

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk}' = f(x_0). \quad (6.20)$$

Из (6.19) и (6.20) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_{nk}') - f(x_{nk})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство

$$|f(x_{nk}') - f(x_{nk})| \underset{(6.17)}{\geq} \epsilon_0 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. \square

Условие равномерной непрерывности можно сформулировать в терминах так называемых колебаний функции на отрезках.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда величина

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} |f(x') - f(x)| \quad (6.21)$$

называется *колебанием функции f на отрезке $[a, b]$* .

Из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$ одно заведомо неотрицательно и, следовательно, не меньше второго, поэтому величина верхней грани в правой части равенства (6.21) не изменится, если вместо абсолютной величины $|f(x') - f(x)|$ разности $f(x') - f(x)$ поставить саму эту разность:

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x, x' \in [a, b]} [f(x') - f(x)] \quad (1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Для того, чтобы функция f была равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что каков бы ни был отрезок $[x, x'] \subset [a, b]$ длины меньшей $\epsilon : 0 < x' - x < \epsilon$, выполнялось неравенство

$$\omega(f; [x, x']) < \epsilon. \quad (6.22)$$

Действительно, поскольку $x, x' \in [x, x']$, из неравенства (6.22) следует, что $|f(x') - f(x)| < \epsilon$, поэтому выполняется утверждение (6.15).

Обратно, если справедливо утверждение (6.15), то для

любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек x и x' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x)| < \epsilon/2$.

Пусть для определенности $x < x'$. Для любых двух точек ξ и η отрезка $[x, x']$, очевидно, выполняется неравенство $0 < |\eta - \xi| < x' - x < \delta$, следовательно, и неравенство $|f(\eta) - f(\xi)| < \epsilon/2$. Поэтому для любого отрезка $[x, x']$ такого, что $0 < x' - x < \delta$ имеем

$$\omega(f; [x, x']) = \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta) - f(\xi)| \leq \epsilon/2 < \epsilon. \square$$

Часто оказывается удобным ещё один подход к понятию равномерной непрерывности, а именно подход, связанный с понятием модуля непрерывности функции. **Определение 5.** Модулем непрерывности $\omega(\delta; f)$ функции f , определенной на отрезке $[a, b]$, называется функция

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} |f(x'') - f(x')|, x', x'' \in [a, b]. \quad (6.23)$$

Иногда для краткости вместо $\omega(\delta; f)$ будем писать просто $\omega(\delta)$. Как и в случае определения колебания функции (6.21), под знаком верхней грани в правой части равенства (6.23) можно не писать знак абсолютной величины разности $|f(x'') - f(x')|$, а брать саму разность - значение верхней грани при этом не изменится:

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} [f(x'') - f(x')], x', x'' \in [a, b].$$

Очевидно, что $(\delta) \geq 0$. Далее, если $0 < \delta_1 < \delta_2$, то

$$\begin{aligned} y : y &= f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leq \delta_1 \subset \\ y : y &= f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leq \delta_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\sup_{|x'' - x'| \leq \delta_1} [f(x'') - f(x')] \leq \sup_{|x'' - x'| \leq \delta_2} [f(x'') - f(x')], x', x'' \in [a, b],$$

т.е. $\omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2)$. Это означает, что модуль непрерывности является возрастающей функцией.

П р и м е р ы . 1. Найдём $\omega(\delta)$ для функции $y = x^2$, $-\infty < x < +\infty$.

Для любого $\delta > 0$ и произвольного фиксированного x_0 имеем

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leq \delta} (x''^2 - x'^2) \geq x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2 \quad (6.24)$$