欧拉函数与欧拉定理

先来介绍几个与欧拉函数有关的定理：

定理一：设m与n是互素的正整数，那么

定理二：当n为奇数时，有。

因为2n是偶数，偶数与偶数一定不互素，所以只考虑2n与小于它的奇数互素的情况，则恰好就等于n的欧拉函数值。

定理三：设p是素数，a是一个正整数，那么

关于这个定理的证明用到容斥：

由于表示小于与互素数的正整数个数，所以用减去与它不互素的数的个数就行了。

那么小于与不互素数的个数就是p的倍数个数，有个。所以定理得证。

定理四：设为正整数n的素数幂分解，那么



这个定理可以根据定理一和定理三证明，其实用到的就是容斥。如果对容斥熟悉，其实完全就可以直接容斥。

定理五：设n是一个正整数，那么



这个其实可以看莫比乌斯反演就明白了。

定理六：设m是正整数，(a,m)=1，则：是同于方程的解。

定理七：如果n大于2，那么n的欧拉函数值是偶数。

求欧拉函数值：

1. **int** phi(**int** n)
2. {
3. **int** i,rea=n;
4. **for**(i=2;i\*i<=n;i++)
5. {
6. **if**(n%i==0)
7. {
8. rea=rea-rea/i;
9. **while**(n%i==0)  n/=i;
10. }
11. }
12. **if**(n>1)
13. rea=rea-rea/n;
14. **return** rea;
15. }

利用递推法求欧拉函数值：

算法原理：开始令i的欧拉函数值等于它本身，如果i为偶数，可以利用定理二变为求奇数的。

若p是一个正整数满足，那么p是素数，在遍历过程中如果遇到欧拉函数值等于自身的情况，那么

说明该数为素数。把这个数的欧拉函数值改变，同时也把能被该素因子整除的数改变。

1. **void** phi()
2. {
3. **for**(**int** i=1; i<N; i++)  p[i] = i;
4. **for**(**int** i=2; i<N; i+=2) p[i] >>= 1;
5. **for**(**int** i=3; i<N; i+=2)
6. {
7. **if**(p[i] == i)
8. {
9. **for**(**int** j=i; j<N; j+=i)
10. p[j] = p[j] - p[j] / i;
11. }
12. }

}