

Wiktor Bechciński 229840 229840@edu.p.lodz.pl
Kamil Budzyn 229850 229850@edu.p.lodz.pl

Zadanie 5.: Aproksymacja oparta o wielomiany Laguerre'a

1. Cel

Celem zadania piątego jest zaimplementowanie metody aproksymacji opartej o wielomiany Laguerre'a.

2. Wprowadzenie

Aproksymacja wielomianowa polega na przybliżeniu pewnej funkcji $f(x)$ wielomianem $F(x)$ n -tego stopnia. W naszym przypadku współczynniki wielomianu aproksymacyjnego zostały policzone ze wzoru:

$$\lambda_k = \frac{\int_0^\infty f(x)L_k(x)dx}{\int_0^\infty L_k(x)L_k(x)dx}$$

Metodą całkowania użytą w zadaniu jest metoda całkowania Gaussa Laguerre'a. Program oblicza błąd aproksymacji na podstawie następującego wzoru:

$$\|f - f_n\| = \sqrt{\int p(t)(f(t) - f_n(t)) \cdot (f(t) - f_n(t))dt}$$

3. Opis implementacji

Do wykonania zadania wykorzystaliśmy język programowania Python w wersji 3.9. Program podzieliśmy na dwie części w środowisku Jupyter, gdzie pierwsza z nich zawiera wszystkie funkcje liczące. Druga część to główna część programu, czyli "main". Implementacja kodu pozwala użytkownikowi końcowemu wybrać jedną z dostępnych funkcji, podanie stopnia wielomianu aproksymacyjnego, liczby węzłów oraz przedziału. Program wykona potrzebne obliczenia i wyświetli uzyskane wyniki oraz wykresy.

4. Materiały i metody

Program posiada wbudowane pięć funkcji:

$$x^4 + 3 * x^2 + 1$$

$$\cos(x)$$

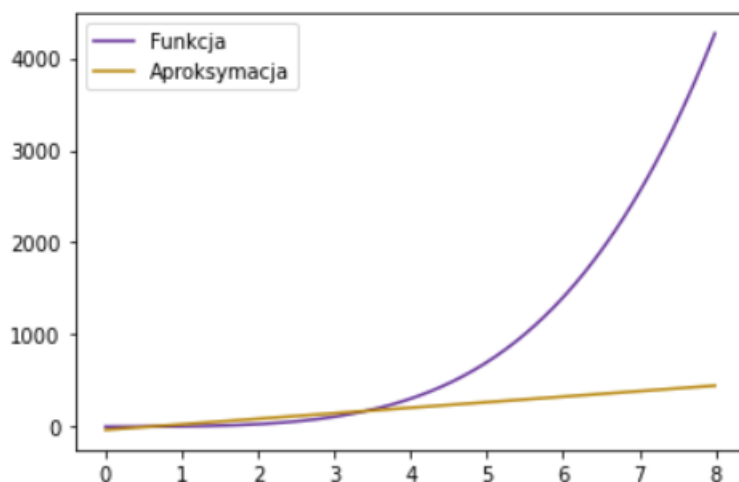
$$|x - 6|$$

$$|x^2 - 6 + \sin(x)|$$

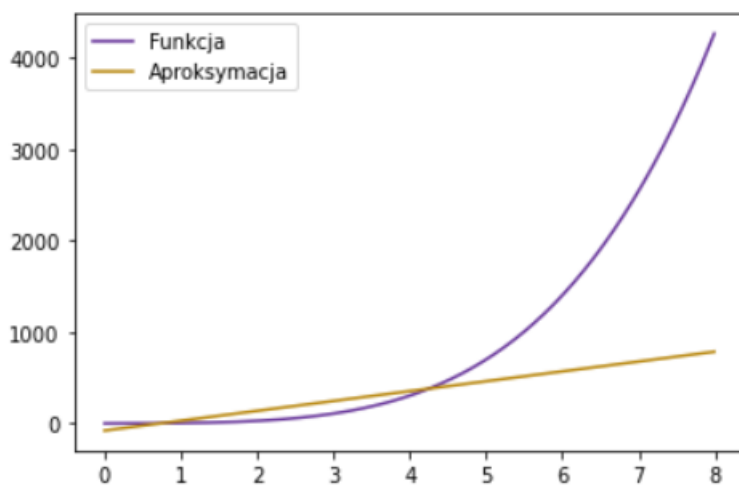
$$-1 * x + 8.7$$

Każda funkcja była na przedziale od 0 do 8. Dla każdej z funkcji policzono wartości dla stopnia wielomianu aproksymacyjnego równego 1, 5 oraz 10. Dla każdego z nich użyto liczby węzłów równej 2 oraz 5.

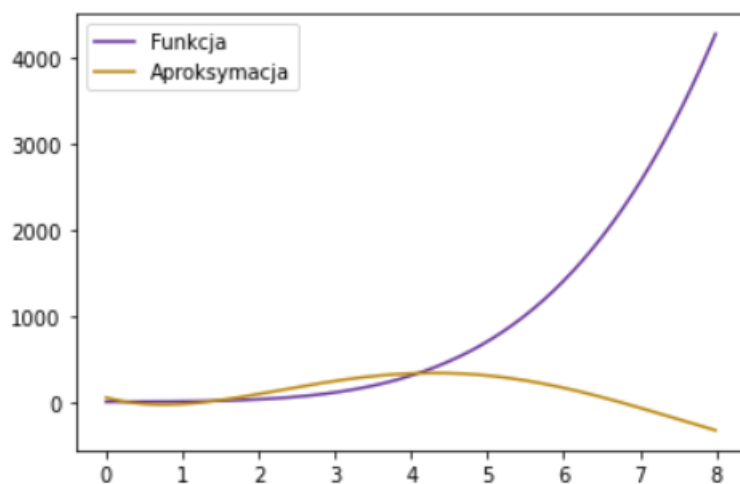
5. Wyniki



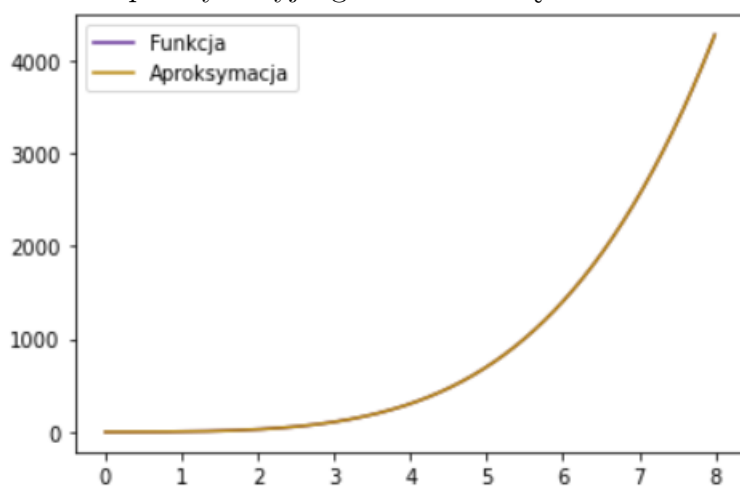
Wykres 1. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 2.



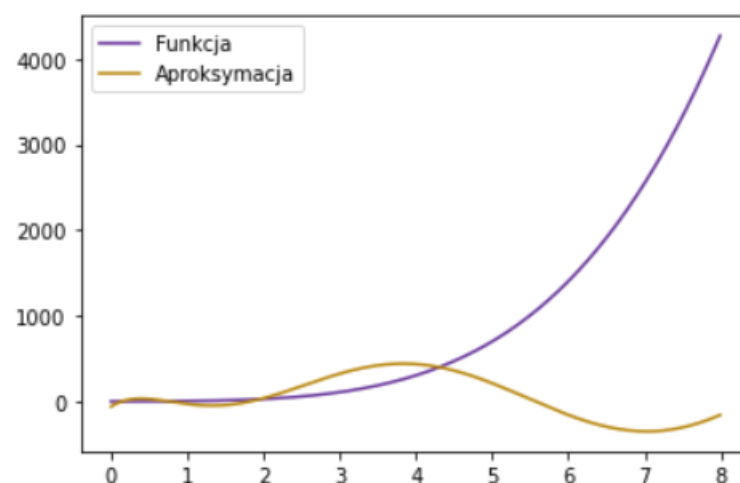
Wykres 2. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 5.



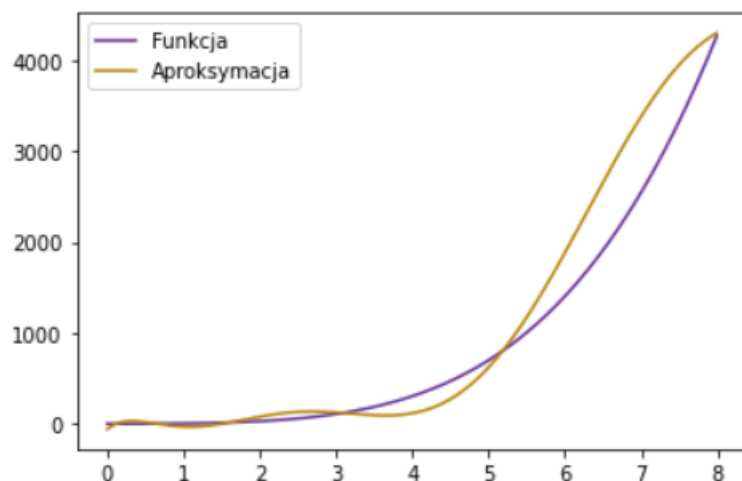
Wykres 3. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 2.



Wykres 4. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 5.



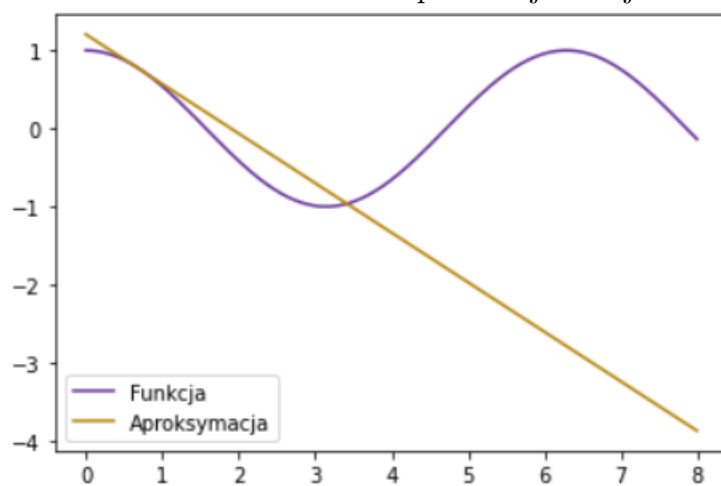
Wykres 5. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 2.



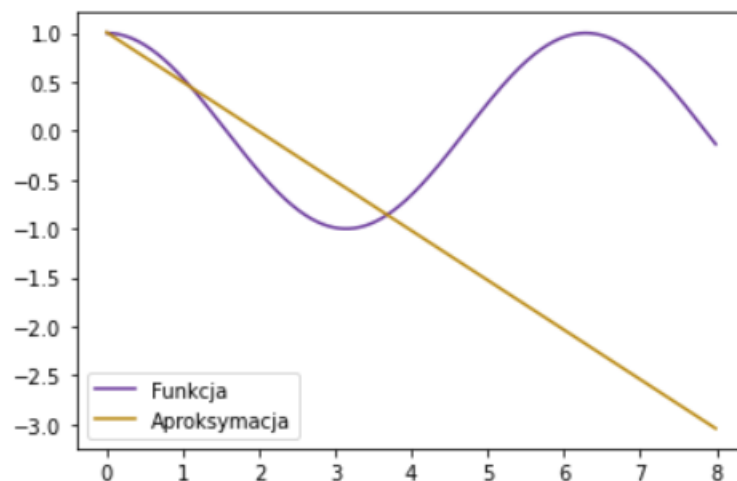
Wykres 6. Wykres dla pierwszej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 5.

Przedział	Stopień wielomianu aproksymacyjnego	Liczba węzłów	Błąd aproksymacji
[0;8]	1	2	59.99999999999999
		5	209.65686251587388
	5	2	50.67989136619067
		5	2.914033522577232e-13
	10	2	93.14716549210912
		5	39.03892304611728

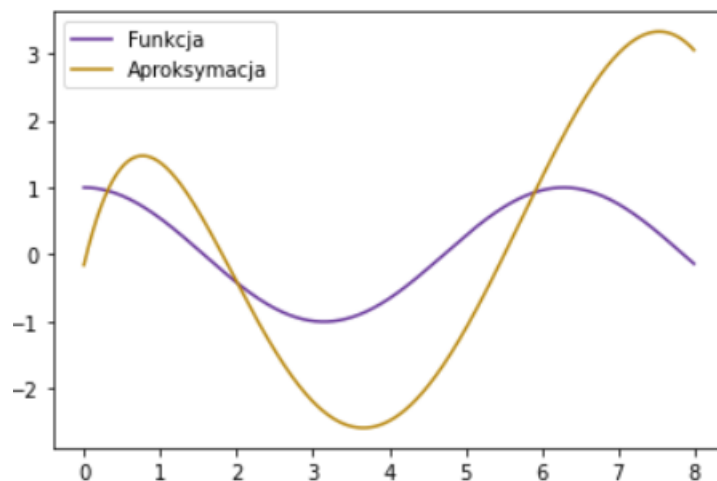
Tabela 1. Wartości dla pierwszej funkcji.



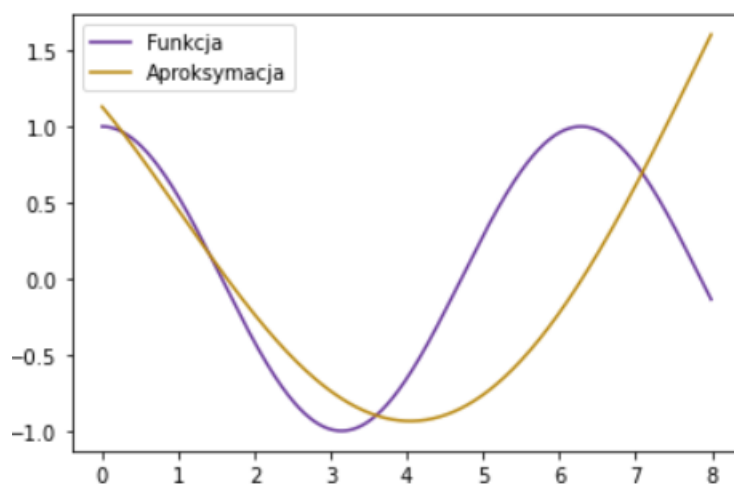
Wykres 7. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 2.



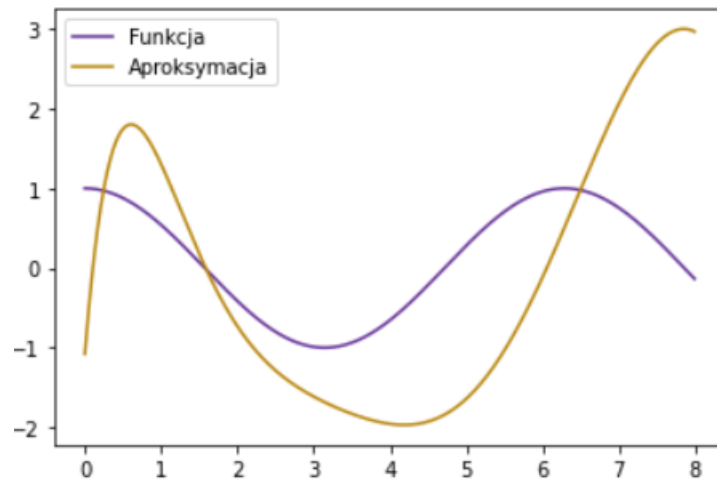
Wykres 8. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 5.



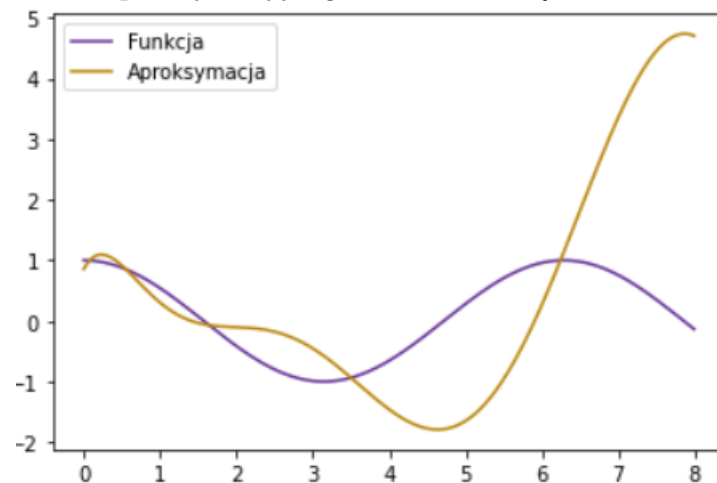
Wykres 9. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 2.



Wykres 10. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 5.



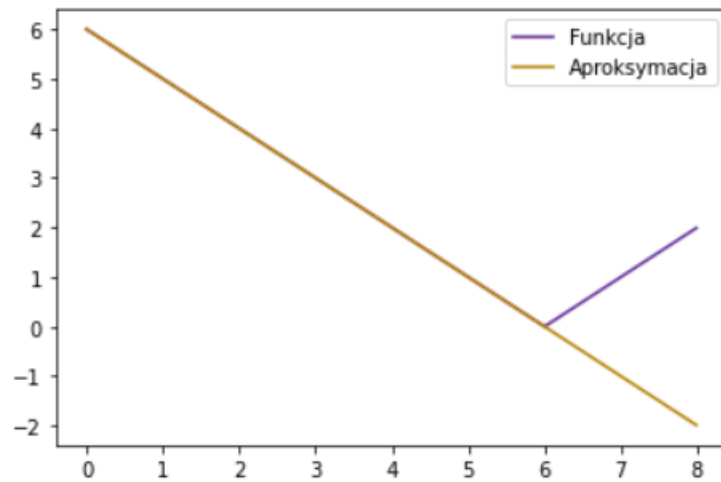
Wykres 11. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 2.



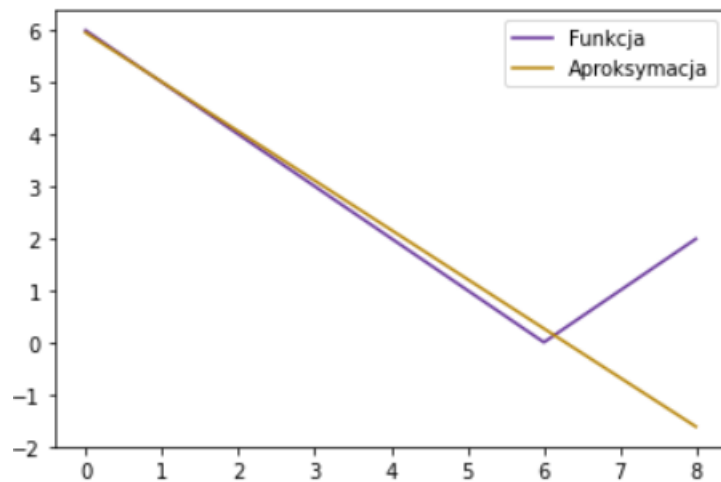
Wykres 12. Wykres dla drugiej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 5.

Przedział	Stopień wielomianu aproksymacyjnego	Liczba węzłów	Błąd aproksymacji
[0;8]	1	2	0.6351042423112299
		5	0.5555651327808702
	5	2	0.6338110594868124
		5	2.669906946059564e-16
	10	2	0.9045398707538624
		5	0.12630524222262707

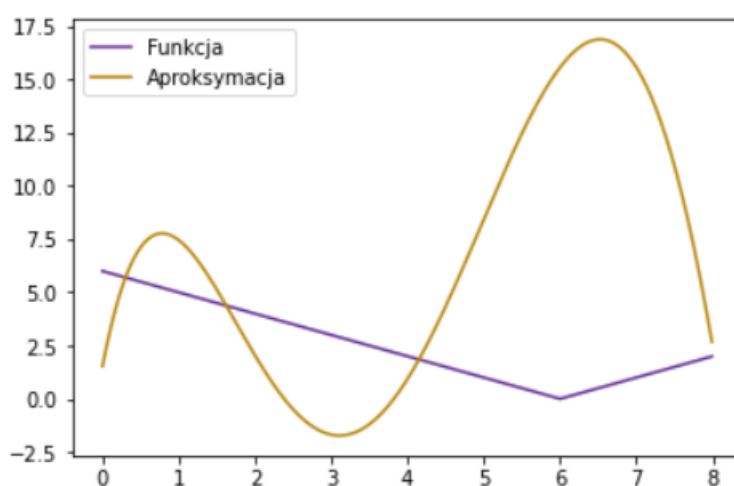
Tabela 2. Wartości dla drugiej funkcji.



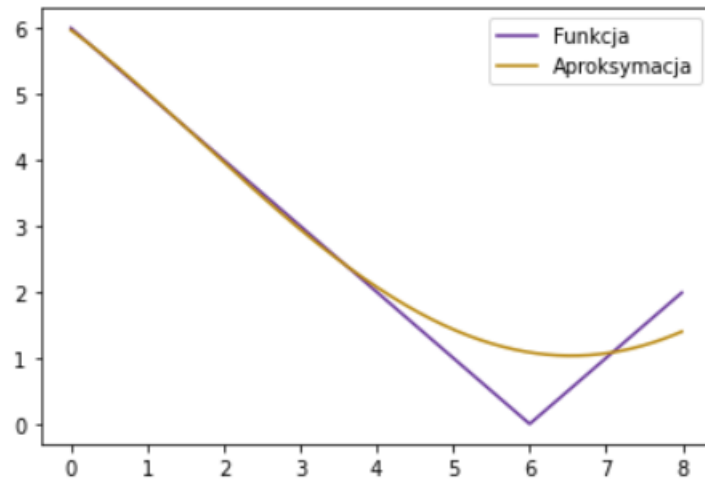
Wykres 13. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 2.



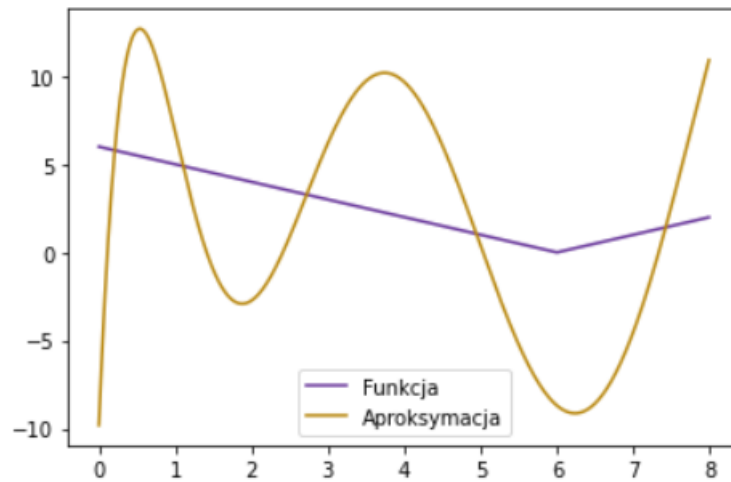
Wykres 14. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 5.



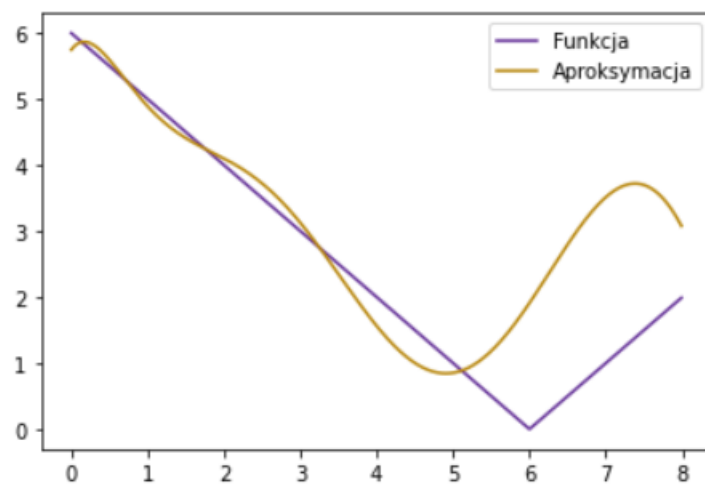
Wykres 15. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 2.



Wykres 16. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 5.



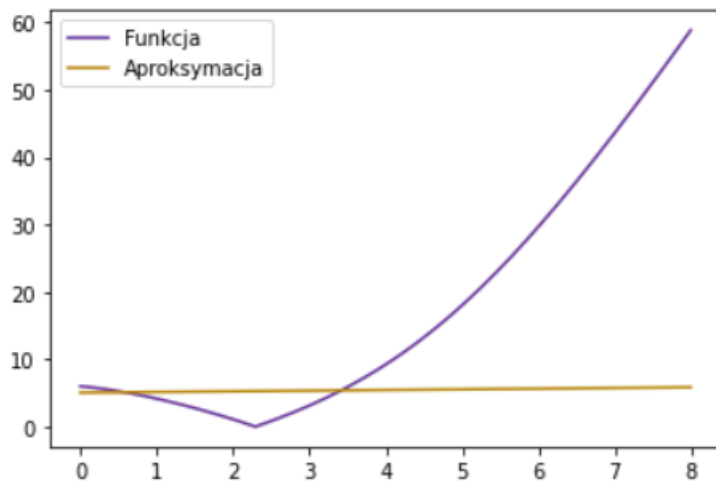
Wykres 17. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 2.



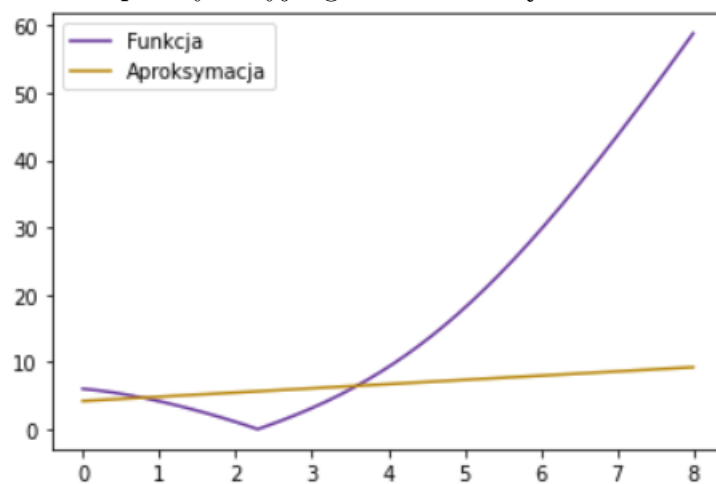
Wykres 18. Wykres dla trzeciej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 5.

Przedział	Stopień wielomianu aproksymacyjnego	Liczba węzłów	Błąd aproksymacji
[0;8]	1	2	0.9999999999999999
		5	0.9583297633455016
	5	2	1.4659194224398615
		5	1.6553082706510688e-15
	10	2	6.853929479471084
		5	0.060057215186010794

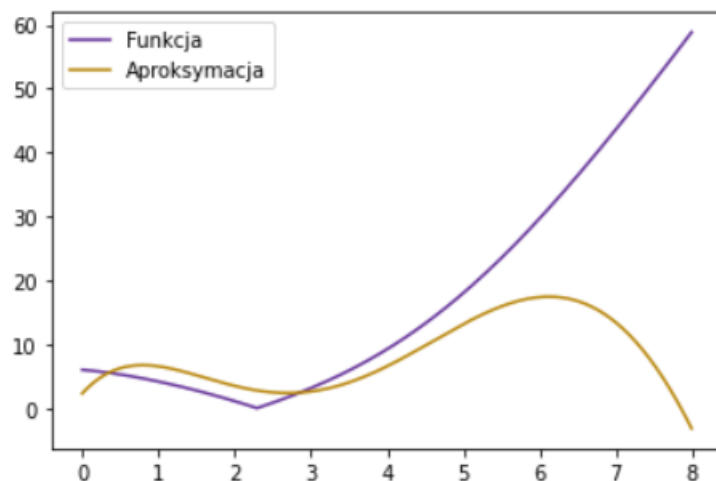
Tabela 3. Wartości dla trzeciej funkcji.



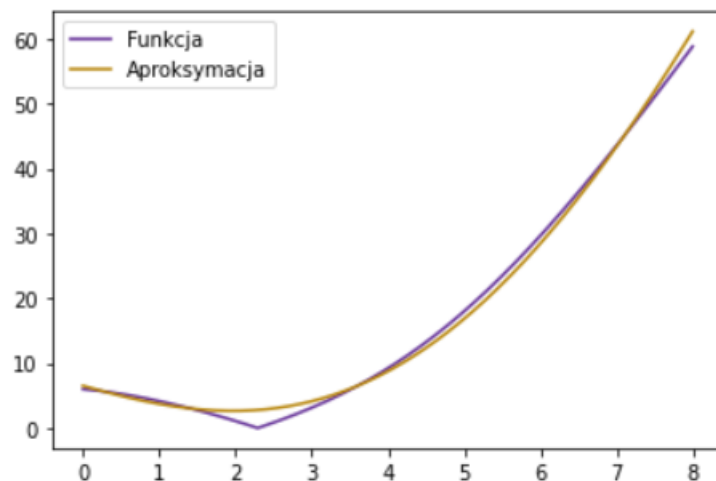
Wykres 19. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 2.



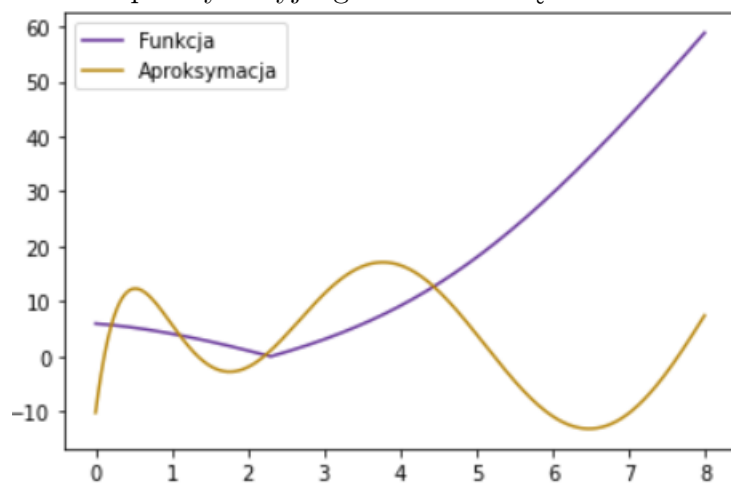
Wykres 20. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 5.



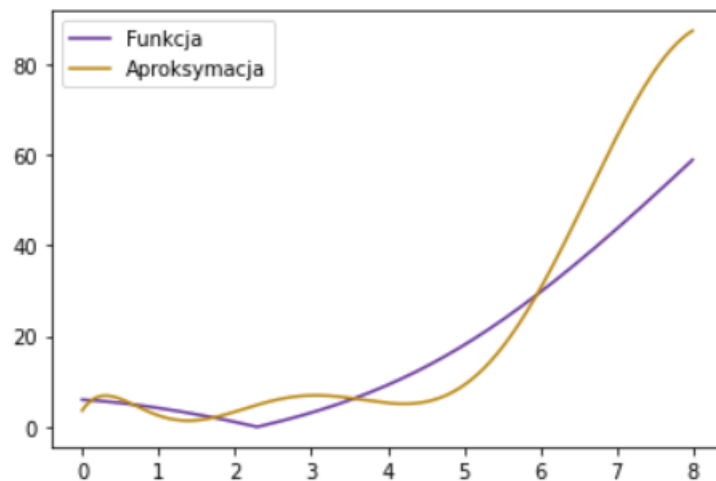
Wykres 21. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 2.



Wykres 22. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 5.



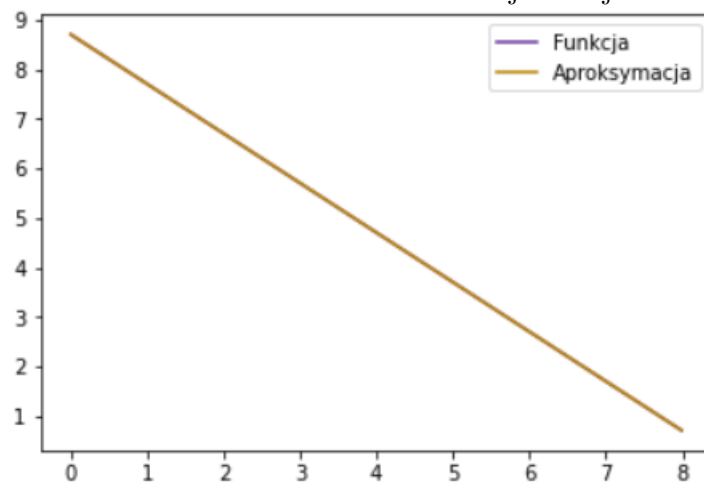
Wykres 23. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 2.



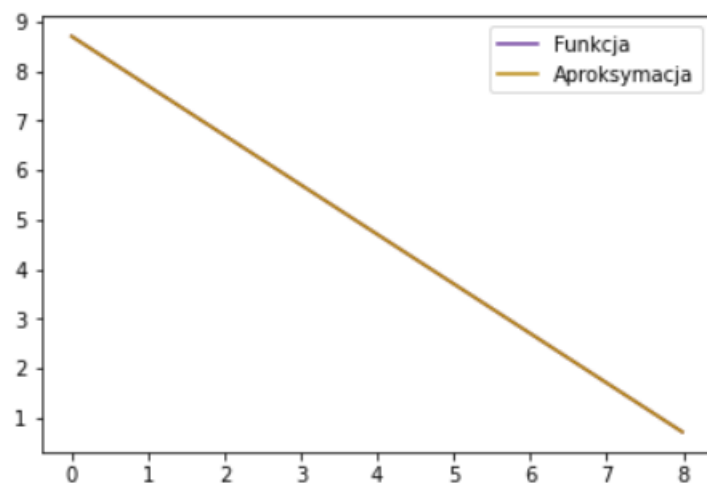
Wykres 24. Wykres dla czwartej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 5.

Przedział	Stopień wielomianu aproksymacyjnego	Liczba węzłów	Błąd aproksymacji
[0;8]	1	2	0.10026717615541811
		5	2.866806505171328
	5	2	0.500270812432902
		5	5.203339977923019e-15
	10	2	7.432567315031782
		5	1.135621268623616

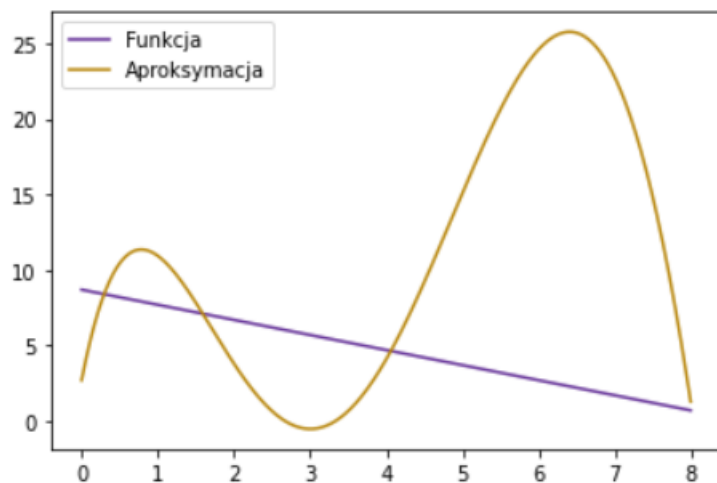
Tabela 4. Wartości dla czwartej funkcji.



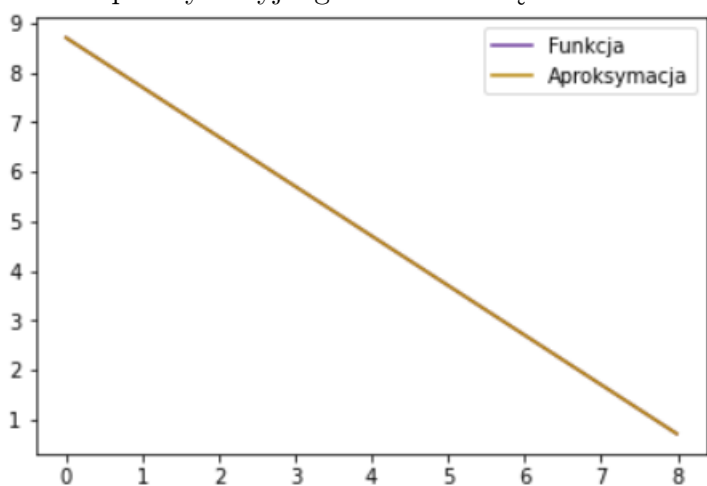
Wykres 25. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 2.



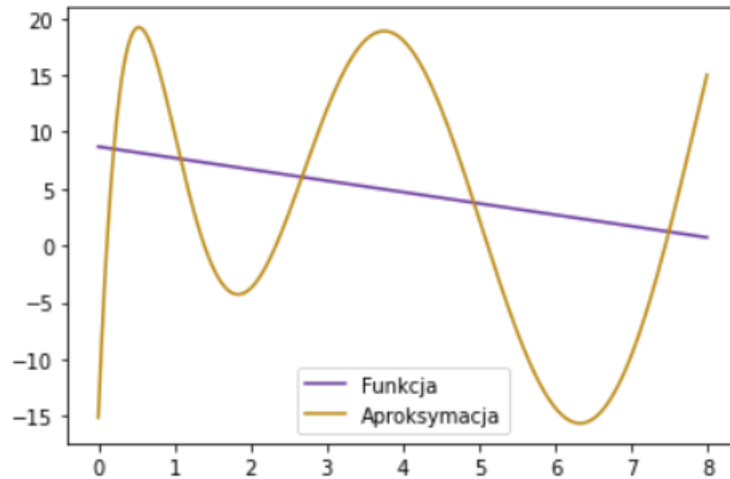
Wykres 26. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 1. Liczba węzłów 5.



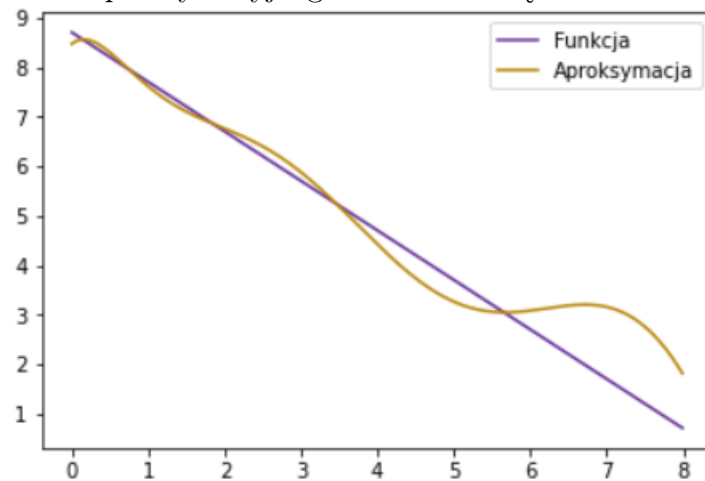
Wykres 27. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 2.



Wykres 28. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 5. Liczba węzłów 5.



Wykres 29. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 2.



Wykres 30. Wykres dla piątej funkcji. Stopień wielomianu aproksymacyjnego 10. Liczba węzłów 5.

Przedział	Stopień wielomianu aproksymacyjnego	Liczba węzłów	Błąd aproksymacji
[0;8]	1	2	1.0000000000000002
		5	0.9999999999999999
	5	2	1.774460881437821
		5	3.2013547319644216e-15
	10	2	10.697606460923478
		5	0.025596677039214623

Tabela 5. Wartości dla piątej funkcji.

6. Dyskusja

Uzyskane przez nas wyniki w eksperymentach wyraźnie wskazują na najlepsze dobranie stopnia wielomianu aproksymacyjnego oraz liczby węzłów (oczywiście z testowanych przez nas przypadków), a dokładnie jest to 5. stopień wielomianu aproksymacyjnego oraz liczba węzłów równa 5. Z tak dobranymi pa-

rametrami, w każdej z sprawdzanej przez nas funkcji, błąd aproksymacji był mikroskopijnie mały (w porównaniu z innymi wariantami). Wykresy funkcji z tak dobranymi wartościami w dużej mierze się pokrywały, czego nie można powiedzieć w innych przypadkach. Funkcją liniową udało się "dobrze skopiować" przy mniejszym stopniu aproksymacji i liczbie węzłów jednak tylko w zobrazowaniu na wykresie, gdyż wartość błędu aproksymacji nie jest niska. W pozostałych funkcjach można stwierdzić, iż w większości eksperymentów najgorszym wariantem był 10. stopień wielomianu aproksymacyjnego oraz liczba węzłów równa 2.

7. Wnioski

- Im wyższy stopień wielomianu aproksymacyjnego tym mniejsza dokładność aproksymacji,
- Większa ilość węzłów równa się większej dokładności aproksymacji,
- Z racji tego, że metoda aproksymacji oparta o wielomiany Laguerre'a jest wielomianowa to najdokładniej aproksymuje właśnie wielomiany.

Literatura

- [1] T. Oetiker, H. Partl, I. Hyna, E. Schlegl. *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu L^AT_EX2e*, 2007, dostępny online. <https://ctan.org/tex-archive/info/lshort/polish/lshort2e.pdf>.
- [2] Prezentacja WIKAMP "Materiały wykładowe część druga".