Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} x_{n}{'}_{k} = f(x_0). \qquad (6.20)$$

Из (6.19) и (6.20) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_{n}{'}_{k}) - f(x_{nk})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$|f(x_{n}{'}_{k}) - f(x_{nk})| \underset{(6.17)}{\geqslant} \epsilon_0 > 0.$$

Полученое противоречие доказывет теорему. □

Условие равномерной непрырывности можно сформулировать в терминах так называемях колебаний функции на отрезках.

О п р е д е л е н и е 4. *Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда величина*

$$\omega(f; [a, b]) = \underset{x,x'\in[a,b]}{sup} |f(x') - f(x)| \qquad (6.21)$$

называется колебанием функции f на отрезке $[a,\ b]$.

Из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$ одно заведомо неотрицательно и, следовательно, не меньше второго, поэтому величина верхней грани в правой части равенства (6.21) не изменится, если вместо абсолютной величины |f(x') - f(x)| разности $f(x') - f(x)$ поставить саму эту разность:

$$\omega(f; [a, b]) = \underset{x,x'\in[a,b]}{sup} [f(x') - f(x)] \qquad (1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Для того, чтобы функция f была равномерно непрырывна на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что каков бы ни был отрезок $[x, x'] \subset [a, b]$ длины меньшей $\epsilon : 0 < x' - x < \epsilon$, выполнялось неравенство

$$\omega(f; [x, x']) < \epsilon. \qquad (6.22)$$

Действительно, поскольку $x, x' \in [x, x']$, из неравенсвта (6.22) следует, что $|f(x') - f(x)| < \epsilon$, поэтому выполняется утверждение (6.15).

Обратно, если справедливо утверждение (6.15), то для люого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек x и x' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x)| < \epsilon/2$.

Пусть для определенности $x < x'$. Для любых двух точек ξ и η отрезка $[x, x']$, очевидно, выполняется неравенсвто $0 < |\eta - \xi| < x' - x < \delta$, следовательно, и неравенсвто $|f(\eta) - f(\xi)| < \epsilon/2$. Поэтому для любого отрезка $[x, x']$ такого, что $0 < x' - x < \delta$ имеем

$$\omega(f; [x, x']) = \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta) - f(\xi)| \leqslant \epsilon/2 < \epsilon. \square$$

Часто оказывается удобным ещё один подход к понятию равномерной непрерывности, а именно подход, связанный с понятием модуля непрерывности функции. **О п р е д е л е н и е 5.** *Модулем непрерывности $\omega(\delta; f)$ функции f, определенной на отрезке $[a, b]$, называется функция*

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} |f(x'' - f(x')|, x', x'' \in [a, b]. \qquad (6.23)$$

Иногда для краткости вместо $\omega(\delta; f)$ будем писать просто $\omega(\delta)$. Как и в случае определения колебания функции (6.21), под знаком верхней грани в правой части равенсвта (6.23) можно не писать знак абсолтной величины разности $|f(x'') - f(x')|$, а брать саму разность - щначение верхней грани при этом не изменится:

$$\omega(\delta; f) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} [f(x'' - f(x')], x', x'' \in [a, b].$$

Очевидно, что $(\delta) \geqslant 0$. Далее, если $0 < \delta_1 < \delta_2$, то

$$y : y = f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leqslant \delta_1 \subset$$
$$y : y = f(x'') - f(x'), |x'' - x'| \leqslant \delta_2,$$

откуда

$$\sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta_1} [f(x'') - f(x')] \leqslant \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta_2} [f(x'') - f(x')], x', x'' \in [a, b],$$

т.е. $\omega(\delta_1)\omega(\delta_2)$. Это означает, что модуль непрерывности является возрастающей функцией.

П р и м е р ы. 1. Найдем $\omega(\delta)$ для функции $y = x^2, -\infty < x < +\infty$.

Для любого $\delta > 0$ и произвольного фиксированнго x_0 имеем

$$\omega(\delta; x^2) = \sup_{|x'' - x'| \leqslant \delta} (x''^2 - x'^2) \geqslant x_0^2 - (x_0 - \delta)^2 = 2x_0\delta - \delta^2 \quad (6.24)$$