Wiktor Bechciński 229840 `229840@edu.p.lodz.pl`

Kamil Budzyn 229850 `229850@edu.p.lodz.pl`


# Zadanie 2.: Metoda iteracyjna Gaussa-Seidla

## 1. Cel

Celem zadania drugiego było zaimplementowanie metody iteracyjnej Gaussa-Seidla rozwiązywania układu N równań liniowych z N niewiadomymi.

## 2. Wprowadzenie

Metoda Gaussa-Seidla jest metodą iteracyjną i pozwala nam obliczyć układ n równań z n niewiadomymi Ax = b. Wektor x0 będący początkowym przybliżeniem rozwiązania układu będzie dany (zwykle przyjmuje się go jako wektor złożony z samych zer). By zastosować tą metodę należy najpierw tak zamienić kolejność równań układu, aby na głównej przekątnej były elementy różne od zera i możliwie jak największe. Warunkiem powodzenia metody jest macierz przekątniowo dominująca, czyli taka, że wartości bezwzględne elementów na głównej przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach.
Na początku macierz współczynników A rozkładamy na sumę trzech macierzy A = L + D + U, gdzie L jest macierzą w której znajdują się elementy których numer wiersza jest większy od numeru kolumny, D to macierz diagonalna z elementami tylko na głównej przekątnej, a U to macierz, w której znajdują się elementy których numery wiersza są mniejsze od numerów kolumny.

## 3. Opis implementacji

Do wykonania zadania wykorzystaliśmy język programowania C++. Cały program podzieliśmy na dwie części, gdzie pierwsza z nich to funkcja main, a druga to zbiór pozostałych funkcji wykorzystywanych do obliczeń. Program daje użytkownikowi możliwość wyboru warunku stopu, pierwsza z nich to liczba iteracji, a druga to wartość $\epsilon$. Po włączeniu programu użytkownik ma za zadanie podanie ilości równań, które znajdują się w pliku dane.txt.

Następnie program wyświetli załadowaną macierz oraz wektor b. Program sprawdzi czy wyznacznik macierzy jest różny od zera, jeśli nie jest to zwróci błąd, w przeciwnym wypadku przejdzie do sprawdzenia czy macierz jest przekątniowo dominująca. Jeśli macierz nie jest, a może być przekątniowo dominująca to program przekształci ją do odpowiedniej postaci, natomiast jeśli nie będzie to możliwe zwróci komunikat o możliwym niepowodzeniu metody, jednakże pozwoli kontynuować obliczenia.

## 4. Materiały i metody

Wraz z plikami źródłowymi programu, zawierającymi kod, znajduje się 10 plików tekstowych z oznaczeniami kolejnych liter alfabetu angielskiego począwszy od „a" aż do „j", które zawierają przykładowe współczynniki równań wraz z wyrazami wolnymi (wyraz wolny należy rozumieć jako liczbę znajdującą się po prawej stronie równania) oraz plik oznaczony jako „dane", z których korzysta program. Aby przeprowadzić eksperyment na dowolnym z przykładowych zestawów równań, bądz przy użyciu własnych równań należy umieścić współczynniki oraz wyraz wolny w pliku „dane.txt" pamiętając o jednym odstępie (znak spacji) pomiędzy dwoma liczbami oraz wyraz wolny powinien znaleźć się na końcu wiersza i uruchomić program.

## 5. Wyniki

PRZYKŁAD A

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 33 \\ 8 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 1 | 1 |
| X2 | 2 | 2 |
| X3 | 3 | 3 |

Tabela 1. Wartości dla przykładu A. 29 iteracji

| | r1 | r2 | r3 |
|---|---|---|---|
| iteracja 1 | 4 | 2 | 2.14286 |
| iteracja 2 | 2.71429 | 0.285714 | 0.571429 |
| iteracja 3 | 0.47619 | 0.047619 | 0.170068 |
| iteracja 4 | 0.00907029 | 0.0804989 | 0.0600907 |
| iteracja 5 | 0.0604686 | 0.0602797 | 0.0257802 |
| iteracja 6 | 0.0516863 | 0.0387332 | 0.0128991 |
| iteracja 7 | 0.0344335 | 0.0236663 | 0.00706635 |
| iteracja 8 | 0.0213109 | 0.0141886 | 0.0040459 |
| iteracja 9 | 0.01284 | 0.00844293 | 0.0023621 |
| iteracja 10 | 0.00765557 | 0.00500884 | 0.00139043 |
| iteracja 11 | 0.00454536 | 0.0029679 | 0.000821252 |
| iteracja 12 | 0.00269415 | 0.0017577 | 0.000485743 |
| iteracja 13 | 0.00159578 | 0.00104076 | 0.000287464 |
| iteracja 14 | 0.000944942 | 0.000616203 | 0.000170162 |
| iteracja 15 | 0.000559483 | 0.000364822 | 0.000100735 |
| iteracja 16 | 0.000331244 | 0.000215989 | 5.96371e-05 |
| iteracja 17 | 0.00019611 | 0.000127874 | 3.53069e-05 |
| iteracja 18 | 0.000116105 | 7.57058e-05 | 2.09028e-05 |
| iteracja 19 | 6.87382e-05 | 4.48205e-05 | 1.23752e-05 |
| iteracja 20 | 4.06955e-05 | 2.65353e-05 | 7.32652e-06 |
| iteracja 21 | 2.40931e-05 | 1.57098e-05 | 4.33755e-06 |
| iteracja 22 | 1.4264e-05 | 9.30076e-06 | 2.56798e-06 |
| iteracja 23 | 8.44477e-06 | 5.50638e-06 | 1.52033e-06 |
| iteracja 24 | 4.9996e-06 | 3.25997e-06 | 9.00091e-07 |
| iteracja 25 | 2.95994e-06 | 1.93001e-06 | 5.32885e-07 |
| iteracja 26 | 1.75238e-06 | 1.14263e-06 | 3.15486e-07 |
| iteracja 27 | 1.03747e-06 | 6.7648e-07 | 1.86779e-07 |
| iteracja 28 | 6.1422e-07 | 4.00499e-07 | 1.1058e-07 |
| iteracja 29 | 3.6364e-07 | 2.3711e-07 | 6.5467e-08 |

Tabela 2. Wartości błędu przykładu A dla poszczególnych wyników w kolejnych iteracjach.

## PRZYKŁAD B

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ -40 \end{bmatrix}$$

Brak wyników dla przykładu B.

## PRZYKŁAD C

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ -4 & -10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Brak wyników dla przykładu C.

## PRZYKŁAD D

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.0625 & 0.1875 & 0.0625 \\ -0.0625 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1875 & 0 & 0.375 & 0.125 \\ 0.0625 & 0 & 0.125 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.625 \\ 1 \\ 0.4375 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 2 | 2 |
| X2 | -3 | -3 |
| X3 | 1.5 | 1.5 |
| X4 | 0.5 | 0.5 |

Tabela 3. Wartości dla przykładu D. 8 iteracji

| | r1 | r2 | r3 | r4 |
|---|---|---|---|---|
| iteracja 1 | 3 | 2.875 | 1.16667 | 0.416667 |
| iteracja 2 | 0.848958 | 0.10612 | 0.28559 | 0.0694444 |
| iteracja 3 | 0.129042 | 0.0161302 | 0.0413728 | 0.0115741 |
| iteracja 4 | 0.0189778 | 0.00237223 | 0.00563089 | 0.00192901 |
| iteracja 5 | 0.00264924 | 0.000331155 | 0.000681616 | 0.000321502 |
| iteracja 6 | 0.000337188 | 4.21485e-05 | 6.14267e-05 | 5.35837e-05 |
| iteracja 7 | 3.50015e-05 | 4.37519e-06 | 3.60453e-07 | 8.93061e-06 |
| iteracja 8 | 1.52806e-06 | 1.91007e-07 | 2.21284e-06 | 1.48844e-06 |

Tabela 4. Wartości błędu przykładu D dla poszczególnych wyników w kolejnych iteracjach.

## PRZYKŁAD E

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Brak wyników dla przykładu E.

## PRZYKŁAD F

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ 21 \\ 5 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 1 | 1 |
| X2 | 3 | 3 |
| X3 | -4 | -4 |
| X4 | 5 | 5 |

Tabela 5. Wartości dla przykładu F. 20 iteracji

| | r1 | r2 | r3 | r4 |
|---|---|---|---|---|
| iteracja 1 | 0.333333 | 10.3333 | 1.83333 | 1.83333 |
| iteracja 2 | 1.98148 | 8.12963 | 3.92593 | 3.92593 |
| iteracja 3 | 1.15021 | 0.634774 | 1.03138 | 1.03138 |
| iteracja 4 | 0.383459 | 1.22319 | 0.928898 | 0.928898 |
| iteracja 5 | 0.126003 | 0.485162 | 0.0117186 | 0.0117186 |
| iteracja 6 | 0.120512 | 0.166304 | 0.207966 | 0.207966 |
| iteracja 7 | 0.000458796 | 0.146793 | 0.0511887 | 0.0511887 |
| iteracja 8 | 0.026984 | 0.00254982 | 0.0344248 | 0.0344248 |
| iteracja 9 | 0.00625656 | 0.0334459 | 0.0195552 | 0.0195552 |
| iteracja 10 | 0.00456445 | 0.00729799 | 0.003099 | 0.003099 |
| iteracja 11 | 0.00247327 | 0.00576331 | 0.00510297 | 0.00510297 |
| iteracja 12 | 0.000438931 | 0.00298847 | 0.000507613 | 0.000507613 |
| iteracja 13 | 0.000656474 | 0.000585869 | 0.00102193 | 0.00102193 |
| iteracja 14 | 5.62958e-05 | 0.000806281 | 0.000353999 | 0.000353999 |
| iteracja 15 | 0.000133585 | 5.86809e-05 | 0.000145274 | 0.000145274 |
| iteracja 16 | 4.40246e-05 | 0.000166531 | 0.000113362 | 0.000113362 |
| iteracja 17 | 1.95195e-05 | 5.23103e-05 | 5.81873e-06 | 5.81873e-06 |
| iteracja 18 | 1.44399e-05 | 2.49387e-05 | 2.67245e-05 | 2.67245e-05 |
| iteracja 19 | 9.68124e-07 | 1.75683e-05 | 4.9869e-06 | 4.9869e-06 |
| iteracja 20 | 3.45753e-06 | 1.4441e-06 | 4.80395e-06 | 4.80395e-06 |

Tabela 6. Wartości błędu przykładu F dla poszczególnych wyników w kolejnych iteracjach.

## PRZYKŁAD G

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 7 | 7 |
| X2 | 5 | 5 |
| X3 | 3 | 3 |

Tabela 7. Wartości dla przykładu G. 1 iteracja

## PRZYKŁAD H

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 19 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 1 | X |
| X2 | 2 | X |
| X3 | 3 | X |

Tabela 8. Wartości dla przykładu H.

### PRZYKŁAD I

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 0.9 & 0.9 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 13.5 \end{bmatrix}$$

Brak wyników dla przykładu I.

### PRZYKŁAD J

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 1 & -0.3 \\ -0.1 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.8 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

| Niewiadoma | Poprawna wartość | Otrzymana wartość |
|---|---|---|
| X1 | 1 | 1 |
| X2 | 1 | 1 |
| X3 | 1 | 1 |

Tabela 9. Wartości dla przykładu J. 7 iteracji

| | r1 | r2 | r3 |
|---|---|---|---|
| iteracja 1 | 1.5 | 0.65 | 0.98 |
| iteracja 2 | 0.424 | 0.3364 | 0.02488 |
| iteracja 3 | 0.074744 | 0.0149384 | 0.00448672 |
| iteracja 4 | 0.00164166 | 0.00118185 | 0.000400536 |
| iteracja 5 | 0.000356531 | 0.000155814 | 4.49029e-06 |
| iteracja 6 | 2.98157e-05 | 1.63449e-06 | 2.65467e-06 |
| iteracja 7 | 4.69505e-07 | 8.43353e-07 | 1.2172e-07 |

Tabela 10. Wartości błędu przykładu J dla poszczególnych wyników w kolejnych iteracjach.

## 6. Dyskusja

Przykład A- Macierz nie jest przekątniowo dominująca i nie dało się jej na taką zamienić, pomimo tego program w 29 iteracji uzyskał poprawny wynik.
Przykład B- Wyznacznik macierzy jest równy zero, macierz jest nieoznaczona lub sprzeczna.
Przykład C- Wyznacznik macierzy jest równy zero, macierz jest nieoznaczona

lub sprzeczna.
Przykład D- Macierz jest przekątniowo dominująca, wynik udało się uzyskać w 8 iteracji.
Przykład E- Wyznacznik macierzy jest równy zero, macierz jest nieoznaczona lub sprzeczna.
Przykład F- Przykład A- Macierz nie jest przekątniowo dominująca i nie dało się jej na taką zamienić, pomimo tego program w 20 iteracji uzyskał poprawny wynik.
Przykład G- Macierz początkowo nie jest przekątniowo dominująca, jednak programowi udaje się ją na taką zamienić i uzyskać wynik w zaledwie 1 iterację.
Przykład H- Macierz nie jest przekątniowo dominująca, programowi nie udało się uzyskać dla niej poprawnych ani nawet zbliżonych wyników.
Przykład I- Wyznacznik macierzy jest równy zero, macierz jest nieoznaczona lub sprzeczna.
Przykład J- Macierz jest przekątniowo dominująca, wynik udało się uzyskać w zaledwie 7 iteracji.

## 7. Wnioski

Wszystkie wyniki poza przykładem H pokryły się z wynikami podanymi w opisie zadania. Wynik w danym przykładzie nie zgadzał się dlatego iż macierz nie była przekątniowo dominująca, a jest to warunek gwarantujący powodzenie metody Gaussa-Seidla.
Patrząc na pozostałe wyniki można wysnuć wniosek, iż gdy macierz nie jest przekątniowo dominująca to program potrzebuje znacznie więcej iteracji do uzyskania poprawnych wyników. Wartości błędu zmieniają się gwałtowniej dla macierzy przekątniowo dominujących.

## Literatura


[1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e*, 2007, dostępny online. `https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf`.

[2] B. Borowska, Wykład "Metody rozwiązywania układów równań liniowych".