Escuela de Finanzas Aplicadas

Valoración

Modelos discretos

Nicolás Gómez-Sellés (nicolas.gomez@bbva.es)

MEFC-BBVA, enero-febrero de 2019

Plan y resumen

En la teoría de valoración, se pretende dar un marco general de modelos estocásticos que permiten valorar a mercado (por replicación) instrumentos derivados.

Los ingredientes de estos modelos serán

- unos "activos básicos" S_j, en los que podemos invertir (comprar y vender) y que constituyen el mercado subyacente;
- uno de ellos se elegirá como "numerario" $\mathbf{N}$ (la unidad de referencia);
- y se postularán "escenarios de evolución" de los valores $S_j(t)$ de los activos en el tiempo;

Para que podamos usar el modelo para valorar a mercado , deberá

- ser "(internamente) libre de oportunidades de arbitraje": comprando y vendiendo activos básicos dentro del modelo no podemos generar oportunidades de arbitraje.
- ser "consistente con el mercado": los precios que el modelo asigna en tiempo $t = 0$ a los activos básicos coinciden con los de mercado.

En la práctica,

$\rightarrow$ si el modelo incorpora una probabilidad $\mathbf{P}$ (que diremos de valoración) en el espacio de escenarios de evolución de manera que, para cada uno de los activos S_j,

$$\boxed{\frac{S_j(t)}{\mathbf{N}(t)} \quad \text{sea } \textbf{martingala},}$$

entonces

$\rightarrow$ tendremos garantizado que el modelo es (internamente) libre de arbitraje y que además permite valorar (de manera consistente con el mercado con un calibrado previo) los instrumentos derivados (los cuales se puedan replicar con carteras de los activos básicos).

Si estos instrumentos vencen en tiempo T y llamamos X a sus flujos, entonces la valoración vendrá dada, simplemente, por

$$\boxed{\text{valor}_{\text{hoy}}(X) = N(0)\ \mathbf{E}\Big(\frac{X(T)}{N(T)}\Big)}$$

Así que si en un modelo tenemos

- un numerario;
- una probabilidad de valoración;
- y los activos básicos arrancan en tiempo $t = 0$ con su valor de mercado,

el modelo permitirá "valorar" de manera eficiente y consistente con el mercado los instrumentos derivados replicables con activos básicos.

Discutiremos primero los distintos paradigmas de valoración, centrándonos en (e ilustrando con ejemplos sencillos) el de **valoración por replicación (no arbitraje)**.

A continuación, presentaremos la metodología de valoración por replicación desde un punto de vista práctico en los modelos discretos:

1. modelos discretos con un sólo periodo de tiempo (modelo de Bernoulli);
2. modelos discretos con varios periodos de tiempo (modelo binomial);

En el primer caso, introduciremos los ingredientes de la teoría de valoración por repliclación:

> activos básicos, carteras, numerarios, oportunidades de arbitraje, replicación, probabilidad de valoración, teorema fundamental de valoración, mercados completos, etc.;

en el modelo más sencillo posible (modelo con dos activos). Sirviéndonos de esta preparación, en el segundo caso, introduciremos la práctica de valoración en el árbol binomial.

Índice

1. Paradigmas de valoración

¿Qué es valorar?

Por **instrumento financiero** entendemos un contrato entre dos partes por el que se estipulan unos flujos en ciertas fechas futuras, y por el que en la fecha de hoy se paga un cierto montante entre las partes.

Valorar un instrumento financiero I consiste en determinar ese montante que se paga hoy. Queremos que el precio que asignamos hoy al instrumento sea razonable, consistente, equivalente, representativo de los flujos del futuro.

En nuestro análisis, deberemos tener en cuenta dos ingredientes:

- Los flujos se reciben en el futuro, y, por supuesto, para valorarlos hay que tener en cuenta el **valor temporal del dinero**. Supondremos que disponemos de la curva de factores de descuento (sin riesgo o incertidumbre): $FD(t)$ es el factor de descuento desde la fecha t a hoy.

- Además, los flujos son, en general, **inciertos** (renta variable, instrumentos de crédito, instrumentos sobre tipos de interés, etc.). No sabemos cuál va a ser su montante exacto. El momento del pago de flujos puede ser incierto también.

Valoración de lo *cierto*

Digamos que el instrumento paga cantidades seguras

$$\boxed{f_1, \ldots, f_N}$$

(montantes fijos, que no dependen de niveles de otras variables financieras; y sin riesgo de contrapartida) en correspondientes fechas futuras

$$\boxed{t_1, \ldots, t_N}$$

Obtenemos el valor del instrumento descontando los flujos:

$$\boxed{\text{Valor} = \sum_{j=1}^{N} f_j \; FD(t_j)\,,}$$

donde $FD(t_j)$ es el factor de descuento desde la fecha t_j a hoy.

La expresión anterior es bien natural. Pero, ¡atención!, vista desde otro punto de vista, la cantidad

$$f_1\,FD(t_1) + f_2\,FD(t_2) + \cdots + f_N\,FD(t_N)$$

es también el dinero necesario (hoy) para **replicar** los flujos (futuros) del instrumento. Porque permite comprar:

- f_1 unidades del bono cupón cero de fecha t_1 (que cuesta hoy $FD(t_1)$ y paga 1 en tiempo t_1);
- f_2 unidades del bono cupón cero que vence en t_2 (que cuesta hoy $FD(t_2)$ y paga 1 en tiempo t_2);
- etc.

Si el precio del instrumento no fuera el valor determinado más arriba, entonces (en principio) se podría arbitrar.

Nota

Obsérvese que el argumento anterior requiere que los factores de descuento sean realmente precios, que no haya comisiones, que se puedan asumir posiciones cortas sobre los bonos cupón cero, etc.

Valoración de lo incierto: ingredientes

Los flujos de los instrumentos financieros generales son inciertos. El enfoque general de valoración de instrumentos financieros requiere especificar:

- **escenarios;**
- **flujos y descuentos;**
- **probabilidades.**

1. Escenarios

Se trata de determinar qué puede ocurrir en el futuro. Decidir qué eventos futuros (relevantes para el instrumento, o mejor, para una cierta colección de instrumentos) hay que tener en cuenta.

Cada escenario es, en realidad, un futuro potencial completo en el que se recoge una posible evolución de las variables de las que dependen los flujos del instrumento.

Cuando se analiza un escenario, entendemos que ese futuro que recoge es lo que va a ocurrir, que es seguro: analizar un escenario es condicionar sobre un posible futuro.

2. Flujos y descuentos

Para cada escenario habrá que precisar a continuación:

- **Flujo**, el montante que se recibirá o pagará en cada escenario concreto.
- **Descuento** que se ha de aplicar a ese flujo. Se trata del descuento por efecto del valor temporal del dinero. El descuento depende del escenario. En algunos modelos, el descuento dependerá de la evolución (incierta) de tipos de interés.

Tanto el montante del flujo como el descuento aplicable dependen de manera precisa del escenario. Pero, una vez fijado el escenario, flujos y descuentos quedan completamente determinados.

3. Probabilidad

El último ingrediente es el más delicado. Si entendemos que estamos en un contexto de incertidumbre, debemos asignarle a cada escenario de futuro una probabilidad de que ocurra. Como los escenarios han de cubrir todas las posibilidades, la suma de estas probabilidades sobre todos los escenarios posibles ha de ser 100 %.

La probabilidad de un escenario es la frecuencia (relativa) con la que puede ocurrir.

¿De dónde se obtiene esa asignación de probabilidad? Depende. Hay distintos paradigmas de valoración, y la diferencia esencial entre ellos radica en la fuente de información. La asignación puede:

- depender de nuestras propias intuiciones;
- sostenerse exclusivamente en datos estadísticos que nos dan la frecuencia de esos eventos;
- basarse en cotizaciones de instrumentos similares;
- o ser una combinación de las anteriores.

En suma, tendremos una asignación

$$\text{escenario } e \longrightarrow \begin{cases} \text{flujo (instrumento, fecha, escenario)} \\ \text{descuento (fecha, escenario)} \\ \text{probabilidad (escenario)} \end{cases}$$

El esquema de valoración usual asigna, como valor del instrumento, el valor medio (valor esperado, esperanza) de los flujos descontados ponderados con las probabilidades asignadas:

$$\boxed{\text{precio}_{\text{hoy}}(\text{instrumento}) = \sum_{\text{escenarios } e} \left[\text{flujo}_e \times \text{descuento}_e \times \text{probabilidad}_e \right]}$$

Valoración de lo incierto: paradigmas

1.- Paradigma de valoración actuarial

Si tenemos buena información estadística de la frecuencia con la que cada escenario ha ocurrido en el pasado, y el entorno se mantiene, podemos entender que esa frecuencia del pasado (adecuadamente analizada) es válida para el futuro. Es el caso, por ejemplo, de los juegos de azar, los análisis actuariales o el riesgo de crédito minorista.

Entendemos, en este caso, que se trata de una **probabilidad objetiva**. La asignación de probabilidad es una realidad física, independiente de opiniones.

El paradigma de valoración nos dice que

$$\boxed{\text{precio} = \sum_{\text{escenarios } e} \text{flujo}_e \times \text{descuento}_e \times \text{probabilidad}_e}$$

Este esquema de valoración se fundamenta en las **leyes de los grandes números**, es decir, en la repetición del experimento aleatorio en cuestión.

Digamos que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_N$ codifican los premios obtenidos en sucesivas partidas de un juego de azar (o los pagos a N mutualistas por los siniestros sufridos durante el próximo año, o los impagos de los préstamos de una cartera hipotecaria, etc.). Interesa la variable aleatoria que registra el premio tras N partidas (o el pago total a los mutualistas, o el número de defaults en la cartera, etc.):

$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \,,$$

→ Si las partidas se juegan en igualdad de condiciones (los mutualistas/hipotecados son clientes “homogéneos”), podemos suponer que las X_i son idénticas (tienen la misma distribución que una X de referencia), lo que nos dice que $\mathbf{E}(Y_N) = N\mathbf{E}(X)$.

→ Pero si, además, tenemos independencia (basta incorrelación), entonces las Leyes de los Grandes Números nos dicen que, si N es grande,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} X_i}_{\text{aleatorio}} \quad \simeq \quad \underbrace{N \cdot \mathbf{E}(X)}_{\text{seguro}}$$

Es decir, los pagos individuales son aleatorios, pero al agregarse son “casi ciertos”.

Lo que, traducido en valoración, nos dice que recibir los flujos aleatorios Y_N de un número grande de partidas es **equivalente** (con probabilidad elevada y aproximadamente) a recibir por partida la cantidad fija $\mathbf{E}(X)$, el valor medio de los flujos.

Observación

En este paradigma de valoración entendemos que es equivalente tener el activo con riesgo, con incertidumbre en sus flujos, que tener en dinero su precio hoy.

Las **leyes de los grandes números** son las que **eliminan el riesgo**.

El número $\mathbf{E}(X)$ sería, en principio, la prima por partida (o la prima para los mutualistas, o el coste de cobertura de los posibles defaults, etc.).

Aún más, el Teorema del Límite Central permite cuantificar cómo de probable es que Y_N se aparte de la cantidad $N\mathbf{E}(X)$. Por ejemplo, permite calcular (aproximadamente) cantidades como

$$\mathbf{P}(|Y_N - N\mathbf{E}(X)| > a)$$

sin necesidad de conocer la distribución concreta de Y_N, sino que basta conocer la media y la desviación típica de las X_j.

Así que

- si se sabe de manera objetiva que los flujos de un instrumento (juego) son aleatorios;
- si se conoce con precisión la media y la desviación típica de probabilidad de los resultados;
- y si vamos a invertir en él un número grande de veces en condiciones idénticas (jugar muchas partidas),

entonces (y solo entonces) la esperanza es un equivalente (casi cierto) de los flujos futuros.

Son muchas hipótesis sobre la estructura aleatoria, que se cumplen (casi) en los juegos de azar, en los contratos de seguros y en el crédito minorista. Se cumplen pero (bastante) menos en inversión repetida en periodos (relativamente) cortos en Bolsa. Y poco o nada en contratos a plazo, derivados o no.

En lo que sigue, analizaremos el paradigma de que deberemos utilizar, por ejemplo, en la valoración de derivados financieros: el de **valoración por replicación**.

2. Valoración por replicación

Valoración a mercado (replicación y cobertura)

Los “mercados” dan ya precio a una gran variedad de instrumentos.

Lo que pretenderemos será valorar instrumentos OTC “como si estuvieran en el mercado” (pues, por supuesto, lo que ya está en mercado no hace falta valorarlo a mercado).

- Palabras clave: *mark-to-market*, *mark-to-model*, *fair value*/valor razonable.

- Nociones clave: no arbitraje, replicación/cobertura, valoración relativa.

Pero “mercado”, ¿qué es? Depende: (provisionalmente) aquellos instrumentos que tienen precios firmes, fiables, públicos. . . en los que se puede invertir, comprar/vender, casi sin restricciones de volumen.

En su base, la teoría económica descansa en dos observaciones:

- las oportunidades de beneficio obvias raramente se dejan sin explotar,
- y las cosas cuadran.

O, tal como lo digo a veces,

- un billete de veinte dólares no permanece en el suelo de una calle transitada durante mucho tiempo,
- y cada venta es también una compra.

P. Krugman. *Desarrollo, Geografía y Teoría Económica.*

Cuando uno se propone construir un modelo matemático formal, estos principios tan básicos se convierten en las ideas mucho más exactas de maximización (de algo) y de equilibrio (de alguna forma).

Sin embargo es aconsejable no olvidar su versión más imprecisa, por dos razones opuestas: para acordarnos de no tomar ninguna formalización matemática demasiado en serio, y para acordarnos de que los principios básicos de la economía pueden ser razonables.

Replicación (o cobertura) y arbitraje / Valoración relativa

Si un activo se puede replicar con una cartera de otros activos y si no hay oportunidades de arbitraje, entonces el precio de la cartera debe coincidir con el precio de ese activo. Obviamos aquí costes de transacción.

1. Arbitraje

Entendemos por **arbitraje** una inversión en una cartera de coste inicial 0, pero que en un determinado instante futuro nos garantiza flujos positivos (o, al menos, no negativos).

2. Replicación

Replicar (de manera exacta y estática) el activo X con los activos $A, B, C, \ldots$ significa hallar una cartera de estos últimos de manera que, pase lo que pase (sea cual sea el escenario que suceda en el futuro), los flujos de la cartera y los flujos de X coincidan.

3. Paradigma de valoración relativa (o por no arbitraje)

Si X se **replica** con una cartera con α de A, β de B, γ de C, etc., y si **no hay arbitraje,** entonces

$$\text{precio}(X) \overset{\text{ha de ser}}{=} \text{coste de cartera} = \alpha \cdot \text{precio}(A) + \beta \cdot \text{precio}(B) + \gamma \cdot \text{precio}(C) + \cdots$$

O al revés: si el precio de X y el coste de formación de la cartera no coincidieran, entonces habría una oportunidad de arbitraje.

Si consideramos que los activos $A, B, C, \ldots$ son “básicos”, la replicación y la ausencia de oportunidad de arbitraje nos permiten **valorar** X de manera **relativa**.

- Si el instrumento X cotiza (de alguna manera sensible) entonces, o bien el precio así calculado coincide (aproximadamente) con el cotizado, o bien hay (en teoría) una oportunidad de arbitraje.
- Si el instrumento X no cotiza, el precio así obtenido puede considerarse como el precio que tendría el instrumento si estuviera en mercado.

De la película *The Englishman who went up a hill but came down a mountain*:

Anson and Garrad have explained they must go and calculate the height.

[Thomas Twp Too]: And how d'you know later?

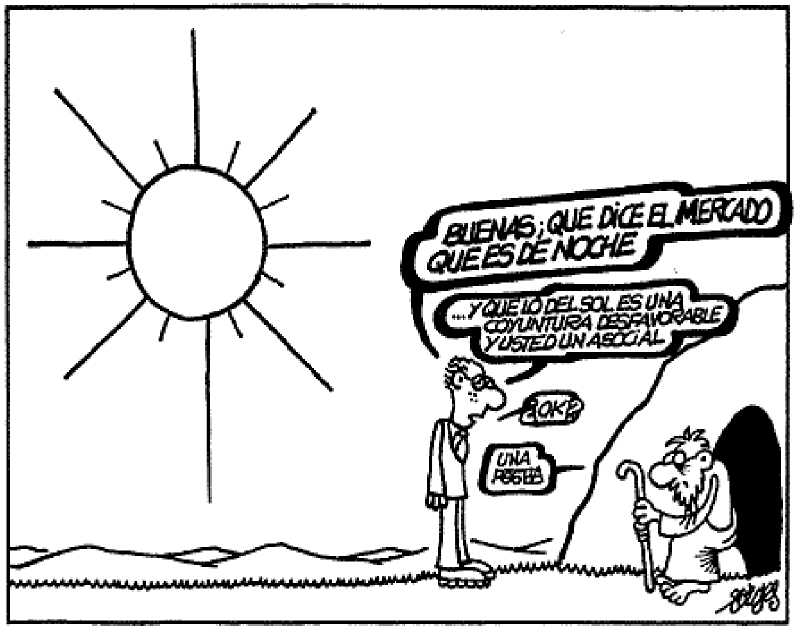
[Reginald Anson]: Well, w-we've made, um, we've made measurements with those two hills, and w-we already know the height of Newton Beacon and Whitchurch Hill. . .

[Thomas Twp Too] But how were they measured?

[Reginald Anson]: The same way, by comparing them with other hills.

[Thomas Twp Too]: But who measured the first hill?

[Rev. Robert Jones]: (whispering) God. God, my boy. God.



Ilustraciones de valoración por replicación

Algunos ejemplos de valoración por replicación (exacta) **estática** o **semi-estática**.

1. **Paridad call/put.** Una cartera que tiene larga una call y corta una put del mismo vencimiento y del mismo strike sobre un cierto subyacente replica exactamente un contrato forward sobre ese subyacente, ese vencimiento y ese mismo strike.

   La call larga y la put corta pagarán en conjunto un flujo incierto y desconocido:

$$\max\{S-K;0\}-\max\{0;K-S\}$$

   donde S es el nivel incierto y desconocido del subyacente a vencimiento. Pero, pase lo que pase, este montante es

$$S-K\,,$$

   que es el flujo del contrato forward. Así que

$$\text{precio}_{\text{call}}-\text{precio}_{\text{put}}=\text{precio}_{\text{forward}}\,.$$

2. **Call/put binaria.** Una cartera con una call binaria con strike K y una put binaria con strike K (de vencimiento T) paga 1 a vencimiento pase lo que pase, así que es equivalente a un bono cupón cero de nominal 1 y ese vencimiento. Esto es

$$\text{precio}_{\text{call binaria}} + \text{precio}_{\text{put binaria}} = \text{precio}_{\text{bono cupón cero}} \,.$$

3. **Contrato forward.** El forward con strike K paga $S_T - K$ sobre S, que no paga dividendos. La replicación se obtiene con una acción comprada y un bono (de principal K, cupón cero y vencimiento T) vendido. Si R es el tipo continuo a vencimiento T, el coste hoy de esta replicación exacta es:

$$S_0 - Ke^{-RT} \,.$$

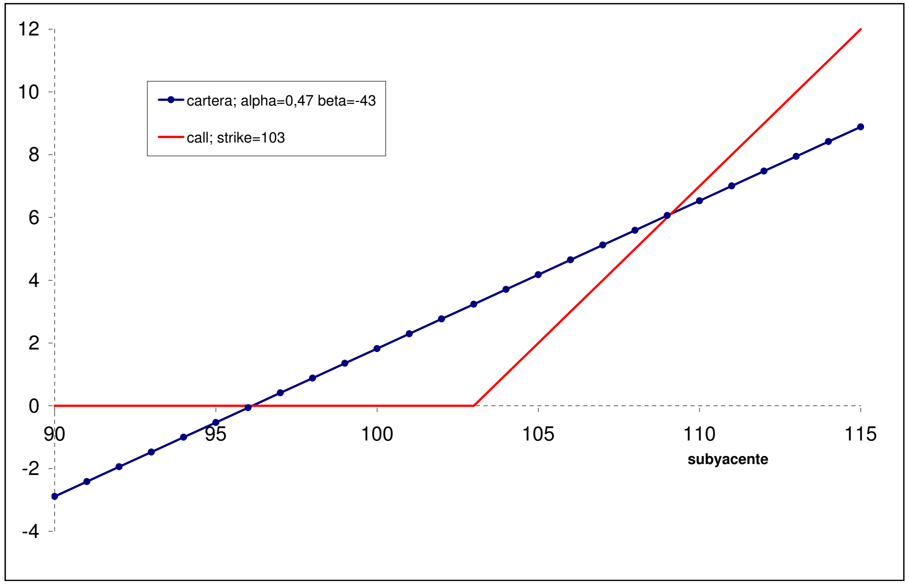
→ Las replicaciones anteriores son **estáticas**.

Se constituye una cartera al inicio que, sin alteración alguna, es capaz de replicar exactamente los flujos del activo de interés.

→ La replicación también puede ser **dinámica**.

Es decir, constituimos una cartera al inicio y diseñamos un protocolo o estrategia de gestión o de inversión autofinanciada de esa cartera que, pase lo que pase, genere exactamente los flujos del activo a replicar.

4. Activo no replicable (estáticamente)



El ejemplo básico de instrumento no replicable es una call (digamos a 1 año ATM forward, es decir, con strike $S_0(1+r)$) usando como activos básicos dinero y subyacente. Si invertimos α en el subyacente y β en dinero, a vencimiento tendremos

$$\alpha S_0 + \beta \longrightarrow \alpha S + \beta(1+r)$$

donde S_0 es la cotización hoy, r es el tipo a 1 año, y S es la cotización desconocida de tiempo 1. Mientras que para ese valor de S, la call paga

$$\max \left\{ S - S_0(1+r); 0 \right\}$$

En términos de S, la cartera es una recta, mientras que la call es una línea quebrada.

En este caso, necesitaremos imponer un modelo para la evolución del subyacente (y tanto la replicación como la valoración dependerán del modelo elegido).

3. Modelo de un solo periodo de tiempo: planteamiento del modelo de dos activos

Primero mencionaremos las asunciones típicas en la construcción de modelos de valoración.

A continuación, exhibiremos los ingredientes de nuestro primer modelo, el modelo más sencillo posible (un solo periodo de tiempo, dos estados y dos activos básicos):

- escenarios;
- activos;
- carteras.

Además, explicaremos qué son y cómo se calculan, en este marco,

- las carteras replicantes;
- las oportunidades de arbitraje.

Asunciones en la construcción de modelos de valoración

1. Un inversor puede comprar o vender cualquier cantidad de activo (por ejemplo $0{,}5$ acciones de Telefónica).
2. Cualquier compra o venta de un producto no cambia el precio del producto.
3. El margen bid/ask es 0 $\rightarrow$ mercado sin fricciones.
4. No hay costes de transacción.
5. ¡Se puede vender algo que no se posee!.

Escenarios. Tiempos e incertidumbre

En este modelo de mercado financiero sólo hay **dos instantes de tiempo**, que convencionalmente denotaremos por $t = 0$ y por $t = 1$.

Sólo hay transacciones en esos dos instantes de tiempo.

- En tiempo $t = 0$ no hay incertidumbre, todo es conocido.
- Pero los valores/flujos de los activos en tiempo $t = 1$ son inciertos.
- En tiempo $t = 1$ se liquida la cartera, de manera que identificaremos los flujos en tiempo $t = 1$ con sus valores.

La incertidumbre se codifica con un conjunto Ω de 2 escenarios/estados posibles:

$$\boxed{\Omega = \{\omega_{\text{up}}, \omega_{\text{down}}\}}$$

Ω es el espacio muestral de escenarios/estados.

Activos

1.- Activos básicos

Igualmente tenemos 2 activos, que se pueden comprar y vender en tiempo $t = 0$ y comprar y vender en tiempo $t = 1$. Estos activos básicos se representan como:

$$\boxed{S_1, S_2}$$

Los valores de estos activos son números reales, positivos o negativos (posiciones largas/cortas, posiciones a favor/en contra)

Estos activos básicos serán, junto con las carteras que podamos formar con ellos, nuestro **mercado** de referencia.

En general, los activos básicos del modelo dependen de los instrumentos que nos pueda interesar analizar. Los activos básicos podrían ser acciones, incorporando además el dinero o el bono cupón cero de nominal (sin riesgo de crédito) que vence en tiempo $t = 1$.

Tiempo $t = 0$. Los activos en tiempo 0 valen

$$S_1^{t=0}, S_2^{t=0}.$$

Son datos conocidos. No hay diferencial bid/ask. Exigimos desde el principio que el modelo arranque con los valores de mercado (cotizados) de los activos básicos.

Tiempo $t = 1$. Los activos en tiempo $t = 1$ tienen valores inciertos. Denotamos los valores de estos activos en esos estados por:

$$S_1^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}]\ ,\ S_1^{t=1}[\omega_{\mathrm{down}}] \quad \text{y} \quad S_2^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}]\ ,\ S_2^{t=1}[\omega_{\mathrm{down}}].$$

Nota

Esta notación es un poco incómoda, en la práctica, si tenemos dos activos A, B, pondremos su valor en $t = 0$

$$\begin{cases} A^{t=0} = A_0 \\ B^{t=0} = B_0 \end{cases}$$

y en tiempo $t = 1$

$$\begin{cases} A^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = A_u \\ A^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = A_d \end{cases} \qquad \begin{cases} B^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = B_u \\ B^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = B_d \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & A_u & & B_u \\ A_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & B_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A_d & & B_d \end{tikzcd}$$

2.- Activos generales

Un activo (general) es un instrumento $\mathcal{X}$ que en tiempo $t = 1$ tiene flujos/valores dados en cada escenario:

$$X[\omega_{\text{up}}],\ X[\omega_{\text{down}}]$$

ejemplo. Activos Arrow-Debreu y bonos.

Un par de activos especiales (no necesariamente básicos) son:

- Los **activos Arrow-Debreu**. Hay un activo Arrow-Debreu por cada escenario. Esto es:

$$\begin{cases} AD_1[\omega_{\text{up}}] = 1 \\ AD_1[\omega_{\text{down}}] = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} AD_2[\omega_{\text{up}}] = 0 \\ AD_2[\omega_{\text{down}}] = 1 \end{cases}$$

- Otro activo especial es el **bono** D: el activo que paga 1 en tiempo $t = 1$ pase lo que pase, en cualquier estado:

$$\begin{cases} D[\omega_{\text{up}}] = 1 \\ D[\omega_{\text{down}}] = 1 \end{cases}$$

El bono es activo sin riesgo, pues en todos los escenarios da el mismo flujo. Es decir, *pase lo que pase* paga lo mismo; no hay incertidumbre.

3.- Carteras de activos básicos y de activos generales

Una cartera de inversión en los activos básicos es un vector que registra las unidades invertidas en cada activo, es decir, un vector $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^\intercal$ en $\mathbb{R}^2$.

Para una cartera de inversión $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^\intercal$, definimos su proceso de valor V como

$$V = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 \,.$$

En tiempo $t = 0$ el valor (coste) de la cartera es	Y en tiempo $t = 1$ es la variable (depende del escenario)
$V^{t=0} = \lambda_1 S_1^{t=0} + \lambda_2 S_2^{t=0}.$	$V^{t=1}[\omega_j] = \lambda_1 S_1^{t=1}[\omega_j] + \lambda_2 S_2^{t=1}[\omega_j], \quad j \in \{\mathrm{up}, \mathrm{down}\}.$

Es importante recalcar que dos carteras de inversión que tienen los mismos flujos en tiempo $t = 1$ son, a todos los efectos, indistinguibles y equivalentes.

Carteras de activos generales

Asimismo se pueden formar carteras de activos generales.

Por ejemplo, que el bono es una cartera de Arrow-Debreu:

$$D = AD_1 + AD_2\,,$$

en la que los coeficientes son todos 1. De hecho, cualquier activo X es una cartera de activos AD:

$$X \equiv X[\omega_{\mathrm{up}}]AD_1 + X[\omega_{\mathrm{down}}]AD_2$$

Esto es útil para valoración (en cualquier modelo), pues reduce la valoración de activos a la valoración de los activos AD.

4.- Numerarios

Los valores son siempre relativos. Necesitaremos comparar valores de tiempos distintos, y para ello expresar los valores en unidades homogéneas. Lo más habitual es utilizar el dinero como comparación temporal, pero no tiene por qué ser así. Podemos usar otros activos para esa comparación. Un numerario $\mathbf{N}$ es

- un activo básico o una cartera de inversión en ellos. Es decir, un activo de mercado, del que se dispone de su precio (en mercado) en tiempo 0 y del que se conoce el flujo concreto en cada escenario de tiempo $t = 1$.
- Tanto en tiempo $t = 0$, como en cada escenario de tiempo $t = 1$, el numerario $\mathbf{N}$ tiene valor **positivo** (no nulo).

Supondremos que **el modelo tiene un numerario**.

Las elecciones de numerario más habituales son:

- el bono, el activo D, que suele aparecer como uno de los activos básicos.
- la cuenta bancaria, que vale 1 en el instante inicial $t = 0$ y vale $1 + r$ en cualquier estado de tiempo $t = 1$

Pero puede usarse uno cualquiera de los propios activos básicos (siempre que se cumpla la condición de positividad).

Más adelante comprobaremos cuán útil será usar distintos numerarios e incluso cambiar de un numerario de referencia a otro dentro de un modelo.

Replicación con activos básicos

En nuestro modelo simplificado, un activo X es replicable con los activos básicos si hay una cartera de inversión $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^\intercal$ que genera exactamente el mismo flujo en cada uno de los escenarios de tiempo $t = 1$.

La cartera de replicación o replicante $\boldsymbol{\lambda}$ tiene los mismos flujos que X en todos y cada uno de los escenarios (pagan lo mismo, pase lo que pase).

Si el activo X tiene flujos $(X[\omega_{\text{up}}], X[\omega_{\text{down}}])$, la replicación se expresa como:

$$\begin{cases} \lambda_1\, S_1^{t=1}[\omega_{\text{up}}] + \lambda_2\, S_2^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = X[\omega_{\text{up}}] \\ \lambda_1\, S_1^{t=1}[\omega_{\text{down}}] + \lambda_2\, S_2^{t=1}[\omega_{\text{down}}] = X[\omega_{\text{down}}] \end{cases}$$

Replicabilidad de activos. Mercados completos

Dado un modelo, un activo puede

- no ser replicable con los activos básicos;
- ser replicable con más de una cartera;
- o ser replicable con una única cartera.

Si todos los activos del modelo son replicables, se dice que el modelo es **completo**.

En general, la replicación interesa para valoración:

> si un activo (del que tan sólo conocemos sus flujos) se puede replicar con activos básicos, entonces el coste de una cartera replicante es un coste que basta para replicar esos flujos. Pero, ¿puede haber varias carteras replicantes?.

Observación

Número de activos básicos y número de escenarios.

- En nuestro modelo simplificado, si suponemos que los dos activos básicos no son redundantes, al considerar sólo dos escenarios futuros posibles, todos los activos son replicables. En cambio, si tuviéramos más escenarios posibles, necesitaríamos más activos no redundantes para conseguir la completitud del modelo.
- Además, si añadimos activos redundantes no tendremos garantizada la unicidad en la construcción de las carteras de replicación.

Observación

Mercados completos y activos Arrow-Debreu.
Cualquier modelo de valoración, ya sea discreto con un único tiempo, discreto con varios tiempos o continuo, es completo cuando (y sólo cuando) los activos Arrow-Debreu son replicables con los activos básicos.

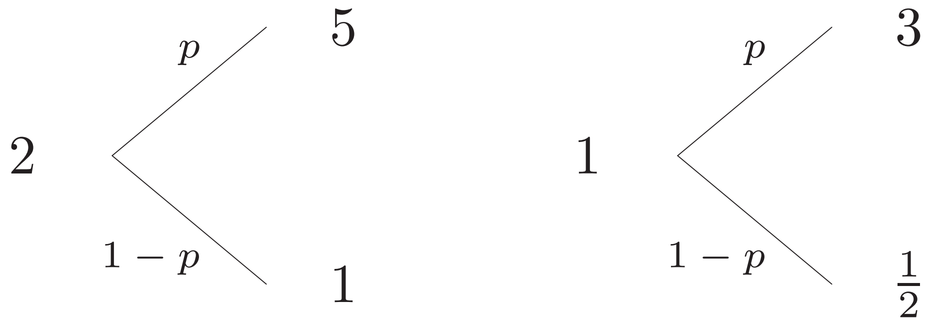
Oportunidades de arbitraje

Una oportunidad de arbitraje con los activos básicos es una cartera $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^\intercal$ que cumple:

- $V^{t=0} = 0$,
- $V^{t=1} \geq V^{t=0}$,
- $\mathbf{P}\left[V^{t=1} > V^{t=0}\right] > 0$.

EJEMPLO.

Consideremos el mercado definido como:



¿Hay oportunidades de arbitraje?

La respuesta es que sí.

Formemos la cartera $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{-1}{2}, 1)^{\mathsf{T}}$.

$$\begin{aligned} V^{t=0} &= \frac{-1}{2} \cdot S_1^{t=0} + 1 \cdot S_2^{t=0} = \frac{-1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0, \\ V^{t=1}[\omega_{\text{up}}] &= \frac{-1}{2} \cdot S_1^{t=1}[\omega_{\text{up}}] + 1 \cdot S_2^{t=1}[\omega_{\text{up}}] = \frac{-1}{2} \cdot 5 + 3 > 0, \\ V^{t=1}[\omega_{\text{down}}] &= \frac{-1}{2} \cdot S_1^{t=1}[\omega_{\text{down}}] + 1 \cdot S_2^{t=1}[\omega_{\text{down}}] = \frac{-1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

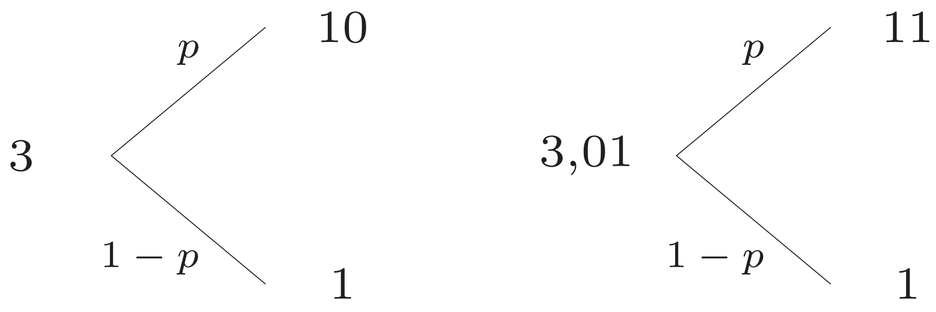
por lo que $\mathbf{P}\left[V^{t=1} > V^{t=0}\right] = \mathbf{P}\left[\omega_{\text{up}}\right] = p > 0$.

Es importante recalcar que el este arbitraje es independiente de la elección de p, sólo necesitamos que $p > 0$, lo cual es obvio ya que es una probabilidad.

También podemos observar que si multiplicamos la cartera $\boldsymbol{\lambda}$ por cualquier número positivo, volvemos a tener una cartera de arbitraje.

Ilustración

En el siguiente modelo de mercado



¿hay oportunidades de arbitraje?

Para poder responder necesitamos recurrir al teorema de valoración, el cual enunciaremos a continuación.

4. Modelo de un solo periodo de tiempo: valoración en el modelo de dos activos

Valoración de lo replicable

La única consideración económica en la modelización es la asunción de que debemos tener modelos para los que se cumpla la

hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje

Mantendremos en lo que sigue esta hipótesis (o exigencia en el modelado), que se sustenta en la suposición de que

> los mercados son eficientes en la gestión de información y no permiten que se generen y aprovechen oportunidades de arbitraje; o bien que si estas oportunidades aparecieran, se aprovecharían casi inmediatamente.

Y la principal consecuencia es poder valorar los activos replicables:

valoración de lo replicable

Si en un modelo no hay oportunidades de arbitraje, entonces dos carteras que tienen los mismos flujos han de tener el mismo valor de partida.

Si no fuera así, tomando la diferencia (de las carteras) en el orden adecuado tendríamos una cartera de valor hoy negativo digamos $-A$, con A positivo. Y si invirtiéramos A en el numerario tendríamos una cartera de valor hoy cero que da como flujos los del numerario, que son positivos.

Todo esto nos permite enunciar el

principio de valoración por replicación

El **coste** (único) de replicar un activo dado (replicable) es el único **precio** que le podemos asignar (y así lo hacemos) que no crea oportunidades de arbitraje.

Así que, una vez que hayamos comprobado que un modelo no permite oportunidades de arbitraje entre sus activos básicos, para valorar un activo replicable simplemente habría que obtener la (una) cartera replicante y calcular su valor hoy.

Probabilidad de valoración y numerarios

Introducimos aquí el concepto de probabilidad de valoración. Se trata de un truco que simplifica algunas tareas descritas anteriormente (valoración, comprobación de ausencia de oportunidades de arbitraje, etc.)

Nótese que, hasta ahora, para valorar instrumentos replicables, no habíamos tenido necesidad de introducir probabilidad alguna en el espacio de escenarios. Y que el numerario no había tenido papel alguno.

Probabilidad

En nuestro modelo, una probabilidad $\mathbf{Q}$ en el espacio de escenarios $\Omega = \{\omega_{\text{up}}, \omega_{\text{down}}\}$ es una ponderación de los escenarios q_u, q_d cuya suma vale 1. Por tanto:

$$\begin{cases} q_u = \mathbf{Q}(\omega_{\text{up}}), \\ q_d = \mathbf{Q}(\omega_{\text{down}}), \end{cases}$$

Probabilidad de valoración con respecto a un numerario

Si fijamos un activo especial $\mathbf{N}$ como **numerario**. Una probabilidad $\mathbf{Q}$ en Ω se dice **probabilidad de valoración respecto de N** si

$$\boxed{\frac{S_i^{t=0}}{\mathbf{N}^{t=0}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{S_i^{t=1}}{\mathbf{N}^{t=1}}\right), \quad i = 1, 2.}$$

Es decir, el valor normalizado (con $\mathbf{N}$) de tiempo 0 de cualquier activo básico es la media de los flujos normalizados de tiempo $t = 1$. Se deduce inmediatamente que, para cualquier cartera $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)^{\intercal}$ se tiene asimismo que su proceso de valor cumple

$$\boxed{\frac{V^{t=0}}{\mathbf{N}^{t=0}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{V^{t=1}}{\mathbf{N}^{t=1}}\right)}\,.$$

Relevancia de la probabilidad de valoración

Si para un numerario tenemos una probabilidad de valoración asociada, entonces

1.- En el modelo no hay oportunidades de arbitraje.

Y, por tanto, podremos aplicar el principio de valoración por replicación. Este criterio resuelve la dificultad aparente de comprobar que no hay oportunidades de arbitraje.

DETALLE. Si una cartera es de arbitraje, entonces su valor en tiempo $t = 0$ es

$$V^{t=0} = 0 \quad \text{y por tanto} \quad \frac{V^{t=0}}{N^{t=0}} = 0.$$

Pero como en tiempo $t = 1$ sus valores son no negativos, en algún escenario es positivo y $\mathbf{Q}$ da probabilidad positiva a todos los escenarios, tendríamos que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\Big(\frac{V^{t=1}}{N^{t=1}}\Big) > 0\,.$$

así que se tendría

$$\frac{V^{t=0}}{\mathbf{N}^{t=0}} \neq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\Big(\frac{V^{t=1}}{\mathbf{N}^{t=1}}\Big)\,,$$

que contradice que $\mathbf{Q}$ sea probabilidad de valoración.

En realidad, se trata de una equivalencia (*teorema fundamental de valoración*):

Ausencia de oportunidades de arbitraje	$\Longleftrightarrow$	Existencia de probabilidad de valoración

Nota

Hemos establecido el teorema de valoración en función de la existencia de un activo negociable positivo (numerario) con una probabilidad asociada. En realidad, este teorema es una versión particular de:

> Hay ausencia de oportunidad de arbitraje si y sólo si existe una probabilidad $\mathbf{Q}$ y una constante $d_{\mathbf{Q}}$ tal que para todo activo básico se cumple:

$$S_i^{t=0} = d_{\mathbf{Q}} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(S_i^{t=1} \right)$$

Ilustración

Una vez introducido el teorema de valoración, podemos resolver el ejercicio planteado en la página 48. No hay arbitraje si y sólo si existen $q > 0$, $d_{\mathbf{Q}} > 0$ tales que:

$$\begin{cases} 3 = d_{\mathbf{Q}}(10q + 1(1-q)) \\ 3{,}01 = d_{\mathbf{Q}}(11q + 1(1-q)) \end{cases}$$

Mediante el cambio de variables $(x_1, x_2) = d_{\mathbf{Q}}(q, 1-q), d_{\mathbf{Q}} = x_1 + x_2$, llegamos al sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3 = 10x_1 + x_2 \\ 3{,}01 = 11x_1 + x_2 \end{cases}$$

El cual tiene solución única $x_1 = 0{,}01$, $x_2 = 2{,}9$, es decir, $d_{\mathbf{Q}} = 2,91$, $q = 0{,}01/2{,}91$, $1 - q = 2{,}9/2{,}91$. Por tanto no hay arbitraje.

2.- El valor del activo (replicable) $\mathcal{X}$ que en tiempo $t = 1$ tiene flujos X es (ha de ser)

$$\boxed{\frac{\text{valor}_{\text{hoy}}(\mathcal{X})}{\mathbf{N}^{t=0}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{X}{\mathbf{N}^{t=1}}\right)}$$

Nótese que, aunque el cálculo depende del numerario y de la probabilidad de valoración, el resultado, el valor de la cartera replicante, sólo depende de (los flujos de) X. El detalle del argumento va como sigue: si V es cartera replicante del activo $\mathcal{X}$,

$$\begin{array}{ccc} \text{valor}_{\text{hoy}}(\mathcal{X}) & \overset{\text{no arbitraje}}{=} & V^{t=0} \\ & & \Big\| \ \text{probabilidad de valoración} \\ \mathbf{N}^{t=0} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\dfrac{X^{t=1}}{\mathbf{N}^{t=1}}\right) & \overset{\text{replicación}}{=} & \mathbf{N}^{t=0} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\dfrac{V^{t=1}}{\mathbf{N}^{t=1}}\right) \end{array}$$

OBSERVACIÓN

Disponer de una probabilidad $\mathbf{Q}$ de valoración permite calcular precios eficientemente de cualquier activo replicable siguiendo el paradigma de valoración relativa, por replicación, sin necesidad de calcular las distintas carteras replicantes, tan sólo sabiendo que se puede hacer.

3.- En la práctica se construyen modelos de valoración

1. decidiendo activos básicos;
2. especificando escenarios y determinando valores/flujos de los activos básicos;
3. y determinando el numerario y la probabilidad de valoración.

Tal y como vamos a hacer en el modelo de Bernoulli.

Modelo de Bernoulli

Recordemos que habíamos supuesto que el modelo tiene numerario. Los numerarios más comunes son la cuenta bancaria y el bono cupón cero. Tomemos como numerario la cuenta bancaria que denotamos por CB. Es un instrumento sin riesgo que en tiempo $t = 0$ vale 1 y en tiempo $t = 1$ vale $1 + r$.

$$\begin{cases} CB_u = 1 + r \\ CB_d = 1 + r \end{cases}$$

El segundo activo, que denotamos por S, toma en tiempo $t = 0$ el valor S_0 y, para $t = 1$, toma los valores en cada escenario que ya escribimos en términos de rentabilidades.

$$\begin{cases} S_u = S(1 + r_u) \\ S_d = S(1 + r_d) \end{cases} \qquad \text{(suponemos, por ejemplo, que } r_u > r_d\text{)}$$

Nota

Tal y como comentamos en la página 36, estamos reduciendo la notación:

$$\begin{cases} CB^{t=0} = CB_0 \\ S^{t=0} = S_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} CB^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}] = CB_u \\ CB^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}] = CB_d \end{cases} \qquad \begin{cases} S^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}] = S_u \\ S^{t=1}[\omega_{\mathrm{up}}] = S_d \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & CB_u & & & S_u \\ CB_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & & S_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & CB_d & & & S_d \end{tikzcd}$$

Valoración de un derivado por replicación

Supongamos que queremos valorar un activo C cuyos valores futuros en tiempo $t = 1$ son C_u, C_d.

Formamos una cartera de replicación con α unidades del activo CB y β unidades del activo S. Encontraremos los pesos α, β resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} C_u = \alpha CB_u + \beta S_u \\ C_d = \alpha CB_d + \beta S_d \end{cases}$$

Así, las carteras:

(1) 1 unidad del activo C

(2) α unidades de $CB + \beta$ unidades de S

tienen los mismos flujos. Por tanto, si no hay oportunidades de arbitraje, debe darse además que sus precios en el tiempo presente deben coincidir:

$$C_0 = \alpha CB_0 + \beta S_0$$

Si en términos de flujos,

$$\alpha \begin{array}{l} \nearrow CB_u \\ \\ \searrow CB_d \end{array} + \quad \beta \begin{array}{l} \nearrow S_u \\ \\ \searrow S_d \end{array} = \begin{array}{l} \nearrow C_u \\ \\ \searrow C_d \end{array}$$

entonces, los precios han de cumplir que

$$\alpha CB_0 + \beta S_0 = \boxed{C_0}$$

OBSERVACIÓN

Si "conocemos" los activos CB y S, y además conocemos el flujo del activo C, podemos hallar su valor actual. En otros términos, si conocemos CB y S podremos valorar C en términos de su flujo.

El modelo así planteado tiene dos parámetros $\boxed{r_u, r_d}$, y además tenemos el dato de mercado r.

Ahora bien, ¿qué relación deben cumplir r_u, r_d y r entre sí?. Veámoslo por no arbitraje.

Formamos la cartera $S - S_0CB$. Su valor en tiempo $t = 0$ es 0, y su valor en tiempo $t = 1$ es:

$$S_0 \begin{array}{l} \nearrow S_0(1+r_u) \\ \searrow S_0(1+r_d) \end{array} \quad - \quad S_0 \begin{array}{l} \nearrow S_0(1+r) \\ \searrow S_0(1+r) \end{array}$$

el valor en $t = 1$ será mayor o igual que el valor en $t = 0$ si

$$\begin{cases} S_0(1+r_u) \geq S_0(1+r) \\ S_0(1+r_d) \geq S_0(1+r) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_u \geq r \\ r_d \geq r \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} \text{si } r_u > r \text{ y } r_d \geq r \Rightarrow \text{ arbitraje} \\ \text{si } r_d > r \text{ y } r_u \geq r \Rightarrow \text{ arbitraje} \\ \text{si } r_u = r = r_d \Rightarrow S = S_0 CB \end{cases}$$

Por tanto, si suponemos ausencia de oportunidad de arbitraje,

$$\boxed{r_d < r < r_u}$$

Así, si "conocemos" CB y S podemos valorar C en términos de sus contingentes valores futuros. El sistema es:

$$\boxed{\begin{cases} C_u = & \alpha(1+r)\mathbf{1} + \beta S_0(1+r_u) \\ C_d = & \alpha(1+r)\mathbf{1} + \beta S_0(1+r_d) \end{cases}}$$

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (α y β), que podemos resolver. Una vez obtenidos los valores de α y β, valoramos C: $\boxed{C_0 = \alpha\, 1 + \beta\, S_0\,.}$

Cobertura

El activo C *equivale* a la cartera con $(\alpha\ CB + \beta\ S)$ con la siguiente especificación:

$$\begin{cases} \alpha &= \frac{1}{1+r} \; \dfrac{(1+r_d)\,C_u - (1+r_u)\,C_d}{r_d - r_u} \\ \\ \beta &= \dfrac{C_u - C_d}{S_0(r_u - r_d)} = \dfrac{\text{incremento de valor del derivado}}{\text{incremento de valor del subyacente}} \end{cases}$$

cantidades que se obtienen resolviendo explícitamente el sistema de ecuaciones anterior.

Se trata de **cobertura estática:** un sólo período de tiempo.

Lo que en la notación anterior se escribe como β se conoce usualmente como **delta**.

Nota

En la práctica, se conoce C_0 y se obtiene α como diferencia.

Eliminación del riesgo

Otro punto de vista de la valoración es la eliminación del riesgo.

Comenzamos con el activo (derivado) C y buscamos formar una cartera con el propio C y β unidades del activo subyacente S de manera que la cartera $C - \beta S$ no tenga riesgo, es decir, no tenga incertidumbre. O, lo que es lo mismo, en los dos escenarios futuros se tenga el mismo valor.

Traducido en ecuaciones:

$$C_u - \beta S_u = C_d - \beta S_d$$

que nos da directamente que

$$\beta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}\,.$$

Pero, entonces, con ese valor de β, la cartera $C - \beta S$ ha de ser (por ausencia de arbitraje), el activo sin riesgo, es decir, α unidades del activo sin riesgo:

$$C_u - \beta S_u = C_d - \beta S_d = \alpha(1+r) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+r_d)\,C_u - (1+r_u)\,C_d}{r_d - r_u}$$

Valoración con numerario y probabilidades

Procedamos de otra manera, fijemos como numerario la cuenta bancaria CB. La condición de no arbitraje equivale a que existan $q_u = q$ y $q_d = 1 - q$ ($q > 0$), que definen una probabilidad $\mathbf{Q}$ sobre Ω de manera que:

$$\frac{S^{t=0}}{CB^{t=0}} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^{t=1}}{CB^{t=1}}\right)$$

(la condición de la probabilidad de valoración sobre CB se cumple trivialmente). Esta condición se traduce en hallar $q > 0$ tal que

$$\frac{S_0}{1} = q\frac{S_0(1+r_u)}{1+r} + (1-q)\frac{S_0(1+r_d)}{1+r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{r = q\, r_u + (1-q)\, r_d}$$

Y si y sólo si $r_d < r < r_u$ podremos grantizar que q esté entre 0 y 1:

$$\boxed{q = \frac{r - r_d}{r_u - r_d}}$$

Pero entonces podemos valorar cualquier instrumento C (replicable con CB y S) de la siguiente manera:

$$\frac{C^{t=0}}{CB^{t=0}} = \mathbf{E_Q}\left(\frac{C^{t=1}}{CB^{t=1}}\right)$$

Es decir,

$$C_0 = q\,\frac{C_u}{1+r} + (1-q)\,\frac{C_d}{1+r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\underbrace{C_0}_{\text{valor}} = \underbrace{\frac{1}{1+r}}_{\text{descuento}} \times \Big(\underbrace{q\,C_u + (1-q)\,C_d}_{\text{promedio de flujos}} \Big)}$$

Alternativamente, podríamos haber obtenido las probabilidades a partir de la cartera de cobertura:

$$\begin{cases} C_u = & \alpha(1+r)\mathbf{1} + \beta S_0(1+r_u) \\ C_d = & \alpha(1+r)\mathbf{1} + \beta S_0(1+r_d) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha & = \frac{1}{1+r}\,\dfrac{(1+r_d)\,C_u - (1+r_u)\,C_d}{r_d - r_u} \\ \beta & = \dfrac{C_u - C_d}{S_0(r_u - r_d)} \end{cases}$$

Sabiendo que $CB_0 = 1$, $CB_u = CB_d = 1+r$, sustituimos α y β en la valoración de la call y llegamos a:

$$\frac{C_0}{CB_0} = \frac{r - r_d}{r_u - r_d}\frac{C_u}{CB_u} + \frac{r_u - r}{r_u - r_d}\frac{C_d}{CB_d}$$

Observación

La probabilidad q es la "probabilidad riesgo-neutro", aquella para la que la capitalización promediada del activo subyacente es justamente la del activo sin riesgo; la probabilidad subjetiva que un inversor indiferente al riesgo le adjudicaría a la evolución de S.

Observación

Otro caso habitual es aquel en el que tomamos como numerario $\mathbf{N}$ el bono cupón cero de nominal 1 que vence en tiempo $t = 1$. De nuevo suponemos que $\mathbf{N}$ es uno de los activos básicos.
En este caso, $\mathbf{N}^{t=1}$ vale 1 en cualquier escenario, y en tiempo $t = 0$ tiene un valor $\mathbf{N}^{t=0}$ que interpretamos como (es) el descuento desde tiempo $t = 1$ a tiempo $t = 0$.
Una probabilidad de valoración $\mathbf{Q}$ cumplirá para cualquier estrategia que

$$V^{t=0} = \mathbf{N}^{t=0} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(V^{t=1} \right) .$$

Esta probabilidad $\mathbf{Q}$ es conocida como **forward neutra:** la esperanza $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left(V^{t=1} \right)$ coincide con el valor forward $\frac{V^{t=0}}{\mathbf{N}^{t=0}}$.

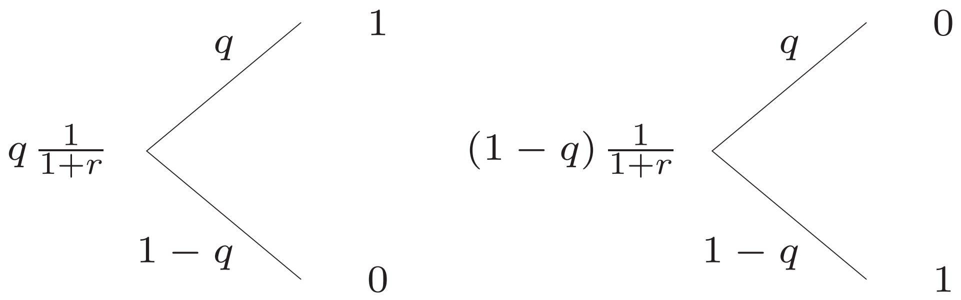
Precios/probabilidades

Consideremos el activo (Arrow-Debreu) C que paga 1 si pasamos al estadio superior y paga 0 en el estadio inferior.

La valoración anterior nos da que:

$$C_0 = \frac{q}{1+r} \Leftrightarrow q = (1+r)C_0$$

Esta expresión nos relaciona directamente precios y probabilidades.



Por lo que la probabilidad riesgo-neutro es la probabilidad implícita en los precios de mercado.

Cambio de numerario

Partimos de la ecuación de valoración

$$C_0 = q_u \, \frac{C_u}{1+r} + q_d \, \frac{C_d}{1+r}$$

Dividimos a ambos lados por S_0 y multiplicamos el primer sumando por S_u/S_u y el segundo sumando por S_d/S_d

$$\begin{aligned}\frac{C_0}{S_0} &= q_u \, \frac{C_u}{1+r}\frac{S_u}{S_u}\frac{1}{S_0} + q_d\frac{C_d}{1+r}\frac{S_d}{S_d}\frac{1}{S_0} \\ &= p_u\frac{C_u}{S_u} + p_d\frac{C_d}{S_d}\end{aligned}$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned}p_u &= q_u\frac{S_u}{CB_u}\frac{CB_0}{S_0} \\ p_d &= q_d\frac{S_d}{CB_d}\frac{CB_0}{S_0}\end{aligned}}$$

Es decir, hemos llegado a la fórmula de valoración de C tomando como numerario el activo subyacente S.

Al ratio que multiplica a q_u y a q_d lo identificamos como la derivada de Radon-Nikodym y que denotaremos por $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}[\omega_{\text{up}}] &= \frac{S^{t=1}[\omega_{\text{up}}]}{CB_1^{t=1}[\omega_{\text{up}}]}\frac{CB^{t=0}}{S^{t=0}} \\ \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}[\omega_{\text{down}}] &= \frac{S^{t=1}[\omega_{\text{down}}]}{CB_1^{t=1}[\omega_{\text{down}}]}\frac{CB^{t=0}}{S^{t=0}} \end{aligned}}$$

Ilustración

- Verificar que p_u, p_d definen una medida de probabilidad para Ω.
- Comprobar que $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$ es martingala bajo $\mathbf{Q}$.

Dividendos

Supongamos que la situación es

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & S_0(1+r_u)+D & & 1+r & & C_u \\
S_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & 1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & C_0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & S_0(1+r_d)+D & & 1+r & & C_d
\end{tikzcd}
$$

donde D es una cantidad fija. El cálculo, como antes, pasa por resolver el sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
C_u = & \alpha\,(1+r)+\beta\,(S_0(1+r_u)+D) \\
C_d = & \alpha\,(1+r)+\beta\,(S_0(1+r_d)+D)
\end{array}
\right.
$$

cuya solución explícita es

$$
\left\{
\begin{array}{rl}
\alpha & = \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+r_d)\,C_u-(1+r_u)\,C_d}{r_d-r_u} - D\frac{1}{1+r}\frac{C_u-C_d}{S_0(r_u-r_d)} \\
\beta & = \frac{C_u-C_d}{S_0(r_u-r_d)}
\end{array}
\right.
$$

Con los valores de α y β deducimos que $C_0 = \alpha S + \beta$. Obsérvese que la inversión en dinero, α, se ha visto reducida (compárese con la página 65) en un montante que es el valor actual del dividendo.

Alternativamente, podemos proceder con probabilidades:

$$S_0(1+r) = q(S_0(1+r_u)+D) + (1-q)(S_0(1+r_d)+D) \quad \Rightarrow$$
$$(1+r) - \frac{D}{S_0} = q(1+r_u) + (1-q)(1+r_d)$$

De otra manera,

$$\underbrace{1+r}_{\text{rendimiento dinero}} = \underbrace{q(1+r_u)+(1-q)(1+r_d)}_{\text{promedio rendimiento cotización}} + \underbrace{D/S_0}_{\text{rendimiento por dividendo}}$$

5. Modelo de varios periodos de tiempo: valoración en el modelo binomial

Hasta ahora hemos tratado un modelo simplificado con dos instantes de tiempo: "hoy" y el "futuro". Ahora vamos a considerar evoluciones en el tiempo. También seguimos teniendo dos activos.

Para ello, vamos a introducir desde un punto de vista práctico el modelo binomial, el cual es una extensión directa del modelo de Bernoulli.

No nos vamos a detener en definir con todo detalle los conceptos relacionados con la teoría de valoración (activos básicos, cartera de cobertura, no arbitraje, probabilidad de valoración). Los iremos deduciendo intuitivamente a medida que vayamos construyendo el árbol.

Empezaremos definiendo el modelo binomial como marco de construcción de árboles binarios, para después especificarlo en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein. También veremos (pasando al límite) cómo llegar al modelo de Black-Scholes en continuo.

Modelo Binomial

Tiempos

Fijamos de partida una **unidad de tiempo $\boldsymbol{\Delta t}$**. Con N saltos de Δt tenemos 1 año:

$$\boxed{N\Delta t = 1 \text{ año.}}$$

Llamaremos $j\Delta t$, para $j = 0, 1, \ldots,$ a los sucesivos instantes de tiempo.

Activos básicos

En nuestro mercado solo habrá dos activos básicos:

- un activo con riesgo, el **subyacente**. Llamaremos S_j a su cotización en tiempo $j\Delta t$.
- el activo sin riesgo, la **cuenta bancaria**. Llamaremos β_j a su valor en tiempo $j\Delta t$.

El objetivo será, luego, valorar derivados sobre la cotización del subyacente.

Numerario

La cuenta bancaria será nuestro numerario.

Datos de mercado

Como datos de mercado tendremos

- la cotización hoy del subyacente, $\boldsymbol{S_0}$;
- el tipo de interés (continuo) anual $\boldsymbol{R}$;
- la volatilidad anual $\boldsymbol{\sigma}$ del activo subyacente.

Parámetros del modelo

El modelo tiene tres parámetros:

- $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{d}$ (por "up" y "down"), que serán las magnitudes de los saltos del subyacente. Digamos que $d \leq u$.
- $\boldsymbol{p}$ (una probabilidad, que será de valoración).

Evolución de los activos básicos

Postulamos la siguiente evolución de los activos básicos:

- la cuenta bancaria vale 1 hoy, vale $e^{R\Delta t}$ en tiempo Δt, $e^{2R\Delta t}$ en tiempo $2\Delta t$, etc.:

$$\beta_j = e^{R(j\Delta t)}\,.$$

- En tiempo $j\Delta t$, la cotización S_j del activo subyacente puede tomar, en términos del valor de tiempo anterior, dos únicos valores:

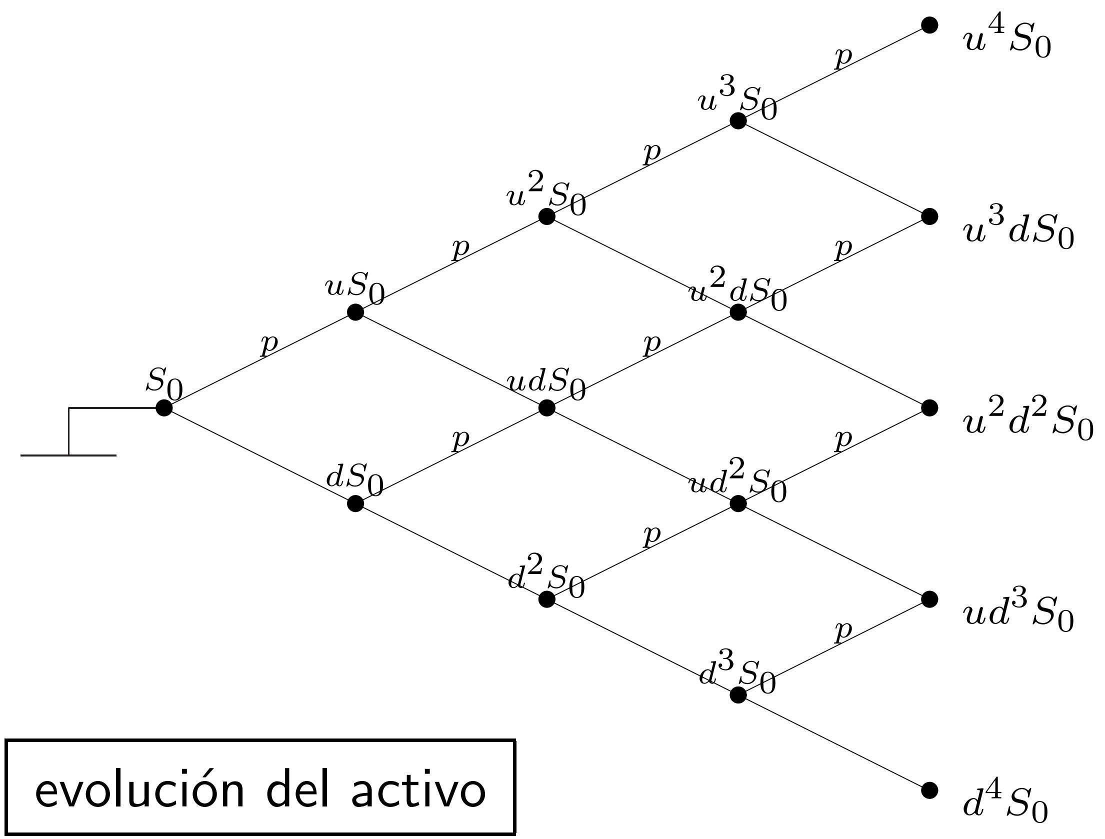
$$S_j = \begin{cases} S_{j-1}\cdot u & \text{con probabilidad } p; \\ S_{j-1}\cdot d & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

Nota

Como veremos, sólo tendremos dos condiciones y tres parámetros, de manera que uno de ellos queda a nuestra disposición. En la especificación de Cox-Ross-Rubinstein escogeríamos $d = 1/u$. Pero en principio se podría fijar uno cualquiera de los parámetros como quisiéramos.

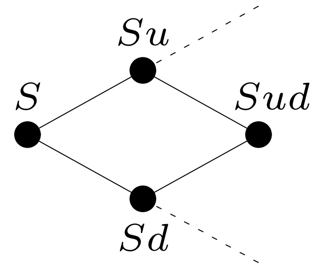
Implementación en árboles binarios

Es cómodo representar los posibles valores del subyacente en un árbol binario como el que sigue:



Observaciones:

$\rightarrow$ Nótese que el árbol se **recombina**: por ejemplo, "bajando" desde Su o "subiendo" desde Sd se llega al mismo valor, Sud. Esto es muy relevante desde el punto de vista numérico, pues hace que el número de nodos del árbol crezca linealmente (y no exponencialmente, como ocurriría si el árbol no se recombinara; por ejemplo, si u y d fueran cambiando en el tiempo).



$\rightarrow$ La evolución de la cuenta bancaria se puede representar, simplemente, con una lista.

$\rightarrow$ En principio, podemos extender el árbol tanto como deseemos. En la práctica lo haremos hasta el vencimiento $T = M\Delta t$ de la opción que pretendamos valorar.

Descripción matemática

La descripción matemática de la estructura anterior es como sigue:

- Tenemos unos instantes de tiempo $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$. Usaremos el subíndice j para referirnos al tiempo $j\Delta t$.
- El **espacio de escenarios** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ está formado por listas ω de sucesivas "bajadas" y "subidas" ("sendas" en el árbol):

$$\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots), \qquad \text{donde los } \varepsilon_j \text{ son } \pm 1.$$

Si paramos el árbol en tiempo $M\Delta t$, tenemos 2^M escenarios:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (+1, +1, \ldots, +1) \\
\omega_2 &= (-1, +1, \ldots, +1) \\
&\vdots \\
\omega_{2^M-1} &= (-1, -1, \ldots, +1). \\
\omega_{2^M} &= (-1, -1, \ldots, -1).
\end{aligned}$$

- Tenemos una **probabilidad** $\mathbf{P}$ definida sobre estos escenarios ω, que viene dada por la asignación de probabilidad p a "subir" y probabilidad $1-p$ a "bajar" (más la independencia).

  Así, si $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \dots)$,

  $$\mathbf{P}(\omega) = p^{\#\{j:\, \varepsilon_j\, =\, +1\}} \cdot (1-p)^{\#\{j:\, \varepsilon_j\, =\, -1\}}$$

  Esto es, p elevado al número de "subidas" por $1-p$ elevado al de "bajadas".

- Codificamos las sucesivas subidas y bajadas con unas **variables de estado** $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$, independientes e idénticamente distribuidas. En un escenario ω, la variable Y_j vale 1 o -1 en función de que en ese tiempo $j\Delta t$ haya una subida o una bajada. De forma que

  $$Y_j = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } p; \\ -1 & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

  La suma $\sum_j Y_j$ es un camino aleatorio (no simétrico, si $p \neq 1/2$). Estas variables de estado determinan la evolución de todos los activos.

- La **filtración** $\mathcal{F}_j = \sigma(Y_1, \ldots, Y_j)$ recoge la información desvelada hasta tiempo $j\Delta t$.
- Los **activos básicos** son la cuenta bancaria, que en tiempo $j\Delta t$ vale

$$\beta_j = e^{jR\Delta t},$$

y el activo subyacente S, que en tiempo 0 vale S_0 y que, para tiempos posteriores, vale una variable S_j que toma valores en cada nodo de generación j con la ya mencionada prescripción

$$S_j = \begin{cases} u \cdot S_{j-1} & \text{con probabilidad } p; \\ d \cdot S_{j-1} & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

La variable S_j se puede escribir en función de S_{j-1} y la variable Y_j (es decir, $S_j \in \mathcal{F}_j$) de la siguiente (aparatosa) manera:

$$S_j = S_{j-1}\Big[u\Big(\frac{Y_j+1}{2}\Big) - d\Big(\frac{Y_j-1}{2}\Big)\Big]$$

- Finalmente, la **variable** $C_j(S)$ registra el valor del derivado C en un nodo de la generación j en el que el valor del activo es $S_j = S$.

Distribución de probabilidad a vencimiento del subyacente

Miramos hasta tiempo $M\Delta t$.

- Hay 2^M posibles evoluciones del subyacente, cada una con su propia probabilidad.
- Pero en ocasiones (por ejemplo, para valorar opciones europeas) no nos interesará la senda seguida, sino el valor final del subyacente, para el que tenemos sólo $M+1$ posibilidades. Podemos codificar estos $M+1$ escenarios de 0 a M, en función del número de "subidas".

  $\rightarrow$ la cuenta bancaria toma el valor $\beta_M = e^{RM\Delta t}$ en todos ellos;

  $\rightarrow$ mientras que el subyacente S_M puede tomar los $M+1$ valores siguientes:

$$S_0\, u^k\, d^{M-k}; \quad k = 0, 1, \ldots, M,$$

con probabilidades

$$\mathbf{P}(S_M = S_0 u^k d^{M-k}) = \mathbf{P}(\mathrm{BIN}(M,p) = k)$$

$$= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}.$$

escenario	subyacente	probabilidad
M	$S_0 u^M$	p^M
$M-1$	$S_0 u^{M-1} d$	$\binom{M}{M-1} p^{M-1} (1-p)^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$S_0 u^k d^{M-k}$	$\binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$S_0 d^M$	$(1-p)^M$

Simulación en el árbol

Como veremos, para ciertos análisis y valoraciones resultará conveniente simular el proceso de sucesivos precios del activo directamente.

Para ello, obtendremos muestras independientes de las Y_j y, a partir de ellas, muestras de la evolución de S_j, de las que, finalmente, obtendremos muestras de los flujos del instrumento derivado de interés. A esto lo denominaremos **simular en el árbol**.

Probabilidad de valoración

Numerario La cuenta bancaria $\beta_j = e^{jR\Delta t}$ será nuestro numerario.

Probabilidad de valoración

Queremos que la probabilidad $\mathbf{P}$ sea de valoración (para ese numerario). Es decir, que los dos procesos de precios de los activos básicos, la cuenta bancaria y el subyacente, escritos en unidades del numerario (es decir, descontados), sean martingala. La evolución de la CB descontada es obviamente una martingala. Para el subyacente, exigimos que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{S_j}{e^{jR\Delta t}}\middle|\mathcal{F}_{j-1}\right) = \frac{S_{j-1}}{e^{(j-1)R\Delta t}} \qquad \text{para cada } j = 1, 2, \ldots$$

Una expresión que parece aparatosa, pero que se traduce, simplemente, en la siguiente condición, que garantiza que $\mathbf{P}$ sea de valoración:

(condición de martingala) $$\boxed{up + d(1-p) = e^{R\Delta t}}$$

DETALLE. $$\mathbf{E_P}\Big(\frac{S_j}{e^{jR\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big) = \frac{1}{e^{jR\Delta t}}\mathbf{E_P}\Big(S_{j-1}\Big[\frac{u}{2}(Y_j+1) - \frac{d}{2}(Y_j-1)\Big]\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big)$$

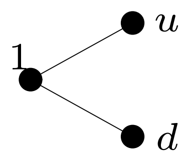
$$= \frac{S_{j-1}}{e^{jR\Delta t}}\,\mathbf{E_P}\Big(\Big[\frac{u}{2}(Y_j+1) - \frac{d}{2}(Y_j-1)\Big]\Big|\mathcal{F}_{j-1}\Big) = \frac{S_{j-1}}{e^{jR\Delta t}}\Big(\frac{u}{2}\mathbf{E_P}(Y_j+1) - \frac{d}{2}\mathbf{E_P}(Y_j-1)\Big)$$

$$= \frac{S_{j-1}}{e^{jR\Delta t}}\big[up + d(1-p)\big]$$ (utilizando que $\mathbf{E_P}(Y_j) = 2p-1$).

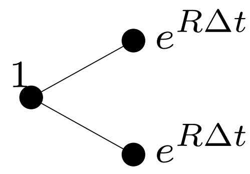
Nota

Recordamos que la probabilidad p es **“riesgo-neutro”**, aquella para la que la capitalización promediada del activo subyacente es justamente la del activo sin riesgo; la probabilidad subjetiva que un inversor indiferente al riesgo le adjudicaría a la evolución de B.

revalorización de 1 euro en subyacente



revalorización de 1 euro en cuenta bancaria



Valoración de activos (replicables)

Si ahora C es un activo replicable (con activo y dinero), entonces su proceso de precios en términos del numerario (es decir, descontado) será también martingala:

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{C_j}{e^{jR\Delta t}}\bigg|\mathcal{F}_{j-1}\right) = \frac{C_{j-1}}{e^{(j-1)R\Delta t}}}$$

Y, en particular,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{C_j}{e^{jR\Delta t}}\bigg|\mathcal{F}_0\right) = \frac{C_0}{1}, \quad \text{esto es,} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{C_j}{e^{jR\Delta t}}\right) = C_0.$$

O, como escribiremos habitualmente,

$$\boxed{C_0 = e^{-jR\Delta t}\,\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(C_j)}$$

el precio hoy es el promedio (descontado) de los flujos futuros.

Usaremos estas dos fórmulas constantemente en las siguientes valoraciones.

Calibración del modelo

Tenemos tres datos de mercado: el tipo R, la cotización inicial S_0 y la volatilidad anual del activo σ.

- Ya hemos calibrado al dato S_0 exigiendo que la evolución arranque en ese valor.

- Ahora vamos a exigir que la evolución del subyacente acumule exactamente una volatilidad anual σ. Es decir, que la desviación típica de los rendimientos del activo en un año valga σ:

$$\sigma^2 = \mathbf{V}\left(\ln \frac{S_N}{S_0}\right).$$

La rentabilidad (continua) en un año se expresa directamente en términos de las rentabilidades en los periodos Δt sucesivos:

$$\ln \frac{S_N}{S_0} = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\frac{S_2}{S_1}\cdots\frac{S_{N-1}}{S_{N-2}}\frac{S_N}{S_{N-1}}\right) = \sum_{j=1}^{N} \ln \frac{S_j}{S_{j-1}}.$$

Pero las rentabilidades parciales $\ln(S_j/S_{j-1})$ son variables independientes (e idénticamente distribuidas). Así que la varianza de la suma es N veces una de las varianzas.

Estos rendimientos parciales son

$$\ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right) = \begin{cases} \ln u & \text{con probabilidad } p \\ \ln d & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

y un pequeño cálculo nos dice que esas varianzas individuales son

$$\mathbf{V}\left[\ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)\right] = p(1-p)(\ln(u)-\ln(d))^2 \quad \text{así que} \quad \sigma^2 = N\,p(1-p)(\ln(u)-\ln(d))^2.$$

DETALLE. $\mathbf{E}\left[\ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)\right] = p\ln(u) + (1-p)\ln(d);\quad \mathbf{E}\left[\ln^2\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)\right] = p\ln^2(u) + (1-p)\ln^2(d)$

$$\mathbf{V}\left[\ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)\right] = p\ln^2(u) + (1-p)\ln^2(d) - (p\ln(u) + (1-p)\ln(d))^2 = p(1-p)(\ln(u)-\ln(d))^2.$$

Y como $N\Delta t = 1$, obtenemos la segunda ecuación:

(ajuste al dato de volatilidad) $\boxed{\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{p(1-p)}\,\big[\ln(u)-\ln(d)\big]}$

En resumen, dados los datos de mercado R, S_0 y σ, podemos construir un modelo de evolución (de paso Δt)

- libre de arbitraje (certificado);
- de forma que la volatilidad anual sea exactamente σ

sin más que exigir que el activo arranque en el valor S_0 y que los parámetros u, d y p verifiquen el par de ecuaciones:

$$\boxed{\left\{\begin{aligned} e^{R\Delta t} &= up + d(1-p) \\[2ex] \sigma\sqrt{\Delta t} &= \sqrt{p(1-p)}\,(\ln u - \ln d) \end{aligned}\right.}$$

Obsérvese que se trata de un sistema *no lineal* de dos ecuaciones. Y que hay tres parámetros en el modelo (u, d y p).

Árboles de Cox-Ross-Rubinstein

Para empezar fijamos

$$\boxed{d = \frac{1}{u}}$$

Las dos ecuaciones son ahora

$$\begin{aligned} &\text{(condición de martingala)} & e^{R\Delta t} &= pu + (1-p)\frac{1}{u} \\ &\text{(ajuste al dato de volatilidad)} & \sigma\sqrt{\Delta t} &= 2\sqrt{p(1-p)}\,\ln u \end{aligned}$$

El sistema se puede resolver numéricamente. Pero, si Δt es pequeño y $p \approx 1/2$ podemos resolver aproximadamente[1] la segunda ecuación (de volatilidad) y luego explícitamente la primera:

$$u \sim e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \longleftarrow \text{aproximación} \qquad p = \frac{e^{R\Delta t} - \dfrac{1}{u}}{\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}$$

[1]Nótese que, si $p \approx 1/2$, la segunda ecuación es $\sigma\sqrt{\Delta t} \approx \ln(u)$. Con esta aproximación, el ajuste a la volatilidad no será perfecto.

EJEMPLO BASE

Datos de mercado $\left\{ \begin{array}{rcl} R & = & 5\,\% \\ \sigma & = & 30\,\% \\ S_0 & = & 5000 \end{array} \right.$

Datos de modelo $\Delta t = \dfrac{1}{12}$ (esto es, $N = 12$).

Vencimiento $T = 6$ meses.

Obérvese, como $ud = 1$, el árbol está centrado en el valor inicial del subyacente.

Valoración de derivados

Vamos a valorar, en un modelo binomial, derivados de tres tipos diferentes:

- Opciones europeas, cuyo pago sólo depende de la cotización del subyacente a vencimiento. Las podremos valorar con fórmula (sumaproducto de valores por probabilidades), o con un árbol de evolución del valor del derivado (que se irá construyendo de atrás hacia adelante).
- Opciones path-dependent, cuyo pago depende, en principio, de toda la senda de cotizaciones hasta vencimiento. Las valoraremos por simulación (en el árbol).
- Opciones americanas, que incluyen la opción de ejercicio anticipado. También con el árbol de evolución del valor del derivado.

Para su valoración emplearemos repetidamente las condiciones de martingala,

$$\boxed{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{C_j}{e^{jR\Delta t}}\bigg|\mathcal{F}_{j-1}\right) = \frac{C_{j-1}}{e^{(j-1)R\Delta t}}} \quad \text{y, en particular,} \quad \boxed{C_0 = e^{-jR\Delta t}\,\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(C_j)}$$

Además, daremos el procedimiento para calcular las estrategias de replicación.

Valoración de opciones europeas

Valorar un derivado con un modelo binomial consiste en calcular un valor medio, esperanza, de los flujos potenciales de ese instrumento. El cálculo de ese valor medio se puede llevar a cabo de distintas maneras.

Digamos que C es una opción europea con vencimiento $T = M\Delta t$.

El valor C_M, el pago de la opción, depende, mediante una cierta fórmula $C_M = f(S_M)$ del valor de S_M.

Si, por ejemplo, es una call con strike K, entonces

$$C_M = (S_M - K)^+ .$$

Disponemos, para la valoración de este tipo de opciones, de tres metodologías.

Método 1. Valoración con fórmula

Hay $M+1$ posibles pagos de la opción, tantos como posibles valores del subyacente a vencimiento . Aplicamos directamente la fórmula

$$C_0 = e^{-MR\Delta t}\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(C_M)\,,$$

pues el valor medio de la derecha se puede calcular muy fácilmente.

Nótese primero que se trata de una suma (ponderada) con $M+1$ términos. En cada escenario,

- los valores que se promedian son los números

$$f\left(S_0 u^k d^{M-k}\right);$$

- y se promedian con las probabilidades

$$\binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}\,.$$

En el caso de la call con strike K, los flujos son

$$\left(S_0 u^k d^{M-k} - K\right)^+$$

y por tanto, el valor hoy se obtiene con la siguiente fórmula:

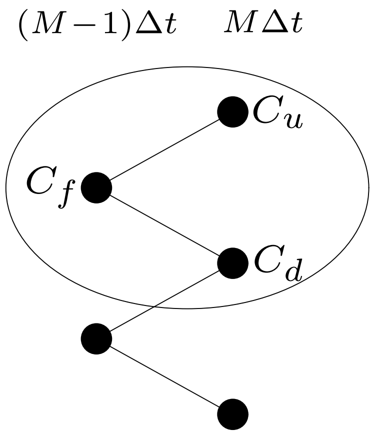
$$C_0 = \underbrace{\left(e^{-MR\Delta t}\right)}_{\text{descuento}} \cdot \sum_{k=0}^{M} \underbrace{\left(S_0 u^k d^{M-k} - K\right)^+}_{\text{flujo}} \underbrace{\binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}}_{\text{probabilidad}}$$

Método 2. Valoración en el árbol

Se trata de interpretar la condición

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{C_j}{e^{jR\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{j-1}\right) = \frac{C_{j-1}}{e^{(j-1)R\Delta t}}, \quad \text{que reescribimos} \quad C_{j-1} = e^{-R\Delta t}\,\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\big(C_j\big|\mathcal{F}_{j-1}\big)$$

como un procedimiento de cálculo recursivo (hacia atrás) en el árbol. Nos fijamos, por ejemplo, en los dos nodos superiores en tiempo $M\Delta t$ (vencimiento). Los valores C_u y C_d son conocidos. El valor C_f se obtiene aplicando la fórmula de arriba, que aquí simplemente nos dice que



$$C_f = e^{-R\Delta t}\,\big(pC_u + (1-p)C_d\big)\,.$$

Se procede igual con los demás nodos de tiempo $(M-1)\Delta t$, hasta tenerlos todos. Luego se repite el proceso para los nodos de tiempo $(M-2)\Delta t$, etc., hasta llegar a C_0.

Método 3. Simulación

Tenemos que calcular

$$C_0 = e^{-MR\Delta t}\,\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(C_M)\,.$$

¿Y si calculamos la esperanza de la derecha por simulación? Es decir, sorteamos (con una binomial de parámetros M y p) posibles valores del subyacente a vencimiento, para cada uno de ellos calculamos el pago de la opción. . . y luego, la media aritmética.

Hay una metodología alternativa, que en el caso de las europeas no es de mucho interés, pero sí lo será para opciones exóticas. Se trata de interpretar la esperanza de la derecha como un promedio sobre todos los posibles escenarios (sendas en el árbol). Ahora es una suma con 2^M términos (cada uno con una cierta probabilidad). Calcularla es, quizás, una tarea excesiva. Pero podemos estimarla por simulación.

Para ello, simulamos sendas (completas) en el árbol y para cada una de ellas calculamos el pago de la opción, etc.

EJEMPLO BASE

Valoración de una call europea de strike $K = 5200$ en el ejemplo base de la página. 94

Valoración de derivados *path-dependent*

Tenemos un instrumento C que paga, a vencimiento $M\Delta t$, una cierta cantidad

$$f(S_1, S_2, \ldots, S_M)$$

que depende de (quizás) toda la senda de cotizaciones del subyacente.

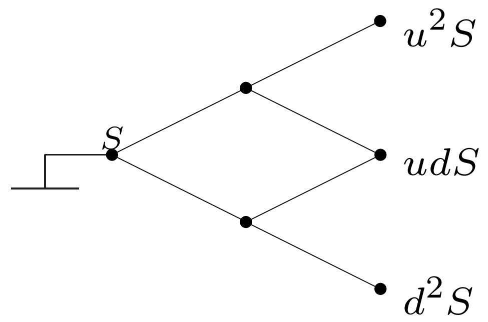
Su valor hoy será

$$C_0 = e^{-MR\Delta t}\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(C_M) = e^{-MR\Delta t}\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(f(S_1, S_2, \ldots, S_M))\,.$$

- ¿Valoración con fórmula? Bueno, podemos interpretar lo anterior como una fórmula para el valor de la opción. Pero obsérvese que es una suma con 2^M términos.
- ¿Valoración en el árbol? En general, no es posible. Digamos que queremos valorar una call asiática en la que el flujo depende de la media aritmética A de las cotizaciones en ciertas fechas. Consideremos un árbol binomial con sólo dos períodos.

En una opción usual, calculamos el flujo a partir de los nodos del último nivel y procedemos hacia atrás en el árbol. Pero ahora, aunque el activo en dos períodos alcanza tres valores, la media A toma cuatro valores distintos, pues "distingue" entre:

- en el camino $S \to uS \to udS$, A vale $S\left(\dfrac{1+u+ud}{3}\right)$
- en el camino $S \to dS \to udS$, A vale $S\left(\dfrac{1+d+ud}{3u}\right)$.



- ¿Valoración por simulación? Es el método más razonable: muestreamos el espacio de los 2^M escenarios, sorteando sendas de cotizaciones del subyacente en el árbol, anotamos en cada muestra el payoff de la opción, y luego promediamos con media aritmética (además de descontar).

Valoración de opciones americanas en el árbol

En las opciones americanas, el poseedor de la opción tiene el derecho de ejercerla en cualquier momento entre el comienzo del contrato y el vencimiento.

Valoración de una put americana. Denotaremos por V_n los valores de la opción put en el paso n; o, con más precisión, por $V_n(S)$, si queremos hacer explícita la dependencia de la cotización S en ese instante.

En el instante n, el poseedor de la put tiene dos opciones:

I) Ejercer en ese instante y obtener $(K - S_n)^+$. Éste es el valor de ejercicio, que denotamos por VE_n:

$$\mathrm{VE}_n(S_n) = (K - S_n)^+ .$$

II) No ejercer: se tiene entonces un valor de continuación VC_n que viene dado por el valor medio (riesgo-neutro)

$$\mathrm{VC}_n(S_n) = e^{-R\Delta t} \left[p\, V_{n+1}(S_n \cdot u) + (1-p)\, V_{n+1}(S_n \cdot d)\right] = e^{-R\Delta t} \mathbf{E}\left(V_{n+1} | S_n\right)$$

El valor V_n será el máximo entre VE_n y VC_n.

De manera que

$$V_n(S_n) = \max \begin{cases} \mathsf{VE}_n(S_n) & = (K - S_n)^+ \\ \mathsf{VC}_n(S_n) & = e^{-R\Delta t}\mathbf{E}\left(V_{n+1}|S_n\right) \end{cases}$$

Como además en el instante del vencimiento tenemos que

$$V_N = (K - S_N)^+ ,$$

podemos implementar un procedimiento recursivo para calcular el valor de la put americana en el instante 0.

EJEMPLO BASE

Valoración de una put americana de strike $K = 5200$.

Call americana vs. call europea

En principio, las opciones americanas han de ser más valiosas que las correspondientes europeas. Pero la call americana (sobre un subyacente que *no reparte dividendos*) vale lo mismo que una call europea. Esto es, nunca conviene ejercer antes del vencimiento T.

La paridad call-put nos dice que, en cualquier instante $t < T$, el precio de la call europea $C(t)$, el precio de la put $P(t)$ (ambas con strike K) y el tipo R están relacionados por:

$$C(t) = P(t) + S(t) - Ke^{-R\,(T-t)} \quad \Longrightarrow \quad C(t) \geq S(t) - K\,\underbrace{e^{-R\,(T-t)}}_{\leq 1} > S(t) - K\,.$$

Es decir, la call europea es siempre más valiosa que el ejercicio anticipado.

Observación

Esto no es cierto para las puts: la put americana es siempre más valiosa que la europea. Procediendo como antes, llegaríamos a que $P(t) \geq K\,e^{-R(T-t)} - S(t)$, de donde no se puede deducir que $P(t)$ sea mayor que $K - S(t)$. Si hay dividendos, entonces las opciones americanas (call o put) son más valiosas que las europeas.

DETALLE MATEMÁTICO. Denotemos por AC la call americana:

$$AC_n = \text{máximo} \begin{cases} \Big(S_n - K\Big)^+ \\ \\ \mathbf{E}\Big(\dfrac{AC_{n+1}}{e^{R\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_n\Big) \end{cases}$$

Recordemos que

$$AC_N = C_N = (S_N - K)^+$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{AC_N}{e^{R\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{N-1}\right) &= \mathbf{E}\left(\Big(\frac{S_N}{e^{R\Delta t}} - \frac{K}{e^{R\Delta t}}\Big)^+\Big|\mathcal{F}_{N-1}\right) \\ &\geq \mathbf{E}\Big(\frac{S_N}{e^{R\Delta t}} - \frac{K}{e^{R\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{N-1}\Big) = S_{N-1} - \frac{K}{e^{R\Delta t}} \geq S_{N-1} - K\,. \end{aligned}$$

De ahí deducimos primero que

$$\mathbf{E}\Big(\frac{AC_N}{e^{R\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{N-1}\Big) \geq \Big(S_{N-1} - K\Big)^+\,,$$

después que

$$AC_{N-1} = \mathbf{E}\Big(\frac{AC_N}{e^{R\Delta t}}\Big|\mathcal{F}_{N-1}\Big)\,,$$

y finalmente que

$$AC_{N-1} = C_{N-1}\,.$$

Árbol de precios de Arrow-Debreu

Los precios de Arrow-Debreu están asociados a los nodos: en cada uno de ellos, calculamos el precio hoy del instrumento que vence en el tiempo de ese nivel de nodos y que paga 1 en ese nodo y 0 en todos los demás. Además, los precios de un paso de tiempo han de sumar el factor de descuento desde ese tiempo a tiempo 0.

El árbol se construye recursivamente, pero hacia adelante. En un nodo que no sea borde, el precio Arrow-Debreu C se obtiene de los precios de Arrow-Debreu que ya se han calculado en los nodos de los que proviene con el esquema:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[dr, "1-p"] & \\ & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{C} = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{p}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}] \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{R}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{t}}}$$

En un nodo que es borde, sólo una rama aporta al valor C.

Una vez calculado el árbol de precios de Arrow-Debreu, basta con determinar los flujos del instrumento en cada nodo (en el que haya flujo) y multiplicar ese flujo por el precio Arrow-Debreu correspondiente.

Replicación/cobertura

En las páginas anteriores hemos conseguido valorar una gran cantidad de derivados utilizando la probabilidad de valoración bajo un numerario.

Pero el argumento financiero en el que se sostiene esta metodología de valoración, la ausencia de oportunidades de arbitraje, se basa en la existencia de carteras replicantes.

Para dar precio a los derivados, no nos ha hecho falta calcular esa cartera replicante.

Pero imaginemos que nos interesa la estrategia de cobertura de la opción. Al considerar varios períodos de tiempo, la estrategia de inversión es un proceso, esto es:

- se invierte en los activos dinámicamente, cambiando en cada tiempo $j\Delta t$ la composión de la cartera,
- usando la información disponible hasta ese momento,
- pero sin aportar ni retirar fondos (cartera autofinanciada).

Así, en una cartera autofinanciada,

en tiempo $j\Delta t$	cartera $\rightsquigarrow$	$\alpha_j e^{jR\Delta t} + \beta_j S_j$
justo después de $j\Delta t$ se recompone	cartera $\rightsquigarrow$	$\alpha_{j+1} e^{jR\Delta t} + \beta_{j+1} S_j$

y debe cumplirse que:

$$\alpha_j e^{Rj\Delta t} + \beta_j S_j = \alpha_{j+1} e^{jR\Delta t} + \beta_{j+1} S_j \,.$$

En conclusión, si nos interesa calcular la estrategia de inversión, una vez calculado el precio hoy de la opción (C_0), diseñaremos una cartera de coste hoy C_0, que, gestionada autofinanciamente, nos permita hacer frente a los pagos de la opción "pase lo que pase".

Cobertura dinámica

El precio del derivado es la cantidad de la que se precisa para formar una cartera de subyacente y dinero, que de manera autofinanciada y con reajuste en cuanto a la proporción de activo subyacente y dinero, permite en cualquier evolución replicar los flujos del derivado.

En tiempo 0. El derivado vale C_0. Formamos una cartera de cobertura. La cartera tiene α_0 de dinero y β_0 unidades de activo. El dinero se presta o se ha tomado prestado a plazo Δt. Así,

$$C_0 = \alpha_0 + \beta_0 S_0 \,.$$

La situación inicial es:

tiempo	en dinero	número de acciones	valor cartera
0	α_0	β_0	$\alpha_0 + \beta_0 S_0 = C_0$

En tiempo Δt. Para la cobertura ocurren dos cosas:

Primero. Cambia la cotización del subyacente. Éste pasa a ser S_1. Y la situación de la cartera es:

tiempo	en dinero	número de acciones	valor cartera
justo antes de Δt	α_0	β_0	$\alpha_0 e^{R\Delta t} + \beta_0 S_1 = C_1$

La composición de la cartera es tal que, sea cual sea la nueva cotización de S_1, la cartera vale lo que el derivado C_1. La composición que ahora tiene la cartera no es la adecuada para el periodo siguiente, pero su valor es exactamente el que se precisa para la replicación en el paso siguiente.

Segundo. Se recompone la cartera (de manera autofinanciada).

tiempo	en dinero	número de acciones	valor cartera
justo después de Δt	α_1	β_1	$\alpha_1 e^{R\Delta t} + \beta_1 S_1 = C_1$

Sucesivos periodos Se procede análogamente.

EJEMPLO BASE

Obtener los árboles de replicación de una opción europea. En el primero, en cada nodo aparece la cantidad de dinero, y en el segundo la cantidad de acciones.

Simular una senda de cotizaciones en el árbol y comprobar que la cartera replicante cubre los pagos de la opción en todos los casos.

Pasos al límite

En el modelo anterior el tiempo es discreto y los resultados del modelo dependen del paso de discretización (esto es, del intervalo de tiempo empleado). Pero se puede hacer que ese paso/intervalo tienda a cero y obtener así expresiones más simples.

Fórmula de valoración de una call europea

Tal y como vimos en la página 98, del modelo binomial se obtiene la siguiente fórmula explícita de valoración para una call de strike K, vencimiento $T = M\Delta t$, subyacente actual S_0 y tipo de interés continuo anual R:

$$C_0 = \underbrace{\left(e^{-MR\Delta t}\right)}_{\text{descuento}} \cdot \sum_{k=0}^{M} \underbrace{\left(S_0 u^k d^{M-k} - K\right)^+}_{\text{flujo}} \underbrace{\binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}}_{\text{probabilidad}}$$

Haciendo el cálculo (véase la página siguiente) resulta

$$\boxed{\text{Call}_{\text{ahora}} = S_0 \cdot \mathbf{P}\Big(\mathcal{B}in(M, p') \geq a\Big) - K \cdot e^{-RM\Delta t} \cdot \mathbf{P}\Big(\mathcal{B}in(M, p) \geq a\Big)}$$

donde $\mathcal{B}in(M, p)$ se refiere a una distribución binomial de M repeticiones con probabilidad de éxito p y donde

$$p' = \frac{u \cdot p}{e^{R\Delta t}}$$

Por último, a viene determinado porque

$$(u)^a \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^{M-a} \sim \frac{K}{S_0}.$$

Bajo la probabilidad riesgo-neutro, $\mathbf{P}$, la cotización S del activo a vencimiento toma los valores que siguen con las probabilidades que se indican:

$$\mathbf{P}(S_M = S_0 u^{2k-M}) \quad = \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} \qquad k = 0, \ldots, M$$

y si expresamos el valor de la call como un valor medio descontado tenemos:

$$\text{Call} = \frac{1}{e^{MR\Delta t}} \sum_k \left(S_0 u^{2k-M} - K \right)^+ \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}$$

$$= \frac{1}{e^{MR\Delta t}} \sum_{k \geq a_N} \left(S_0 u^{2k-M} - K \right) \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}$$

$$= S_0 \sum_{k \geq a_N} \binom{M}{k} \left(\frac{pu}{e^{R\Delta t}} \right)^k \left(\frac{(1-p)}{u\, e^{R\Delta t}} \right)^{M-k} - \frac{K}{e^{MR\Delta t}} \sum_{k \geq a_N} \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}$$

Aunque de derivación simple, esta fórmula es incómoda, y además depende del número de períodos prescritos N.

Sin embargo, pasando al límite, haciendo $N \to \infty$, o lo que es lo mismo, haciendo que $\Delta t \to 0$, da lugar a la fórmula de Black-Scholes:

$$\boxed{\text{Call}_{\text{ahora}} = S_0 \cdot \boldsymbol{\Phi}\left(d_+\right) - Ke^{-RT}\boldsymbol{\Phi}\left(d_-\right)}$$

donde

$$\boxed{d_\pm = \frac{\ln\left(S_0/K\right) + \left(R \pm \left(\sigma^2/2\right)\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left(\dfrac{S_0}{Ke^{-R\cdot T}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}}$$

y donde $\boldsymbol{\Phi}$ es la función de distribución de la normal estándar.

Ecuación Diferencial de Black-Scholes

Si designamos por $C_n(S)$ el valor de un derivado en el instante n cuando el subyacente vale S entonces el argumento de no arbitraje da que:

$$C_n(S) = e^{-R\Delta t} \cdot (pC_{n+1}(Su) + (1-p)C_{n+1}(Sd))$$

Si ponemos

$$\begin{matrix} n\Delta t = t \\ N\Delta t = 1 \end{matrix} \quad \text{y hacemos} \quad \Delta t \to 0$$

se obtiene la ecuación diferencial de Black-Scholes

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial C}{\partial S} RS - RC \equiv 0}$$

Movimiento Browniano Geométrico. Log-normalidad

Sobre el activo se ha postulado que bajo riesgo neutro debemos considerar que evoluciona como

$$S_n/S_0 = (u)^{\mathcal{B}} \cdot \left(\frac{1}{u}\right)^{n-\mathcal{B}} = (u)^{2\mathcal{B}-n}$$

donde $\mathcal{B}$ es una variable binomial con parámetros n y p. Pasando al límite (cuando Δt tiende de a 0), se obtiene que

$$\ln\left(S_T/S_0\right) \text{ es una } \mathcal{N}\text{ormal}\left(\left(r-(\sigma^2/2)\right)T, \sigma\sqrt{T}\right).$$

Y más aún, que S_t es un proceso de Itô que verifica la regla de evolución estocástica continua dada por la ecuación diferencial estocástica siguiente:

$$\boxed{dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)}$$

Dividendos

La inclusión de los dividendos en el modelo binomial es algo delicada. Analizaremos dos casos: cuando interpretamos que recibimos una tasa continua de dividendos, y cuando tenemos previsto recibir un dividendo fijo en un determinado instante de tiempo.

Tasa continua de dividendos

Es habitual considerar que el activo tiene una rentabilidad continua por dividendos Q por unidad de tiempo. Se trata de una idealización que facilita mucho los cálculos, sobre todo en los modelos de evolución continua del entorno Black-Scholes.

Si en tiempo t la cotización es S_t, entonces, en tiempo $t + dt$

$$S_t \quad \longrightarrow \quad \underbrace{S_{t+dt}}_{\text{cambio cotización}} + \underbrace{S_{t+dt} Q dt}_{\text{por dividendo}}$$

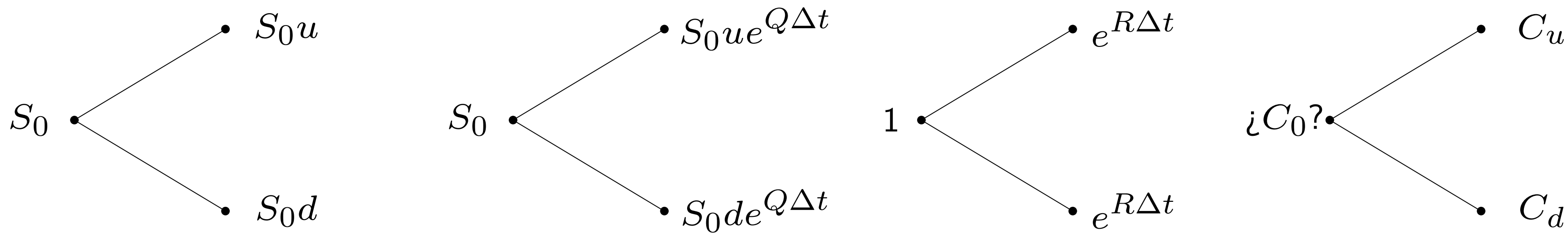
Si se **reinvierte** en activo este rendimiento extra por dividendo, el valor $S_{t+dt}(1 + Qdt)$ supone que tenemos $(1 + Qdt)$ unidades de subyacente.

A más plazo, desde tiempo 0 hasta Mdt,

$$S_0 \quad \longrightarrow \quad S_{Mdt}\prod_{j=1}^{M}(1+Qdt) \approx S_{Mdt}\, e^{QMdt}$$

De manera que es como si en tiempo Mdt tuviéramos e^{QMdt} unidades de subyacente.

Replicación. Dividimos la unidad de tiempo (el año) en N intervalos de tiempo de tamaño Δt. La tasa continua por dividendos es Q. La situación en un paso de tiempo es:



árbol de cotizaciones árbol de valores

Buscamos α y β para que la cartera de precio $\alpha + \beta S_0$ replique los pagos de la opción:

$$\begin{cases} C_u = \alpha e^{R\Delta t} + \beta(S_0 u \; e^{Q\Delta t}) \\ C_d = \alpha e^{R\Delta t} + \beta(S_0 d \; e^{Q\Delta t}) \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$\beta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)} \frac{1}{S_0 e^{Q\Delta t}} \quad \text{y} \quad \alpha = e^{-R\Delta t} \, \frac{dC_u - uC_d}{d-u} \, .$$

Obsérvese cómo reinvertimos los dividendos (la cartera es autofinanciada).

Valoración con probabilidades. La ecuación de no arbitraje es:

$$p \, \frac{S_0 \, u \, e^{Q\Delta t}}{e^{R\Delta t}} + (1-p) \, \frac{S_0 \, d \, e^{Q\Delta t}}{e^{R\Delta t}} = S_0$$

que se simplifica para obtener

$$p\,u + (1-p)\,d = e^{(R-Q)\Delta t}.$$

y así, C_0 resulta ser el promedio (con p) descontado de los pagos futuros.

Obsérvese que este p es el que hace que

$$p\,u + (1-p)\,d = e^{(R-Q)\Delta t}$$

En la construcción del árbol binomial hasta tiempo T, con una tasa continua de dividendos Q, basta con evaluar como si el valor inicial del activo fuera $S_0 e^{-QT}$ en lugar de S_0.

EJERCICIO

Aplicar el mismo análisis a opciones sobre divisas. Aquí Q queda reemplazado por R_e, el tipo de interés extranjero.

Esto da lugar, al pasar al caso continuo, a que el precio del activo en tiempo T, S_T, y bajo riesgo neutro satisface que

$$S_T = S_0 e^{[(R-Q)-\sigma^2/2]T+\sigma\sqrt{T}\mathcal{N}(0,1)}$$

Sacando un factor e^{-QT}, vemos que, si K, R, y T fijos

Call con rentabilidad por dividendos Q y precio de activo S_0
equivale a
Call con rentabilidad por dividendos 0 y precio de activo $e^{-QT} \cdot S_0$

Alternativamente, como el valor de una call es:

$$\text{Call} = e^{-RT}\mathbf{E}\left(\text{máx}\left(S_T - K, 0\right)\right)$$

que podemos reescribir como:

$$\text{Call} = e^{-QT}\left\{e^{-(R-Q)T} \cdot \mathbf{E}\left(\text{máx}\left(S_T - K, 0\right)\right)\right\}$$

deducimos que, para S_0, K y T fijos:

Call con rentabilidad por dividendos Q y tipo de interés R
equivale a
$e^{-QT}\times$ Call con rentabilidad por dividendos 0 y tipo de interés $R-Q$

Dividendos fijos

Supongamos que en tiempo T recibiremos un único dividendo conocido D (por acción). Interpretamos que la **cotización** S_t del activo tiene dos partes: por un lado, el valor (descontado) del dividendo; y, por otro, la parte con incertidumbre, que llamaremos S_t^*:

$$\begin{cases} S_t &= S_t^* + D\, e^{-R(T-t)} \qquad \text{si } t \leq T; \\ S_t &= S_t^* \qquad\qquad\qquad\quad\ \ \text{si } t > T. \end{cases}$$

El valor de la **inversión** en el activo en tiempo t viene dado por:

$$S_t^* + D\, e^{-R(T-t)}\,,$$

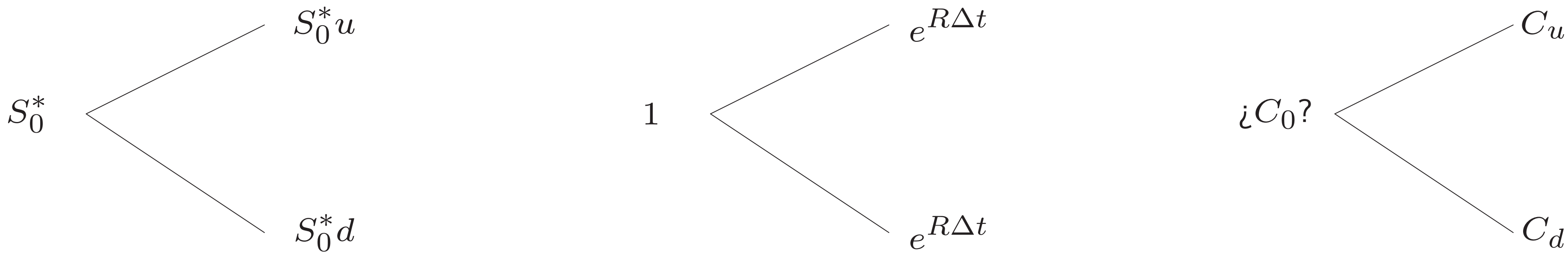
que coincide con la cotización hasta la fecha de pago del dividendo. Queremos valorar un derivado sobre este subyacente. Nótese que el pago del derivado depende de la cotización del activo.

Dividendos en el esquema binomial de un paso

Supongamos que el dividendo D se paga en tiempo $\Delta t/3$. La cotización hoy es

$$S_0 = S_0^* + D\; e^{-R\Delta t/3}\,.$$

Proponemos la habitual evolución, pero únicamente para la parte con incertidumbre:



La replicación es como sigue. Formamos una cartera con α unidades de dinero y β de subyacente, cuyo precio hoy es:

$$\alpha + \beta S_0\,,$$

y buscamos los valores de α y β para los que esta cartera replique los pagos del derivado en cualquiera de las posibilidades.

Obsérvese que las β acciones, tras tiempo Δt, dan lugar a:

- o bien $\beta S_0^* u$, o bien $\beta S_0^* d$;
- y la parte sin riesgo $\beta D e^{R\Delta t\, 2/3}$ (el dividendo recibido en $\Delta t/3$, capitalizado).

Buscamos los valores de α y β para los que:

$$\begin{cases} C_u = \alpha e^{R\Delta t} + \beta(S_0^* u + D e^{R\Delta t 2/3}) \\ C_d = \alpha e^{R\Delta t} + \beta(S_0^* d + D e^{R\Delta t 2/3}) \end{cases}$$

El resultado es:

$$\beta = \frac{C_u - C_d}{S_0^*(u-d)}$$

$$\alpha = e^{-R\Delta t}\, \frac{dC_u - uC_d}{d-u} - D\, e^{-R\Delta t/3}\, \frac{C_u - C_d}{S_0^*(u-d)}$$

¿Y el cálculo con probabilidades?

Buscamos primero p tal que

$$pu + (1-p)d = e^{R\Delta t}\,.$$

¡Atención!, esto hará que el árbol de S_t^* sea martingala, pero no así el de las cotizaciones S_t (aunque sí lo será el árbol de valores de la inversión).

Ahora multiplicamos la primera ecuación por p y la segunda por $(1-p)$ para obtener que

$$pC_u + (1-p)C_d = \alpha e^{R\Delta t} + \beta S_0^* e^{R\Delta t} + \beta D e^{R\Delta t 2/3}$$

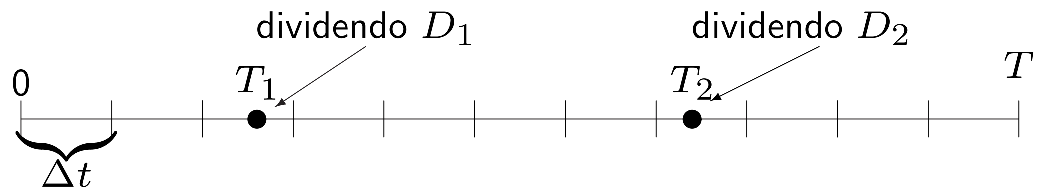
Esto es,

$$\begin{aligned} e^{-R\Delta t}(pC_u + (1-p)C_d) &= \alpha + \beta S_0^* + \beta D e^{-R\Delta t/3} \\ &= \alpha + \beta(S_0^* + De^{-R\Delta t/3}) \\ &= \alpha + \beta S_0 = \text{inversión para la replicación} = C_0 \end{aligned}$$

Conclusión: p es la probabilidad que hace que S^* (y no S) sea riesgo neutro, pero aún así es la que usamos para valorar los derivados (cuyo pago depende de S).

Implementación en el árbol binomial

Supongamos que se van a recibir dos dividendos (conocidos hoy), D_1 y D_2, en tiempos T_1 y T_2. La opción que queremos valorar vence en tiempo T.



Fijamos un Δt para nuestro árbol binomial, de manera que $N\Delta t = T$. Los inputs de mercado son R, el tipo anual, σ, la volatilidad del subyacente y S_0, la cotización hoy del activo.

Para valorar el derivado necesitamos el árbol de la cotización S_t, que consta de dos partes: S_t^*, con la incertidumbre, y Π_t, el "proceso de dividendos" (sin incertidumbre):

$$S_t = S_t^* + \Pi_t \, ,$$

donde

$$\Pi_t = \begin{cases} D_1 e^{-(T_1-t)R} & \text{si } t \leq T_1 \\ 0 & \text{si } t > T_1 \end{cases} + \begin{cases} D_2 e^{-(T_2-t)R} & \text{si } t \leq T_2 \\ 0 & \text{si } t > T_2 \end{cases}$$

Procedimiento:

1. Con los valores de R y σ determinamos, de la manera habitual, los valores de los parámetros u, d y p.
2. Con el valor S_0^* y los valores de u y d construimos el árbol de valores de S_t^* hasta tiempo T. (Esto supone que consideramos que σ es la volatilidad de S^*).
3. Calculamos los valores del proceso de dividendos Π_t (nótese que es un vector fila en Excel, pues no tiene incertidumbre).
4. Construimos el árbol de cotizaciones S_t a partir del de S_t^* aumentando todos los valores de los nodos de tiempo $j\Delta t$ con el correspondiente valor $\Pi_{j\Delta t}$. Este árbol no será martingala (con p), pero nos servirá para valorar la opción.
5. Podemos también construir el árbol del valor de la inversión en el activo, cuyos valores vienen dados por $S_t^* + D_1\, e^{-(T_1-t)R} + D_2\, e^{-(T_2-t)R}$.
6. La valoración del derivado utiliza el árbol de cotizaciones S_t y los promedios se calculan con p.

EJEMPLO BASE

Cálculo de la prima de una put americana con y sin dividendos. Comparación.