ЛЕКЦИЯ Л5. Минимизация в классе ДНФ

ДНФ называется *минимальной*, если она содержит наименьшее общее число вхождений высказывательных переменных среди всех равносильных ей ДНФ.

Задачей минимизации в классе ДНФ называется задача нахождения для данной булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ минимальной ДНФ, выражающей f. Для описания алгоритма нахождения минимальной ДНФ, выражающей данную булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, понадобится так называемая *сокращенная ДНФ.* Сделаем несколько определений.

Допустимой конъюнкцией или импликантом булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется элементарная конъюнкция C со списком переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$ (т.е. в C нет переменных, не входящих в этот список) такая, что $C \vee f = f$ и каждая переменная входит в C не более одного раза. Импликант C булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется *простым*, если после отбрасывания любой переменной из C получается элементарная конъюнкция, не являющаяся импликантом функции $f(X_1,..., X_n)$. Дизъюнкция всех простых импликантов булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется сокращенной ДНФ функции $f(X_1,..., X_n)$.

Утверждение 5.1. Пусть $f(X_1,..., X_n)$ - булева функция, не равная тождественно 0. Тогда существует сокращенная ДНФ этой функции, она является единственной и выражает эту функцию.

Простой алгоритм нахождения сокращенной ДНФ дает *метод Блейка*.

Алгоритм 5.1 построения сокращенной ДНФ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не равной тождественно 0 (метод Блейка)

1-й этап. Найдем для данной булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ формулу $F,$ выражающую f и находящуюся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X_1,..., X_n\rangle$.

2-й этап. Применим к F *правило обобщенного «склеивания»*: $(C \,\&\, X_i) \vee (C \,\&\, \neg X_i) \equiv (C \,\&\, X_i) \vee (C \,\&\, \neg X_i) \vee C,$ где $i \in \{1,2,..., n\}$, $(C \,\&\, X_i), (C \,\&\, \neg X_i)$ - некоторые элементарные конъюнкции, являющиеся дизъюнктивными членами формулы F (см. замечание 1.10) до тех пор, пока это возможно. В результате получим формулу $F_1,$ находящуюся в ДНФ и выражающую функцию f.

3-й этап. Применим к F_1 равносильности: $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$), $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$ (второй закон поглощения) до тех пор, пока это возможно. В результате получим формулу $F,$ являющуюся сокращенной ДНФ функции f.

Замечание 5.1. Эта равносильность легко доказывается, используя первую формулу расщепления. Применение правила обобщенного «склеивания» к формуле F состоит в приписывании справа от нее новых дизъюнктивных членов, а именно, для каждой встречающейся в F пары дизъюнктивных членов $(C \,\&\, X_i), (C \,\&\, \neg X_i)$ добавляем к F новый дизъюнктивный член $C,$ который приписываем к F справа (расширенную формулу снова обозначаем через F **).** При этом производятся все возможные «склеивания» с учетом новых дизъюнктивных членов. После склеивания элементарных конъюнкций длины n (т.е. с n переменными) могут появиться дизъюнктивные члены, являющиеся элементарными конъюнкциями длины $n-1,$ после склеивания которых могут появится дизъюнктивные члены, являющиеся элементарными конъюнкциями длины $n-2$ и т.д. Чтобы избежать повторений пробуем склеить элементарную конъюнкцию, являющуюся самым первым дизъюнктивным членом формулы F со всеми дизъюнктивными членами правее ее, после чего пробуем склеить элементарную конъюнкцию, являющуюся вторым дизъюнктивным членом формулы F со всеми дизъюнктивными членами правее ее и т.д.

Замечание 5.2. Нетрудно видеть, что формула F_1, полученная на шаге 2 алгоритма 5.1, является дизъюнкцией всех импликантов булевой функции $f(X_1,..., X_n)$. Тогда становится очевидным, что на шаге 3 этого алгоритма получим дизъюнкцию всех простых импликантов этой функции.

Замечание 5.3. Заметим, что для булевых функций f, g выполняется $f \& g = fg$, где в правой части этого равенства используется обычное арифметическое умножение. Поэтому в дальнейшем для упрощения выражений будем часто использовать запись fg вместо $f \& g$. Кроме того, будем вместо $\neg X_i$ использовать более короткую запись $\overline{X}_i$, а также считать умножение более сильной операцией, чем $\vee$, т.е. выполняемой в первую очередь. Например, будем писать $\overline{X}_1 X_3 \overline{X}_2 \vee \overline{X}_2 X_4$ вместо $(\neg X_1 \& X_3 \& \neg X_2) \vee (\neg X_2 \& X_4)$.

Пример 5.1. Используя алгоритм 5.1, найдем сокращенную ДНФ булевой функции f_F для формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5:

(1-й этап) Рассмотрим найденную в примере 1.10 (или 1.18) СДНФ формулы F (с учетом замечания 1.11), выражающую булеву функцию f_F, т.е.

$$f_F = F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z}.$$

(2-й этап) Произведем все возможные склеивания элементарных конъюнкций, являющихся дизъюнктивными членами F. Для наглядности сначала запишем все варианты склеивания отдельно: $XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \equiv XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\overline{Z}$, $XY\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z} \equiv XY\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \equiv X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\overline{Y}$.

С учетом замечания 1.10 добавляем к формуле F новые дизъюнктивные члены, являющиеся результатом приведенных склеиваний, т.е. $F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$. Дальнейшее склеивание дизъюнктивных членов в полученной расширенной формуле невозможно, т.е. мы получили требуемую для этого этапа формулу F_1.

(3-й этап) Применим к формуле F_1 второй закон поглощения: $X\overline{Z}$ «поглощает» $XY\overline{Z}$ и $X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ (т.е. $XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\overline{Z} \equiv X\overline{Z}$), $Y\overline{Z}$ «поглощает» $\overline{X}Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}$ «поглощает» $X\overline{Y}Z$. Таким образом, $F_1 \equiv X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$. Дальнейшее упрощение формулы с применением второго закона поглощения или идемпотентности $\vee$ невозможно. Следовательно, сокращенной ДНФ булевой функции f_F является формула $G = X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$, выражающая f_F, поскольку по построению $F \equiv G$.

Следующее утверждение дает понять, какое отношение имеет сокращенная ДНФ булевой функции к минимальной ДНФ, выражающей эту булеву функцию.

Утверждение 5.2. Минимальная ДНФ, выражающая булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, является дизъюнкцией нескольких (в частности, всех) простых импликантов функции f.

Таким образом, дизъюнктивными членами минимальной ДНФ, выражающей булеву функцию $f(X_1,..., X_n)$, являются дизъюнктивные члены сокращенной ДНФ этой булевой функции. Но тогда для нахождения минимальной ДНФ, выражающей булеву функцию f, достаточно перебрать все ДНФ, дизъюнктивными членами которых являются дизъюнктивные члены сокращенной ДНФ этой функции (т.е. ее простые импликанты) и выбрать всех этих ДНФ ту, которая выражает f, и содержит наименьшее общее число вхождений переменных среди аналогично составленных ДНФ, также выражающих f. Если сокращенная ДНФ булевой функции f содержит k дизъюнктивных членов, то в «худшем» случае придется перебрать $2^k - 1$ различных ДНФ (начинаем с ДНФ минимальной длины, затем переходим к ДНФ большей длины, пока не удастся выразить f). При больших k этот перебор может оказаться труднореализуемым. Рассмотрим вопрос о сокращении множества вариантов при переборе.

Простой импликант булевой функции $f(X_1,..., X_n)$ называется *ядровым*, если удаление его из сокращенной ДНФ функции f приводит к ДНФ, не выражающей f, либо он является единственным простым импликантом функции f . Справедливо следующее очевидное

Утверждение 5.3. Пусть C - простой импликант булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не являющийся единственным. Тогда импликант C является ядровым тогда и только тогда, когда существует оценка списка переменных, на которой C принимает значение 1, а остальные простые импликанты функции f принимают значение 0.

Если C - ядровой импликант булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не являющийся единственным, то оценку списка переменных, на которой C принимает значение 1, а остальные простые импликанты функции f принимают значение 0, будем называть собственной оценкой импликанта C.

Из определения ядровых импликантов булевой функции f следует, что они обязательно войдут в минимальную ДНФ, выражающую f, а это может значительно сузить множество возможных вариантов для описанного выше перебора ДНФ. Ядровые импликанты легко найти, составив таблицу значений булевых функций, соответствующих простым импликантам функции f .

Определим теперь минимальную ДНФ, выражающую булеву функцию f_F для формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5. Ранее в примере 1.19 была найдена сокращенная ДНФ G функции f_F: $G = X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$. Выделим теперь ядровые импликанты. Для этого составим таблицу значений соответствующих булевых функций (см. табл. 1.7).

X	Y	Z	f_F	$X\overline{Z}$	$Y\overline{Z}$	$X\overline{Y}$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Табл. 5.1

Из табл.5.1 видно, что ядровыми импликантами функции f_F являются: $Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}$. При этом собственной оценкой для $Y\overline{Z}$ является $\langle 0,1,0 \rangle$, а собственной оценкой для $X\overline{Y}$ является $\langle 1,0,1 \rangle$ (эти оценки, а также значения булевых функций на них выделены жирным шрифтом). Рассмотрим дизъюнкцию ядровых импликантов $Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$. Эта ДНФ выражает булеву функцию f_F (см. табл. 1.7). Действительно, в каждой из строк с номерами 2,3,4,6, на которых функция f_F принимает значение 1, находится по крайней мере одна 1 в последних двух столбцах, соответствующих ядровым импликантам $Y\overline{Z}$ и $X\overline{Y}$ (в этом случае говорят, что импликанты $Y\overline{Z}$, $X\overline{Y}$ «покрывают» булеву функцию f_F). Итак, минимальной ДНФ, выражающей булеву функцию f_F, является $Y\overline{Z} \vee X\overline{Y}$. Других минимальных ДНФ, выражающих f_F, нет.

Метод минимизирующих карт. Рассмотрим также другой подход к нахождению сокращенной ДНФ булевой функции. Справедливо следующее очевидное

Утверждение 5.4. Если на оценке $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1,2,..., n,$ списка переменных $\langle X_1,..., X_n \rangle$ выполняется равенство $X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} \dots X_n^{\varepsilon_n} = 1,$ то выполняются также равенства: $X_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} X_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots X_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}} = 1,$ где $k \geq 1, 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n.$

Следствием этого утверждения является

Утверждение 5.5. Если булева функция $f(X_1,..., X_n)$ принимает значение 0 на оценке $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1,2,..., n,$ списка переменных $\langle X_1,..., X_n \rangle$, то в любую ДНФ, выражающую f, не входит любая элементарная конъюнкция $X_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} X_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots X_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $k \geq 1, 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n.$

Пользуясь утверждением 5.4, а также вторым законом поглощения, опишем следующий метод («*минимизирующих карт»*) нахождения сокращенной ДНФ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$.

Алгоритм 5.2 построения сокращенной ДНФ булевой функции $f(X_1,..., X_n)$, не равной тождественно 0 (метод «минимизирующих карт»)

1-й этап. Составим таблицу значений булевой функции f. Справа от столбца значений функции f добавим столбцы со следующими элементарными конъюнкциями (их будет $2^n - 1$). В строке, соответствующей оценке $\langle \varepsilon_1,..., \varepsilon_n \rangle$, перечисляются: элементарная конъюнкция $X_1^{\varepsilon_1} X_2^{\varepsilon_2} \dots X_n^{\varepsilon_n}$, а также элементарные конъюнкции $X_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} X_{i_2}^{\varepsilon_{i_2}} \dots X_{i_k}^{\varepsilon_{i_k}}$, где $k \geq 1,\ 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n.$

2-й этап. Выделим все элементарные конъюнкции в строках, в которых функция f принимает значение 0.

3-й этап. Вычеркнем выделенные на 2-м этапе конъюнкции, а также вычеркнем их во всех остальных строках таблицы.

4-й этап. В каждой строке выберем из оставшихся конъюнкций лишь конъюнкции с минимальным числом переменных, а остальные вычеркнем.

Нетрудно показать, что после выполнения алгоритма 5.2 таблица будет содержать элементарные конъюнкции, являющиеся простыми импликантами функции f. Причем в нее войдут все простые импликанты функции f. Если в некоторой строке окажется лишь один простой импликант, то он является ядровым.

Используя построенную с помощью алгоритма 5.2 таблицу, для нахождения минимальных ДНФ достаточно выделить все ДНФ с попарно различными членами, составленные из простых импликантов, так что в каждой невычеркнутой строке таблицы присутствует хотя бы один из них, а затем выбрать из этих ДНФ те, которые содержат минимальное число переменных. С учетом ядровых импликантов, которые обязательно войдут в минимальную ДНФ, множество вариантов сужается.

Пример 5.2. Используя алгоритм 5.2, найдем сокращенную ДНФ булевой функции f_F для формулы $F = \neg(Y \& \neg Z) \sim \neg(\neg Y \supset \neg X)$ из примера 1.5.

(**1-й этап**) Составим соответствующую этой булевой функции таблицу (см. табл. 5.1)

X	Y	Z	f_F	X	Y	Z	$\langle X,Y\rangle$	$\langle X,Z\rangle$	$\langle Y,Z\rangle$	$\langle X,Y,Z\rangle$
1	1	1	0	$[X]$	$[Y]$	$[Z]$	$[XY]$	$[XZ]$	$[YZ]$	$[XYZ]$
1	1	0	1	X	Y	$\bar{Z}$	XY	$X\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$
1	0	1	1	X	$\bar{Y}$	Z	$X\bar{Y}$	XZ	$\bar{Y}Z$	$X\bar{Y}Z$
1	0	0	1	X	$\bar{Y}$	$\bar{Z}$	$X\bar{Y}$	$X\bar{Z}$	$\bar{Y}\,\bar{Z}$	$X\,\bar{Y}\,\bar{Z}$
0	1	1	0	$[\bar{X}]$	$[Y]$	$[Z]$	$[\bar{X}Y]$	$[\bar{X}Z]$	$[YZ]$	$[\bar{X}YZ]$
0	1	0	1	$\bar{X}$	Y	$\bar{Z}$	$\bar{X}Y$	$\bar{X}\,\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
0	0	1	0	$[\bar{X}]$	$[\bar{Y}]$	$[Z]$	$[\bar{X}\,\bar{Y}]$	$[\bar{X}Z]$	$[\bar{Y}Z]$	$[\bar{X}\bar{Y}Z]$
0	0	0	0	$[\bar{X}]$	$[\bar{Y}]$	$[\bar{Z}]$	$[\bar{X}\,\bar{Y}]$	$[\bar{X}\,\bar{Z}]$	$[\bar{Y}\,\bar{Z}]$	$[\bar{X}\,\bar{Y}\,\bar{Z}]$

Табл. 5.2

(**2-й этап**) Выделим (квадратными скобками) все элементарные конъюнкции в строках, в которых функция f принимает значение 0 (см. табл. 5.2).

(**3-й этап**) Вычеркнем выделенные на 2-м этапе конъюнкции, а также вычеркнем их во всех остальных строках таблицы (см. табл. 5.3).

X	Y	Z	f_F	X	Y	Z	$\langle X,Y\rangle$	$\langle X,Z\rangle$	$\langle Y,Z\rangle$	$\langle X,Y,Z\rangle$
1	1	1	0							
1	1	0	1					$X\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	$XY\bar{Z}$
1	0	1	1				$X\bar{Y}$			$X\bar{Y}Z$
1	0	0	1				$X\bar{Y}$	$X\bar{Z}$		$X\,\bar{Y}\,\bar{Z}$
0	1	1	0							
0	1	0	1						$Y\bar{Z}$	$\bar{X}Y\bar{Z}$
0	0	1	0							
0	0	0	0							

Табл. 5.3

(**4-й этап**). В каждой строке выберем из оставшихся конъюнкций лишь конъюнкции с минимальным числом переменных, а остальные вычеркнем (см. табл. 5.4).

X	Y	Z	f_F	X	Y	Z	$\langle X,Y\rangle$	$\langle X,Z\rangle$	$\langle Y,Z\rangle$	$\langle X,Y,Z\rangle$
1	1	1	0							
1	1	0	1					$X\bar{Z}$	$Y\bar{Z}$	
1	0	1	1				$X\bar{Y}$			
1	0	0	1				$X\bar{Y}$	$X\bar{Z}$		
0	1	1	0							
0	1	0	1						$Y\bar{Z}$	
0	0	1	0							
0	0	0	0							

Табл. 5.4

Таким образом, простыми импликантами функции f_F являются элементарные конъюнкции: $X\bar{Y}$, $X\bar{Z}$, $Y\bar{Z}$ и только они; сокращенной ДНФ функции f_F является формула $X\bar{Y} \vee X\bar{Z} \vee Y\bar{Z}$; ядровыми импликантами являются: $X\bar{Y}$, $Y\bar{Z}$; и поскольку $f_F =$ $= X\bar{Y} \vee Y\bar{Z}$, то минимальной ДНФ, выражающей f_F, является формула $X\bar{Y} \vee Y\bar{Z}$.

Следующий пример показывает, что минимальная ДНФ, выражающая данную булеву функцию $f(X_1,...,X_n)$, может оказаться неединственной.

Пример 5.3. Рассмотрим булеву функцию $f(X,Y,Z)$, заданную таблицей (см. табл. 5.5).

X	Y	Z	f	$X\overline{Z}$	$Y\overline{Z}$	$X\overline{Y}$	$\overline{X}Y$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
1	0	0	1	1	0	1	0
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Табл. 5.5

Используя алгоритм 5.1, найдем сокращенную ДНФ булевой функции $f(X,Y,Z)$.

(**1-й этап**) Используя утверждение 4.2, выразим булеву функцию $f(X,Y,Z)$ формулой F, находящейся в СДНФ относительно списка переменных $\langle X,Y,Z\rangle$:

$$f = F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}Y\overline{Z}\,.$$

(**2-й этап**) Производим все возможные «склеивания» элементарных конъюнкций, являющихся дизъюнктивными членами F. С учетом замечания 5.1 добавляем к формуле F новые дизъюнктивные члены, являющиеся результатом приведенных «склеиваний», т.е.

$$F \equiv XY\overline{Z} \vee X\overline{Y}Z \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}Y\overline{Z} \vee X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}\,Y\,.$$

Дальнейшее «склеивание» дизъюнктивных членов в полученной расширенной формуле невозможно, т.е. мы получили требуемую для этого этапа формулу F_1.

(**3-й этап**) Применим к формуле F_1 второй закон поглощения: $F_1 \equiv X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}\,Y$. Дальнейшее упрощение формулы с применением второго закона поглощения или идемпотентности $\vee$ невозможно. Следовательно, сокращенной ДНФ булевой функции f является формула $G = X\overline{Z} \vee Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}\,Y$, выражающая f, поскольку по построению $F \equiv G$.

Составим таблицу (см. табл. 5.5) значений простых импликантов функции f. Из табл.5.5 видно, что ядровыми импликантами функции f являются: $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$. При этом собственной оценкой для $X\overline{Y}$ является $\langle 1,0,1\rangle$, а собственной оценкой для $\overline{X}Y$ является $\langle 0,1,1\rangle$ (эти оценки, а также значения булевых функций на них выделены жирным шрифтом). Рассмотрим дизъюнкцию ядровых импликантов $X\overline{Y} \vee \overline{X}Y$. Эта ДНФ не выражает булеву функцию f (см. вторую строку табл. 5.5). Добавив к $X\overline{Y} \vee \overline{X}Y$ любой из оставшихся простых импликантов $X\overline{Z}$ или $Y\overline{Z}$ получим две формулы, выражающие f, каждая из них является минимальной ДНФ, выражающей эту функцию:

$$f = X\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y\,,\ f = Y\overline{Z} \vee X\overline{Y} \vee \overline{X}Y\,.$$

Следующий пример показывает, что минимальная ДНФ, выражающая данную булеву функцию $f(X_1,...,X_n)$, может оказаться неединственной и не иметь ядровых импликантов.

Пример 5.3. Рассмотрим булеву функцию $f(X,Y,Z)$, заданную таблицей (см. табл. 5.6).

X	Y	Z	f	XY	YZ	$X\overline{Z}$	$\overline{Y}\ \overline{Z}$	$\overline{X}Z$	$\overline{X}\overline{Y}$
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1

Табл. 5.6

Используя утверждение 4.2, а также алгоритм 5.1, найдем сокращенную ДНФ булевой функции $f(X,Y,Z)$:

$$f = F \equiv XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \equiv XYZ \vee XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}YZ \vee$$

$$\vee\, \overline{X}\overline{Y}Z \vee \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} \vee XY \vee YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee \overline{X}\overline{Y} \equiv XY \vee YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z \vee \overline{X}\overline{Y}\ .$$

Составим таблицу (см. табл. 5.6) значений простых импликантов функции f. Из табл. 5.7 видно, что ядровых импликантов у функции f нет (на каждой оценке списка переменных, на которой $f=1$, ровно два импликанта принимают значение 1). Между тем, как видно из табл. 5.6, существуют две минимальные ДНФ, выражающие f:

$$f = XY \vee \overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Z\,,\quad f = YZ \vee X\overline{Z} \vee \overline{X}\overline{Y}\ .$$

Действительно, дизъюнкция двух простых импликантов функции f принимает значение 1 не более, чем на четырех оценках списка переменных, а следовательно, не может выражать f. При этом существуют ровно два варианта дизъюнкции трех простых импликантов, выражающих f, они и дают нам две различные минимальные ДНФ, выражающие эту булеву функцию.