Тема 2. Матрицы достижимости, связности. Определение наличия контуров в орграфах

В этом разделе рассматривается матричное задание графов (орграфов). С помощью этих матриц удобно задавать графы (орграфы) для обработки на ЭВМ.

В рассмотренной в предыдущем разделе задаче (см. разбор типового варианта) компоненты сильной связности орграфа $D=(V,X)$ легко определяются «визуально», т.е. исходя из изображения этого орграфа. Однако, при большом количестве дуг такой подход затруднителен. В этом случае даже построение изображения орграфа является весьма трудоемким, а выделение компонент сильной связности становится практически невозможным. Поэтому представляют интерес алгоритмы выделения компонент сильной связности орграфа, основанные на использовании не изображения орграфа, а некоторых других способов задания орграфа, в частности, матричного. Такие матрицы должны легко строиться, исходя из множеств $V, X,$ а сам алгоритм должен быть легко программируемым и практически реализуемым даже при больших $n=n(D), m=m(D)$. Именно такой подход и рассматривается в настоящем разделе.

Матрицы смежности. Пусть $D=(V,X)$ – орграф, где $V=\{v_1,...,v_n\}$. *Матрицей смежности* орграфа D называется квадратная матрица $A(D)=[a_{ij}]$ порядка n, у которой $a_{ij}=1$, если $(v_i,v_j)\in X$, и $a_{ij}=0$ – в противном случае. Введем также матрицу смежности для неориентированного графа. Пусть $G=(V,X)$ – граф, где $V=\{v_1,...,v_n\}$. *Матрицей смежности* графа G называется квадратная матрица $A(G)=[a_{ij}]$ порядка n, у которой $a_{ij}=1$, если $\{v_i,v_j\}\in X$, и $a_{ij}=0$ – в противном случае.

Нам понадобится следующее свойство матрицы смежности. Обозначим через $A^k=[a_{ij}^{(k)}]$ k – ю степень матрицы смежности $A=A(D)$ орграфа D (аналогичное обозначение будем использовать и для графа G), где $k\in \mathrm{N}=\{1,2,...\}$.

Утверждение 2.1. Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k орграфа $D=(V,X)$ (графа $G=(V,X)$), где $V=\{v_1,...,v_n\}, k\in \mathrm{N},$ равен числу всех путей (маршрутов) длины k из v_i в v_j (соединяющих v_i,v_j).

Булевы матрицы. Будем прямоугольную $(m\times n)$– матрицу $C=[c_{ij}]$, у которой $c_{ij}\in\{0,1\}$ называть *булевой*. Заметим, что матрица смежности $A(D)$ ($A(G)$) для произвольного орграфа D (графа G) является булевой. Над булевыми матрицами одинаковой размерности можно производить любые двухместные операции, определенные в математической логике и теории булевых функций: $\&, \vee, \supset, \sim, +$ и т.д. Например, если $C=[c_{ij}], D=[d_{ij}]$– булевы $(m\times n)$– матрицы, то $F=[f_{ij}]=C\vee D$ есть булева $(m\times n)$– матрица с элементами $f_{ij}=c_{ij}\vee d_{ij},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$ Кроме того, будем использовать логическое умножение матриц, отличающейся от алгебраического умножения матриц только тем, что арифметическое сложение заменяется на $\vee$. Пусть $C=[c_{ij}]$– булева $(m\times k)$– матрица, $D=[d_{ij}]$– булева $(k\times n)$– матрица. Тогда $F=[f_{ij}]=CD$

есть булева $(m\times n)$– матрица с элементами $f_{ij}=\bigvee\limits_{r=1}^{k} c_{ir}d_{rj},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$ В дальнейшем из контекста будет ясно, где используется алгебраическое умножение матриц, а где – логическое (всюду далее в этом разделе используется только логическое умножение матриц). Приведем утверждение, являющееся следствием утверждения 2.1, для случая, когда матрица $A^k=[a_{ij}^{(k)}]$ является k –й степенью матрицы смежности $A=A(D)$ орграфа D в случае логического умножения (аналогичное обозначение будем использовать и для графа G), где $k\in \mathrm{N}=\{1,2,...\}.$

Утверждение 2.2. Элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k орграфа $D=(V,X)$ (графа $G=(V,X)),$ где $V=\{v_1,...,v_n\},\ k\in \mathrm{N},$ равен 1, если существует путь (маршрут) длины k из v_i в v_j (соединяющий v_i,v_j); в противном случае он равен нулю.

Матрицы связности. Определение наличия контуров. Говорят, что вершина w орграфа D (графа G) *достижима* из вершины $v,$ если либо $v=w,$ либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v,w). Пусть $D=(V,X)$– орграф, где $V=\{v_1,...,v_n\}.$ *Матрицей достижимости* орграфа D называется квадратная матрица $T(D)=[t_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $t_{ij}=1,$ если вершина v_j достижима из вершины v_i, и $t_{ij}=0$ – в противном случае. *Матрицей сильной связности* орграфа D называется квадратная матрица $S(D)=[s_{ij}]$ порядка n , у которой $s_{ij}=1$ тогда и только тогда, когда вершины v_i,v_j взаимно достижимы (т.е. принадлежат одной компоненте сильной связности).

Пусть $G=(V,X)$ – граф, где $V=\{v_1,...,v_n\}.$ *Матрицей связности* графа G называется квадратная матрица $S(G)=[s_{ij}]$ порядка $n,$ у которой $s_{ij}=1$ тогда и только тогда, когда вершины v_i,v_j взаимно достижимы (т.е. принадлежат одной компоненте связности). Справедливы следующие утверждения, являющиеся следствиями утверждения 2.2.

Утверждение 2.3. Пусть $G=(V,X),$ где $V=\{v_1,...,v_n\},$– граф с матрицей смежности $A=A(G).$ Тогда $S(G)=E\vee A\vee A^2\vee...\vee A^{n-1}.$

Утверждение 2.4. Пусть $D=(V,X),$ где $V=\{v_1,...,v_n\},$– орграф с матрицей смежности $A=A(D).$ Тогда (1) $T(D)=E\vee A\vee A^2\vee...\vee A^{n-1}$; (2) $S(D)=T(D)\,\&\,[T(D)]^{\mathrm{T}}$, где т– операция транспонирования матрицы.

Утверждения 2.3,2.4 дают простые, легко реализуемые на ЭВМ методы вычисления матриц $S(G)\,,T(D)\,,S(D).$ Существуют и более экономичные методы вычисления этих матриц. Опишем, например, метод Уоршелла, основанный на следующем утверждении.

Утверждение 2.5. Пусть A– матрица смежности графа $G=(V,X)$ (орграфа $D=(V,X)$), где $V=\{v_1,...,v_n\}.$ Рассмотрим последовательность булевых квадратных матриц $B^{(l)}=[b_{ij}^{(l)}]$ порядка $n,$ где $l=0,1,...,n,$ $B^{(0)}=A\vee E,$ элементы которых вычисляются по следующей итерационной формуле $b_{ij}^{(l)}=b_{ij}^{(l-1)}\vee(b_{il}^{(l-1)}\,\&\,b_{lj}^{(l-1)}),$ где $l=1,2,...,n.$ Тогда $S(G)=B^{(n)}$ (и соответственно $T(D)=B^{(n)},\ S(D)=T(D)\,\&\,[T(D)]^{\mathrm{T}}$).

Пусть орграф D задан матрицей смежности $A(D)$ и уже найдена матрица связности $S(D)$. Приведем алгоритм определения числа компонент сильной связности орграфа $D,$ а также матриц смежности этих компонент.

Алгоритм 2.1

Шаг 1. Полагаем $p=1,$ $S_1 = S(D)$.

Шаг 2. Включаем в множество вершин V_p очередной компоненты сильной связности D_p орграфа D вершины, соответствующие единицам первой строки матрицы S_p. В качестве $A(D_p)$ берем подматрицу матрицы $A(D)$, находящуюся на пересечении строк и столбцов, соответствующих вершинам из V_p.

Шаг 3. Вычеркиваем из S_p строки и столбцы, соответствующие вершинам из V_p. Если в результате такого вычеркивания не остается ни одной строки (и соответственно ни одного столбца), то p – количество компонент сильной связности орграфа D и $A(D_1),\ldots,A(D_p)$ – матрицы смежности компонент сильной связности $D_1,\ldots,D_p$ орграфа D. В противном случае обозначаем оставшуюся после вычеркивания из S_p соответствующих строк и столбцов матрицу через S_{p+1}, присваиваем $p := p+1$ и переходим к шагу 2.

При решении ряда задач нередко необходимо выяснить, есть ли контуры в заданном орграфе. Заметим, что если в орграфе D присутствует некоторый контур, то все вершины, входящие в этот контур, взаимно достижимы и поэтому принадлежат одной компоненте сильной связности орграфа $D,$ а следовательно эта компонента будет содержать более одной вершины. Заметим также, что если некоторая компонента сильной связности орграфа D содержит более одной вершины, то в этой компоненте, а следовательно, и в самом орграфе D обязательно присутствует контур. Таким образом, справедливо

Утверждение 2.6. Для того, чтобы орграф D имел хотя бы один контур, необходимо и достаточно, чтобы он имел хотя бы одну компоненту сильной связности, содержащую более одной вершины или (что то же самое), чтобы матрица $S(D)$ была отлична от единичной матрицы E.

Иногда вопрос стоит так. В случае, когда орграф D имеет контуры, определить, какую минимальную длину имеют эти контуры. Для решения этой задачи снова воспользуемся утверждением 2.2, следствием которого является

Утверждение 2.7. Для того, чтобы орграф D с матрицей смежности $A = A(D)$ имел контур минимальной длины $k \in \{2,...,n(D)\}$, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A^2,...,A^{k-1}$ имели только нулевые диагональные элементы, а матрица A^k имела ненулевые диагональные элементы.

Пусть $D = (V, X)$ – орграф. Обозначим $\forall V_1 \subseteq V$ $F(V_1) = D(V_1) \setminus V_1$. Пусть $D_1 = (V_1, X_1), \ldots, D_p = (V_p, X_p)$ – компоненты сильной связности орграфа $D,$ $D_0 = (V_0, X_0)$ – орграф конденсации орграфа D. Приведем алгоритм нахождения матрицы смежности $A_0 = A(D_0) = [a_{ij}^{(0)}],$ $i, j \in \{1,2,..., p\}$.

Алгоритм 2.2

Для нахождения элементов произвольной строки с номером $i \in \{1,2,..., p\}$ действуем следующим образом. Находим $F(V_i) = D(V_i) \setminus V_i$. Тогда $a_{ij}^{(0)} = 1 \Leftrightarrow$ $F(V_i) \cap V_j \neq \varnothing,\ j = 1,2,..., p.$ Множества $F(V_i)$ легко определяются, исходя из матрицы $A(D).$

Пусть $D = (V, X)$ – орграф. Приведем также алгоритм решения задачи об оптимальном оповещении членов организации (см. тему 1) для случая, когда V – множество членов организации и $x = (v, w) \in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию $w.$ Этот алгоритм в отличие от метода, приведенного в теме 1 и использующего изображение орграфа $D,$ основан на использовании матрицы смежности $A(D).$ В соответствии с постановкой задачи, приведенной в теме 1, требуется выделить подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из $V.$ Кроме того следует указать схему такого оповещения.

Алгоритм 2.3

Шаг 1. Следуя методу, приведенному в теме 1, определяем орграф конденсации $D_0 = (V_0, X_0)$ и выделяем множество $W_0 = \{v_0 \in V_0 \mid D_0^{-1}(v_0) = \varnothing\}.$ Тогда искомым множеством $U \subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u \in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты сильной связности орграфа $D,$ принадлежащей множеству $W_0.$ Оповещаем (требуемой информацией) всех членов из $U.$ Полагаем $U_1 = U,\ i = 1.$

Шаг 2. Если $F(U_i) = \varnothing,$ то задача решена (т.е. все члены организации оповещены). В противном случае выбираем произвольную вершину $u_i \in F(U_i).$ Ее оповещает любая вершина из $U_i \cap D^{-1}(u_i).$

Шаг 3. Полагаем $U_{i+1} = U \cup \{u_i\},$ присваиваем $i := i+1$ и переходим к шагу 2.

Разбор типового варианта. Орграф $D = (V, X),$ где $V = \{v_1,..., v_n\},$ задан матрицей смежности $A = A(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$ Определить: (а) матрицы $T(D),\ S(D);$ (б) наличие контуров в D (имеются или не имеются); (в) в случае наличия контуров в D определить минимальную длину контуров; (г) количество p компонент сильной связности орграфа $D,$ матрицы смежности этих компонент, а также их изображения; (д) матрицу смежности орграфа конденсации D_0 орграфа $D;$ (е) изображение орграфа D_0; (ж) решить задачу об оптимальном оповещении членов организации (см. тему 1), если V – множество членов организации и $x = (v, w) \in X$ тогда и только тогда, когда v может передать информацию $w.$

Решение. (а) Будем определять матрицу $T(D)$ по формуле из утверждения 2.4 (см. также замечание 2.2, в котором $T(D)$ определяется методом Уоршелла, т.е. по формулам из утверждения 2.5). В соответствии с этим последовательно определяем:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = AA^4 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

Замечание 2.1. Из определения логического умножения матриц и вида матрицы A следует, что первая строка матрицы A^2 совпадает с пятой строкой матрицы A (совершенно аналогично, первая строка матрицы A^{k+1} совпадает с пятой строкой матрицы A^k, $k = 1,2,\ldots$). Заметим далее, что вторая строка матрицы A^{k+1} совпадает с дизъюнкцией четвертой и пятой строк матрицы A^k, а третья строка матрицы A^{k+1} совпадает с шестой строкой матрицы A^k, $k = 1,2,\ldots$, и т.д.

В силу утверждения 2.4,

$$T(D) = E \vee A \vee A^2 \vee \ldots \vee A^5 = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$S(D)=T(D)\,\&\,[T(D)]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}.$$ (б) В орграфе D имеются контуры, так как $S(D)\neq E.$ (в)

Поскольку уже в матрице A^2 имеются ненулевые диагональные элементы, то в орграфе D имеется контур минимальной длины 2. (г) Используя алгоритм 2.1, последовательно определяем матрицы смежности компонент сильной связности орграфа $D.$ Согласно алгоритму 2.1, в первую компоненту сильной связности D_1 орграфа D войдет единственная вершина v_1, т.е. $D_1=(V_1,X_1)$, где $V_1=\{v_1\}$, $X_1=\varnothing$. Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении первой строки и первого столбца матрицы $A(D)$)

$A(D_1)=$

	v_1
v_1	0

.

Изображение орграфа D_1 приведено на рис. 2.1.

Рис. 2.1

Вычеркнув из матрицы $S_1=S(D)$ первую строку и первый столбец, получаем матрицу

$S_2=$

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_2	1	0	1	0	0
v_3	0	1	0	0	1
v_4	1	0	1	0	0
v_5	0	0	0	1	0
v_6	0	1	0	0	1

.

Согласно алгоритму 2.1 во вторую компоненту сильной связности D_2 орграфа D войдут вершины v_2, v_4, т.е. $D_2=(V_2,X_2)$, где $V_2=\{v_2,v_4\}$. Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении второй и четвертой строк со вторым и четвертым столбцами матрицы $A(D)$)

$A(D_2)=$

	v_2	v_4
v_2	0	1

.

v_4	1	0

Изображение орграфа D_2 приведено на рис. 2.1. Вычеркнув из матрицы S_2 строки и столбцы, соответствующие вершинам v_2, v_4, получаем матрицу

$S_3 =$

	v_3	v_5	v_6
v_3	1	0	1
v_5	0	1	0
v_6	1	0	1

.

Согласно алгоритму 2.1 в третью компоненту сильной связности D_3 орграфа D войдут вершины v_3, v_6, т.е. $D_3 = (V_3, X_3)$, где $V_3 = \{v_3, v_6\}$. Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении третьей и шестой строк с третьим и шестым столбцами матрицы $A(D)$)

$A(D_3) =$

	v_3	v_6
v_3	0	1
v_6	1	0

.

Изображение орграфа D_3 приведено на рис. 2.1. Вычеркнув из матрицы S_3 строки и столбцы, соответствующие вершинам v_3, v_6, получаем матрицу

$S_4 =$

	v_5
v_5	1

.

Согласно алгоритму 2.1, в четвертую компоненту сильной связности D_4 орграфа D войдет единственная вершина v_4, т.е. $D_4 = (V_4, X_4)$, где $V_4 = \{v_5\}$, $X_1 = \varnothing$. Соответствующая этой компоненте сильной связности матрица смежности имеет вид (находится на пересечении четвертой строки и четвертого столбца матрицы $A(D)$)

$A(D_4) =$

	v_5
v_5	0

.

Изображение орграфа D_4 приведено на рис. 2.1. Очевидно, что $p = 4$, так как после исключения из S_4 строки и столбца, соответствующих вершине v_5, получаем пустую матрицу. (д) Для нахождения матрицы $A(D_0)$ воспользуемся алгоритмом 2.2. В нашем примере $V_1 = \{v_1\}$, $F(V_1) = D(V_1) \setminus V_1 = \{v_5\} \setminus \{v_1\} = \{v_5\}$, $v_5 \in V_4 \Rightarrow a_{14}^{(0)} = 1$, $a_{1i}^{(0)} = 0, i = 1,2,3;$ $V_2 = \{v_2, v_4\}$, $F(V_2) = D(V_2) \setminus V_2 = \{v_2, v_4, v_5\} \setminus \{v_2, v_4\} = \{v_5\}$, $v_5 \in V_4 \Rightarrow a_{24}^{(0)} = 1$, $a_{2i}^{(0)} = 0, i = 1,2,3;$ $V_3 = \{v_3, v_6\}$, $F(V_3) = D(V_3) \setminus V_3 = \{v_3, v_6\} \setminus \{v_3, v_6\} = \varnothing \Rightarrow a_{3i}^{(0)} = 0, i = 1,2,3,4;$ $V_4 = \{v_5\}$, $F(V_4) =$ $= D(V_4) \setminus V_4 = \{v_3, v_6\} \setminus \{v_5\} = \{v_3, v_6\}$, $v_3, v_6 \in V_3 \Rightarrow a_{43} = 1, a_{4i}^{(0)} = 0, i = 1,2,4.$ Таким образом,

$A(D_0) =$

	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	0	0	0	1
D_2	0	0	0	1
D_3	0	0	0	0

.

D_4	0	0	1	0

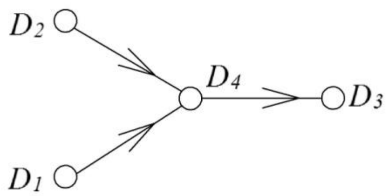

Рис. 2.2

(д) Изображение орграфа D_0 строится по матрице $A(D_0)$ (приведено на рис.2.2). (е) В соответствии с алгоритмом 2.3 выделяем подмножество U множества V с минимальным количеством элементов такое, что через оповещение некоторой информацией членов из U можно добиться оповещения этой информацией всех членов из V. Для решения этой задачи рассматриваем орграф конденсации $D_0 = (V_0, X_0)$ и выделяем множество $W_0 = \{v_0 \in V_0 \mid D_0^{-1}(v_0) = \varnothing\}$. Тогда искомым множеством $U \subseteq V$ является множество вершин таких, что каждая вершина $u \in U$ является вершиной («представителем») одной и только одной компоненты сильной связности орграфа D, принадлежащей множеству W_0. Заметим, что $W_0 = \{D_1, D_2\}$ (см. рис. 2.2), $v_1 \in D_1$, $v_2 \in D_2$ (см. рис. 2.1), поэтому полагаем $U = \{v_1, v_2\}$. Следуя алгоритму 2.3, далее полагаем $U_1 = U = \{v_1, v_2\}$. Используя матрицу $A(D)$, находим множество

$$F(U_1) = D(U_1) \setminus U_1 = D(\{v_1, v_2\}) \setminus \{v_1, v_2\} = \{v_4, v_5\} \setminus \{v_1, v_2\} = \{v_4, v_5\}$$

и выбираем из него произвольную вершину, например, v_4, т.е. полагаем $u_1 = v_4$. Далее находим множество $U_1 \cap D^{-1}(u_1) = U \cap D^{-1}(v_4) = \{v_1, v_2\} \cap \{v_2\} = \{v_2\}$. Единственная вершина этого множества v_2 оповещает v_4 (кратко пишем: $v_2 \mapsto v_4$). Далее полагаем $U_2 = U_1 \cup \{u_1\} = \{v_1, v_2, v_4\}$, находим множество

$$F(U_2) = D(U_2) \setminus U_2 = D(\{v_1, v_2, v_4\}) \setminus \{v_1, v_2, v_4\} = \{v_2, v_4, v_5\} \setminus \{v_1, v_2, v_4\} = \{v_5\},$$

содержащее единственную вершину v_5 и полагаем $u_2 = v_5$. Находим множество $U_2 \cap D^{-1}(u_2) = U_2 \cap D^{-1}(v_5) = \{v_1, v_2, v_4\} \cap \{v_1, v_2\} = \{v_1, v_2\}$, выбираем из него произвольную вершину, например, v_1. Тогда $v_1 \mapsto v_5$. Далее полагаем $U_3 = U_2 \cup \{u_2\} = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, находим множество

$$F(U_3) = D(U_3) \setminus U_3 = D(\{v_1, v_2, v_4, v_5\}) \setminus \{v_1, v_2, v_4, v_5\} =$$
$$= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_4, v_5\} = \{v_3, v_6\},$$

и выбираем из него произвольную вершину, например, v_3, т.е. полагаем $u_3 = v_3$. Находим множество $U_3 \cap D^{-1}(u_3) = U_3 \cap D^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\} \cap \{v_5, v_6\} = \{v_5\}$, содержащее единственную вершину v_5. Тогда $v_5 \mapsto v_3$. Далее полагаем $U_4 = U_3 \cup \{u_3\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, находим множество

$$F(U_4) = D(U_4) \setminus U_4 = D(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} =$$
$$= \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = \{v_6\},$$

и полагаем $u_4 = v_6$. Находим множество $U_4 \cap D^{-1}(u_4) = U_4 \cap D^{-1}(v_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \cap \cap \{v_3, v_5\} = \{v_3, v_5\}$, выбираем из него произвольную вершину, например, v_3. Тогда $v_3 \mapsto v_6$.

Далее полагаем $U_5 = U_4 \cup \{u_4\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, находим множество $F(U_5) =$ $= D(U_5) \setminus U_5 = \varnothing$, а это согласно алгоритму 2.3 (см. шаг 2), означает, что схема оповещения построена. А именно, вначале оповещаются v_1, v_2, а затем $v_2 \mapsto v_4$, $v_1 \mapsto v_5 \mapsto v_3 \mapsto v_6$.

Замечание 2.2. При решении задачи из типового варианта нахождение $T(D)$, $S(D)$ производилось по формулам из утверждения 2.4. Найдем также эти матрицы методом Уоршелла (см. утверждение 2.5). Введем в рассмотрение вспомогательную квадратную матрицу $\hat{B}^{(l)} = [\hat{b}_{ij}^{(l)}]$ порядка n с элементами $\hat{b}_{ij}^{(l)} = b_{il}^{(l-1)} \,\&\, b_{lj}^{(l-1)}$, где $l = 1,2,\dots,n$. Тогда (см. утверждение 2.5) $B^{(l)} = B^{(l-1)} \vee \hat{B}^{(l)}$. Из определения матрицы $\hat{B}^{(l)}$ следует, что $l-$ая строка матрицы $B^{(l-1)}$ повторяется во всех строках матрицы $\hat{B}^{(l)}$ с номерами $i \in \{1,2,\dots,n\}$, для которых $b_{il}^{(l-1)} = 1$, т.е., если матрицы $B^{(l-1)}, \hat{B}^{(l)}$ стоят рядом, то $l-$ая строка матрицы $B^{(l-1)}$ находится в матрице $\hat{B}^{(l)}$ напротив всех единиц $l-$го столбца матрицы $B^{(l-1)}$. Остальные строки матрицы $\hat{B}^{(l)}$ являются нулевыми. Далее в соответствующих таблицах единицы $l-$ой строки, единицы $l-$го столбца матрицы $B^{(l-1)}$, а также единицы матрицы $\hat{B}^{(l)}$ будут выделены жирным шрифтом, где $l = 1,2,\dots,n$. Действуя таким образом, получаем:

$$B^{(0)} = A \vee E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(1)} = B^{(0)} \vee \hat{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^{(0)},$$

$$B^{(2)} = B^{(1)} \vee \hat{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(3)} = B^{(2)} \vee \hat{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = B^{(2)},$$

$$B^{(4)} = B^{(3)} \vee \hat{B}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B^{(3)},$$

$$B^{(5)} = B^{(4)} \vee \hat{B}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B^{(6)} = B^{(5)} \vee \hat{B}^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} = B^{(5)}.$$

В силу утверждения 2.5 $T(D) = B^{(6)}$, $S(D)$ находится из $T(D)$ аналогично предыдущему.