ЛЕКЦИЯ Б1. Упорядоченные пары. Прямое произведение множеств. Бинарные отношения. Операции над ними

Прямое произведение множеств. *Упорядоченная пара* $\langle a,b\rangle$ интуитивно определяется как совокупность двух предметов a и b, расположенных в строго определенном порядке. Основное свойство упорядоченных пар состоит в том, что $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c, b=d$.

Упражнение 2.1. Пусть $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$. Доказать, что

$$\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle \Leftrightarrow a=c, b=d.$$

Указание. Отдельно рассмотреть случаи: $a=b$, $a\neq b$.

Аналогично определяется упорядоченная n-ка $\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$.

Замечание 2.1. Можно определить:

$\langle a_1,a_2,a_3\rangle=\langle\langle a_1,a_2\rangle,a_3\rangle$, $\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle=\langle\langle a_1,a_2,a_3\rangle,a_4\rangle$, и т.д.

Основное свойство упорядоченных n-ок заключается в следующем:

$$\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle=\langle b_1,b_2,...,b_n\rangle \Leftrightarrow a_1=b_1,...,a_n=b_n.$$

Прямым (декартовым) произведением множеств $A_1,A_2,...,A_n$ называется множество $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{<a_1,...,a_n>|\ a_1\in A_1,...,\ a_n\in A_n\}$. В случае $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ будем кратко писать $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=A^n$.

Упражнение 2.2. Доказать, что если $A_1,A_2,...,A_n$ – конечные множества, то

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|.$$

Указание. Воспользоваться рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения 1.1.

Пример 2.1. Пусть $A=\{2;3\}, B=\{0;1;2\}$. Тогда $A\times B=\{\langle 2,0\rangle,$
$\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,0\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$, $B\times A=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$.

Заметим, что в приведенном примере $A\times B\neq B\times A$, т.е. операция $\times$ в общем случае не является коммутативной.

Пример 2.2. Пусть $A=[0;2], B=[0;1]$. Тогда $A\times B==\{\langle a,b\rangle|\ a\in[0;2], b\in[0;1]\}$ – прямоугольник (см. рис. 2.1).

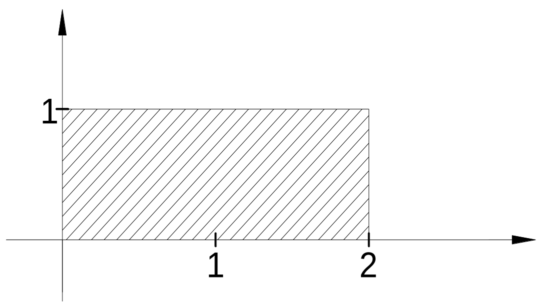

Рис. 2.1

Пример 2.3. Пусть A – множество юношей, B – множество девушек. Тогда $A\times B$ – множество супружеских пар, которые можно составить из A и B.

Приведем некоторые тождества, связанные с прямым произведением множеств. Для любых множеств $A,B,C,$ являющихся подмножествами некоторого универсального множества U, справедливы равенства:

1. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$; $\quad$ 1′. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

2. $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$; 3. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;
4. $(A+B)\times C=(A\times C)+(B\times C)$.

2′. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;
3′. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;
4′. $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$.

Докажем тождество 1. Для любых $x,y\in U$ имеем:

$$\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times C\Rightarrow x\in A\cup B, y\in C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\in C,\left[\begin{array}{c} x\in A\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\\ x\notin A\Rightarrow x\in B\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cup(B\times C).$$

С другой стороны, для любых $x,y\in U$ имеем:

$$\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\langle x,y\rangle\in A\times C\Rightarrow x\in A, y\in C\\ \langle x,y\rangle\notin A\times C\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C\Rightarrow x\in B, y\in C\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in A\cup B, y\in C\Rightarrow\langle x,y\rangle\in(A\cup B)\times C.$$

Докажем тождество 2. Для любых $x,y\in U$ имеем:

$\langle x,y\rangle\in\in(A\cap B)\times C\Leftrightarrow x\in A\cap B, y\in C\Leftrightarrow x\in A, x\in B, y\in C\Leftrightarrow\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C,$
$\langle x,y\rangle\in B\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C)$.

Докажем тождество 3. Для любых $x,y\in U$ имеем:

$\langle x,y\rangle\in\in(A\setminus B)\times C\Leftrightarrow x\in A\setminus B, y\in C\Leftrightarrow x\in A, x\notin B, y\in C\Leftrightarrow\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C,$
$\langle x,y\rangle\notin B\times C\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Докажем тождество 4. В силу доказанных тождеств 1,3
имеем: $(A+B)\times C=[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\times C=[(A\setminus B)\times C]\cup[(B\setminus A)\times C]=$
$=[(A\times C)\setminus(B\times C)]\cup[(B\times C)\setminus(A\times C)]=(A\times C)+(B\times C)$.

Тождества $1'-4'$ доказываются аналогично тождествам 1–4.

Бинарные отношения. Введем понятие *бинарного отношения*. Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A\times B$. Если $A=B$, то бинарное отношение ρ называется бинарным отношением на множестве A. Вместо $\langle x,y\rangle\in\rho$ часто пишут $x\rho y$.

Пример 2.4. Пусть $Л$ – множество всех людей. Рассмотрим бинарное отношение $о\subseteq Л^2$ такое, что $<x,y>\in о\Leftrightarrow x$ является отцом y. Таким образом, $о$ – бинарное отношение отцовства. Аналогичным образом можно определить бинарное отношение материнства $м$, а также большое многообразие бинарных отношений на множестве всех людей $Л$: дружбы, любви, ненависти, вражды и т.д. (в том числе большое многообразие родственных отношений: брат, сестра, двоюродный брат, сводный брат, племянник, внук и т.д.). Например, бинарное отношение *внук* на множестве людей $Л$ определяется следующим образом: x *внук* $y\Leftrightarrow\exists z:[(y\ о\ z$ или $y\ м\ z),(z\ о\ x$ или $z\ м\ x)]$.

Пример 2.5. Пусть R – множество действительных чисел. Тогда
$\rho=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in \mathrm{R},\ \exists z\in\mathrm{R}: x+z^2=y\}$ – бинарное отношение на множестве R, которое обычно обозначается ≤ (≤ – множество точек из заштрихованной области; см. рис. 2.2). Обычно вместо $\langle x,y\rangle\in\le$ пишем $x\le y$.

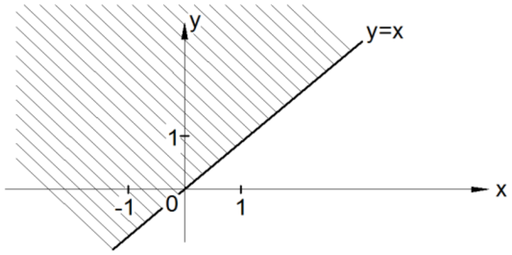

Рис. 2.2

Пример 2.6. $\rho = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathrm{R}\ ,\ y \geq x^2\}$ – бинарное отношение на множестве действительных чисел R (ρ – множество точек из заштрихованной области; см. рис. 2.3)

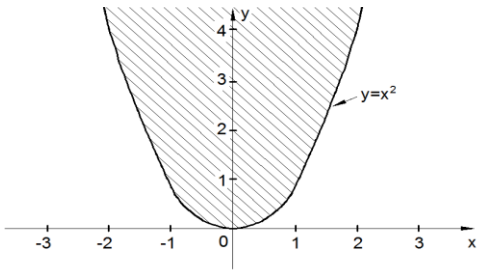

Рис. 2.3

Пример 2.7. Пусть $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$. Тогда $\rho = \{<1,4>, <2,3>\}$ – бинарное отношение между элементами множеств A и B, так как $\rho \subseteq A \times B = \{<1,3>,<1,4>,<2,3>,<2,4>\}$.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \left\{x \middle| \exists y : \langle x, y\rangle \in \rho\right\}$ (т.е. D_ρ – это множество всех первых элементов пар из ρ). *Множеством значений* бинарного отношения ρ называется множество $R_\rho = \left\{y \middle| \exists x : \langle x, y\rangle \in \rho\right\}$ (т.е. R_ρ – это множество всех вторых элементов пар из ρ).

В примере 2.4 D_o – это множество всех отцов, а R_o – это множество всех людей. В примере 2.5 $D_\rho = \mathrm{R}$, $R_\rho = \mathrm{R}$. В примере 2.6 $D_\rho = \mathrm{R}$, $R_\rho = \{x \in \mathrm{R} \mid x \geq 0\}$. В примере 2.7 $D_\rho = \{1,2\}$, $R_\rho = \{3,4\}$.

Операции над бинарными отношениями. Для бинарных отношений определены обычным образом теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д. Абсолютным дополнением бинарного отношения ρ между элементами множеств A и B считается множество $\overline{\rho} = (A \times B) \setminus \rho$. Например, абсолютным дополнением бинарного отношения $\leq$ на R является бинарное отношение $>$ на R.

Обратным отношением для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется отношение $\rho^{-1} = \{<y, x> | <x, y> \in \rho\} \subseteq B \times A$, т.е. получаемое из ρ переворачиванием пар.

Произведением бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B, \rho_2 \subseteq B \times C$ называется бинарное отношение $\rho_1 \circ \rho_2 \subseteq A \times C$, задаваемое равенством:
$\rho_1 \circ \rho_2 = \{\langle x, z\rangle \in A \times C \mid \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in \rho_1, \langle y, z\rangle \in \rho_2\}$.

Если ρ – бинарное отношение на множестве, то будем кратко писать $\rho^2 = \rho \circ \rho$, $\rho^3 = \rho \circ \rho \circ \rho$ и т.д.

Приведем некоторые свойства этих операций.

Утверждение 2.1. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A \times B$,

$\rho_2 \subseteq B\times C$ выполняется $(\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1} \subseteq C \times A$.

Доказательство. Пусть $\langle z, x\rangle \in C \times A$. Тогда

$\langle z,x\rangle \in \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow \langle x,z\rangle \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in \rho_1,$
$\langle y,z\rangle \in \rho_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle z, y\rangle \in \rho_2^{-1}, \langle y,x\rangle \in \rho_1^{-1} \Leftrightarrow \langle z,x\rangle \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

Утверждение 2.2. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A\times B,\ \rho_2 \subseteq B\times C,\ \rho_3 \subseteq C\times D$ выполняется $\rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = = (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq A\times D$.

Доказательство. Для любой пары $\langle x,u\rangle \in A\times D$ имеем:

$$\langle x,u\rangle \in \rho_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) \Leftrightarrow \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in \rho_1, \langle y,u\rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in B, \exists z \in C : \langle x, y\rangle \in \rho_1, \langle y, z\rangle \in \rho_2, \langle z,u\rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists z \in C : \langle x, z\rangle \in \rho_1 \circ \rho_2, \langle z,u\rangle \in \rho_3 \Leftrightarrow \langle x,u\rangle \in (\rho_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3.$$

Утверждение 2.3. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A\times B,\ \rho_2 \subseteq A\times B,\ \rho_3 \subseteq B\times C$ выполняется:

(а) $(\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A\times C;$

(б) $(\rho_1 \cap \rho_2) \circ \rho_3 \subseteq (\rho_1 \circ \rho_3) \cap (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A\times C;$

(в) $(\rho_1 \setminus \rho_2) \circ \rho_3 \supseteq (\rho_1 \circ \rho_3) \setminus (\rho_2 \circ \rho_3) \subseteq A\times C.$

Доказательство. Докажем (а). Пусть $< x, z >\in A\times C$. Тогда

$$\langle x,z\rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y, z\rangle \in \rho_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle y,z\rangle \in \rho_3, \left[\begin{array}{c} \langle x,y\rangle \in \rho_1 \Rightarrow \langle x,z\rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \\ \langle x,y\rangle \notin \rho_1 \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \rho_2 \Rightarrow \langle x,z\rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \end{array}\right] \Rightarrow \Rightarrow \langle x,z\rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3).$$

С другой стороны, $\langle x, z\rangle \in (\rho_1 \circ \rho_3) \cup (\rho_2 \circ \rho_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \langle x,z\rangle \in \rho_1 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_1 \in B : \langle x, y_1\rangle \in \rho_1, \langle y_1, z\rangle \in \rho_3 \\ \langle x,z\rangle \in \rho_2 \circ \rho_3 \Rightarrow \exists y_2 \in B : \langle x, y_2\rangle \in \rho_2, \langle y_2, z\rangle \in \rho_3 \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists y \in B : \langle x, y\rangle \in \rho_1 \cup \rho_2, \langle y, z\rangle \in \rho_3 \Rightarrow \langle x,z\rangle \in (\rho_1 \cup \rho_2) \circ \rho_3.$$

Доказательство (б), (в) аналогично.

Утверждение 2.4. Для любых бинарных отношений $\rho_1 \subseteq A\times B,\quad \rho_2 \subseteq B\times C,\ \rho_3 \subseteq B\times C$ выполняется:

(а) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cup \rho_3) = (\rho_1 \circ \rho_2) \cup (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A\times C;$

(б) $\rho_1 \circ (\rho_2 \cap \rho_3) \subseteq (\rho_1 \circ \rho_2) \cap (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A\times C;$

(в) $\rho_1 \circ (\rho_2 \setminus \rho_3) \supseteq (\rho_1 \circ \rho_2) \setminus (\rho_1 \circ \rho_3) \subseteq A\times C.$

Доказательство утверждения 2.4 аналогично доказательству утверждения 2.3. Приведите примеры бинарных отношений ρ_1, ρ_2, ρ_3 на множестве $A = \{1, 2, 3\}$, для которых в утверждениях 2.3, 2.4 не выполняются равенства в случаях (б), (в).