Тема №5. Смежные классы по подгруппе

Пусть H - подгруппа группы G. *Левым (правым) смежным классом* группы G по подгруппе H (коротко G по H) называется множество

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \ (Hg = \{hg \mid h \in H\}), \text{ где } g \in G.$$

Элемент g называется *представителем* смежного класса.

Утверждение 5.1. Пусть H - подгруппа группы G, $h \in H$. Тогда $hH = Hh = H$. **Доказательство.** (а) $hH \subseteq H$ ($\forall h_1, h_2 \in H \ \ h_1 h_2 \in H$); (б) $\forall h_0 \in H \ \ h^{-1}h_0 \in H \Rightarrow h_0 = (hh^{-1})h_0 = h(h^{-1}h_0) \in hH$ (т.к. $h^{-1}h_0 \in H$) $\Rightarrow H \subseteq hH$.

Таким образом, $hH = H$ ($Hh = H$ доказывается аналогично).

Утверждение 5.2. Пусть H - подгруппа группы G, $g_1, g_2 \in G$, $g_1 \in g_2 H$. Тогда $g_1 H = g_2 H$. **Доказательство.** $g_1 \in g_2 H \Rightarrow \exists h \in H : g_1 = g_2 h \Rightarrow$ $g_1 H = (g_2 h)H = g_2(hH) = g_2 H$.

Утверждение 5.3. Два левых (правых) смежных класса G по H либо совпадают, либо не имеют общих элементов. **Доказательство.** Пусть $g_1, g_2 \in G$, $g_1 H \cap g_2 H \neq \varnothing \Rightarrow \exists h_1, h_2 \in H :\ g_1 h_1 = g_2 h_2 \Rightarrow g_1 = g_2(h_2 h_1^{-1}) \in g_2 H \Rightarrow$ (утв. 5.2) $\Rightarrow g_1 H = g_2 H$.

Следствие 5.1. $g_1 H \neq g_2 H \Rightarrow g_1 H \cap g_2 H = \varnothing$.

Следствие 5.2. Множество левых (правых) смежных классов группы G по любой ее подгруппе H представляет собой разбиение множества G. Действительно, (а) $\forall g \in G \ \ gH \subseteq G$; (б) $g_1 H \neq g_2 H \Rightarrow g_1 H \cap g_2 H = \varnothing$; (в) $\bigcup\limits_{g \in G} gH = G$ (т.к. $g \in gH$).

Множество всех левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначается символом G/H.

Утверждение 5.4. Пусть G - конечная группа, H - подгруппа группы G, $g \in G$. Тогда $|gH| = |H|$. **Доказательство.** $\forall h_1, h_2 \in H \ \ h_1 \neq h_2 \Rightarrow gh_1 \neq gh_2$, откуда и следует справедливость доказываемого утверждения.

Теорема 5.1. Пусть G - конечная группа, H - подгруппа группы G. Тогда

(5.1) $|G| = |G/H| \cdot |H|$.

Доказательство. $|G|=\left|\bigcup_{gH\in G/H} gH\right|=|G/H|\cdot|H|$

($|gH|=|H|$, $g_1H\neq g_2H \Rightarrow g_1H\cap g_2H=\varnothing$).

Теорема 5.3. (основная теорема о гомоморфизмах). (1) Пусть $f:G\to G'$ - гомоморфизм группы G с ядром $H=\mathrm{Ker}f$. Тогда H - нормальная подгруппа в группе G и фактор-группа G/H изоморфна подгруппе $f(G)=\{f(g)\,|\,g\in G\}$ группы G' (кратко пишем: $G/H\sim f(G)$). (2) Обратно, если H - нормальная подгруппа в группе G, то отображение $f:G\to G/H$, определяемое формулой: $\forall g\in G \;\; f(g)=gH$, есть эпиморфизм (т.е. сюръективное отображение) с ядром H.

Доказательство. (1) Рассмотрим отображение

$\varphi:G/H\to f(G) \quad \forall gH\in G/H \quad \varphi(gH)=f(g)$.

Корректность определения: $\forall g'\in gH \;\; g'H=gH$ и при этом $f(g')=f(gh)=f(g)f(h)=f(g)e'=f(g)$ ($h\in H=\mathrm{Ker}f$).

(а) $\varphi(g_1H\cdot g_2H)=\varphi(g_1g_2H)=f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)=\varphi(g_1H)\varphi(g_2H)$.

(б) **сюръективность:** $\forall b\in f(G)\;\exists g_b\in G:\; f(g_b)=b$ (по определению $f(G)$). Но $\varphi(g_bH)=f(g_b)=b$.

(в) **инъективность:** $\forall g_1H,g_2H$, если $\varphi(g_1H)=\varphi(g_2H)$, то $f(g_1)=f(g_2)\Rightarrow f(g_1)[f(g_2)]^{-1}=e'\Rightarrow f(g_1)f(g_2{}^{-1})=e'\Rightarrow f(g_1g_2{}^{-1})=e'\Rightarrow$ $\Rightarrow g_1g_2{}^{-1}\in H\Rightarrow g_1=(g_1g_2{}^{-1})g_2\in Hg_2=g_2H\Rightarrow g_1H=g_2H$ (см. утв. 5.2).

(2) Докажем, что отображение $f:G\to G/H$: $\forall g\in G \;\; f(g)=gH$ есть эпиморфизм (т.е. сюръективное отображение) с ядром H.

(а) $\forall g_1,g_2\in G \;\; f(g_1g_2)=g_1g_2H=g_1H\cdot g_2H=f(g_1)f(g_2)$.

(б) **сюръективность:** $\forall gH\in G/H \quad f(g)=gH$.

(в) (H - ядро): $\{g\in G\,|\,f(g)=H\}=$(H - единичный элемент в G/H)= $=H=\mathrm{Ker}f$ ($gH=H\Leftrightarrow g\in H$; см. утв. 5.1, 5.2).

При решении задач на тему «Гомоморфизм групп» используем

Утверждение 5.5. Пусть G - группа, $g \in G$, g имеет конечный порядок $q \in \mathrm{N}$, $q \geq 2$, т.е. $< g >= \{e, g, g^2, ..., g^{q-1}\}$. Тогда каждому положительному делителю $d \geq 2$ числа q (т.е. в случае, если q делится нацело на d) соответствует одна и только одна циклическая группа порядка d, являющаяся подгруппой $< g >$, а именно, $< g^{q/d} >= \{e, g^{q/d}, g^{2q/d}, ..., g^{(d-1)q/d}\}$.

Доказательство. С одной стороны, $< g^{q/d} >= \{e, g^{q/d}, g^{2q/d}, ..., g^{(d-1)q/d}\}$ - подгруппа группы $< g >= \{e, g, g^2, ..., g^{q-1}\}$ порядка d. Пусть $< a >$ - любая подгруппа группы $< g >= \{e, g, g^2, ..., g^{q-1}\}$ порядка d. Поскольку $< a > \subseteq \{e, g, g^2, ..., g^{q-1}\}$, то можно выбрать минимальное $k \in \{1, ..., , q-1\}$: $g^k \in < a >$. Тогда $< g^k > \subseteq < a >$ (см. определение полугруппы). Покажем, что $< a > \subseteq < g^k >$. Пусть $g^l \in < a >$, где $l \in \{1, ..., q-1\}$. Тогда, если l делится нацело на k, то $g^l \in < g^k >$. В противном случае $l = mk + r$, где $r \in \{1, ..., k-1\}$, а следовательно, $g^l = g^{mk+r} = g^r$, что противоречит выбору k.

Упражнение 5.4. Найти все гомоморфные отображения циклической группы $G =< a >$ порядка 18 в циклическую группу $G' =< b >$ порядка 6.

Решение. В силу теоремы 5.3 (о гомоморфизмах) $f(G) = \{f(g) \mid g \in G\}$ - подгруппа группы G', а следовательно, в силу теоремы Лагранжа $|G'| = 6$ делится нацело на $|f(G)|$. Кроме того, в силу теоремы 5.3 для $H = \mathrm{Ker} f$ выполняется:

$$G / H \sim f(G) \Rightarrow |G / H| = |G| / |H| = |f(G)| \Rightarrow |G| = |H| \cdot |f(G)| \Rightarrow$$

$|G| = 18$ делится нацело на $|f(G)|$. Таким образом, число $|f(G)|$ делит нацело числа $6 = |G'|$ и $18 = |G| \Rightarrow |f(G)| \in \{2, 3, 6\}$.

(a) Пусть $|f(G)| = 2$. Тогда (см. утверждение 5.5) $f(G) =< b^3 >= \{e', b^3\}$, т.к. $3 = |G'| / 2 = 6 / 2$. С другой стороны, для $H = \mathrm{Ker} f$ имеем (в силу теоремы 5.3 (о гомоморфизмах))

$$G / H \sim f(G) \Rightarrow |G / H| = |G| / |H| = |f(G)| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H| = 9 \Rightarrow H =< a^2 >= \{e, a^2, a^4, ..., a^{16}\}.$$

Таким образом, $G = H \cup aH = \{e, a^2, a^4, ..., a^{16}\} \cup \{a, a^3, a^5, ..., a^{17}\}$ и

$$f: a^k \mapsto \begin{cases} e', \text{ если } k \text{ - четно} \\ b^3, \text{ если } k \text{ - нечетно} \end{cases}.$$

Кратко пишем: $f: H \mapsto e', aH \mapsto b^3$.

(б) Пусть $|f(G)| = 3$. Тогда (см. утверждение 5.5) $f(G) = <b^2> = \{e', b^2, b^4\} = <b^4> = \{e', b^4, b^2\}$ (одна и та же циклическая группа, только образующие выбраны разные и по-другому их выбрать нельзя), т.к. $2 = |G'|/3 = 6/3$. С другой стороны, для $H = \mathrm{Ker} f$ имеем (в силу теоремы 5.3 (о гомоморфизмах))

$$G/H \sim f(G) \Rightarrow |G/H| = |G|/|H| = |f(G)| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H| = 6 \Rightarrow H = <a^3> = \{e, a^3, a^6, ..., a^{15}\}.$$

Таким образом, $G/H = \{H, aH, a^2H\}$ и возможны два подслучая:

(1б) $f: H \mapsto e', aH \mapsto b^2, a^2H \mapsto b^4$;

(2б) $f: H \mapsto e', aH \mapsto b^4, a^2H \mapsto b^2$.

(в) Пусть $|f(G)| = 6$. Тогда (см. утверждение 5.5) $f(G) = <b> = \{e', b, b^2, b^2, b^4, b^5\} = <b^5> = \{e', b^5, b^4, b^3, b^2, b\}$, т.к. $1 = |G'|/6 = 6/6$. С другой стороны, для $H = \mathrm{Ker} f$ имеем (в силу теоремы 5.3 (о гомоморфизмах))

$$G/H \sim f(G) \Rightarrow |G/H| = |G|/|H| = |f(G)| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H| = 3 \Rightarrow H = <a^6> = \{e, a^6, a^{12}\}.$$

Таким образом, $G/H = \{H, aH, a^2H, a^3H, a^4H, a^5H\}$ и возможны два под случая:

(1в) $f: H \mapsto e', a^kH \mapsto b^k, k = 1, ..., 5$;

(2б) $f: H \mapsto e', a^kH \mapsto b^{5k} = b^{6-k}, k = 1, ..., 5$.