Лекция Л3. Нормальные формы формул. ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ формулы. Алгоритмы их нахождения

Нормальные формы формул. Определим некоторые канонические формы формул (аналогичные многочленам в школьной алгебре). Всюду далее, под словом «формула» будет пониматься формула логики высказываний.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция (быть может, одночленная) формул, каждая из которых есть либо высказывательная переменная, либо отрицание высказывательной переменной. Будем говорить, что формула находится в *дизъюнктивной нормальной форме* (ДНФ), если она является дизъюнкцией (быть может, одночленной) элементарных конъюнкций.

Пример 1.4. Формулы $X_3, \neg X_2$, $X_1 \& \neg X_3, X_2 \& \neg X_3 \& \neg X_4$ являются элементарными конъюнкциями. Эти же формулы находятся в ДНФ. Кроме того, в ДНФ находятся дизъюнкции всех или нескольких из приведенных элементарных конъюнкций, например, в ДНФ находятся формулы $X_3 \vee \neg X_2$, $X_3 \vee \neg X_2 \vee (X_1 \& \neg X_3)$, $X_3 \vee \neg X_2 \vee (X_1 \& \neg X_3) \vee$ $\vee (X_2 \& \neg X_3 \& \neg X_4)$.

Утверждение 3.1. Для любой формулы F можно найти такую формулу G, находящуюся в ДНФ, что $F \equiv G$ (G называется *ДНФ формулы* F).

Справедливость утверждения 3.1 обосновывается следующим алгоритмом.

Алгоритм 3.1 нахождения ДНФ формулы F

1-й этап. Преобразуем F в такую формулу F_1, что $F \equiv F_1$ и в F_1 отсутствуют символы операций $\supset, \sim$. Для этого, используя правило равносильных преобразований (см. утверждение 1.1) заменяем в F каждую подформулу вида $A \supset B$ на $\neg A \vee B$, а каждую подформулу вида $A \sim B$ на $(\neg A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ или на $(A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$ (см. основные равносильности 9-11).

2-й этап. Преобразуем F_1 в такую формулу F_2, что $F \equiv F_1 \equiv F_2$ и в F_2 все отрицания находятся только перед переменными (она называется *«формулой с тесными отрицаниями»*). Для этого вносим отрицания внутрь скобок по законам обобщенного закона де Моргана (см. замечание 1.3) до тех пор, пока все отрицания не будут находиться перед переменными, уничтожая при этом пары стоящих рядом отрицаний (см. равносильность (8): $\neg\neg A \equiv A$).

3-й этап. Если полученная формула F_2 еще не находится в ДНФ, то применив необходимое число раз обобщенную дистрибутивность $\&$ относительно $\vee$ (см. замечание 1.3), последовательно преобразуем F_2 аналогично приведению алгебраического выражения, составленного из переменных, с помощью сложений и умножений к виду многочлена. Заметим, что при этом $\vee$ будет аналогична сложению, а $\&$ - умножению. Полученная в результате формула G и будет искомой.

Замечание 1.5. В дальнейшем, чтобы избежать индексных выражений, будем часто использовать следующее переобозначение: $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$.

Пример 1.5. Используя алгоритм 3.1, найдем ДНФ формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim$ $\sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ (см. замечание 1.5):

(1-й этап) $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(Y \vee \neg X) \equiv$

$$\equiv [\neg(Y \& \neg Z) \& \neg(Y \vee \neg X)] \vee [\neg\neg(Y \& \neg Z) \& \neg\neg(Y \vee \neg X)] \equiv$$

(2-й этап) $\equiv [(\neg Y \vee Z) \& (\neg Y \& X)] \vee [(Y \& \neg Z) \& (Y \vee \neg X)] \equiv$

(3-й этап) $\equiv (\neg Y \& \neg Y \& X) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (Y \& \neg Z \& Y) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X)$.

Замечание 1.6. Полученную ДНФ формулы F можно дополнительно упростить, используя основные равносильности 4, $5'$:

$$F \equiv (\neg Y \& \neg Y \& X) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (Y \& \neg Z \& Y) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X) \equiv$$
$$\equiv (X \& \neg Y) \vee (X \& \neg Y \& Z) \vee (Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z) \equiv (X \& \neg Y) \vee (Y \& \neg Z).$$

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция (быть может, одночленная) формул, каждая из которых есть либо высказывательная переменная, либо отрицание высказывательной переменной. Будем говорить, что формула находится в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ), если она является конъюнкцией (быть может, одночленной) элементарных дизъюнкций.

Пример 1.6. Формулы $X_3, \neg X_2,\ X_1 \vee \neg X_3, X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4$ являются элементарными дизъюнкциями. Эти же формулы находятся в КНФ. Кроме того, в КНФ находятся конъюнкции всех или нескольких из приведенных элементарных дизъюнкций, например, в КНФ находятся формулы $X_3 \& \neg X_2$, $X_3 \& \neg X_2 \& (X_1 \vee \neg X_3)$, $X_3 \& \neg X_2 \& (X_1 \vee \neg X_3) \&$ $\& (X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4)$.

Утверждение 3.2. Для любой формулы F можно найти такую формулу G, находящуюся в КНФ, что $F \equiv G$ (G называется *КНФ формулы* F).

Справедливость утверждения 3.2 обосновывается следующим алгоритмом.

Алгоритм 3.2 нахождения КНФ формулы F

1-й и 2-й этапы. Выполнив первые два этапа алгоритма 3.1 нахождения ДНФ формулы F, найдем формулу F_2 такую, что $F \equiv F_2$, в F_2 отсутствуют символы операций $\supset, \sim$ и в F_2 все отрицания находятся только перед переменными. В качестве такой формулы можно взять найденную при построении ДНФ формулу F_2. Однако часто на первом этапе при нахождении КНФ выгоднее использовать формулу для выражения $\sim$ через $\&$, $\vee$, и $\neg$, отличную от той, которая использовалась при нахождении ДНФ (см. равносильности (10), (11)).

3-й этап. Если полученная формула F_2 еще не находится в ДНФ, то применив необходимое число раз обобщенную дистрибутивность $\vee$ относительно $\&$ (см. замечание 1.3), последовательно преобразуем F_2 аналогично приведению алгебраического выражения, составленного из переменных, с помощью сложений и умножений к виду многочлена. Заметим, что при этом $\&$ будет аналогична сложению, а $\vee$ - умножению. Полученная в результате формула G и будет искомой.

Пример 1.7. Используя алгоритм 3.2, найдем КНФ формулы F из примера 1.5.

(1-й этап) $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(Y \vee \neg X) \equiv$

$$\equiv [\neg\neg(Y \& \neg Z) \vee \neg(Y \vee \neg X)] \& [\neg(Y \& \neg Z) \vee \neg\neg(Y \vee \neg X)] \equiv$$

(2-й этап) $\equiv [(Y \& \neg Z) \vee (\neg Y \& X)] \& [(\neg Y \vee Z) \vee (Y \vee \neg X)] \equiv$

(3-й этап) $\equiv (Y \vee \neg Y) \& (Y \vee X) \& (\neg Z \vee \neg Y) \& (\neg Z \vee X) \& (\neg Y \vee Z \vee Y \vee \neg X)$.

Замечание 1.7. Мы получили КНФ формулы F. Однако ее можно упростить, используя утверждения 1-4, $1' - 4'$ из раздела «тождественно-истинные формулы». Используя эти утверждения, получаем, что в КНФ можно вычеркивать элементарные дизъюнкции, одновременно содержащие какую-нибудь переменную и ее отрицание (аналогично можно вычеркивать в ДНФ те элементарные конъюнкции, которые одновременно содержат какую-нибудь переменную и ее отрицание).

Используя замечание 1.7, производим упрощение КНФ формулы F:

$F \equiv (Y \vee \neg Y) \& (Y \vee X) \& (\neg Z \vee \neg Y) \& (\neg Z \vee X) \& (\neg Y \vee \neg Z \vee Y \vee \neg X) \equiv$

$\equiv (X \vee Y) \& (\neg Y \vee \neg Z) \& (X \vee \neg Z).$

Нетрудно видеть, что ДНФ (КНФ) формулы не является однозначно определенной.

Пример 1.8. Как это видно из таблицы истинности (см. табл. 3.1)

$F = (\neg X \supset Y) \supset \neg (Y \sim Z) \equiv A_1 = (Y \& \neg Z) \vee (\neg Y \& Z) \vee (\neg X \& \neg Z) \equiv$

$\equiv A_2 = (Y \& \neg Z) \vee (\neg Y \& Z) \vee (\neg X \& \neg Y),$

т.е. нашлись две различные ДНФ A_1, A_2 формулы F.

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg Z$	$Y \& \neg Z$	$\neg Y \& Z$	$\neg X \& \neg Z$	$\neg X \& \neg Y$	A_1	A_2
И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
И	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	И	Л	И	Л	Л	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	И	И	Л	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	И	И	И	Л	Л	И	И	И	И

Табл. 3.1

Таким образом, ДНФ не обладает свойством однозначности. Выделим среди ДНФ формулы так называемую *совершенную дизъюнктивную нормальную форму*, являющуюся единственной для данной формулы с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.

Пусть $\langle X_{i_1}, ..., X_{i_k} \rangle$ - список переменных формулы F. Будем говорить, что формула F находится в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

(1) F находится в ДНФ;

(2) каждый дизъюнктивный член формулы F является k-членной конъюнкцией, причем на каждом l-м месте ($1 \le l \le k$) этой конъюнкции обязательно находится либо переменная X_{i_l}, либо ее отрицание $\neg X_{i_l}$.

(3) все дизъюнктивные члены формулы F попарно различны.

Пример 1.9. Пусть $\langle X, Y, Z \rangle$ - список переменных формулы (см. замечание 1.5). Тогда формулы $\neg X \& \neg Y \& Z$, $(\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (\neg X \& Y \& Z) \vee (\neg X \& \neg Y \& \neg Z)$ находятся в СДНФ относительного этого списка переменных.

Утверждение 3.3. Пусть F - формула со списком переменных $\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \rangle$, и не являющаяся тождественно-ложной. Тогда существует такая формула G, что $F \equiv G$ и G находится в СДНФ относительно списка переменных $\langle X_{i_1},..., X_{i_k} \rangle$.

Это утверждение обосновывает следующий алгоритм. Чтобы избавиться от громоздких индексных выражений обозначим $Y_1 = X_{i_1}, \ldots, Y_k = X_{i_k}$. Таким образом, списком переменных формулы F в новых обозначениях является $\langle Y_1,..., Y_k \rangle$.

Алгоритм 3.3 нахождения СДНФ формулы F, не являющейся тождественно-ложной

1-й этап. Используя алгоритм построения ДНФ, найдем формулу G, являющуюся ДНФ формулы F.

2-й этап. Вычеркнем в G все элементарные конъюнкции, являющиеся дизъюнктивными членами формулы G, в которые одновременно входит некоторая переменная Y_i и ее отрицание $\neg Y_i$. Поскольку формула F не является тождественно-ложной, то останется по крайней мере одна невычеркнутая элементарная конъюнкция. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностями: $(B \& \neg B) \vee C \equiv C$, $(A \& B \& \neg B) \vee C \equiv C$, полученными ранее в разделе «тождественно-истинные формулы».

3-й этап. Если в некоторой элементарной конъюнкции, являющейся дизъюнктивным членом формулы G, некоторая переменная Y_i (либо $\neg Y_i$) встречается несколько раз, то оставим только одно вхождение Y_i (соответственно, $\neg Y_i$), а остальные вычеркнем. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &).

4-й этап. Если в некоторую элементарную конъюнкцию C, являющуюся дизъюнктивным членом формулы G, для некоторого номера $i \in \{1,2,..., k\}$ не входят ни переменная Y_i, ни ее отрицание $\neg Y_i$, то заменяем в формуле G элементарную конъюнкцию C на $(C \& Y_i) \vee (C \& \neg Y_i)$. Действуем так до тех пор, пока в каждую элементарную конъюнкцию, являющеюся дизъюнктивным членом формулы G, не будет входить для каждого $i \in \{1,2,..., k\}$ либо переменная Y_i либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $(A \& B) \vee (A \& \neg B) \equiv A$ (первая формула расщепления). При этом дизъюнктивными членами формулы G являются k-членные конъюнкции.

5-й этап. В каждой k-членной элементарной конъюнкции, являющейся дизъюнктивным членом формулы G, переставим конъюнктивные члены так, чтобы на каждом i-м месте ($1 \le i \le k$) этой конъюнкции обязательно находилась либо переменная Y_i, либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученную таким образом ДНФ формулы F снова обозначим через G.

6-й этап. Если в формуле G одна и та же элементарная конъюнкция, являющаяся дизъюнктивным членом формулы G, встречается несколько раз, то оставляем только одно вхождение этой конъюнкции, а остальные вычеркиваем. Полученная при этом формула будет снова ДНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$). Построенная формула G является СДНФ формулы F.

Пример 1.10. Используя алгоритм 3.3, найдем СДНФ формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5 относительно списка переменных $\langle X, Y, Z \rangle$:

(1-й этап) $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv (\neg Y \& \neg Y \& X) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (Y \& \neg Z \& \& Y) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X) \equiv$ (см. пример 1.5)

(2-й этап) $\equiv (\neg Y \& \neg Y \& X) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (Y \& \neg Z \& Y) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X) \equiv$ (на этом этапе формула осталась той же) $\equiv$

(3-й этап) $\equiv (\neg Y \& X) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (Y \& \neg Z) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

(4-й этап) $\equiv (\neg Y \& X \& Z) \vee (\neg Y \& X \& \neg Z) \vee (Z \& \neg Y \& X) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \& \neg Z) \vee (Y \& \neg Z \& \neg X) \equiv$

(5-й этап) $\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z) \equiv$

(6-й этап) $\equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z)$.

Полученная формула является СДНФ формулы F относительно списка переменных $\langle X, Y, Z \rangle$.

Отметим, что, если на первом этапе использовать ДНФ, упрощенную согласно замечанию 1.6, то выкладки будут более простыми, так как не понадобятся некоторые этапы алгоритма:

$F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv (X \& \neg Y) \vee (Y \& \neg Z) \equiv (X \& \neg Y \& Z) \vee (X \& \neg Y \& \& \neg Z) \vee (X \& Y \& \neg Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z)$.

Понятие СКНФ определяется аналогично СДНФ.

Пусть $\left\langle X_{i_1}, ..., X_{i_k} \right\rangle$ - список переменных формулы F. Будем говорить, что формула F находится в совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ) относительно этого списка, если выполняются следующие условия:

(1) F находится в КНФ;

(2) каждый конъюнктивный член формулы F является k-членной дизъюнкцией, причем на каждом l-м месте ($1 \le l \le k$) этой дизъюнкции обязательно находится либо переменная X_{i_l}, либо ее отрицание $\neg X_{i_l}$.

(3) все конъюнктивные члены формулы F попарно различны.

Пример 1.11. Пусть $\langle X, Y, Z \rangle$ - список переменных формулы (см. замечание 1.5). Тогда формулы $\neg X \vee \neg Y \vee Z$, $(\neg X \vee \neg Y \vee Z) \& (\neg X \vee Y \vee Z) \& (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$ находятся в СКНФ относительного этого списка переменных.

Утверждение 3.4. Пусть F - формула со списком переменных $\left\langle X_{i_1}, ..., X_{i_k} \right\rangle$, и не являющаяся тождественно-истинной. Тогда существует такая формула G, что $F \equiv G$ и G находится в СКНФ относительно списка переменных $\left\langle X_{i_1}, ..., X_{i_k} \right\rangle$.

Это утверждение обосновывает следующий алгоритм. Чтобы избавиться от громоздких индексных выражений обозначим $Y_1 = X_{i_1}, \ldots, Y_k = X_{i_k}$. Таким образом, списком переменных формулы F в новых обозначениях является $\langle Y_1, ..., Y_k \rangle$.

Алгоритм 3.4 нахождения СКНФ формулы F, не являющейся тождественно-истинной

1-й этап. Используя алгоритм построения КНФ, найдем формулу G, являющуюся КНФ формулы F.

2-й этап. Вычеркнем в G все элементарные дизъюнкции, являющиеся конъюнктивными членами формулы G, в которые одновременно входит некоторая переменная Y_i и ее отрицание $\neg Y_i$. Поскольку формула F не является тождественно-истинной, то останется по крайней мере одна невычеркнутая элементарная дизъюнкция. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностями: $(B \vee \neg B) \& C \equiv C$, $(A \vee B \vee \neg B) \& C \equiv C$, полученными ранее в разделе «тождественно-истинные формулы».

3-й этап. Если в некоторой элементарной дизъюнкции, являющейся конъюнктивным членом формулы G, некоторая переменная Y_i (либо $\neg Y_i$) встречается несколько раз, то оставим только одно вхождение Y_i (соответственно, $\neg Y_i$), а остальные вычеркнем. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$).

4-й этап. Если в некоторую элементарную дизъюнкцию C, являющуюся конъюнктивным членом формулы G, для некоторого номера $i \in \{1,2,..., k\}$ не входят ни переменная Y_i, ни ее отрицание $\neg Y_i$, то заменяем в формуле G элементарную дизъюнкцию C на $(C \vee Y_i) \& (C \vee \neg Y_i)$. Действуем так до тех пор, пока в каждую элементарную дизъюнкцию, являющеюся конъюнктивным членом формулы G, не будет входить для каждого $i \in \{1,2,..., k\}$ либо переменная Y_i, либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $(A \vee B) \& (A \vee \neg B) \equiv A$ (вторая формула расщепления). При этом конъюнктивными членами формулы G являются k-членные дизъюнкции.

5-й этап. В каждой k-членной элементарной дизъюнкции, являющейся конъюнктивным членом формулы G, переставим дизъюнктивные члены так, чтобы на каждом i-м месте ($1 \le i \le k$) этой конъюнкции обязательно находилась либо переменная Y_i, либо ее отрицание $\neg Y_i$. Полученную таким образом КНФ формулы F снова обозначим через G.

6-й этап. Если в формуле G одна и та же элементарная дизъюнкция, являющаяся конъюнктивным членом формулы G, встречается несколько раз, то оставляем только одно вхождение этой дизъюнкции, а остальные вычеркиваем. Полученная при этом формула будет снова КНФ формулы F, которую также обозначим через G. Это обосновывается равносильностью $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &). Построенная формула G является СКНФ формулы F.

Пример 1.12. Используя алгоритм 3.4, найдем СКНФ формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim$ $\sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5 относительно списка переменных $\langle X, Y, Z \rangle$.

(1-й этап) $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv$ (см. пример 1.7) $\equiv (Y \vee \neg Y) \& (Y \vee X) \&$
$\& (\neg Z \vee \neg Y) \& (\neg Z \vee X) \& (\neg Y \vee Z \vee Y \vee \neg X) \equiv$

(2-й этап) $\equiv (Y \vee X) \& (\neg Z \vee \neg Y) \& (\neg Z \vee X) \equiv$

(3-й этап) $\equiv (Y \vee X) \,\&\, (\neg Z \vee \neg Y) \,\&\, (\neg Z \vee X) \equiv$ (на этом этапе формула осталась той же)

(4-й этап) $\equiv (Y \vee X \vee Z) \,\&\, (Y \vee X \vee \neg Z) \,\&\, (\neg Z \vee \neg Y \vee X) \,\&\, (\neg Z \vee \neg Y \vee \neg X) \,\&$

$\& \, (\neg Z \vee X \vee Y) \,\&\, (\neg Z \vee X \vee \neg Y) \equiv$

(5-й этап) $\equiv (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&$

$\& \, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \equiv$

(6-й этап) $\equiv (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$.

Полученная формула является СКНФ формулы F относительно списка переменных $\langle X, Y, Z \rangle$.

Отметим, что, если на первом этапе использовать КНФ, упрощенную согласно замечанию 1.7, и на 4-м этапе добавляемые переменные сразу ставить в нужное место, то выкладки будут более простыми, так как не понадобятся некоторые этапы алгоритма:

$F = \neg(Y \,\&\, \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X) \equiv (X \vee Y) \,\&\, (\neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Z) \equiv (X \vee Y \vee Z) \,\&$
$\& \, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \equiv$
$\equiv (X \vee Y \vee Z) \,\&\, (X \vee Y \vee \neg Z) \,\&\, (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \,\&\, (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$.