186.840 Einführung in die Mustererkennung (UE 2,0) 2015W

3. Übung

Tom Tucek, 1325775

15.01.2015

EINFÜHRUNG IN DIE MUSTERERKENNUNG, UE

UEBUNG 03

TOM TUCEK
1325775

$$A = \binom{0}{4}, \binom{6}{4}, \binom{6}{2}, \binom{0}{2} \qquad B = \binom{2}{-2}, \binom{4}{-2}, \binom{4}{-4}, \binom{2}{-4}$$

1. Schätzung Mittelwertvektoren

$$\hat{\mu}_A = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}}}$$

$$\hat{\mu}_B = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}}}$$

2. Schätzung Kovarianzmatrizen

$$\hat{\Sigma}_A = \frac{1}{4-1} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^T + \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^T \right.$$
$$\left. + \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^T + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right)^T \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}}}$$

$$\hat{\Sigma}_B = \frac{1}{4-1} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)^T + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)^T \right.$$
$$\left. + \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)^T + \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)^T \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}}}$$

3. Determinanten

$$|\Sigma|_A = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{16}} \qquad |\Sigma|_B = \begin{vmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\frac{16}{9}}}$$

4. Inverse

$$\Sigma_A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}}}$$

$$\Sigma_B^{-1} = \frac{9}{16}\begin{bmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}}}$$

5. Diskriminantenfunktion

$$g_A(x) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)\right\}} - \frac{1}{2}\ln(16)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1-3 & x_2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_1-3}{12} & \frac{3x_2-9}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2-3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(x_1-3)^2}{12} + \frac{3\cdot(x_2-3)^2}{4} = \frac{x_1^2-6x_1+9}{12} + \frac{3\cdot(x_2^2-6x_2+9)}{4}$$

$$= \frac{x_1^2}{12} - \frac{x_1}{2} + \cancel{\frac{3}{4}} + \frac{3x_2^2}{4} - \frac{18x_2}{4} + \cancel{\frac{27}{4}} + \frac{30}{4} = d_A^2$$

$$g_A(x) = -\frac{1}{2}d_A^2 - \frac{1}{2}\ln(16)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{x_1^2}{24} + \frac{x_1}{4} - \frac{3x_2^2}{8} + \frac{9x_2}{4} - \frac{15}{4} - \frac{1}{2}\ln(16)}}$$

$$g_B(x) = -\frac{1}{2}\underbrace{\left\{\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right)\right\}} - \frac{1}{2}\ln(16/9)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1-3 & x_2+3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3(x_1-3)}{4} & \frac{3(x_2+3)}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-3 \\ x_2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3(x_1-3)^2}{4} + \frac{3(x_2+3)^2}{4} = \frac{3x_1^2}{4} - \frac{18x_1}{4} + \frac{27}{4} + \frac{3x_2^2}{4} - \frac{18x_2}{4} + \frac{27}{4}$$

$$= \underline{\frac{3x_1^2}{4} - \frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2^2}{4} + \frac{9x_2}{2} + \frac{27}{2} = d_B^2}$$

$$g_B(x) = -\frac{1}{2}d_B^2 - \frac{1}{2}\ln(16/9)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3x_1^2}{8} + \frac{9x_1}{4} - \frac{3x_2^2}{8} - \frac{9x_2}{4} - \frac{27}{4} - \frac{1}{2}\ln(16/9)}}$$

6. Entscheidungsgrenze

$$0 = g_A(x) - g_B(x)$$

$$0 = \left[-\frac{1}{24}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1 - \cancel{\frac{3}{8}x_2^2} + \cancel{\frac{9}{4}x_2} - \frac{15}{4} - \frac{1}{2}\ln(16)\right]$$

$$+ \frac{3}{8}x_1^2 - \frac{9}{4}x_1 + \cancel{\frac{3}{8}x_2^2} + \cancel{\frac{9}{4}x_2} + \frac{27}{4} + \frac{1}{2}\ln(16/9)$$

$$= \frac{8}{24}x_1^2 - \frac{8}{4}x_1 + \frac{12}{4} - \frac{1}{2}\ln(16) + \frac{1}{2}\ln(16/9) + \frac{9}{2}x_2$$

$$= \frac{1}{3}x_1^2 - 2x_1 + 1{,}9013877113 + \frac{9}{2}x_2 \rightarrow \frac{9}{2}x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2 + 2x_1 - 1{,}9$$

$$\boxed{x_2 = \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}x_1^2 + 2x_1 - 1{,}9\right)}$$

2. Fall, Kovarianzmatrix $B = A$ Diskriminantenfunktion

$$g_A(x) = -\frac{1}{2}\left(-2\begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-6 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + 18\right) = -\frac{1}{2}(-6x_1 - 6x_2 + 18)$$

$$= 3x_1 + 3x_2 - 9$$

$$g_B(x) = -\frac{1}{2}\left(-2\begin{bmatrix}3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}-6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + 18\right) = -\frac{1}{2}(-6x_1 + 6x_2 + 18)$$

$$= 3x_1 - 3x_2 - 9$$

Entscheidungsgrenze Spezialfall

$$0 = g_A(x) - g_B(x)$$

$$0 = \cancel{3x_1} + 3x_2 \cancel{-9} - \cancel{3x_1} + 3x_2 \cancel{+9} \rightarrow x_2 = 0$$

1.1 Visualisierung

(erstellt mit Excel)