ЛЕКЦИЯ ЛП1. ПРЕДИКАТЫ, КВАНТОРЫ, ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Логика высказываний – очень узкая логическая система. Есть такие типы логических рассуждений, которые не могут быть осуществлены в рамках логики высказываний, например:

1. Всякий друг Ивана есть друг Петра. Сидор не есть друг Петра. Следовательно, Сидор не есть друг Ивана.

2. Простое число два – четное. Следовательно, существуют простые четные числа.

Корректность этих умозаключений основана на внутренней структуре самих предложений и на смысле слов «всякий» и «существуют».

1.4.1. Предикаты, кванторы. Формулы логики предикатов

Рассмотрим предложения, зависящие от параметров, например: «x – четное число», «x меньше y», «$x + y = z$», «x – отец y», «x и y – братья» и т. п. Если x, y, z в первых трех предложениях заменить некоторыми числами, то получим определенные высказывания, Которые могут быть истинными или ложными. Например: «3 – четное число», «2 меньше 5», «3 + 2 = 7». Последние два предложения выражают родственные отношения между членами семьи и также превращаются в определенные высказывания, истинные или ложные, при замене x и y именами членов этой семьи: «Иван – отец Петра», «Иван и Олег – братья».

Предложения такого типа называются предикатами. Точнее, предикатом $P(x_1, \dots, x_n)$ называется функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества M, а сама она принимает два значения: И (истинное) или Л (ложное), т. е. $P(x_1, \dots, x_n)$: $M^n \to \{И, Л\}$.

Предикат от n аргументов называют n-местным предикатом. Множество M значений переменных определяется обычно математическим контекстом. Например, основное соотношение элементарной геометрии на плоскости – точки x, y, z лежат на одной прямой – выражается предикатом $L(x, y, z)$, где в качестве значений x, y и z рассматриваются конкретные точки.

Предикаты обозначаются большими буквами латинского, алфавита. Иногда бывает удобно указывать число переменных у предикатов. В таких случаях у символов предикатов пишут верхний индекс, который и указывает число аргументов, например: $P^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ – n-местный предикат. Высказывания считаются нуль-местными предикатами.

Над предикатами можно производить обычные логические операции. В результате получаются новые предикаты.

Пример 1.26.

1. Пусть $P^{(1)}(x)$ означает предикат «x делится на два», $Q^{(1)}(x)$ – предикат «x делится на три». Тогда выражение $P^{(1)}(x)$ & $Q^{(1)}(x)$ означает предикат «x делится на два и x делится на три», т. е. определяет предикат делимости на 6.

2. Пусть $S^{(2)}(x, y)$ означает предикат «$x = y$». Он принимает значение И тогда и только тогда, когда $x = y$. В этом случае выражение $\neg S^{(2)}(x, x) \supset S^{(2)}(x, y)$ определяет предикат, принимающий значение И при любых x и y.

Кроме операций логики высказываний будем применять еще операции связывания квантором.

Квантор общности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, принимающий значение И или Л для каждого элемента x множества М. Тогда под выражением $(\forall x)P(x)$ будем подразумевать высказывание истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента x из множества М, и ложное – в противном случае. Читается это выражение так: «для всех x Р(x)». Это высказывание уже не зависит от x. Символ $\forall x$ называется квантором общности.

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат. Под в выражением $(\exists x)P(x)$ будем понимать высказывание истинное, когда существует элемент множества М, для которого $P(x)$ истинно, и ложное – в противном случае. Читается это выражение так: «существует x такое, что $P(x)$» или «существует x, для которого $P(x)$». Символ $\exists x$ называется квантором существования.

Операцию связывания квантором можно применять и к предикатам от большого числа переменных (подробнее об этом будет сказано позже).

Пример 1.27. Для предикатов, приведенных в примере 1.26, имеем: $(\exists x)(P^{(1)}(x)$ & $Q^{(1)}(x))$ – истинное высказывание; $(\forall x)(P^{(1)}(x)$ & $Q^{(1)}(x))$ – ложное высказывание.

На языке предикатов можно составить гораздо более сложные предложения, чем на языке логики высказываний.

Определим понятие формулы логики предикатов. Алфавит логики предикатов содержит следующие символы:

l) символы предметных переменных: $x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots$;

2) символы предикатов: $A_1^{(t)}, A_2^{(t)}, \dots, A_k^{(t)}, \dots$, где t=0, 1, 2, ... ;

3) логические символы: $\neg,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \sim$;

4) символы кванторов: $\exists$, $\forall$;

5) скобки и запятую:), (.

Во избежание нагромождения индексов часто символы предметных переменных будем обозначать через x, y, z, а символы предикатов – через P, S, Q, R и т. д.

Слово в алфавите логики предикатов называется формулой, если оно удовлетворяет следующему индуктивному определению (одновременно определяется понятие свободной и связанной переменной формулы):

1. Если $A_j^{(t)}$ – символ предиката, x_{i_1}, x_{i_2},…, x_{i_t} – символы предметных переменных, не обязательно различные, то $A_j^{(t)}$ $(x_{i_1},\ldots,x_{i_t})$ - формула. Такая формула называется *атомарной*. Все предметные переменные атомарных формул свободные, связанных переменных нет.

2. Пусть A – формула. Тогда $(\neg A)$ тоже формула. Свободные и связанные переменные формулы $(\neg A)$ – это соответственно свободные и связанные переменные формулы A.

3. Пусть A и B – формулы, причем нет таких предметных переменных, которые были бы связаны в одной формуле и свободны – в другой. Тогда

$$(A \vee B),\ (A \,\&\, B),\ (A \supset B),\ (A \sim B) \tag{1.4}$$

есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

4. Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x. Тогда

$$(\forall x)A,\ (\exists x)A \tag{1.5}$$

тоже формулы. Переменная x в них связана. Остальные же переменные, которые в формуле A свободны, остаются свободными и в формулах (1.5). Переменные, которые в формуле A связаны, остаются связанными и в формулах (1.5). В первой из формул (1.5) формула А называется *областью действия* квантора $\forall x$, а во второй – *областью действия* квантора $\exists x$.

5. Слово в алфавите логики предикатов 1 – 5 является формулой только в том случае, если это следует из правил 1 – 4.

Заметим, что по определению формулы никакая переменная не может быть одновременно свободной и связанной.

Оставим в силе принятое в разд. 1.1.1 соглашение об опускании скобок. Кроме того, операции связывания кванторами будем считать более сильными, чем любые логические операции.

Пример 1.28.

1. Следующие выражения являются формулами логики предикатов: $A_5^{(3)}(x_1,\ x_5,\ x_7)$ – атомарная формула, в которой $x_1,\ x_5,\ x_7$ – свободные переменные; $(\forall x_1)(\exists x_2)\ A_1^{(3)}(x_1,\ x_2,\ x_3) \supset (\forall x_1\ )\ A_1^{(2)}(x_1,\ x_4)$ – формула, в которой $x_1,\ x_2$ – связанные, а $x_3,\ x_4$ – свободные переменные.

2. Выражение $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^{(2)}(x_1,\ x_3)\&A_2^{(2)}(x_1,\ x_2)$ не является формулой.

Значение формулы определено лишь тогда, когда задана какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов.

Под *интерпретацией* понимают систему **M** = <М, *f*>, состоящую из непустого множества М и соответствия *f*, сопоставляющего каждому предикатному символу $A_j^{(t)}$ определенный t-местный предикат (будем обозначать предикаты, поставленные в соответствие предикатным символам, теми же символами).

При заданной интерпретации считают, что предметные переменные пробегают множество М, а символы $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\sim$ и символы кванторов имеют свой обычный смысл. Для данной интерпретации каждая формула без свободных переменных представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторый предикат на множестве М, который истинен при одних значениях переменных из этого множества и ложен при других.

Определим значение формулы в данной интерпретации, следуя индуктивным шагам определения формулы. Значение формулы F на наборе $<a_1,\ldots,a_n>$, где $a_i \in$ М, своих свободных переменных $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ обозначим символом $F|_{<a_1,\ldots,a_n>}$.

1. Формула F – атомарная формула $A_j^{(t)}(x_{i_1},\ldots,x_{i_t})$. Пусть $x_{j_1},\ldots,x_{j_s}$– все различные свободные переменные этой формулы, выписанные в определенном порядке. Значением формулы F на наборе $<a_1,\ldots,a_s>$, $a_j \in$ М, называется значение t-местного предиката, сопоставленного символу $A_j^{(t)}$ при соответствующем замещении его переменных элементами $a_1,\ldots,a_s$.

2. Формула F имеет вид $\neg A$. Пусть значение формулы A на наборе $<a_1,\ldots,a_n>$, $a_i \in M$, есть ε. Тогда $F|_{<a_1,\ldots,a_n>} = \neg\, \varepsilon$.

3. Формула F имеет вид $(A \vee B)$, $(A \,\&\, B)$, $(A \supset B)$ или $(A \sim B)$. Значение формулы F на наборе значений своих свободных переменных есть соответственно $\varepsilon_1 \vee \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \& \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \supset \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2$, где ε_1 – значение формулы A, а ε_2 – значение формулы B на этом наборе.

4. Формула F имеет вид $(\forall x)A$. Если $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ – совокупность всех свободных переменных формулы F, то x, $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ – все свободные переменные формулы A. Значение $(\forall x)A|_{<a_1,\ldots,a_n>} =$ И тогда и только тогда, когда для любого $a \in$ М $A|_{<a,a_1,\ldots,a_n>} =$ И.

5. Формула F имеет вид $(\exists x)A$. Если $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ – совокупность всех свободных переменных формулы F, то x, $x_{i_1},\ldots,x_{i_n}$ – все свободные переменные формулы A. Значение $(\exists x)A|_{<a_1,\ldots,a_n>} =$ И тогда и только тогда, когда для некоторого $a \in$ М $A|_{<a,a_1,\ldots,a_n>} =$ И.

Пример 1.29. Рассмотрим три формулы:

1) $A_1^{(2)}(x_1,\, x_2)$;

2) $(\forall x_2)A_1^{(2)}(x_1,\, x_2)$;

3) $(\exists x_2)(\forall x_1)A_1^{(2)}(x_2,\, x_1)$.

Возьмем в качестве области интерпретации множество целых положительных чисел и интерпретируем $A_1^{(2)}(x,y)$ как $x \le y$. Тогда первая формула – это предикат $x_1 \le x_2$, который принимает истинное значение для всех пар a, b целых положительных чисел таких, что $a \leq b$. Вторая формула выражает свойство: «для каждого целого положительного числа у $x \leq y$», которое выполняется только при x = 1. Наконец, третья формула – это истинное высказывание о существовании наименьшего целого положительного числа. Если бы в качестве области интерпретации мы рассматривали множество целых чисел, то третья формула была бы ложным высказыванием.

Пример 1.30. Пусть **M** = <N, *f*>, где N – множество натуральных чисел с добавлением числа 0, f – соответствие, сопоставляющее предикатным символам $S^{(3)}(x, y, z)$, $P^{(3)}(x, y, z)$ следующие предикаты: $S^{(3)}(x, y, z)$: $x + y = z$; $P^{(3)}(x, y, z)$: $xy = z$.

Запишем формулы, истинные в **M** тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) x = 0; б) x = 1 ; в) x – четное число; г) x – простое число; д) $x = y$; е) $x \leq y$; ж) x делит y; з) коммутативность сложения.

Ответы: а) $F_1(x)$= $(\forall y)S^{(3)}(x, y, y)$; так как $x + y = y$ для любого y тогда и только тогда, когда x = 0; б) $F_2(x)$ = $(\forall y)P^{(3)}(x, y, y)$; в) $F_3(x)$ = $(\exists y)S^{(3)}(y, y, x)$; г) $F_4(x)$= $\neg F_2(x) \& (\forall y)(\forall z)(P^{(3)}(y, z, x) \supset (F_2(y) \vee F_2(z)))$, где: F_1, F_2 – формулы, определенные в пп. «а» и «б»; д) $F_5(x)$ = $(\forall z)(\forall u)(S^{(3)}(x, z, u) \supset (S^{(3)}(y, z, u))$; е) $F_6(x, y)$ = $(\exists z)S^{(3)}(x, z, y)$; ж) $F_7(x, y)$ = $(\exists z)P^{(3)}(x, z, y)$; з) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S^{(3)}(x, y, z) \supset S^{(3)}(y, x, z))$

Пример 1.31. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

1. Рассмотрим интерпретацию **M** = <M, f_1>, где M - множество действительных чисел; f – соответствие, сопоставляющее предикатным символам $P(x, \delta)$, $Q(x, \varepsilon)$ и $R(\varepsilon)$ предикаты $P(x, \delta)$: $|x - x_0| < \delta$; $Q(x, \varepsilon)$: $|f(x) - A| < \varepsilon$; $R(\varepsilon)$: $\varepsilon > 0$. Здесь x_0 – фиксированный элемент отрезка $[a, b]$; A – некоторое фиксированное действительное число. Тогда утверждение о том, что число A – предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, записывается формулой

$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \& P(x, \delta)) \supset Q(x, \varepsilon))$.

2. Рассмотрим интерпретацию **M** = <M, f_2>, где M – множество действительны чисел; f_2 – соответствие, сопоставляющее предикатным символам $P(x, \delta)$, $R(\varepsilon)$ и $S(x, \varepsilon)$ предикаты $P(x, \delta)$: $|x - x_0| < \delta$, $R(\varepsilon)$: $\varepsilon > 0$, $S(x, \varepsilon)$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Здесь. x_0 – произвольный фиксированный элемент отрезка $[a, b]$. Тогда утверждение о том, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 записывается формулой

$(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((R(\varepsilon) \& P(x, \delta)) \supset S(x, \varepsilon))$.

3. Рассмотрим интерпретацию **M** = <M, f_3>, где M - множество действительных чисел; f_3 – соответствие, сопоставляющее предикатным символам $P_1(x, x_1, \delta)$, $R(\varepsilon)$, $S_1(x, x_1, \delta)$, $D(x)$ предикаты $P_1(x, x_1, \delta)$: $|x - x_1| < \delta$; $R(\varepsilon)$: $\varepsilon > 0$; $S_1(x, x_1, \delta)$: $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$; $D(x)$: $x \in [a, b]$. Тогда

утверждение о том, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, записывается формулой

$$(\forall x_1)\,(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall x)((D(x_1)\,\&R(\varepsilon)\&P_1(x,\ x_1,\ \delta))\supset S_1(x,\ x_1,\ \delta))$$

является общезначимой.