МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ КАФЕДРА
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Перечисление контуров ориентированного графа методом латинской композиции.

Студент: Петров И.О.

Группа 8О-106Б

Преподаватель:

Оценка:

Дата:

1. Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

а) матрицу односторонней связности (2 способа, включая итерационный алгоритм);

б) матрицу сильной связности;

в) компоненты сильной связности;

г) матрицу контуров;

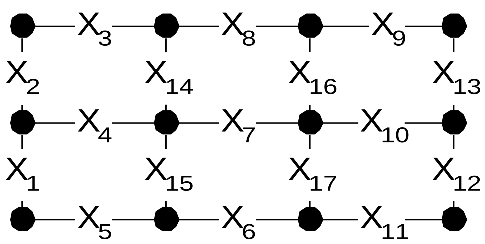
д) изображение графа и компонент сильной связности.

2. Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.

3. Используя алгоритм “фронта волны”, найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

4. Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

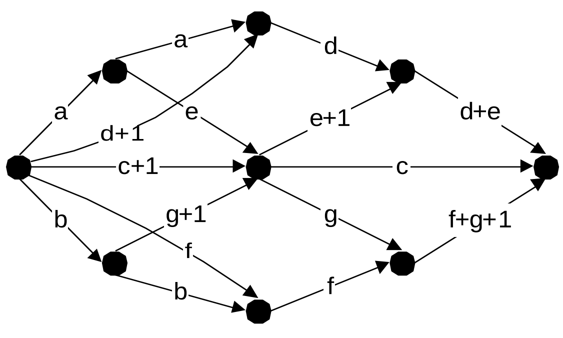
5. Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



Значения $x_1 - x_{13}$ приведены в задании, значения $x_{14} - x_{17}$ равны 5.

6. Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

7. Построить максимальный поток по транспортной сети.



Значения величин a, b, c, d, e, f, g приведены в задании. Начинать с окаймляющих цепей.

8.

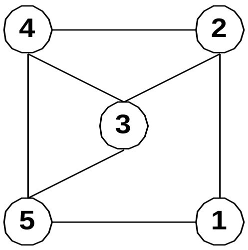
1. Изучить алгоритм.
2. Составить программу алгоритма (На оценку «отлично» с графическим интерфейсом и визуализацией графа).

3. Отладить тестовые примеры.
4. Провести оценку сложности алгоритма.
5. Составить прикладную задачу, для решения которой используется данный алгоритм.

Вариант №15

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

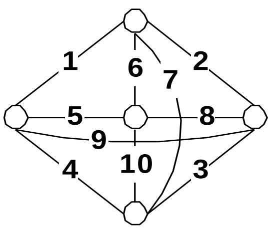
2.



3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 10 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 3 & \infty & \infty & 11 & \infty & 7 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 5 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$

5. 2,5,6,7,1,2,3,4,2,5,6,7,8

6.



7. 5,5,5,8,3,8,6

8. Перечисление контуров ориентированного графа методом латинской композиции.

Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику . глава IV

Задание 1

Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

а). Матрицу односторонней связности (2 способа, включая итерационный алгоритм);

б). Матрицу сильной связности;

в). Компоненты сильной связности;

г). Матрицу контуров;

д). Изображение графа и компонент сильной связности.

Решение:

а). Определение матрицы односторонней связности T(D):

I способ:

$$A_*^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T(D) = E \vee \mathrm{A} \vee A^2 \vee A^3$$

$$T(D) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II способ:

$$B^0 = A \vee E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^1 = B^0 \vee B'^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B^2 = B^1 \vee B'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^1;$$

$$B^3 = B^2 \vee B'^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^2;$$

$$B^4 = B^3 \vee B'^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T(D) = B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б). Определение матрицы сильной связности (S):

$$[T(D)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S(D) = T(D) \& [T(D)]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в). Определение компонент сильной связности:

$S_1(D) = S(D) =$

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	1	1	0	1
v_2	1	1	0	1
v_3	0	0	1	0
v_4	1	1	0	1

$$D_1 = (V_1, X_1), \qquad V_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$$

$A(D_1) =$

	v_1	v_2	v_4
v_1	0	1	0
v_2	0	0	1
v_4	1	0	0

$S_2(D) =$

	v_3
v_3	1

$$D_2 = (V_2, X_2), \quad V_2 = \{v_3\}, \quad X_2 = \emptyset$$

$A(D_2) =$

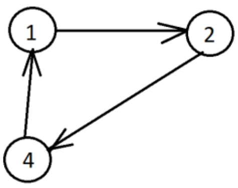
	v_3
v_3	0

г). Определение матрицы контуров:

$$K(D) = S(D) \& A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

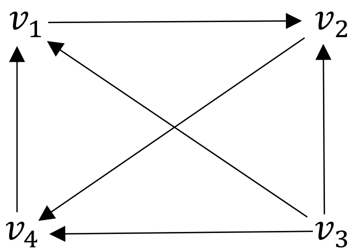
д). Изображение графа и компонент сильной связности

Компоненты сильной связности:

D_1: 

D_2: 3

Граф:



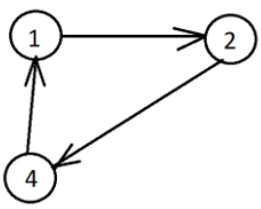
Ответ:

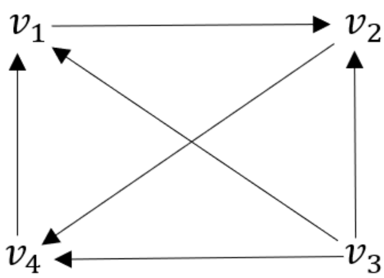
а). $T(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б). $S(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в). $V_1 = \{v_1, v_2, v_4\}$, $\quad V_2 = \{v_3\}$;

г). $K(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

д). D_1: 

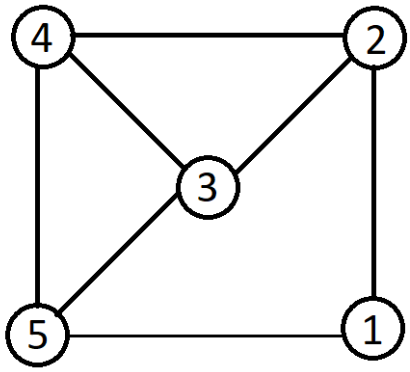
; D_2: 3; 

;

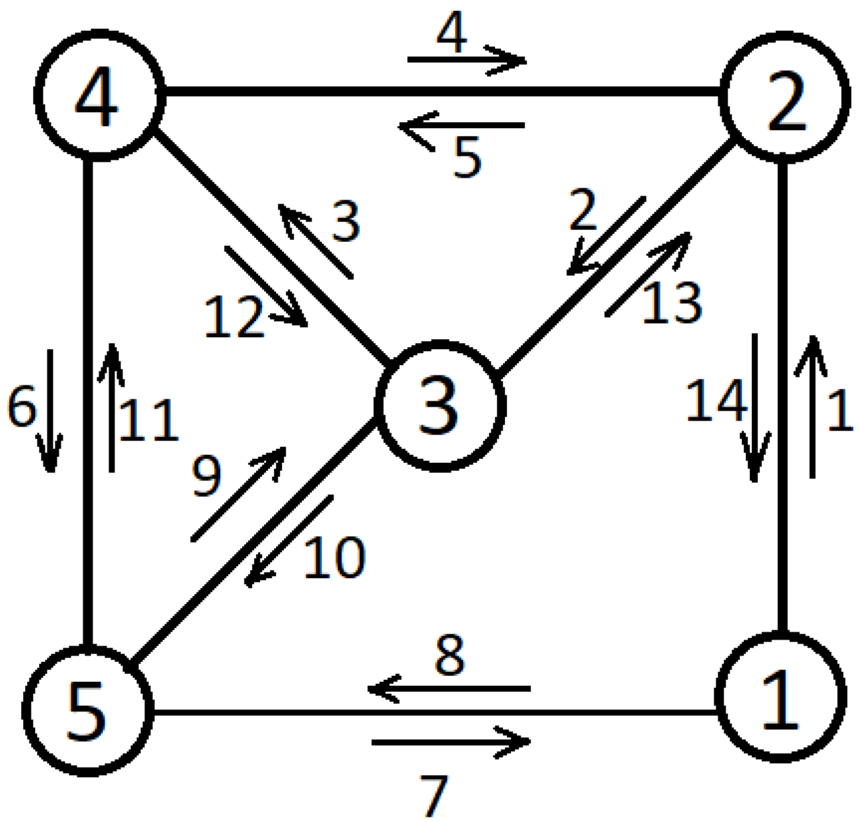
Задание 2

Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.

Дано:



Решение:



Задание 3

Используя алгоритм «фронта волны», найти все минимальные пути из первой вершины в последнюю орграфа, заданного матрицей смежности.

Дано:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
v_1	0	0	0	1	0	0	1	0
v_2	1	0	1	0	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1	0	1	0	1
v_4	1	0	0	0	0	1	1	0
v_5	1	0	1	1	0	0	1	0
v_6	0	1	0	1	1	0	1	0
v_7	0	0	0	1	0	1	0	0
v_8	1	1	1	1	0	0	0	0

Последовательно определяем:

$FW_0(v_1) = \{v_1\}$,

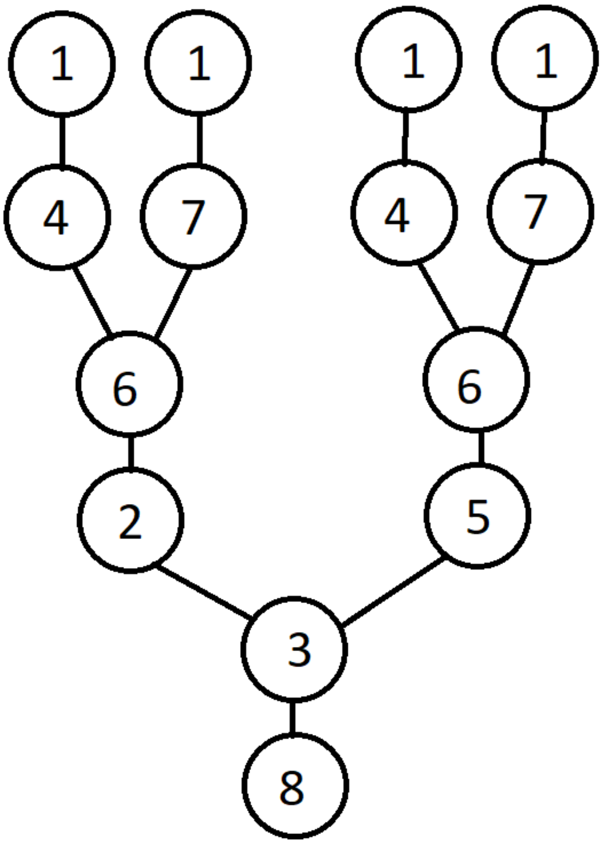
$FW_1(v_1) = \{v_4, v_7\}$,

$FW_2(v_1) = \{v_6\}$,

$FW_3(v_1) = \{v_2, v_5\}$,

$FW_4(v_1) = \{v_3\}$,

$FW_5(v_1) = \{v_8\}$.



Минимальная длина пути - 5

Всего путей – 4:

1) $V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_6 \rightarrow V_5 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$;
2) $V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$;
3) $V_1 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6 \rightarrow V_5 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$;
4) $V_1 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$.

Ответ: $V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_6 \rightarrow V_5 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$; $V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$; $V_1 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6 \rightarrow V_5 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$; $V_1 \rightarrow V_7 \rightarrow V_6 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_8$

Задание 4

Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

Дано:

$$A=\begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 3 & 10 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 3 & \infty & \infty & 11 & \infty & 7 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty & 5 \\ 5 & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 2 & \infty & \infty \\ 8 & \infty & \infty & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Решение:

1.Составим таблицу итераций

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$	$\lambda_i^{(7)}$
v_1	∞	5	3	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	2	∞	3	10	∞	2	∞	∞	∞	5	5	5	5	5	5	5
v_3	6	3	∞	∞	11	∞	7	∞	∞	3	3	3	3	3	3	3
v_4	7	∞	∞	∞	2	∞	∞	4	∞	∞	15	14	14	14	14	14
v_5	∞	∞	∞	2	∞	∞	∞	5	∞	∞	14	13	12	12	12	12
v_6	5	∞	∞	7	∞	∞	2	∞	∞	∞	7	7	7	7	7	7
v_7	∞	∞	∞	∞	3	2	∞	∞	∞	∞	10	9	9	9	9	9
v_8	8	∞	∞	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	19	18	17	17	17

2. Длины минимальных путей из вершины v_1 во все остальные вершины определены в последнем столбцы таблицы;

3. Найдем вершины, входящие в минимальные пути из v_1 во все остальные вершины графа:

3.1 Минимальный путь из v_1 в v_2: $v_1 \to v_2$, его длина $-$ 5

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 5 = \lambda_2^{(1)}$$

3.2 Минимальный путь из v_1 в v_3: $v_1 \to v_3$, его длина $-\ 3$

$$\lambda_1^{(0)} + c_{13} = 0 + 3 = 3 = \lambda_3^{(1)}$$

3.3 Минимальный путь из v_1 в v_4: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_4$, его длина $-\ 14$

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 5 = \lambda_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(1)} + c_{26} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6^{(2)}$$

$$\lambda_6^{(2)} + c_{64} = 7 + 7 = 14 = \lambda_4^{(3)}$$

3.4 Минимальный путь из v_1 в v_5: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7 \to v_5$, его длина $-\ 12$

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 5 = \lambda_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(1)} + c_{26} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6^{(2)}$$

$$\lambda_6^{(2)} + c_{67} = 7 + 2 = 9 = \lambda_7^{(3)}$$

$$\lambda_7^{(3)} + c_{75} = 9 + 3 = 12 = \lambda_5^{(4)}$$

3.5 Минимальный путь из v_1 в v_6: $v_1 \to v_2 \to v_6$, его длина $-\ 7$

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 2 = \lambda_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(1)} + c_{26} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6^{(2)}$$

3.6 Минимальный путь из v_1 в v_7: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7$, его длина $-\ 9$

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 5 = \lambda_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(1)} + c_{26} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6^{(2)}$$

$$\lambda_6^{(2)} + c_{67} = 7 + 2 = 9 = \lambda_7^{(3)}$$

3.7 Минимальный путь из v_1 в v_8: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7 \to v_5 \to v_8$, его длина – 17

$$\lambda_1^{(0)} + c_{12} = 0 + 5 = 5 = \lambda_2^{(1)}$$

$$\lambda_2^{(1)} + c_{26} = 5 + 2 = 7 = \lambda_6^{(2)}$$

$$\lambda_6^{(2)} + c_{67} = 7 + 2 = 9 = \lambda_7^{(3)}$$

$$\lambda_7^{(3)} + c_{75} = 9 + 3 = 12 = \lambda_5^{(4)}$$

$$\lambda_5^{(4)} + c_{58} = 12 + 5 = 17 = \lambda_8^{(5)}$$

Ответ: минимальный путь из v_1 в v_2: $v_1 \to v_2$, его длина $-$ 5,

минимальный путь из v_1 в v_3: $v_1 \to v_3$, его длина $-$ 3,

минимальный путь из v_1 в v_4: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_4$, его длина $-$ 14,

минимальный путь из v_1 в v_5: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7 \to v_5$, его длина $-$ 12,

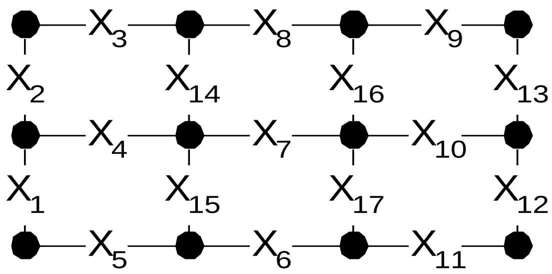
минимальный путь из v_1 в v_6: $v_1 \to v_2 \to v_6$, его длина – 7,

минимальный путь из v_1 в v_7: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7$, его длина – 9,

минимальный путь из v_1 в v_8: $v_1 \to v_2 \to v_6 \to v_7 \to v_5 \to v_8$, его длина – 17.

Задание 5

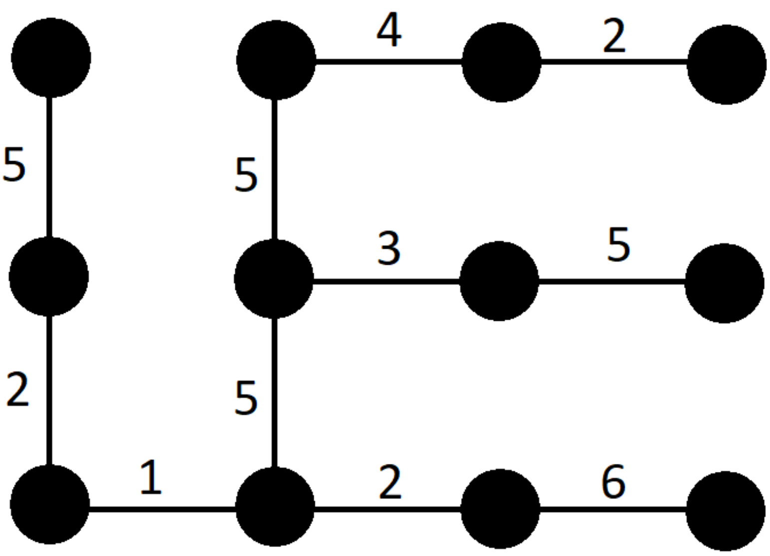
Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер



Значения $x_1 - x_{13}$ приведены в задании, значения $x_{14} - x_{17}$ равны 5.

Дано: 2,5,6,7,1,2,3,4,2,5,6,7,8

Решение:

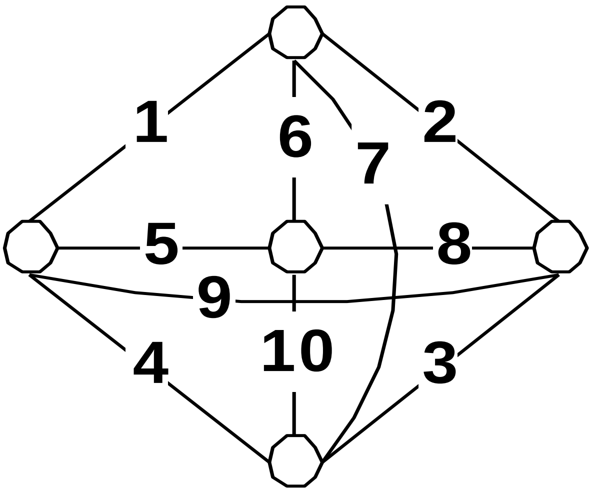


Минимальный вес остовного дерева $L(D) = 40$.

Задание 6

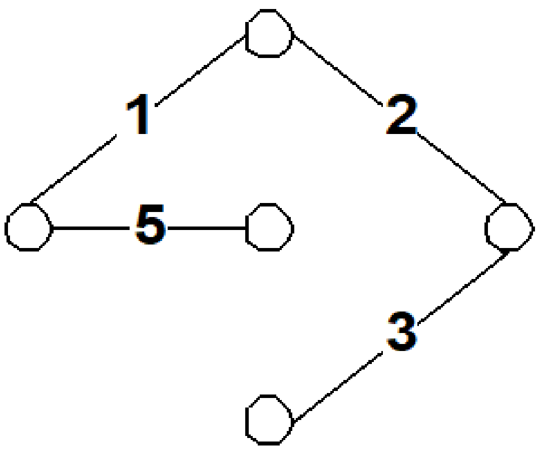
Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E_1 и E_2 (полярность выбирается произвольно), а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

Дано:



Решение:

Выделим произвольным образом остовное дерево графа:



Добавляя любое из ребер, не вошедших в остовное дерево, получаем граф с некоторым простым циклом. Всего в остовное дерево не вошли $v(G) = m(G) -$

$n(G) + 1 = 10 - 5 + 1 = 6$ ребер, поэтому можем получить 6 простых циклов. Они образуют цикловой базис графа.

Для графа, изображенного на рисунке, в цикловой базис войдут следующие циклы:

$\mu_1 = \mu_1(x_5) = x_1x_2x_3x_4$;

$\mu_2 = \mu_2(x_6) = x_1x_6x_5$;

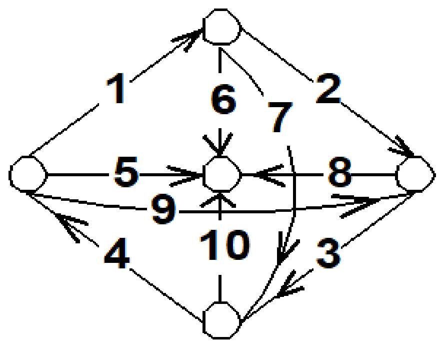
$\mu_3 = \mu_3(x_7) = x_2x_3x_7$;

$\mu_4 = \mu_4(x_8) = x_1x_2x_8x_5$;

$\mu_5 = \mu_5(x_9) = x_1x_2x_9$;

$\mu_6 = \mu_6(x_{10}) = x_1x_2x_3x_{10}x_5$.

Введем произвольным образом ориентацию на ребрах графа:

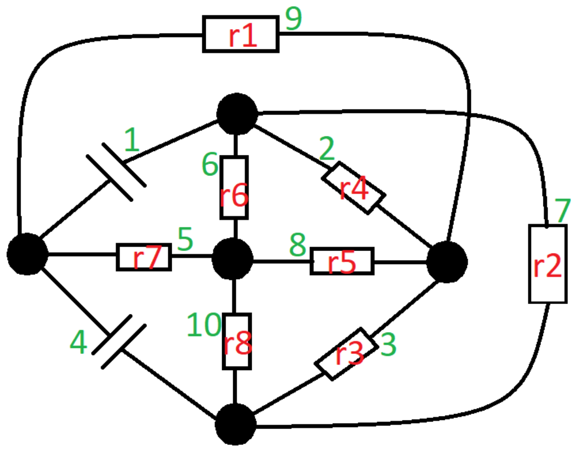


Для графа, изображенного на рисунке, с выделенным ранее цикловым базисом $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6\}$ и выбранной ориентацией ребер цикломатическая матрица имеет вид:

$C(G) =$

				*		*	*	*	*	*
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
μ_1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
μ_2	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
μ_3	0	1	1	0	0	0	-1	0	0	0
μ_4	1	1	0	0	-1	0	0	1	0	0
μ_5	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
μ_6	1	1	1	0	-1	0	0	0	0	1

При построении циклового базиса графа мы поочередно добавляли к остовному дереву графа ребра $x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Выделим соответствующие этим ребрам столбцы в матрице $C(G)$ символом «*». Из выделенных столбцов составим матрицу. Ее определитель равен $\neq 0$, а следовательно, ранг матрицы равен числу строк, т.е. 6. Пусть теперь заданный граф соответствует следующей электрической цепи:



Выберем произвольным образом направления токов в элементах цепи. Пусть эти направления соответствуют выбранной ранее ориентации ребер графа. Выпишем систему уравнений Кирхгофа для напряжений:

$\mu_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4;$

$\mu_2 = u_1 - u_5 + u_6;$

$\mu_3 = u_2 + u_3 - u_7;$

$\mu_4 = u_1 + u_2 - u_5 + u_8;$

$\mu_5 = u_1 + u_2 - u_9;$

$\mu_6 = u_1 + u_2 + u_3 - u_5 + u_{10}.$

С учетом закона Ома, а также того, что $u_1 = E_1$ и $u_4 = E_4$ имеем:

$$\begin{cases} E_1 + i_2 r_4 + i_3 r_3 + E_4 = 0; \\ E_1 - i_5 r_7 + i_6 r_6 = 0; \\ i_2 r_4 + i_3 r_3 - i_7 r_2 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 - i_5 r_7 + i_3 r_5 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 - i_9 r_1 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 + i_3 r_3 - i_5 r_7 + i_{10} r_8 = 0. \end{cases}$$

$B(D) =$

	$\widetilde{x_1}$	$\widetilde{x_2}$	$\widetilde{x_3}$	$\widetilde{x_4}$	$\widetilde{x_5}$	$\widetilde{x_6}$	$\widetilde{x_7}$	$\widetilde{x_8}$	$\widetilde{x_9}$	$\widetilde{x_{10}}$
V_1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
V_2	1	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0
V_3	0	1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0
V_4	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	-1
V_5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1

Система линейно независимых уравнений Кирхгофа для токов имеет вид:

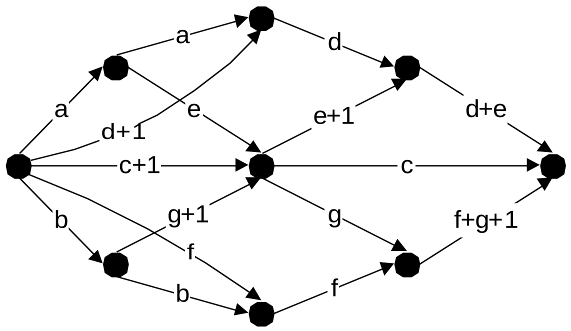
$$\begin{cases} -i_1 + i_4 - i_5 = 0; \\ i_1 - i_2 - i_6 - i_7 = 0; \\ i_2 - i_3 - i_8 - i_9 = 0; \\ i_3 - i_4 + i_7 - i_{10} = 0. \end{cases}$$

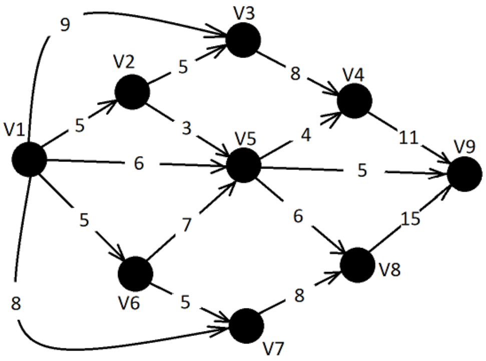
Таким образом, общей системой уравнений для токов является объединение систем:

$$\begin{cases} E_1 + i_2 r_4 + i_3 r_3 + E_4 = 0; \\ E_1 - i_5 r_7 + i_6 r_6 = 0; \\ i_2 r_4 + i_3 r_3 - i_7 r_2 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 - i_5 r_7 + i_3 r_5 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 - i_9 r_1 = 0; \\ E_1 + i_2 r_4 + i_3 r_3 - i_5 r_7 + i_{10} r_8 = 0. \\ -i_1 + i_4 - i_5 = 0; \\ i_1 - i_2 - i_6 - i_7 = 0; \\ i_2 - i_3 - i_8 - i_9 = 0; \\ i_3 - i_4 + i_7 - i_{10} = 0. \end{cases}$$

Задание 7

Построить максимальный поток по транспортной сети

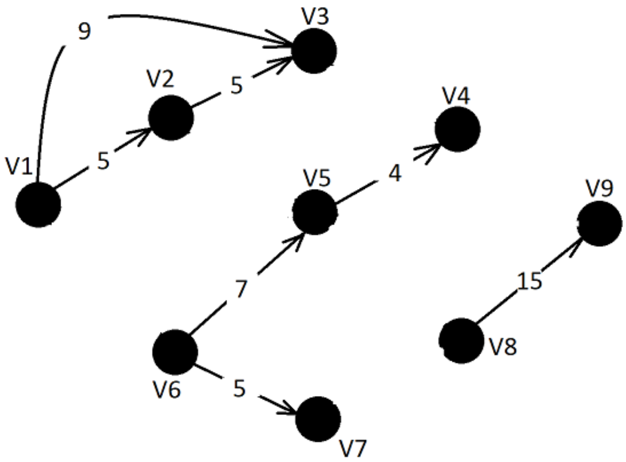




Значения величин a, b, c, d, e, f, g приведены в задании. Начинать с окаймляющих цепей.

Дано: 5,5,5,8,3,8,6

Решение:



①Построение полного потока. Начнем с нулевого.

1. Выделяем простую цепь $\eta_1 = V_1V_2V_5V_7V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_1 = 3$.
2. Выделяем простую цепь $\eta_2 = V_1V_4V_7V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_2 = 8$.
3. Выделяем простую цепь $\eta_3 = V_1V_5V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_3 = 5$.

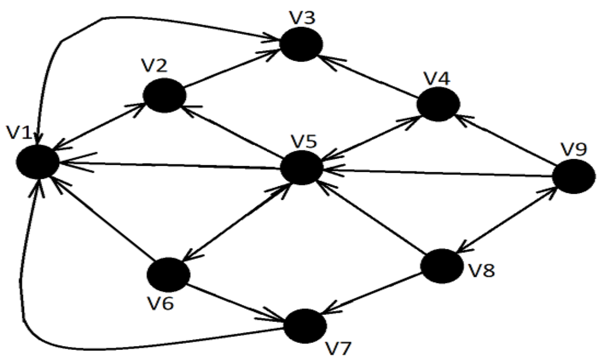
4. Выделяем простую цепь $\eta_4 = V_1V_3V_5V_8V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_4 = 5$.
5. Выделяем простую цепь $\eta_5 = V_1V_6V_8V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_5 = 8$.
6. Выделяем простую цепь $\eta_6 = V_1V_5V_8V_9$. Увеличиваем поток по каждой их этих дуг на одинаковую величину $a_6 = 1$.
7.

Больше нет цепи из V_1 в V_9, по которой можно было бы увеличить поток, значит, полный поток построен.

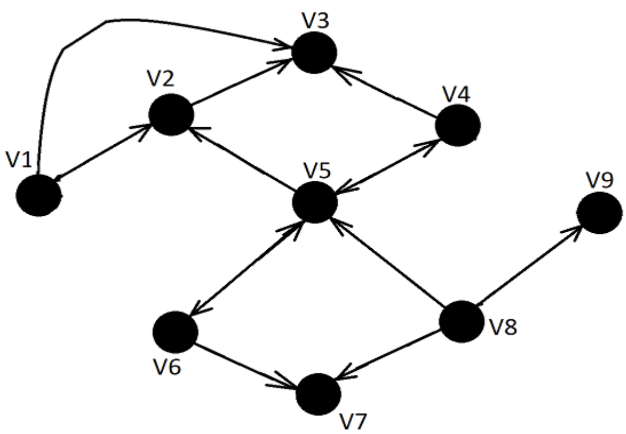
Величина полного потока равна $\Phi_{\text{пол.}} = 3 + 8 + 5 + 5 + 8 + 1 = 30$.

②Построение максимального потока. Для этого построим орграф приращений I и модифицированный орграф приращений.

Орграф приращений I имеет следующий вид (добавляем пути в обратную сторону):



Модифицированный орграф приращений имеет следующий вид (убираем пути в сток и пути из истока):



По т. Форда-Фалкерсона орграф приращений максимальный, так как нет цепи из источника в сток. (При любом изменении потока полный поток не увеличится, следовательно, он максимальный.