Пример 3. С помощью только оператора суперпозиции можно получить из простейших следующие функции (а) вида $f(x)=a$; (б) вида $f(x_1,...,x_n)=x_i+a$, где $1\le i\le n$.

(а) $a=\underbrace{S(S(...(S(O(x)))...))}_{a\text{ раз}}$; (б) $x_i+a=\underbrace{S(S(...(S(I_i(x_1,...,x_n)))...))}_{a\text{ раз}}$.

Пример 4. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны: (а) $f(x,y)=x+y$; (б) $f(x,y)=xy$; (в) $f(x,y)=x^y$; (г) $f(x)=x!$

Решение. (а) Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x,y)=x+y$:

$$\begin{cases} f(x,0)=x=I_1(x), \\ f(x,y+1)=x+(y+1)=f(x,y)+1=S(f(x,y)), \end{cases}$$

т.е. здесь $\varphi(x)=I_1(x)$, $\psi(x,y,z)=S(I_3(x,y,z))$.

(б) Обозначим $S^{(2)}(x,y)=x+y$. Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x,y)=xy$:

$$\begin{cases} f(x,0)=x\cdot 0=0=O(x), \\ f(x,y+1)=x(y+1)=xy+x=S^{(2)}(f(x,y),x), \end{cases}$$

т.е. здесь $\varphi(x)=O(x)$, $\psi(x,y,z)=S^{(2)}(I_3(x,y,z),I_1(x,y,z))$.

(в) Обозначим $M(x,y)=xy$. Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x,y)=x^y$:

$$\begin{cases} f(x,0)=x^0=1=S(O(x)), \\ f(x,y+1)=x^{y+1}=x^y\cdot x=M(f(x,y),x), \end{cases}$$

т.е. здесь $\varphi(x)=S(O(x))$, $\psi(x,y,z)=M(I_3(x,y,z),I_1(x,y,z))$.

(г) Опишем схему примитивной рекурсии для $f(x)=x!$:

$$\begin{cases} f(0)=1=a, \\ f(x+1)=(x+1)!=M(f(x),S(x)), \end{cases}$$

т.е. здесь $a=1$, $\psi(x,y)=M(I_2(x,y),S(I_1(x,y)))$.

Пример 5. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

(а) $x\dot{-}1=\begin{cases} x-1, если\ x\ge 1; \\ 0, если\ x=0. \end{cases}$

(б) $x\dot{-}y=\begin{cases} x-y, если\ x\ge y; \\ 0, если\ x<y. \end{cases}$;

(в) $|x-y|$; (г) $\max(x,y)$; (д) $\min(x,y)$.

Решение. (а) Опишем схему примитивной рекурсии

$$\begin{cases} 0\dot{-}1=0=a, \\ (x+1)\dot{-}1=x=I_1(x,y), \end{cases}$$

т.е. здесь $a=0$ – константа, $\psi(x,y)=I_1(x,y)$.

(б) Обозначим $E(x) = x\dot{-}1$. Опишем схему примитивной рекурсии

$$\begin{cases} x\dot{-}0 = x, \\ x\dot{-}(y+1) = (x\dot{-}y)\dot{-}1 = E(x\dot{-}y), \end{cases}$$

т.е. здесь $\varphi(x) = I_1(x)$, $\psi(x,y,z) = E(I_3(x,y,z))$.

(в) $|x-y| = (x\dot{-}y) + (y\dot{-}x)$;

(г) $\max(x,y) = x + (y\dot{-}x)$;

(д) $\min(x,y) = x\dot{-}(x\dot{-}y)$.

Пример 6. Доказать, что следующие функции частично рекурсивны:
(а) нигде не определенная функция;
(б) функция, определенная в конечном числе точек;

(в) функция $f(x,y) = \begin{cases} x-y, \text{ если } x \geq y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

(г) функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, \text{ если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

(д) функция $f(x,y) = \begin{cases} z, \text{ если } z^y = x, \\ \text{не определена в остальных случаях.} \end{cases}$

Решение. (а) $f(x) = \mu y[x + y^2 + 1 = 0]$;

(б) функция $f(x) = \mu y[(x\dot{-}k) + y = 0]$ – определена при $x = 0,1,\dots,k$, и принимает значение 0 при этих значениях x, а в остальных случаях не определена;

(в) $f(x,y) = \mu z[|x-(y+z)| = 0]$
($|x-(y+z)| = 0 \Leftrightarrow x-(y+z) = 0 \Leftrightarrow x = y+z \Leftrightarrow z = x-y$);

(г) $f(x,y) = \mu z[|x-yz| = 0]$
($|x-yz| = 0 \Leftrightarrow x-yz = 0 \Leftrightarrow x = yz \Leftrightarrow z = \dfrac{x}{y}$);

(д) $f(x,y) = \mu z[|x-z^y| = 0]$ ($|x-z^y| = 0 \Leftrightarrow x = z^y$).