ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

Тема занятия: Симметрические группы.

1. Пусть Ω_n - конечное множество из n элементов. Поскольку природа его элементов для нас несущественна, удобно считать, что $\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Группа $S(\Omega_n)$ всех взаимно однозначных отображений $\Omega_n \to \Omega_n$ называется симметрической группой степени n и обозначается S_n . Элементы группы S_n , обычно обозначаемые строчными буквами греческого алфавита, называются перестановками. В развернутой и наглядной форме перестановку $\pi : i \mapsto \pi(i), i = 1, 2, \ldots, n$, изображают двухрядным символом

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Единичную перестановку будем обозначать символом е , т.е. $e(i) = i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Перестановки $\sigma, \tau \in S_n$ перемножаются в соответствии с общим правилом композиции отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Задача 1. Пусть $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $\pi_1\pi_2, \pi_2\pi_1, \pi_1^{-1}, \pi_2^{-1}, \pi_1^2, \pi_2^2$.

Решение.

$$\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\pi_2\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\pi_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Определить порядок группы S_n.

Решение. Пусть

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

– произвольная перестановка из S_n. Заметим, что элемент i_1 мы можем выбрать n способами. После каждого выбора элемента i_1 элемент i_2 мы можем выбрать $n-1$ способами (так как $i_2 \neq i_1$). Но тогда выбор пары элементов i_1, i_2 в перестановке π мы можем сделать $n(n-1)$ способами. Аналогично, после каждого выбора пары элементов i_1, i_2 элемент i_3 мы можем выбрать $n-2$ способами (так как $i_3 \neq i_1, i_3 \neq i_2$). Но тогда выбор тройки элементов i_1, i_2, i_3 в перестановке π мы можем осуществить $n(n-1)(n-2)$ способами и т.д. Соответственно, выбор всего набора элементов $i_1, i_2, \dots, i_n$ в перестановке π, а следовательно, и выбор всевозможных перестановок $\pi \in S_n$ мы можем осуществить $n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$ способами.

2. Орбиты. Циклы. Разложение перестановки в произведение независимых циклов.

При решении многих задач пользуются разложением перестановок в в произведение более простых перестановок, называемых циклами.

Пример 1. Рассмотрим перестановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (см. рис. 1).

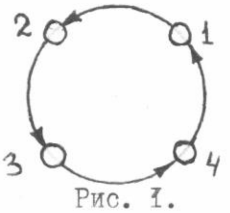

Рис. 1.

Будем эту перестановку кратко записывать в виде $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$ или, что то же самое, в виде $\sigma = (2\ 3\ 4\ 1) = (3\ 4\ 1\ 2) = (4\ 1\ 2\ 3)$. Эта перестановка называется циклом длины 4. Перестановку же $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (см. рис. 2)

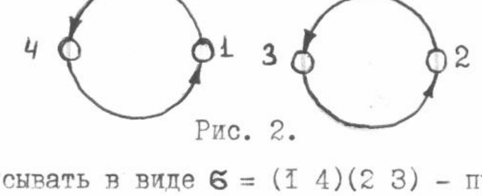

Рис. 2.

будем кратко записывать в виде $\sigma = (1\ 4)(2\ 3)$ – произведение двух независимых (непересекающихся) циклов $(1\ 4)$, $(2\ 3)$ длины 2.

В общем случае перестановка $\sigma \in S_n$ такая, что, для некоторых попарно различных элементов $i_1, \dots, i_\ell \in \Omega$ выполняется

$$(1)\quad \sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{\ell-1}) = i_\ell, \sigma(i_\ell) = i_1,$$
$$\forall i \in \Omega \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} \quad \sigma(i) = i,$$

называется (элементарным) циклом длины ℓ, который кратко обозначается

$$\sigma = (i_1 \ i_2 \dots i_\ell) = (i_2 \dots i_\ell \ i_1) = \dots = (i_\ell \ i_1 \dots i_{\ell-1})$$

(т.е. любым из выписанных способов). Будем про цикл σ говорить, что он действует на множестве $\{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} = \{i \in \Omega \mid i \neq \sigma(i)\}$.

Замечание 1. Из приведенного определения следует, что если σ - элементарный цикл, определяемый условиями (1), то

$$\sigma = (i_1 \ \sigma(i_1) \ \sigma^2(i_1) \dots \sigma^{\ell-1}(i_1)) = (i_2 \ \sigma(i_2) \ \sigma^2(i_2) \dots \sigma^{\ell-1}(i_2)) =$$
$$= \dots = (i_\ell \ \sigma(i_\ell) \ \sigma^2(i_\ell) \dots \sigma^{\ell-1}(i_\ell)),$$

а следовательно, $\forall i \in \Omega$ такого, что $\sigma(i) \neq i$, выполняется

$$\sigma = (i \ \sigma(i) \dots \sigma^{\ell-1}(i)),$$

причем ℓ - минимальное целое положительное число такое, что $\sigma^\ell(i) = i$. Но тогда ℓ - минимальное число такое, что $\sigma^\ell = e$, т.е. является порядком перестановки $\sigma \in S_n$.

Пусть π - произвольная перестановка из S_n. Назовем две точки $i, j \in \Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ π-эквивалентными (обозначаем $i \overset{\pi}{\sim} j$), если $\exists s \in \mathbb{Z} \mid j = \pi^s(i) = \pi(\dots\pi(i)\dots)$. Введенное отношение $\overset{\pi}{\sim}$ является эквивалентностью на Ω. Действительно,

а) рефлексивность: $\forall i \in \Omega \quad i = \pi^0(i) = e(i) = i$, т.е. $i \overset{\pi}{\sim} i$;

б) симметричность: $i \overset{\pi}{\sim} j \Rightarrow \exists s \in \mathbb{Z} \mid j = \pi^s(i) \Rightarrow i = \pi^{-s}(j), -s \in \mathbb{Z} \Rightarrow j \overset{\pi}{\sim} i$;

в) транзитивность: $i \overset{\pi}{\sim} j, j \overset{\pi}{\sim} k \Rightarrow \exists s_1, s_2 \in \mathbb{Z} \mid j = \pi^{s_1}(i), k = \pi^{s_2}(j) \Rightarrow$
$\Rightarrow k = \pi^{s_2}(\pi^{s_1}(i)) = \pi^{s_1 + s_2}(i), s_1 + s_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow i \overset{\pi}{\sim} k$.

Рассмотрим классы эквивалентности $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ множества Ω по эквивалентности $\overset{\pi}{\sim}$, т.е. $\{\Omega_1, \dots, \Omega_p\} = \Omega / \overset{\pi}{\sim}$. Известно, что множество классов эквивалентности является разбиением множества Ω, т.е.

$$(2)\quad \Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_p,$$

$$(3)\quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, p\} \quad i \neq j \Rightarrow \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing.$$

Множества $\Omega_1,\dots,\Omega_p$ принято называть π-орбитами. Таким образом, каждый элемент $i\in\Omega$ принадлежит в точности одной π-орбите. Обозначим $\ell_k=|\Omega_k|$ – длина орбиты Ω_k, $k=1,2,\dots,p$. Пусть далее i – произвольный элемент из некоторой π-орбиты Ω_k, где $k\in\{1,2,\dots,p\}$, т.е. $\Omega_k=\{\pi^s(i)\,|\,s\in\mathbb{Z}\}$. Покажем, что тогда

(4) $\Omega_k=\{i,\pi(i),\dots,\pi^{\ell_k-1}(i)\}$.

Действительно, в силу $|\Omega_k|=\ell_k$ для доказательства (4) достаточно показать, что $i,\pi(i),\pi^2(i),\dots,\pi^{\ell_k-1}(i)$ – попарно различные элементы. Предположим, что найдутся $j_1,j_2\in\mathbb{Z}$ такие, что $0\le j_1<j_2\le\ell_k-1$, $\pi^{j_1}(i)=\pi^{j_2}(i)$, откуда $\pi^{j_2-j_1}(i)=i$, где $1\le j_2-j_1\le\ell_k-1$, а следовательно, множество Ω_k не содержит других элементов, кроме $i,\pi(i),\dots,\pi^{j_2-j_1-1}(i)$ (так как $\forall s\in\mathbb{Z}$ справедливо $s=q(j_2-j_1)+t$, где $0\le t\le j_2-j_1-1$), но это противоречит тому, что $|\Omega_k|=\ell_k>\ell_k-1\ge\ge j_2-j_1$. Покажем теперь, что $\pi^{\ell_k}(i)=i$. Если $\pi^{\ell_k}(i)\ne i$, то в силу (4) $\exists\, j\in\{1,2,\dots,\ell_k-1\}\,|\,\pi^j(i)=\pi^{\ell_k}(i)$. Но тогда $\pi^{\ell_k-j}(i)==i$, $1\le\ell_k-j\le\ell_k-1$, а это противоречит тому, что, как было показано выше, элементы $i,\pi(i),\dots,\pi^{\ell_k-1}(i)$ попарно различны. Таким образом, положив

(5) $\pi_k=(i\ \ \pi(i)\ \dots\ \pi^{\ell_k-1}(i))$,

используя (4), получаем, что для элементарного цикла π_k выполняется

$$\forall i\in\Omega_k\quad \pi_k(i)=\pi(i)\in\Omega_k,$$

(6) $$\forall i\in\Omega\setminus\Omega_k\quad \pi_k(i)=i,$$

откуда в силу (2),(3) следует, что

(7) $\pi=\pi_1\pi_2\cdots\pi_p$,

причем в силу (3),(6) все циклы в правой части (7) перестановочны:

(8) $\forall i,j\in\{1,2,\dots,p\}\quad \pi_i\pi_j=\pi_j\pi_i$,

а следовательно,

$$\pi=\pi_1\pi_2\dots\pi_p=\pi_{i_1}\pi_{i_2}\dots\pi_{i_p},$$

где $\{i_1,\dots,i_p\}=\{1,2,\dots,p\}$.

Циклы π_k из полученного нами разложения (7) называются <u>независимыми</u> в том смысле, что множества, на которых действуют эти циклы, попарно не пересекаются.

<u>Замечание 2</u>. Если цикл $\pi_k = (i)$ имеет длину 1, то он действует как единичная перестановка; естественно такие циклы в произведении (7) опускать. Но тогда можно считать, что циклы в произведении (7) имеют длину $\geqslant 2$.

<u>Пример 2</u>. Пусть

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

Разложим π в произведение независимых циклов. Имеем:

1) $1 \mapsto 3 \mapsto 1$, $\pi_1 = (1 \;\; 3)$; $\Omega_1 = \{1, 3\}$;

2) $2 \mapsto 2$, $\pi_2 = (2)$, $\Omega_2 = \{2\}$;

3) $4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 8 \mapsto 4$, $\pi_3 = (4\;5\;6\;8)$, $\Omega_3 = \{4,5,6,8\}$;

4) $7 \mapsto 7 \Rightarrow \pi_4 = (7)$, $\Omega_4 = \{7\}$

4) $9 \mapsto 10 \mapsto 9$, $\pi_4 = (9\;10)$, $\Omega_4 = \{9, 10\}$;

Очевидно, что

$$\Omega = \{1, \ldots, 10\} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \text{ при } i \neq j,$$

т.е. получили разбиение множества Ω на π-орбиты, а следовательно,

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 = (1\;3)(2)(4\;5\;6\;8)(9\;10) = (1\;3)(4\;5\;6\;8)(9\;10)$$

<u>Задача 3</u>. Показать, что представление произвольной перестановки $\pi \in S_n$, где $\pi \neq e$, в виде произведения независимых циклов длины $\geqslant 2$ единственно.

<u>Решение</u>. Предположим, что наряду с разложением (7) имеется еще одно разложение

(8) $\quad \pi = \tau_1 \cdots \tau_q$

перестановки π в произведение независимых циклов длины $\geqslant 2$. Пусть π_k – произвольный цикл длины $l_k \geqslant 2$ из разложения (7). Покажем, что π_k входит в разложение (8). В силу $l_k \geqslant 2$ найдется $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $i \neq \pi_k(i)$ (т.е. i входит в множество, на котором действует цикл π_k), откуда, используя независимость циклов в разложении (7), имеем $\pi_k(i) = \pi(i)$. Но тогда $i \neq \pi(i)$, а следовательно, $\exists j \in \{1, \ldots, q\} \mid \tau_j(i) \neq i$ (т.е.

i входит в множество, на котором действует цикл τ_j). Используя независимость циклов в разложении (8), имеем

$$\tau_j(i) = \pi(i) = \pi_k(i),$$

а следовательно,

$$\forall s \in \mathbb{Z} \quad \tau_j^s(i) = \pi^s(i) = \pi_k^s(i)$$

откуда в силу замечания 1 имеем $\tau_j = \pi_k$. Совершенно аналогично показывается, что любой цикл из разложения (7) входит в разложение (6).

Задача 4. Доказать, что порядок перестановки $\pi \in S_n$ равен наименьшему общему кратному длин независимых циклов, входящих в разложение π .

Решение. Обозначим через q порядок перестановки $\pi \in S_n$. Тогда (по определению) q – наименьшее целое положительное число такое, что $\pi^q = e$. Как уже отмечалось, циклы в разложении $\pi = \pi_1 \cdots \pi_p$ перестановки π в произведение независимых циклов перестановочны, а следовательно,

(9) $\forall s \in \mathbb{Z} \quad \pi^s = \pi_1^s \cdots \pi_p^s$.

Так как циклы $\pi_1, \ldots, \pi_p$ независимы (действуют на разных множествах), то, если для некоторого $s \in \mathbb{Z}$ выполняется $\pi^s = e$, то $\pi_1^s = \ldots = \pi_p^s = e$. (Действительно, если предположить, что, например, $\pi_1^s \neq e$, то найдется номер $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что $\pi_1^s(i) \neq i$, а следовательно, $\pi_1(i) \neq i$. Но тогда i входит в множество, на котором действует перестановка π_1 , и в силу независимости циклов $\pi_1, \ldots, \pi_p$ выполняется $\pi_2(i) = \ldots = \pi_p(i) = i$, а следовательно, $\pi_2^s(i) = \ldots = \pi_p^s(i) = i$, откуда, используя (9), имеем $\pi^s(i) = \pi_1^s(\pi_2^s(\ldots \pi_p^s(i) \ldots)) = \pi_1^s(i) \neq i$, что противоречит условию $\pi^s = e$.) Но тогда в силу $\pi^q = e$ получаем, что $\pi_1^q = \ldots = \pi_p^q = e$, а следовательно, q делится на порядки элементарных циклов π_k , которые совпадают с их длинами l_k (см. замечание 1). Таким образом, q является общим кратным чисел $l_1, \ldots, l_p$, т.е. $q \geq l = \text{НОК}(l_1, \ldots, l_p)$. С другой стороны, в силу (9) имеем $\pi^l = \pi_1^l \ldots \pi_p^l = e$, а следовательно, l делится на q , т.е. $q \leq l$. Таким образом, $q = l$.

Задача 6. Представить следующие перестановки в виде произведений независимых циклов: $(3\ 1\ 8)^{-1}$, $(5\ 6\ 1)^2$, $(1\ 3\ 5\ 2)^3$, $(1\ 3\ 5\ 2)^2$, $(2\ 3\ 6\ 4)^{-2}$, $(2\ 4\ 1\ 3)^{-242}$, $(2\ 1\ 5\ 7\ 4)^{-72}$, $(3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{394}$, $(3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{-21}$

Решение.

$(3\ 1\ 8)^{-1} = (8\ 1\ 3)$,

$(5\ 6\ 1)^2 = (5\ 6\ 1)^{3-1} = (5\ 6\ 3)^3(5\ 6\ 1)^{-1} = (5\ 6\ 1)^{-1} = (1\ 6\ 5)$,

$(1\ 3\ 5\ 2)^3 = (1\ 3\ 5\ 2)^{4-1} = (1\ 3\ 5\ 2)^{-1} = (2\ 5\ 3\ 1)$,

$(1\ 3\ 5\ 2)^2 = (1\ 5)(2\ 3)$,

$(2\ 3\ 6\ 4)^{-2} = (2\ 6)(3\ 4)$,

$(2\ 4\ 1\ 3)^{-242} = (2\ 4\ 1\ 3)^{-244+2} = (2\ 4\ 1\ 3)^{-244}(2\ 4\ 1\ 3)^2 =$
$=(2\ 4\ 1\ 3)^2 = (2\ 1)(4\ 3)$

$(2\ 1\ 5\ 7\ 4)^{-72} = (2\ 1\ 5\ 7\ 4)^{-70-2} = (2\ 1\ 5\ 7\ 4)^{-2} = (4\ 5\ 2\ 7\ 1)$,

$(3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{394} = (3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{396-2} = (\boxed{3}\ 1\ \boxed{7}\ 6\ \boxed{4}\ 5)^{-2} =$
$=(5\ 6\ 1)(4\ 7\ 3)$,

$(3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{-21} = (3\ 1\ 7\ 6\ 4\ 5)^{-24+3} = (3\ \boxed{1}\ 7\ 6\ \boxed{4}\ 5)^3 =$
$= (3\ 6)(1\ 4)(7\ 5)$.

Задача 7. Представить следующие перестановки в виде произведений независимых циклов: $(1\ 3\ 5\ 2\ 4)(2\ 8\ 6\ 3\ 1)$, $(3\ 2\ 5\ 1\ 4\ 6)(1\ 6\ 2)(5\ 4)(7\ 2\ 1\ 3\ 6\ 4)$.

Решение. Обозначим $\sigma = (1\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $\tau = (2\ 8\ 6\ 3\ 1)$, $\pi = \sigma\tau$. Имеем $1 \overset{\tau}{\mapsto} 2 \overset{\sigma}{\mapsto} 4$, $4 \overset{\tau}{\mapsto} 4 \overset{\sigma}{\mapsto} 1$, а следовательно, $1 \overset{\pi}{\mapsto} 4 \overset{\pi}{\mapsto} 1$, т.е. выделили цикл $\pi_1 = (1\ 4)$, входящий в разложение π в произведение независимых циклов. Совершенно аналогично находим другие циклы:

$\pi_2 = (3)$ (так как $3 \overset{\tau}{\mapsto} 1 \overset{\sigma}{\mapsto} 3$, а следовательно, $3 \overset{\pi}{\mapsto} 3$),

$\pi_3 = (5\ \ 2\ \ 8\ \ 6)$ (так как $5 \overset{\pi}{\mapsto} 2 \overset{\pi}{\mapsto} 8 \overset{\pi}{\mapsto} 6 \overset{\pi}{\mapsto} 5$).

Поскольку в выделенные циклы вошли все элементы, встречающиеся в σ, τ, то

$$\pi = \pi_1\pi_2\pi_3 = (1\ 4)(3)(5\ 2\ 8\ 6) = (1\ 4)(5\ 2\ 8\ 6).$$

Для второй перестановки из задачи 7 имеем

$(3\ 2\ 5\ 1\ 4\ 6)(1\ 6\ 2)(5\ 4)(7\ 2\ 1\ 3\ 6\ 4) = (1\ 2\ 3\ 5\ 6)(4\ 7)$.

Задача 8. Пусть

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 10 & 1 & 11 & 8 & 7 & 2 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \in S_{11}\,.$$

Определить порядок π. Найти π^{218}, π^{-17} (представить эти перестановки в виде произведений независимых циклов и в виде двухрядных символов).

Решение. Представим π в виде произведения независимых циклов

$$\pi = (1\ 4)(2\ 6\ 8)(3\ 10\ 5\ 11\ 9).$$

Используя задачу 4, определяем порядок q перестановки $\pi \in S_{11}$

$$q = \text{НОК}(2,3,5) = 30.$$

Используя перестановочность независимых циклов, имеем

$$\pi^{218} = (1\ 4)^{218}(2\ 6\ 8)^{218}(3\ 10\ 5\ 11\ 9)^{218},$$

откуда в силу $(1\ 4)^2 = e$, $(2\ 6\ 8)^3 = e$, $(3\ 10\ 5\ 11\ 9)^5 = e$, получаем

$$\pi^{218} = (1\ 4)^{2\cdot 109}(2\ 6\ 8)^{3\cdot 72-1}(3\ 10\ 5\ 11\ 9)^{5\cdot 44-2} =$$
$$= e\,(2\ 6\ 8)^{-1}(3\ 10\ 5\ 11\ 9)^{-2} =$$
$$= (8\ 6\ 2)(9\ 5\ 3\ 11\ 10).$$

Представим π^{218} в виде двухрядного символа

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 8 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Далее, аналогично предыдущему получаем

$$\pi^{-17} = (1\ 4)^{-17}(2\ 6\ 8)^{-17}(5\ 11\ 9\ 3\ 10)^{-17} =$$
$$=(1\ 4)^{2\cdot(-9)+1}(2\ 6\ 8)^{3\cdot(-6)+1}(5\ 11\ 9\ 3\ 10)^{5\cdot(-3)-2}=$$
$$=(1\ 4)(2\ 6\ 8)(3\ 10\ 5\ 11\ 9)^{-2}= (1\ 4)(2\ 6\ 8)(9\ 5\ 3\ 11\ 10).$$

$$\pi^{-17}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 6 & 11 & 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 9. Представить перестановки в виде произведений независимых циклов:

а) $[(1\ 5\ 2\ 4\ 3)(2\ 7\ 5)(7\ 1\ 8)(6\ 3\ 5)]^{-322}$,

б) $[(2\ 1\ 4\ 5\ 8)(3\ 6\ 7)(8\ 4\ 5\ 1\ 6)(3\ 4)]^{204}$,

в) $[(3\ 2\ 5\ 6\ 4)(7\ 8\ 1\ 3\ 5)(4\ 8)(6\ 2\ 1\ 7\ 3)]^{-62}$,

г) $[(4\ 1\ 2\ 5\ 8)(1\ 3\ 2\ 6)(5\ 4\ 1\ 8)(6\ 2\ 7\ 4)]^{273}$.

Решение. а) Обозначим

$\pi = (1\ 5\ 2\ 4\ 3)(2\ 7\ 5)(7\ 1\ 8)(6\ 3\ 5).$

Представим π в виде произведения независимых циклов

$\pi = (1\ 8\ 2\ 7\ 5\ 6)(3\ 4).$

Далее, имеем

$$\pi^{-322} = (1\ 8\ 2\ 7\ 5\ 6)^{-322}(2\ 7)^{-322}(3\ 4)^{-322} =$$
$$= (1\ 8\ 2\ 7\ 5\ 6)^{-324+2} = (1\ 8\ 2\ 7\ 5\ 6)^2 = (1\ 2\ 5)(8\ 7\ 6).$$

б) Обозначим

$\pi = (2\ 1\ 4\ 5\ 8)(3\ 6\ 7)(8\ 4\ 5\ 1\ 6)(3\ 4).$

Представим π в виде произведения независимых циклов

$\pi = (1\ 7\ 3\ 8\ 5\ 4\ 6\ 2).$

Далее, имеем

$$\pi^{204} = (1\ 7\ 3\ 8\ 5\ 4\ 6\ 2)^{204} = (1\ 7\ 3\ 8\ 5\ 4\ 6\ 2)^{200+4} =$$
$$= (1\ 7\ 3\ 8\ 5\ 4\ 6\ 2)^4 = (1\ 5)(7\ 4)(3\ 6)(8\ 2).$$

в) Обозначим

$\pi = (3\ 2\ 5\ 6\ 4)(7\ 8\ 1\ 3\ 5)(4\ 8)(6\ 2\ 1\ 7\ 3).$

Представим π в виде произведения независимых циклов

$\pi = (1\ 8\ 3\ 4)(2)(5\ 7\ 6) = (1\ 8\ 3\ 4)(5\ 7\ 6).$

Далее, имеем

$$\pi^{-62} = (1\ 8\ 3\ 4)^{-62}(5\ 7\ 6)^{-62} = (1\ 8\ 3\ 4)^{-64+2}(5\ 7\ 6)^{-63+1} =$$
$$= (1\ 8\ 3\ 4)^2(5\ 7\ 6) = (1\ 3)(8\ 4)(5\ 7\ 6).$$

г) Обозначим

$\pi = (4\ 1\ 2\ 5\ 8)(1\ 3\ 2\ 6)(5\ 4\ 1\ 8)(6\ 2\ 7\ 4).$

Представим π в виде произведения независимых циклов

$\pi = (1\ 4\ 2\ 7\ 3\ 5)(6)(8) = (1\ 4\ 2\ 7\ 3\ 5).$

Далее, имеем

$$\pi^{273} = (1\ 4\ 2\ 7\ 3\ 5)^{270+3} = (1\ 4\ 2\ 7\ 3\ 5)^3 = (1\ 7)(4\ 3)(2\ 5).$$

3. Транспозиции. Разложение перестановки в произведение транспозиций. Знакопеременная группа.

Перестановка из S_n, являющаяся циклом длины 2, называется транспозицией. Любая транспозиция имеет вид $(i\ j)$, где $i \neq j$.

Она оставляет на месте все символы, отличные от i, j.

Для любого цикла $(i_1\ i_2\ \dots\ i_\ell)$, очевидно, имеем

$$(i_1\ i_2\ \dots\ i_\ell) = (i_1\ i_\ell)(i_1\ i_{\ell-1})\dots(i_1\ i_2),$$

откуда, используя то, что любую перестановку $\pi \in S_n$, $\pi \neq e$, можно разложить в произведение независимых циклов, следует, что π можно представить в виде произведения транспозиций (очевидно, что $e = (1\ 2)(1\ 2)$, т.е. ограничение $\pi \neq e$ не является существенным).

Пример 3. Представим следующие перестановки в виде произведения ~~независимых циклов~~ транспозиций.

а) $(2\ 3\ 4) = (2\ 4)(2\ 3)$;

б) $(3\ 2\ 4\ 1\ 5\ 6\ 8\ 7) = (3\ 7)(3\ 8)(3\ 6)(3\ 5)(3\ 1)(3\ 4)(3\ 2)$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & 2 & 9 & 1 & 11 & 12 & 10 \end{pmatrix} =$

$= (1\ 3\ 6\ 8\ 9)(2\ 4\ 5\ 7)(10\ 11\ 12) =$

$= (1\ 9)(1\ 8)(1\ 6)(1\ 3)(2\ 7)(2\ 5)(2\ 4)(10\ 12)(10\ 11)$.

Пусть $\pi \in S_n$ и $f(x_1,\dots,x_n)$ - функция от n аргументов. Положим $\pi \circ f(x_1,\dots,x_n) = f(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})$, т.е. ввели новую функцию $g = \pi \circ f$. При этом говорят, что функция g <u>получается действием</u> π <u>на</u> f.

Пример 4. Пусть $\pi = (1\ 2\ 3\ 4)$, $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+2x_2-3x_3+5x_4$. Тогда $\pi \circ f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2+2x_3-3x_4+5x_1$.

Функция $f(x_1,\dots,x_n)$, где $n \geq 2$, называется <u>кососимметрической</u>, если для любой транспозиции $\tau = (i\ j) \in S_n$ выполняется $\tau \circ f = -f$, т.е. $f(\dots,x_j,\dots,x_i,\dots) = -f(\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)$.

Пример 4. Пусть

$$\Delta_n(x_1,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что Δ_n - кососимметрическая функция (так как при перестановке столбцов в матрице определитель этой матрицы меняет знак на противоположный). Нетрудно показать, что $\Delta_n(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $x_i \neq x_j$ при всех $i \neq j$, а следовательно, $\Delta_n \neq 0$.

Заметим, что для любой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ выполняется

(10) $\forall \alpha,\beta \in S_n \quad (\alpha\beta)\circ f = \alpha\circ(\beta\circ f)$.

Действительно,

$$(\alpha\beta)\circ f(x_1,\dots,x_n) = f(x_{(\alpha\beta)(1)},\dots,x_{(\alpha\beta)(n)}) = f(x_{\alpha(\beta(1))},\dots, x_{\alpha(\beta(n))}) = \alpha\circ f(x_{\beta(1)},\dots,x_{\beta(n)}) = \alpha\circ(\beta\circ f(x_1,\dots,x_n)).$$

Пусть $\pi \in S_n$ и $\pi = \tau_1 \dots \tau_k$ – какое-нибудь разложение перестановки π в произведение транспозиций. В силу (10) для любой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ имеем

$$\pi\circ f = (\tau_1 \dots \tau_k)\circ f = \tau_1\circ(\tau_2\circ\dots(\tau_k\circ f)\dots).$$

В частности, при $f = \Delta_n$ имеем

$$\pi\circ\Delta_n = (-1)^k\Delta_n,$$

откуда следует, что четность целого числа k, выражающего количество транспозиций в разложении перестановки π в произведение транспозиций всегда одна и та же для данной перестановки π и не зависит от способа разложения. Но тогда и величина $\varepsilon_\pi = (-1)^k$, называемая четностью π (иначе: сигнатурой или знаком π) полностью определяется перестановкой π и не зависит от способа разложения π в произведение транспозиций. Таким образом

$$\forall \pi \in S_n \quad \pi\circ\Delta_n = \varepsilon_\pi \Delta_n,$$

откуда, используя (10), имеем

$$\forall \alpha,\beta \in S_n \quad \varepsilon_{\alpha\beta}\Delta_n = (\alpha\beta)\circ\Delta_n = \alpha\circ(\beta\circ\Delta_n) = \alpha\circ(\varepsilon_\beta\Delta_n) = \varepsilon_\beta(\alpha\circ\Delta_n) = \varepsilon_\beta(\varepsilon_\alpha\Delta_n) = (\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)\Delta_n,$$

а следовательно,

(11) $\forall \alpha,\beta \in S_n \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta$.

Пусть $\pi \in S_n$. Если $\varepsilon_\pi = 1$, то перестановка π называется <u>четной</u>, а в случае $\varepsilon_\pi = -1$ она называется <u>нечетной</u>.

Покажем, что все четные перестановки из S_n образуют подгруппу $A_n \subset S_n$ (она называется <u>знакопеременной группой степени</u> n)

Действительно, в силу (II), если $\alpha, \beta \in A_n$, то $\alpha\beta \in A_n$. Далее, в силу $e=(1\ 2)(1\ 2)$ имеем $\varepsilon_e = 1, e \in A_n$. Но тогда, используя (II), получаем $\forall \alpha \in S_n \quad \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha^{-1}} = \varepsilon_{\alpha\alpha^{-1}} = \varepsilon_e = 1$, откуда следует, что, если $\alpha \in A_n$, то $\alpha^{-1} \in A_n$. Таким образом, выполнены все аксиомы группы.

Обозначим через $\overline{A}_n$ множество всех нечетных перестановок. Тогда $S_n = A_n \cup \overline{A}_n$, $A_n \cap \overline{A}_n = \varnothing$, т.е. $\{A_n, \overline{A}_n\}$ – разбиение группы S_n.

<u>Задача I0</u>. Показать, что

(I2) $\quad A_n = (1\ 2)\overline{A}_n, \quad \overline{A}_n = (1\ 2)A_n$.

<u>Решение</u>. Очевидно, что $\forall \alpha \in \overline{A}_n \quad (1\ 2)\alpha \in A_n$, а следовательно,

(I3) $\quad (1\ 2)\overline{A}_n \subset A_n$,

откуда, умножая обе части на $(1\ 2)$, получаем

(I4) $\quad \overline{A}_n \subset (1\ 2)A_n$.

С другой стороны, $\forall \alpha \in A_n \quad (1\ 2)\alpha \in \overline{A}_n$, а следовательно,

(I5) $\quad (1\ 2)A_n \subset \overline{A}_n$,

откуда

(I6) $\quad A_n \subset (1\ 2)\overline{A}_n$.

Из (I3)-(I6) и следует справедливость (I2).

<u>Задача II</u>. Показать, что $|A_n| = |\overline{A}_n| = n!/2$.

<u>Решение</u>. Из (I2) следует, что $|A_n| = |\overline{A}_n|$. Но тогда $|S_n| = |A_n| + |\overline{A}_n| = 2|A_n|$, а следовательно, $|A_n| = |\overline{A}_n| = |S_n|/2 = n!/2$.

Пусть $\sigma = (i_1\ i_2 \dots i_\ell)$ – цикл длины ℓ, где $\ell \geqslant 2$. Тогда в силу $\sigma = (i_1\ i_\ell)(i_1\ i_{\ell-1})\dots(i_1\ i_2)$ получаем, что $\varepsilon_\sigma = (-1)^{\ell-1}$. Пусть теперь $\pi = \pi_1 \dots \pi_k$, где $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ π_i – цикл длины ℓ_i. Тогда, используя формулу (II), получаем

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon_{\pi_1} \cdots \varepsilon_{\pi_k} = (-1)^{\sum_{i=1}^{k}(\ell_i - 1)}.$$

<u>Задача I2</u>. Определить четность перестановок: $\pi_1 = (3\ 2\ 4\ 6)$, $\pi_2 = (1\ 5\ 2\ 6\ 8)(3\ 4\ 2\ 1\ 7\ 9)(5\ 3\ 6\ 2)$, $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 10 & 5 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2

Решение. $\varepsilon_{\pi_1} = (-1)^{4-1} = (-1)^3 = -1$; $\varepsilon_{\pi_2} = (-1)^{4+5+3} = (-1)^{12} = 1$; $\pi_3 = (1\ 4\ 5)(2\ 6\ 8\ 9)(3\ 10\ 7)$, $\varepsilon_{\pi_3} = (-1)^{2+3+2} = -1$.

Задача 13. Доказать, что

$$S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle .$$

Решение. В силу того, что любую перестановку из S_n можно представить в виде произведения транспозиций, имеем

$$S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), \ldots, (n-1\ \ n) \rangle ,$$

а следовательно, для решения задачи достаточно показать, что

(17) $\quad (i\ j) \in \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$,

где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Для доказательства (17) достаточно заметить, что $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$.

Задача 14. Доказать, что

(18) $\quad A_n = \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$,

Решение. Поскольку любую перестановку $\pi \in A_n$ можно представить в виде произведения лишь четного числа транспозиций, то, используя предыдущую задачу, получаем, что π можно представить в виде произведения перестановок вида

$$\sigma = (1\ i)(1\ j), \text{ где } i \neq 1, j \neq 1.$$

Покажем, что $\sigma \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$, откуда и будет следовать справедливость (18). Возможны случаи: а) $i = 2, j = 2$; б) $i = 2, j \neq 2$; в) $i \neq 2, j = 2$; г) $i \neq 2, j \neq 2$. В случае а) $\sigma = (1\ 2)(1\ 2) = e \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$. В случае б) $\sigma = (1\ 2)(1\ j) = (1\ j\ 2) = (1\ 2\ j)(1\ 2\ j) \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$. В случае в) $\sigma = (1\ i)(1\ 2) = (1\ 2\ i) \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$. В случае г) $\sigma = (1\ i)(1\ j) = (1\ i)(1\ 2)(1\ 2)(1\ j) = \sigma_1 \sigma_2$, где $\sigma_1 = (1\ i)(1\ 2) \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$, $\sigma_2 = (1\ 2)(1\ j) \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$ (см. случаи б), в)), а следовательно, $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \in \langle (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), \ldots, (1\ 2\ n) \rangle$.

Задача 15. Доказать, что $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \ldots\ n) \rangle$.

Решение. Обозначим $H = \langle (1\ 2), (1\ 2\ \ldots\ n) \rangle$. Заметим, что

$(1\ 2\ \dots\ n)(1\ 2)(n\ \ n-1\ \dots\ 2\ 1) = (2\ 3)$,

$(1\ 2\ \dots\ n)(2\ 3)(n\ \ n-1\ \dots\ 2\ 1) = (3\ 4)$,

....

$(1\ 2\ \dots\ n)(n-2\ \ n-1)(n\ \ n-1\ \dots\ 2\ 1) = (n-1\ \ n)$,

где $(n\ \ n-1\ \dots\ 2\ 1) = (1\ 2\ \dots\ n)^{-1} \in H$, т.е. имеем

(I9) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ \ n) \in H$.

Заметим, далее, что для любого цикла $\sigma = (i_1\ \ i_2 \dots i_\ell)$ выполняется

$$\sigma = (i_1\ \ i_2)(i_2\ \ i_3)\dots(i_{\ell-1}\ \ i_\ell),$$

а следовательно, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, используя (I9), получаем

$(n\ \ n-1\ \dots\ i) = (n\ \ n-1)(n-1\ \ n-2)\dots(i+1\ \ i) =$

$= (n-1\ \ n)(n-2\ \ n-1)\dots(i\ \ i+1) \in H$.

Заметим, кроме того, что

$$(1\ 2\ \dots\ n)(1\ 2) = (1\ 3\ 4\ \dots\ n) \in H,$$
$$(1\ 3\ 4\ \dots\ n)(n\ \ n-1\ \dots\ 4\ 3) = (1\ 3) \in H,$$
$$(1\ 3\ 4\ \dots\ n)(1\ 3) = (1\ 4\ 5\ \dots\ n) \in H,$$
$$(1\ 4\ 5\ \dots\ n)(n\ \ n-1\ \dots\ 5\ 4) = (1\ 4) \in H,$$

....

$$(1\ \ n-2\ \ n-1\ \ n)(1\ \ n-2) = (1\ \ n-1\ \ n) \in H,$$
$$(1\ \ n-1\ \ n)(n\ \ n-1) = (1\ \ n-1) \in H,$$
$$(1\ \ n-1\ \ n)(1\ \ n-1) = (1\ \ n) \in H.$$

Таким образом, $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ \ n) \in H$, а следовательно, используя задачу I3, получаем $H = S_n$.