Metody Numeryczne i Optymalizacja **2020/2021**

Prowadzący: mgr inż. Paweł Tarasiuk wtorek, 14:00

Wiktor Bechciński 229840 229840@edu.p.lodz.pl
Kamil Budzyn 229850 229850@edu.p.lodz.pl

Zadanie 3.: Porównanie interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych i węzłów Czebyszewa

1. Cel

Celem zadania trzeciego było zaimplementowanie metod interpolacji Lagrange'a dla węzłów równoodległych i Lagrange'a na węzłach Czebyszewa oraz zbadać róznicę wyników tych rozwiązań. .

2. Wprowadzenie

Interpolacja Lagrange'a polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji f dla argumentów x leżących pomiędzy węzłami interpolacji. W tym celu znajduje się pewną funkcję interpolującą, która w argumentach węzłów interpolacji przyjmuje wartości funkcji interpolowanej dla tego samego argumentu.
W przypadku pierwszej metody umiejscowienie węzłów w danym przedziale odbywa się poprzez ustalenie równej odległości pomiędzy nimi na osi x, gdzie zachodzi zależność $x_{i+1} - x_i = h = const$ dla i=0, 1, ..., n-1 natomiast chcąc zminimalizować błąd interpolacji, w danym przedziale, węzły interpolacji ustala się jako zera wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju, które można wyznaczyć za pomocą wzoru

$x_k = \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi + \frac{b+a}{2}$ dla k=0, 1, ..., n

Wyliczenie argumentów lub/i wartości funkcji interpolacyjnej przy pomocy węzłów (równoodległych lub Czebyszewa) następuje przy użyciu wzoru

$L_f(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Gdzie $L_f(x)$ - wartość funkcji interpolacyjnej dla argumentu x, x_i, x_j - wezly rownoodlegle lub wezly czebyszewa (zaleznie od metody).

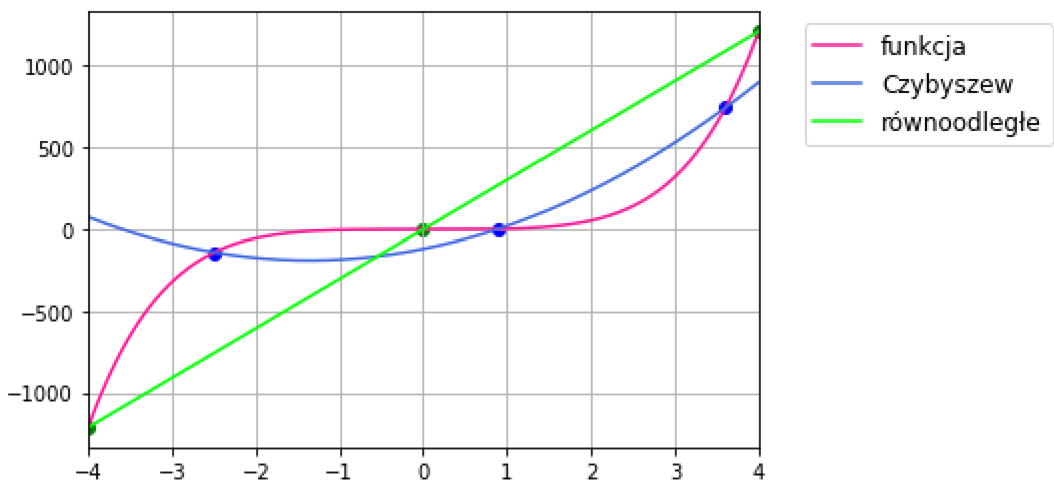
3. Opis implementacji

Do wykonania zadania wykorzystaliśmy język programowania Python w wersji 3.9. Program podzieliliśmy na dwie czesci w środowisku Jupyter, gdzie pierwsza z nich zawiera wszystkie funkcje liczące. Druga część to główna część programu, czyli "main". Implementacja kodu pozwala użytkownikowi końcowemu wybór jednej z dostępnych funkcji, określić przedział, określić precyzję (czyli ile ma wynosić odstęp pomiędzy argumentami, zalecana wartość to 0.01) i liczbę węzłów. Program wykona potrzebne obliczenia i wyświetli opisany wykres funkcji interpolowanej, funkcji interpolującej z węzłami wielomianu Czebyszewa i funkcji interpolującej z węzłami równoodległymi

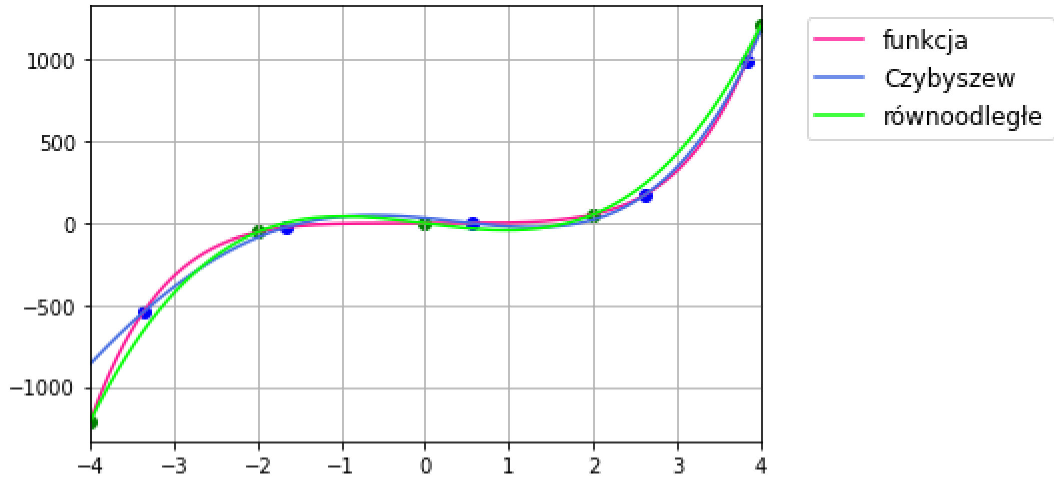
4. Materiały i metody

Sprawdziliśmy które z metod najlepiej odwzorowują funkcję interpolowaną przy określonej liczbie węzłów. Przyjeliśmy ilość węzłów od 3 do 10, w zależności od funkcji i przedziału, co może zostać powtórzone przez użytkownika końcowego podając taką samą liczbę węzłów, przedział oraz precyzję równą 0.01. Każda z funkcji była testowana wielokrotnie z różnymi parametrami, które ustanowiliśmy za słuszne w celu zobrazowania dokładności metod, jednak nic nie stoi na przeszkodzie aby te eksperymenty przeprowadzić np. na mniejszym przedziale z większą dokładnością.

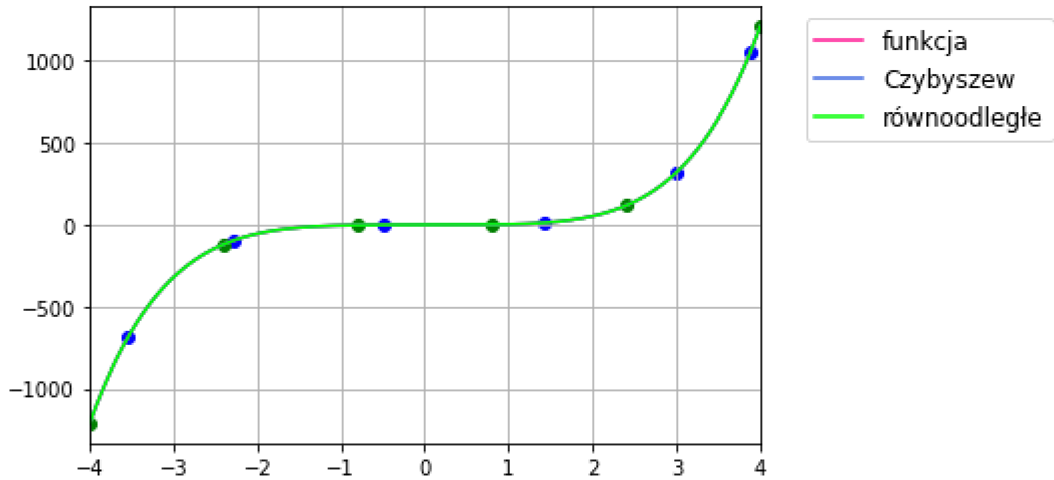
5. Wyniki



Wykres 1. Zobrazowanie interpolacji dla pierwszej z funkcji. Ilość węzłów 3.



Wykres 2. Zobrazowanie interpolacji dla pierwszej z funkcji. Ilość węzłów 5.

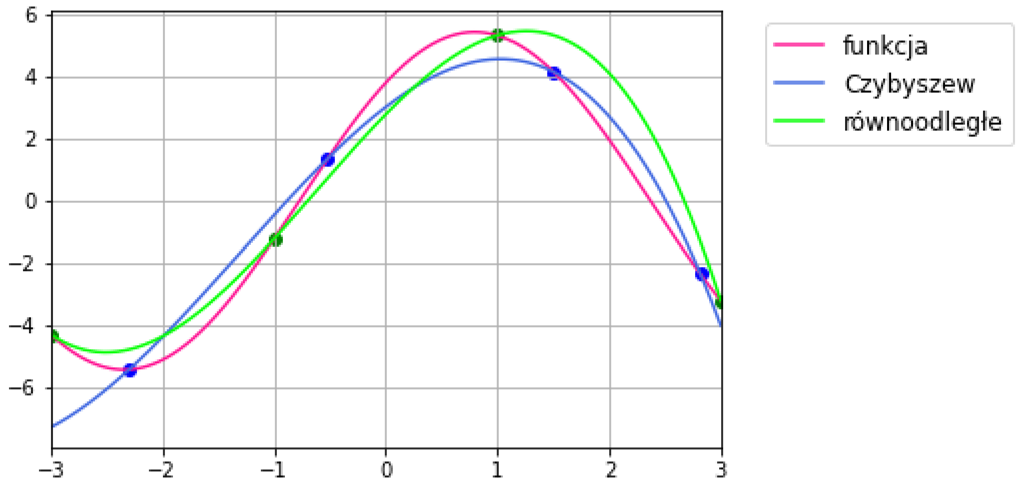


Wykres 3. Zobrazowanie interpolacji dla pierwszej z funkcji. Ilość węzłów 6.

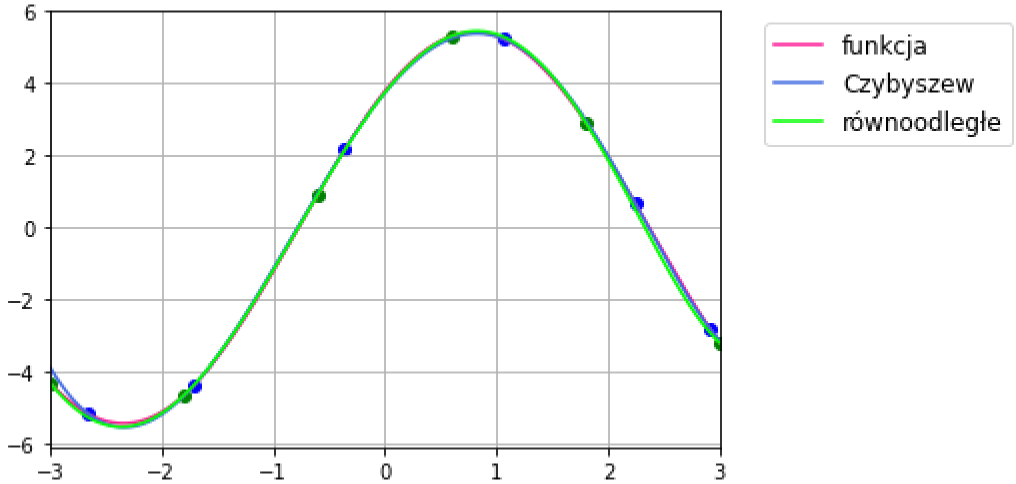
Wartości średniego błędu dla pierwszej z funkcji:

	Średni błąd Czebyszew	Średni błąd równoodległe
Węzłów: 3	201.03591710411928	388.84431128090387
Węzłów: 5	40.87998386194121	50.60208073408324
Węzłów: 6	3.7982379067431976e-14	3.3280771674384545e-14

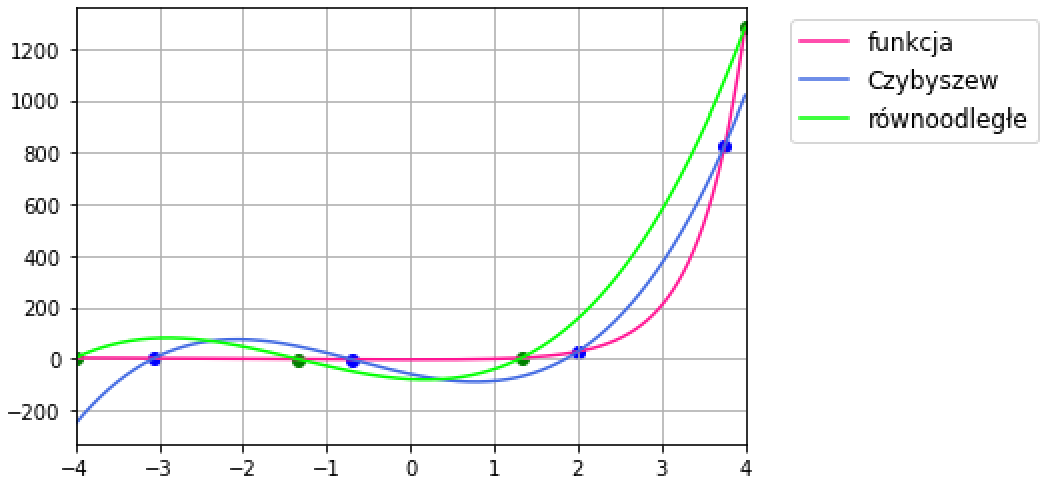
Tabela 1. Średni błąd, funkcja pierwsza.



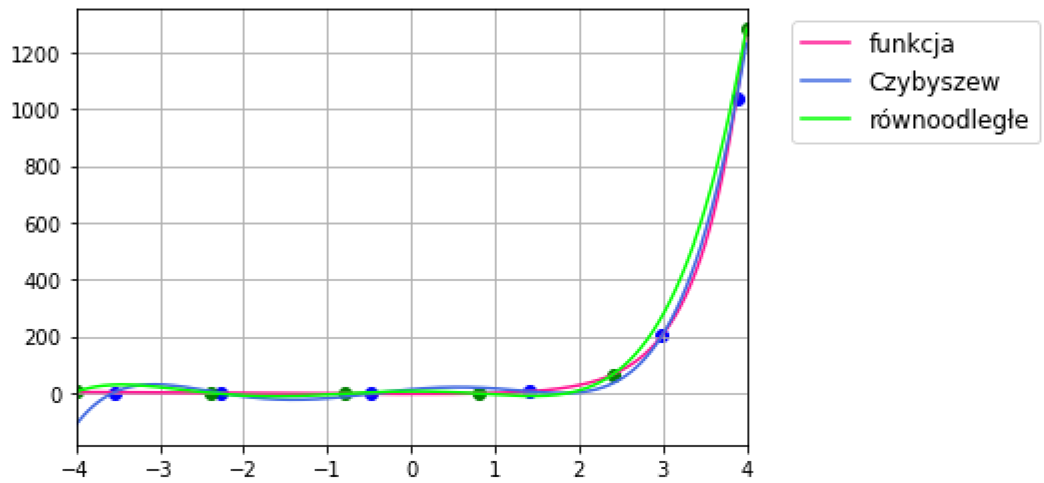
Wykres 4. Zobrazowanie interpolacji dla drugiej z funkcji. Ilość węzłów 4.



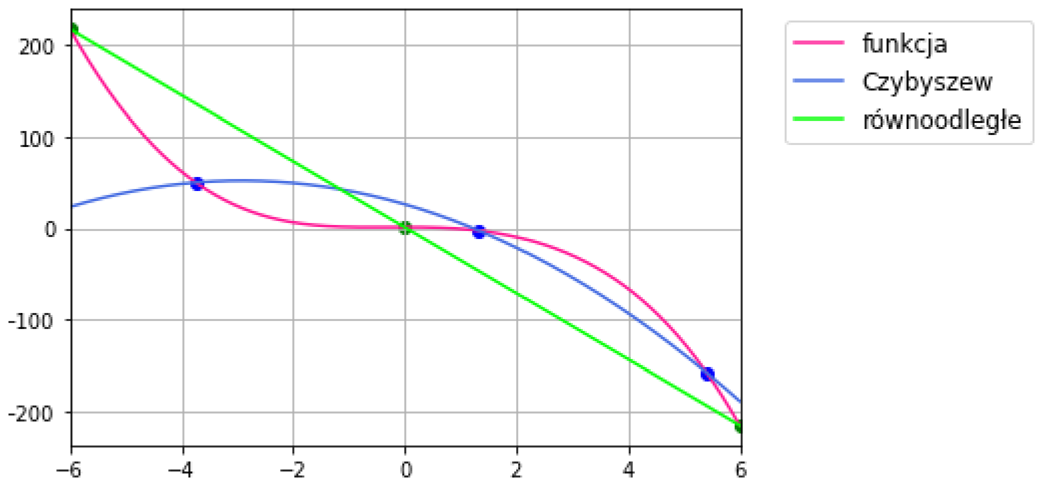
Wykres 5. Zobrazowanie interpolacji dla drugiej z funkcji. Ilość węzłów 6.



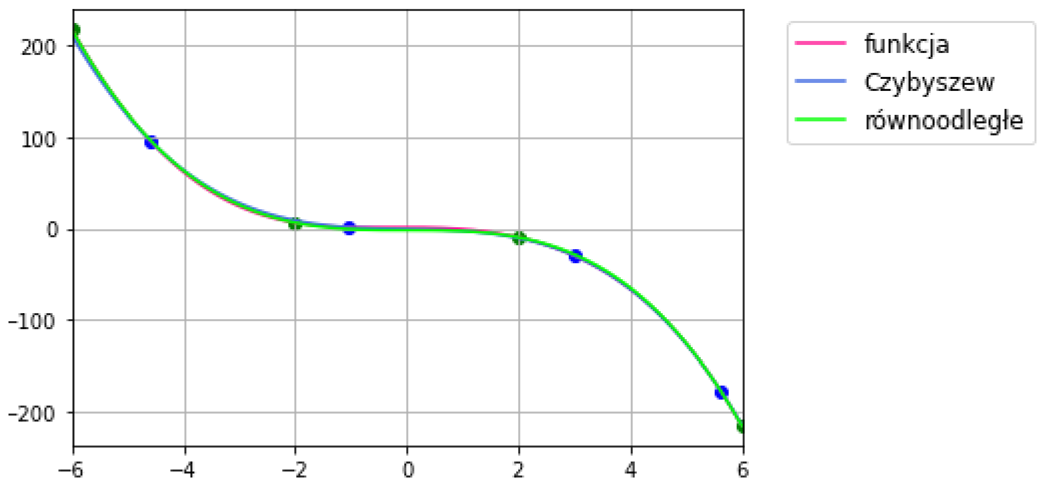
Wykres 6. Zobrazowanie interpolacji dla trzeciej z funkcji. Ilość węzłów 4.



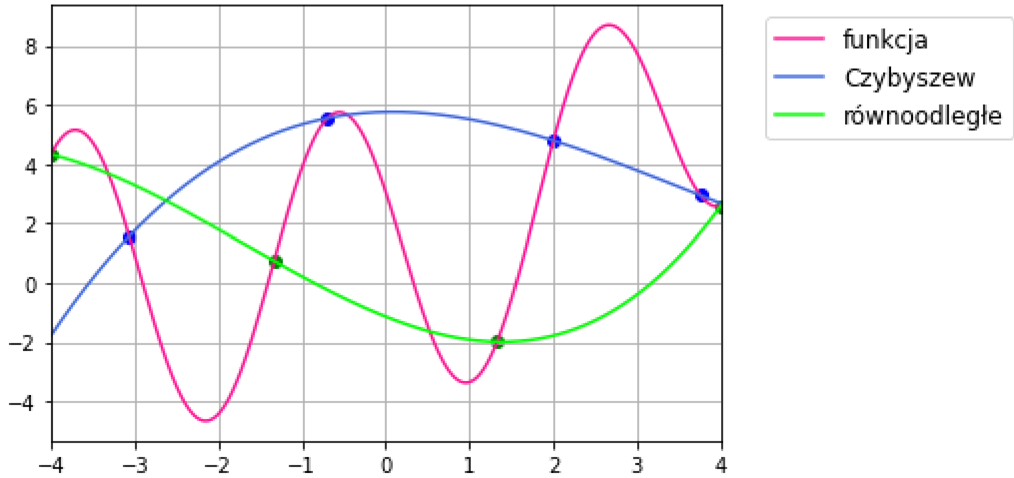
Wykres 7. Zobrazowanie interpolacji dla trzeciej z funkcji. Ilość węzłów 6.



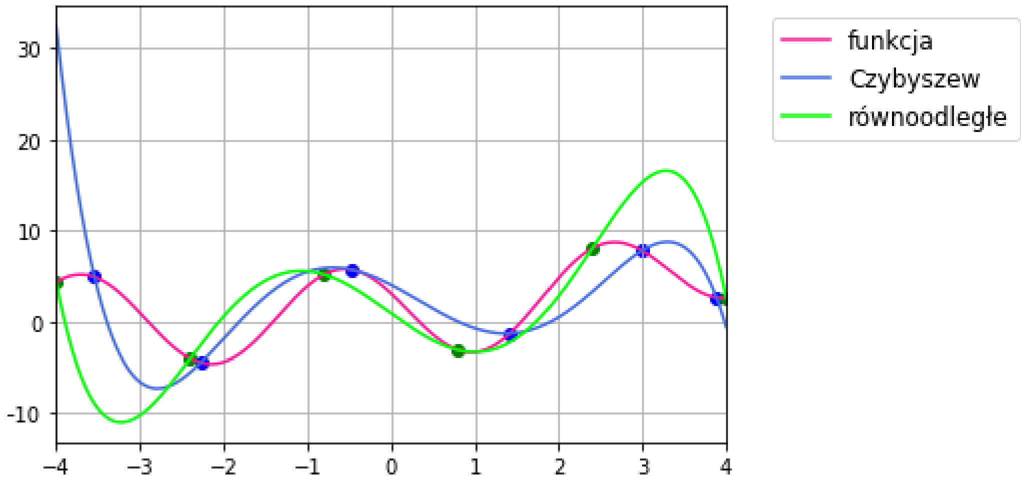
Wykres 8. Zobrazowanie interpolacji dla czwartej z funkcji. Ilość węzłów 3.



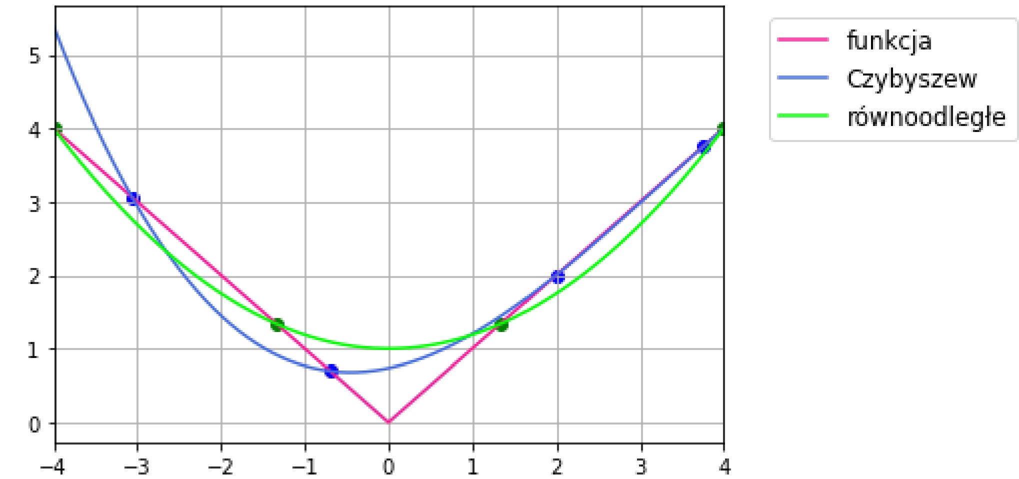
Wykres 9. Zobrazowanie interpolacji dla czwartej z funkcji. Ilość węzłów 4.



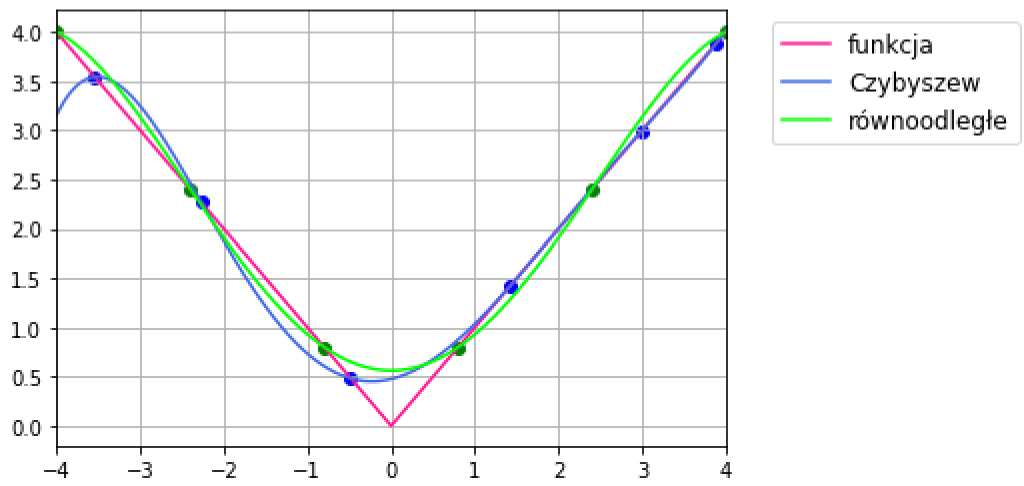
Wykres 10. Zobrazowanie interpolacji dla piątej z funkcji. Ilość węzłów 4.



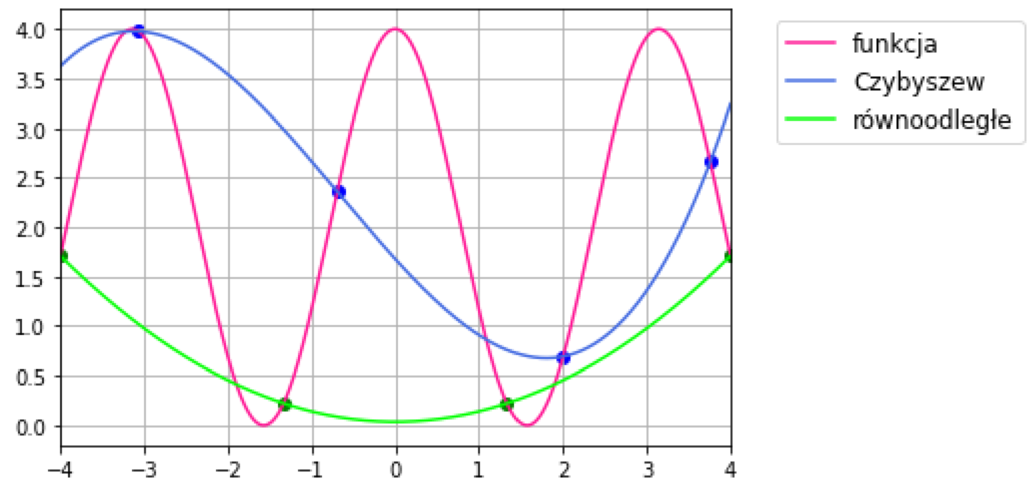
Wykres 11. Zobrazowanie interpolacji dla piątej z funkcji. Ilość węzłów 6.



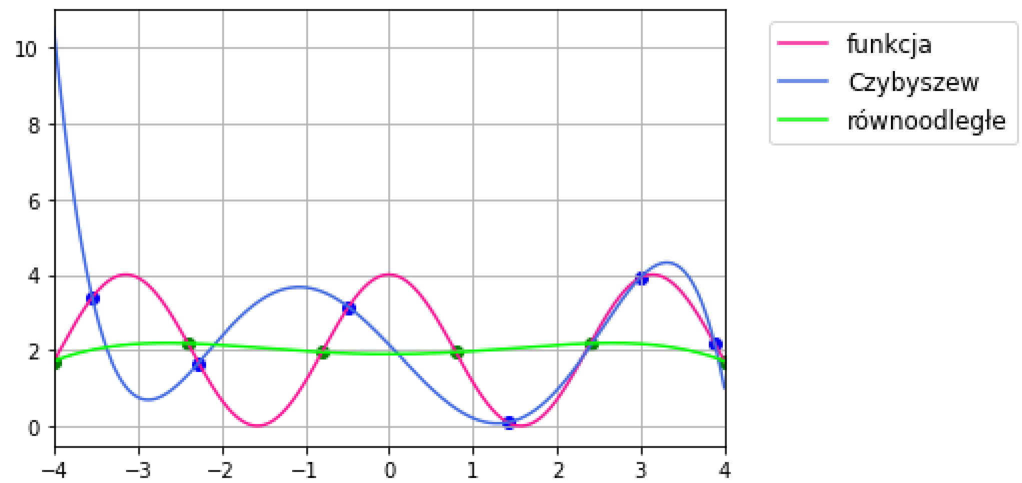
Wykres 12. Zobrazowanie interpolacji dla szóstej z funkcji. Ilość węzłów 4.



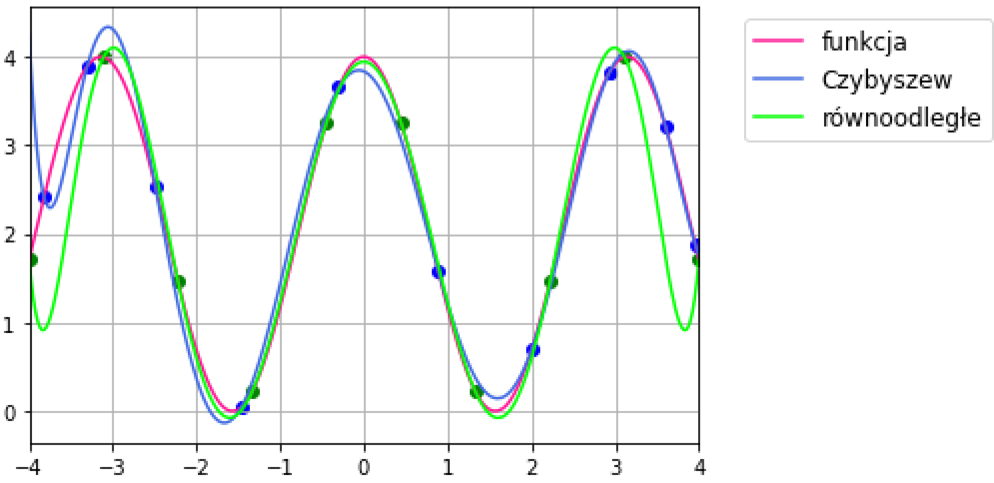
Wykres 13. Zobrazowanie interpolacji dla szóstej z funkcji. Ilość węzłów 6.



Wykres 14. Zobrazowanie interpolacji dla siódmej z funkcji. Ilość węzłów 4.



Wykres 15. Zobrazowanie interpolacji dla siódmej z funkcji. Ilość węzłów 6.



Wykres 16. Zobrazowanie interpolacji dla siódmej z funkcji. Ilość węzłów 10.

6. Dyskusja

Funkcja 1-wielomianowa- Wykresy 1-3. Oba rozwiązania radzą sobie dobrze, przy czterech oraz pięciu węzłach widać jeszcze rozbieżności pomiędzy wykresami, natomiast przy wartości węzłów równej n+1, gdzie n to stopień wielomianu, funkcje pokrywają się.
Funkcja 2-trygonometryczna- Wykresy 4-5. Ze zwiększaniem liczby węzłów oba z rozwiązań stają się dokładniejsze w porównywalnym tempie.
Funkcja 3-wykładnicza- Wykresy 6-7. Identyczna sytuacja jak dla funkcji 2.
Funkcja 4-złożenie funkcji trygonometrycznej, wykładniczej i wielomianowej- Wykresy 8-9. Podobnie jak dla funkcji pierwszej, wykres osiąga dopasowanie dla wartości węzłów równej n+1.
Funkcja 5-złożenie funkcji wykładniczej z trygonometryczną- Wykresy 10-11. Podobnie jak dla funkcji drugiej oraz trzeciej dokładność interpolacji stopniowo rośnie wraz ze zwiększaniem liczby węzłów.
Funkcja 6-Moduł- Wykresy 12-13. Identyczna sytuacja jak dla funkcji 2.
Funkcja 7-Moduł z funkcji trygonometrycznej- Wykresy 14-16. Tutaj widzimy wyraźną różnicę pomiędzy węzłami Czebyszewa a równoodległymi, pierwsza z metod szybciej zaczyna dopasowywać się do wyglądu funkcji pierwotnej.

7. Wnioski

Metoda interpolacji Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa oraz równoodległych umożliwia w łatwy sposób wyznaczenie wartości wielomianu bez znajomości jego współczynników w dowolnym punkcie na określonym przedziale. Wraz ze zwiększeniem liczby węzłów wzrasta dokładność wyznaczanej przez nas funkcji interpolującej. Do interpolacji wielomianu n-tego stopnia potrzeba n+1 węzłów.

Literatura

[1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LaTeX2e*, 2007, dostępny online. `https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf`.

[2] Prezentacja WIKAMP "Materiały wykładowe część druga".