ЛЕКЦИЯ Л4. Булевы функции. Представление булевых функций формулами в СДНФ и СКНФ

Булевы функции. *Булевой функцией* $f(X_1,..., X_n)$ (иначе, *функцией алгебры логики*) называется любая n-местная функция из $\{0,1\}$ в $\{0,1\}$, т.е. функция вида $f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Каждую булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$ можно задать таблицей из 2^n строк, в каждой строке которой указывается одна из возможных оценок списка переменных (см. утверждение 1.1), а также значение функции на этой оценке. При этом переменные $X_1,..., X_n$ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ будем называть *булевыми*. Переменные n-местной булевой функции могут иметь и другой вид, например, $Y_1,...,Y_n$ и т.д.

В дальнейшем, чтобы избегнуть индексных выражений, будем как и в логике высказываний для двухместных и трехместных булевых функций часто использовать следующее переобозначение: $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$ и т.д.

Замечание 4.1. Всякую булеву функцию от n переменных можно задать таблицей из 2^n строк, в каждой строке которой записывается одна из оценок списка переменных и значение функции на этой оценке. Так как длина каждого столбца равна 2^n, а различных столбцов имеется $2^{(2^n)} = 2^{2^n}$ (см. доказательство утверждения 1.1), то существует ровно 2^{2^n} попарно различных булевых функций от n переменных (n-местных булевых функций).

Пример 4.1. Рассмотрим так называемую функцию «голосования» $g(X,Y,Z)$, принимающую значение большинства из значений своих переменных. Приведем таблицу значений этой булевой функции на всех возможных оценках списка переменных.

X	Y	Z	$g(X,Y,Z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Сопоставим истинностному значению И число 1, а истинностному значению Л – 0. Тогда каждой формуле логики высказываний F со списком переменных $\left\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \right\rangle$ соответствует однозначно определенная этой формулой булева функция $f_F(Y_1,..., Y_k)$, где $Y_1 = X_{i_1},..., Y_k = X_{i_k}$. Будем также говорить, что формула F *выражает* булеву функцию

f_F. При этом, если F_1, F_2 - формулы с одинаковым списком переменных (см. замечание 1.1) и $F_1 \equiv F_2$, то $f_{F_1} = f_{F_2}$ (по определению, две функции равны, если равны их области определения и для любого точки из области определения значения этих функций совпадают).

Пример 4.2. Зададим табличным способом булеву функцию $f_F(X,Y,Z)$, соответствующую формуле $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5 (см. лекцию 3).

X	Y	Z	$\neg Z$	$Y \& \neg Z$	$\neg(Y \& \neg Z)$	$\neg Y$	$\neg X$	$\neg Y \supset \neg X$	$\neg(\neg Y \supset \neg X)$	f_F
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0

Табл. 4.1

Из замечания 1.8 следует, что всего имеется $2^{2^1} = 4$ различных булевых функций от 1 переменной и $2^{2^2} = 16$ различных булевых функций от двух переменных (см. табл. 1.5, 1.6).

X	$X \vee \neg X \equiv 1$	X	$\neg X$	$X \& \neg X \equiv 0$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Табл. 4.2

X	Y	$X \vee \neg X$	$X \vee Y$	$Y \supset X$	X	$X \supset Y$	Y	$X \sim Y$	$X \& Y$	$\neg(X \& Y)$	$\neg(X \sim Y)$	$\neg Y$	$\neg(X \supset Y)$	$\neg X$	$\neg(Y \supset X)$	$\neg(X \vee Y)$	$X \& \neg X$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
										$X \circ Y$	$X + Y$					$X \mid Y$	

Табл. 4.3

Из таблиц 4.2, 4.3 следует, что любую булеву функцию от одной или двух переменных можно выразить формулой логики высказываний. Как будет видно из дальнейшего, любую булеву функцию, зависящую от любого числа переменных, можно также выразить формулой логики высказываний.

Замечание 4.2. В теории булевых функций помимо двухместных функций, задаваемых двухместными логическими операциями, часто пользуются также следующими двухместными булевыми функциями (см. последнюю строку табл. 1.5): $X \circ Y = \neg(X \& Y)$ (функция *Вебба*), $X + Y = \neg(X \sim Y)$ (*сложение по модулю* 2), $X \mid Y = \neg(X \vee Y)$ (функция *Шеффера*).

Представление булевых функций формулами в СДНФ и СКНФ. Пусть A - формула логики высказываний, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Будем считать, что $A^{\varepsilon} = A$ при $\varepsilon = 1$ и $A^{\varepsilon} = \neg A$ при $\varepsilon = 0$. Пусть $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$ - оценка списка переменных $\langle X_1,..., X_n \rangle$, где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, $i = 1,2,..., n$. Каждой такой оценке поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $X_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& X_n^{\varepsilon_n}$, которую будем называть *ассоциированной* с этой оценкой.

Пример 4.3. Пусть $\langle 0,1,0 \rangle$ - оценка списка переменных $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$. Тогда $\neg X_1 \& X_2 \& \neg X_3$ - элементарная конъюнкция, *ассоциированная* с этой оценкой.

Из определения логической операции $\neg$ следует, что справедлива

Лемма. Пусть A - формула логики высказываний, $\varepsilon \in \{0,1\}$. Тогда $A^{\varepsilon} = 1 \Leftrightarrow A = \varepsilon$.

Утверждение 4.1. Конъюнкция $X_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& X_n^{\varepsilon_n}$, ассоциированная с оценкой $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$, принимает значение 1 только на этой оценке, а на остальных оценках принимает значение 0.

Доказательство. Используя приведенную лемму, а также определение &, имеем: $X_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& X_n^{\varepsilon_n} = 1 \Leftrightarrow X_1^{\varepsilon_1} = 1,..., X_n^{\varepsilon_n} = 1 \Leftrightarrow X_1 = \varepsilon_1,..., X_n = \varepsilon_n$.

Следствием этого утверждения является

Утверждение 4.2. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 0. Тогда справедливо представление (единственное с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ в виде СДНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n \rangle$ согласно формуле

$$f(X_1,..., X_n) = \bigvee_{f(\varepsilon_1,..., \varepsilon_n)=1} (X_1^{\varepsilon_1} \& \ldots \& X_n^{\varepsilon_n}), \qquad (4.1)$$

где дизъюнкция берется по всем оценкам $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$, для которых $f(\varepsilon_1,..., \varepsilon_n) = 1$.

Замечание 4.3. Единственность представления (4.1) легко доказывается от противного, используя утверждение 4.1.

Замечание 4.4. Из утверждения 4.1 также следует, что в представлении (4.1) операцию $\bigvee$ можно заменить на сложение по модулю 2, которое в этом случае обозначается символом $\sum$.

Пример 4.4. Используя утверждение 4.2, выразим функцию «голосования» $g(X,Y,Z)$ формулой логики высказываний, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X,Y,Z \rangle$: $g(X,Y,Z) = (X \& Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& Z) \vee$ $\vee (\neg X \& Y \& Z)$.

Используя утверждение 4.2 и применяя его к отрицанию булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, нетрудно доказать (используя обобщенный закон де Моргана), что справедливо

Утверждение 4.3. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 1. Тогда справедливо представление (единственное с точностью до перестановки конъюнктивных членов) булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ в виде СКНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$ согласно формуле

$$f(X_1,..., X_n) = \underset{f(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=0}{\&} (X_1^{\neg\varepsilon_1} \vee \ldots \vee X_n^{\neg\varepsilon_n}),$$

где конъюнкция берется по всем оценкам $\langle\varepsilon_1,..., \varepsilon_n\rangle$, для которых $f(\varepsilon_1,..., \varepsilon_n) = 0$.

Пример 4.5. Используя утверждение 4.3, выразим функцию «голосования» $g(X,Y,Z)$ формулой логики высказываний, находящейся в СКНФ относительно списка переменных $\langle X,Y,Z\rangle$:

$$g(X,Y,Z) = (\neg X \vee Y \vee Z) \& (X \vee \neg Y \vee Z) \& (X \vee Y \vee \neg Z) \& \& (X \vee Y \vee Z).$$

Пример 4.6. Используя утверждения 4.2, 4.3, найдем СДНФ и СКНФ формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5 относительно списка переменных $\langle X,Y,Z\rangle$ табличным способом. Действительно, используя табличное представление булевой функции f_F (см. табл. 4.1), имеем:

$$F \equiv (X \& Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z);$$

$$F \equiv (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \& (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \& (X \vee Y \vee \neg Z) \& (X \vee Y \vee Z).$$

Полученные СДНФ и СКНФ совпадают с полученными ранее в примерах 1.11, 1.13.