рассуждению формула (2.7) имеет вид $F = ((X_1 \supset X_2)\ \&$ $\& X_2) \supset X_1$. Проверим тождественную истинность этой формулы рассуждением от противного. Предположим, что формула F не является тождественно-истинной. Это означает, что найдется оценка списка переменных $\langle X_1, X_2 \rangle$, на которой формула F принимает значение Л. По определению $\supset$ на этой оценке $(X_1 \supset X_2)\ \&\ X_2$ =И, X_1=Л, откуда по определению $\&$ на этой оценке выполняются равенства: $X_1 \supset X_2$=И, X_2 =И. Заметим, что при X_1=Л, X_2 =И действительно выполняется равенство $X_1 \supset X_2$=И, т.е. мы не пришли к противоречию, а нашли оценку $\langle \text{Л}, \text{И} \rangle$, на которой F =Л. Таким образом, формула F не является тождественно-истинной, а следовательно, рассматриваемое рассуждение не является правильным.

Упражнение 2.2. Привести формулы логики высказываний для высказываний, связывающих более простые (элементарные) высказывания.

(а) Если дует ветер, то качаются деревья.

(б) Деревья качаются тогда и только тогда, когда дует ветер.

(в) Дует ветер или деревья качаются.

(г) Дует ветер и деревья качаются.

(д) Деревья качаются только тогда, когда дует ветер.

(е) Либо дует ветер, либо качаются деревья.

Решение. Обозначим X_1 - «дует ветер», X_2 - «деревья качаются». Обозначим формулу для каждого из высказываний в перечисленных случаев через $P_а, ..., P_е$ соответственно. Тогда $P_а = X_1 \supset X_2$, $P_б = X_2 \sim X_1 \equiv X_1 \sim X_2$, $P_в = X_1 \vee X_2$, $P_г = X_1\ \&\ X_2$, $P_д = X_2 \supset X_1$, $P_е = \neg(X_1 \sim X_2) \equiv \neg X_1 \sim X_2 \equiv X_1 \sim \neg X_2$. Поясним $P_д$. Действительно, высказывание (д) не выполняется только в одном случае, когда деревья качаются, а ветер не дует, т.е. при X_2 =И, X_1=Л, что и соответствует формуле $X_2 \supset X_1$. Поясним также $P_е$. Действительно, высказывание (е) выполняется только в случаях: X_1=И, X_2=Л; X_1=Л, X_2 =И, а в других случаях не выполняется, что и соответствует формуле $\neg(X_1 \sim X_2)$, которая эквивалентна формулам: $\neg X_1 \sim X_2$, $X_1 \sim \neg X_2$.

Разбор типового варианта. Проверить правильность рассуждения:

«Либо цены высоки, либо заработная плата невысока. Если цены высоки, то применяется регулирование цен. Либо применяется регулирование цен, либо нет инфляции. Следовательно, при высокой зарплате происходит инфляция.»

Введем обозначения для элементарных высказываний рассматриваемого рассуждения: X_1 - «цены высоки», X_2 - «заработная плата высока», X_3 - «применяется регулирование цен», X_4 - «имеется инфляция». При помощи этих переменных запишем четыре посылки $P_1 = \neg(X_1 \sim \neg X_2)$, $P_2 = X_1 \supset X_3$, $P_3 = \neg(X_3 \sim \neg X_4)$, а также заключение нашего рассуждения $D = X_2 \supset X_4$. Таким образом, имеем рассуждение, построенное по следующей схеме

$$\frac{\neg(X_1 \sim \neg X_2),\ X_1 \supset X_3,\ \neg(X_3 \sim \neg X_4)}{X_2 \supset X_4}$$

Проверим его правильность. Соответствующая этому рассуждению формула (2.7) имеет вид

$$F = [\ \neg(X_1 \sim \neg X_2)\ \&\ (X_1 \supset X_3)\ \&\ \neg(X_3 \sim \neg X_4)] \supset (X_2 \supset X_4).$$

Проверим тождественную истинность этой формулы рассуждением от противного. Предположим, что формула F не является тождественно-истинной. Это означает, что найдется оценка списка переменных $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$, на которой формула F принимает значение Л. По определению $\supset$ и $\&$ на этой оценке

$$X_2 \supset X_4 = \text{Л},\ \neg(X_1 \sim \neg X_2) = \text{И},\ X_1 \supset X_3 = \text{И},\ \neg(X_3 \sim \neg X_4) = \text{И}.$$

По определению $\supset$ из первого равенства получаем, что X_2=И, X_4=Л, а из второго: $X_1 \sim \neg X_2$=Л, откуда, учитывая то, что X_2=И, по определению $\sim$ имеем: X_1=И. Но тогда из третьего равенства следует, что X_3=И , а это противоречит четвертому равенству.

Таким образом, предположив, что формула F не является тождественно-истинной, пришли к противоречию, а следовательно, $F \equiv$ И, и рассматриваемое рассуждение является правильным.

Замечание 2.3. Изменим в рассматриваемом рассуждении третье высказывание на иное: «Применяется регулирование цен или нет инфляции». Тогда третьей посылке соответствует формула $P_3 = X_3 \vee \neg X_4$, и соответствующая новому рассуждению формула (1.7) имеет вид

$$F = [\ \neg(X_1 \sim \neg X_2)\ \&\ (X_1 \supset X_3)\ \&\ (X_3 \vee \neg X_4)] \supset (X_2 \supset X_4).$$

Проверим тождественную истинность этой формулы рассуждением от противного. Предположим, что формула F не является тождественно-истинной. Это означает, что найдется оценка списка переменных $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$, на которой формула F принимает значение Л. По определению $\supset$ и $\&$ на этой оценке

$$X_2 \supset X_4 = \text{Л},\ \neg(X_1 \sim \neg X_2) = \text{И},\ X_1 \supset X_3 = \text{И},\ X_3 \vee \neg X_4 = \text{И}.$$

По определению $\supset$ из первого равенства получаем, что X_2=И, X_4=Л, а из второго: $X_1 \sim \neg X_2$=Л, откуда, учитывая то, что X_2=И, по определению $\sim$ имеем: X_1=И. Но тогда из третьего равенства следует, что X_3=И , что не противоречит четвертому равенству. Таким образом, найдена оценка $\langle \text{И}, \text{И}, \text{И}, \text{Л} \rangle$ списка переменных $\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$, на которой F=Л, а следовательно формула F не является тождественно-истинной и рассматриваемое в настоящем замечании рассуждение не является правильным.