Modelos de Tipos de Interés: Modelos del tipo a Corto

Fernando de Lope Contreras (fernando.delope@bbva.com)

MEFC-BBVA, 8/15 de Marzo de 2019

Índice

- **Modelos del tipo a corto plazo.**
  - **Introducción.**
  - **Precio de réplica de un Bono Cupón Zero (ZCB) y Teorema de Feyman Kac.**
  - **Modelo Gaussiano de un factor**
    - **Precio del Bono Cupón Zero.**
      - **Solución vía EDP.**
      - **Solución vía Martingala.**
    - **Dinámica del tipo forward libor.**
    - **Precio de un Caplet.**
    - **Precio de un Caplet en función del precio de un floor sobre ZCB.**
    - **Precio de un Swaption.**
    - **Aproximación del tipo Swap.**
    - **Calibración a precios de Swaptions.**
    - **Implementación en diferencias finitas.**
    - **Implementación por Monte Carlo.**

1. Modelos de Tipo a Corto Plazo

Introducción

A lo largo del curso denotaremos el tipo de interés instantáneo como $r(t)$. Se trata del tipo de interés que la cuenta corriente nos pagaría continuamente por el dinero depositado en la misma. Definimos la evolución de la cuenta corriente como,

$$\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} = r(t)dt \quad s.t \quad \beta(0) = 1.$$

Es decir, que

$$\frac{\beta(t+dt) - \beta(t)}{\beta(t)} = r(t)dt$$

$r(t)$ sería el tipo al que la cuenta corriente va creciendo a lo largo del tiempo.

Los modelos de tipo a corto,

- Dan dinámica al tipo instantáneo (over-night).
- En general presentan una dimensión reducida.
  - Esto presenta ventajas computacionales importantes.
- No son modelos de Mercado.
  - Los Parámetros no tienen una interpretacin directa (volatilidades, correlaciones, etc).
- Intentan ser markovianos en las variables de estado que lo definen.

Bono cupón zero

Uno de los activos básicos en tipos de interés es el bono cupón zero. Este activo paga a vencimiento una cantidad cierta de dinero (nominal, que supondremos de aquí en adelante que es 1 u.m)

Es importante, por tanto, ser capaces de inferir la dinámica del precio de este activo a partir de la dinámica del tipo instantáneo.
Para ello, supongamos que el tipo instantáneo cumple, bajo la medida real $\mathbb{P}$, con la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dr(t) = \mu^{\mathbb{P}}(t,r)dt + \sigma(t,r)dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{1}$$

donde $W^{\mathbb{P}}(t)$ es un Broniano estándar bajo la medida $\mathbb{P}$.

Cuál es la dinámica del bono cupón zero bajo la medida real $\mathbb{P}$?

Bono Cupón Zero bajo $\mathbb{P}$

Conocemos la dinámica del tipo instantáneo bajo la medida real, según (1). Definimos el precio del bono cupón zero en el instante t con vencimiento T, como

$$B(t,T) = B(t,T,r(t)) \tag{2}$$

Donde hemos hecho explícita la dependencia del bono cupón zero en el tipo instantáneo.

Para ver la dinámica del bono cupón zero, aplicamos Ito a (2)

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= \frac{\partial B(t,T)}{\partial t}dt + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}dr_t \cdot dr_t \\ &= \frac{\partial B(t,T)}{\partial t}dt + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t}\left(\mu^{\mathbb{P}}(t,r)dt + \sigma(t,r)dW^{\mathbb{P}}(t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\sigma^2(t,r)dt \end{aligned} \tag{3}$$

Después de agrupar términos en dt y $dW^{\mathbb{P}}(t)$, obtenemos que la dinámica del bono cupón zero bajo $\mathbb{P}$ podemos expresarla como,

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = M^{\mathbb{P}}(t,T)dt - \Sigma(t,T)dW^{\mathbb{P}}(t) \tag{4}$$

Donde

$$M^{\mathbb{P}}(t,T) = \frac{1}{B(t,T)}\left(\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t}\mu^{\mathbb{P}}(t,r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\sigma^2(t,r)\right) \tag{5}$$

$$\Sigma(t,T) = -\frac{1}{B(t,T)}\sigma(t,r)\frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t} \tag{6}$$

Es decir, (4) representa cómo evoluciona el precio del bono cupón zero de vencimiento T bajo la medida real.

Observación

Debemos observar que de acuerdo a los supuestos que hemos hecho, un único Browniano determina la evolución del precio de todos los bonos cupón zero. Esto implica que los rendimientos instantáneos de dos bonos con distinto vencimiento estarán perfectamente correlados.

Por tanto, una cartera compuesta de dos bonos cupón zero con distinto vencimiento puede hacerse que sea libre de riesgo. Es decir, que el rendimiento instantáneo de dicha cartera sea el tipo libre de riesgo.

Esto nos va a permitir conocer el precio de réplica del bono cupón zero y por tanto la dinámica del bono cupón zero bajo la medida riesgo neutro.

Bono Cupón Zero bajo $\mathbb{Q}$

Para ver cuál es el precio del bono cupón zero de no arbitraje definimos una cartera autofinanciada compuesta por dos bonos cupón zero con distinto vencimiento,

$$V(t) = B(t, T_1) + \alpha(t)B(t, T_2) \tag{7}$$

Ya que la cartera es autofinanciada, debe cumplir,

$$dV(t) = dB(t, T_1) + \alpha(t)dB(t, T_2) \tag{8}$$

Nuestro objetivo es buscar el valor de $\alpha(t)$ tal que la cartera sea libre de riesgo y por tanto la variación instantánea del valor de nuestra cartera sea igual al tipo libre de riesgo.

$$dV(t) = r(t)V(t)dt \tag{9}$$

Para ello, sustituimos en (8) la dinámica que obtuvimos para el bono cupón zero en (4).

$$\begin{aligned} dV(t) = &\left(M^{\mathbb{P}}(t,T_1)B(t,T_1) + \alpha_t M^{\mathbb{P}}(t,T_2)B(t,T_2)\right) dt \\ &- \left(\Sigma(t,T_1)B(t,T_1) + \alpha_t \Sigma(t,T_2)B(t,T_2)\right) dW^{\mathbb{P}}(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Para que el rendimiento instanáneo de la cartera sea igual al rendimiento del activo libre de riesgo debemos eliminar la dependencia que tiene la variación de la cartera del Browniano. Es decir,

$$\alpha_t = -\frac{\Sigma(t,T_1)}{\Sigma(t,T_2)}\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} \tag{11}$$

Sustituyendo α_t en la expresión (9), obtenemos (después de un poco de álgebra) que,

$$\frac{M^{\mathbb{P}}(t,T_1) - r(t)}{\Sigma(t,T_1)} = \frac{M^{\mathbb{P}}(t,T_2) - r(t)}{\Sigma(t,T_2)} \tag{12}$$

Es decir, que el rendimiento instantáneo de un bono cupón zero sobre el tipo libre de riesgo medido en términos de su volatilidad (ajustada por su riesgo), es el mismo independientemente del vencimiento del bono.

Este término es denominado precio de mercado del riesgo y lo denotamos como,

$$\epsilon(t, r_t) = \frac{M^{\mathbb{P}}(t,T) - r(t)}{\Sigma(t,T)} \tag{13}$$

y mide el exceso de rendimiento sobre el activo libre de riesgo que el mercado (o el inversor) espera en compensación por asumir ese riesgo.

Sustituyendo (13) en (5), obtenemos que,

$$M^{\mathbb{P}}(t,T) = \epsilon(t,r_t)\Sigma(t,T) + r(t) \tag{14}$$

Sustituyendo por el valor de $M^{\mathbb{P}}(t,T)$ en la ecuación anterior obtenemos la ecuación fundamental de valoración (Ecuación Backwards de kolmogorov) del bono cupón zero

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t} \underbrace{\left(\mu^{\mathbb{P}}(t,r) + \epsilon(t,r)\sigma(t,r)\right)}_{\mu^{\mathbb{Q}}(t,r)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\sigma^2(t,r) = r(t)B(t,T)$$

$$s.t \quad B(T,T,r) = 1 \tag{15}$$

Feyman-Kac

Hemos visto que el precio de no arbitraje de un bono cupón zero cumple con la siguiente equación:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t}\mu^{\mathbb{Q}}(t,r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\sigma^2(t,r) = r(t)B(t,T) \\ &s.t \quad B(T,T,r) = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Por el teorema de Feyman-Kac sabemos también que la solución de esa ecuación (es decir el precio del cupón zero) cumple con el siguiente valor esperado

$$B(t,T) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds} B(T,T,r)|r(t)\right) \tag{17}$$

Donde

$$dr(t) = \mu^{\mathbb{Q}}(t,r)dt + \sigma(t,r)dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{18}$$

y

$$\mu^{\mathbb{Q}}(t,r) = \mu^{\mathbb{P}}(t,r)dt + \epsilon(t,r)\sigma(t,r)$$

Es decir, a partir del teorema de Feyman-Kac somos capaces de relacionar la solución de una EDP con la solución de un valor esperado donde además el drift de nuestro tipo a corto bajo la medida riesgo neutro $\mathbb{Q}$ es conocido.

Demostración:

Vamos a demostrar que la solución que cumple el ZCB es equivalente a resolver la EDP en (16) cuando el tipo instantáneo tiene como drift $\mu^{\mathbb{Q}}$ bajo $\mathbb{Q}$. Para ello definimos el proceso $Y(t)$ tal que

$$Y(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} B(t,T)$$

tomando diferenciales a ambos lados obtenemos,

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= B(t,T)d\left(e^{-\int_0^t r(s)ds}\right) + e^{-\int_0^t r(s)ds}dB(t,T) \\
&= -r(t)B(t,T)dt + e^{-\int_0^t r(s)ds}\underbrace{\left(\frac{\partial B(t,T)}{\partial t}dt + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r}dr(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r^2}\right)}_{r(t)B(t,T)dt+\frac{\partial B(t,T)}{\partial r}\sigma(t,r)dW^{\mathbb{Q}}(t)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

por lo que,

$$
dY(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}\frac{\partial B(t,T)}{\partial r}\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{20}
$$

Integrando entre t y T obtenemos que,

$$
Y(T) = Y(t) + \int_t^T e^{-\int_0^u r(s)ds}\frac{\partial B(u,T)}{\partial r}\sigma(u)dW^{\mathbb{Q}}(u)
$$

Si tomamos el valor esperado bajo $\mathbb{Q}$ y teniendo en cuenta que la integral del lado derecho de la ecuación anterior es una integral de Ito, y por tanto de valor esperado cero

$$E_t^{\mathbb{Q}}(Y(T)) = Y(t) \rightarrow E_t^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s)ds}V(T)) = e^{-\int_0^t r(s)ds}V(t)$$

y sacando factor comn $e^{-\int_0^t r(s)ds}$ obtenemos la igualddad que estábamos buscando,

$$V(t) = E_t^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_0^T r(s)ds}V(T))$$

Modelo Gaussiano de 1 Factor

Vamos a particularizar la definición que hicéramos del tipo instantáneo en (18) tal que definimos el tipo instantáneo como

$$r(t) = x(t) + \lambda(t) \tag{21}$$

Donde $x(t)$ sigue, bajo $\mathbb{Q}$, un proceso Ornstein-Uhlenbeck tal que

$$dx(t) = -\kappa x(t)dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad s.t \quad x(0) = 0 \tag{22}$$

y $\lambda(t)$ se trata de una función determinista dependiente del tiempo que utilizaremos para reproducir la estructura temporal de tipos de interés.

Para resolver (22) haremos el siguiente cambio de variable,

$$y(t) = x(t)e^{\kappa t}$$

tal que aplicando Ito a $y(t)$,

$$\begin{aligned} dy(t) &= \kappa x(t)e^{\kappa t}dt + \left(-\kappa x(t)dt + \sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)\right)e^{\kappa t} \\ &= e^{\kappa t}\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned} \tag{23}$$

Integrando entre t y $t^{'}$

$$y(t^{'}) = y(t) + \int_t^{t^{'}} e^{\kappa s}\sigma(s)dW^{\mathbb{Q}}(s)$$

Ya por último deshacemos el cambio de variable tal que la solución de $x(t)$ que cumple con (22) puede verse que es,

$$x(t^{'}) = x(t)e^{-\kappa(t^{'}-t)} + \int_{t}^{t^{'}} \sigma(s)e^{-\kappa(t^{'}-s)}dW^{\mathbb{Q}}(s) \tag{24}$$

Es decir, $x(t^{'})|x(t)$ se distribuye, bajo $\mathbb{Q}$ como una normal de momentos,

$$E\left(x(t^{'})|x(t)\right) = x(t)e^{-\kappa(t^{'}-t)}$$

$$\begin{aligned} Var\left(x(t^{'})|x(t)\right) &= \int_{t}^{t^{'}}\int_{t}^{t^{'}} \sigma(s)e^{-\kappa(t^{'}-s)}\sigma(u)e^{-\kappa(t^{'}-u)}E\left(dW^{\mathbb{Q}}(s)dW^{\mathbb{Q}}(u)\right) \\ &= \int_{t}^{t^{'}} \sigma^{2}(s)e^{-2\kappa(t^{'}-s)}ds \end{aligned} \tag{25}$$

Por lo que bajo esta parametrización, el tipo instantáneo se distribuye normalmente permitiendo la posibilidad de tipos negativos.

$$r(t)|r(0) \overset{D}{\sim} N\left(\lambda(t), \int_0^t \sigma^2(s)e^{-2\kappa(t-s)}ds\right) \tag{26}$$

Hemos dicho que $\lambda(t)$ será una función determinista del tiempo tal, que nos permita reproducir la curva de factores de descuento. Tenemos que encontrar, por tanto, la ecuación que cumple el precio de un bono cupón zero bajo el modelo gaussiano.

Bono Cupón Zero Bajo el Modelo Gaussiano

La idea es calcular el precio de un Bono cupón zero $B(t, T)$ para cualquier instante de tiempo $t \leq T$.
Hemos visto que este precio cumple con la ecuación Backwards de Kolmogorov y con un valor esperado. Resolveremos las dos ecuaciones para ver que llegamos al mismo resultado

Bono Cupón Zero vía EDP

La ecuación que tenemos que resolver en función del tipo a corto es,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} + \frac{\partial B(t,T)}{\partial r_t}\mu^{\mathbb{Q}}(t,r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial r_t^2}\sigma^2(t,r) = r(t)B(t,T) \\ &s.t \quad B(T,T,r) = 1 \end{aligned} \tag{27}$$

Sin embargo, nosotros queremos redefinir esta ecuación en términos de $x_t = r(t) - \lambda(t)$ ya que en nuestro caso el tipo a corto no es más que una función determinista de éste. Si denotamos,

$$B(t,T,r_t) = B^*(t,T,x_t = r_t - \lambda_t)$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} B^*(t, T, x_t) &= \frac{\partial}{\partial t} B^*(t, T, x_t) + \frac{\partial}{\partial x} B^*(t, T, x_t) \lambda^{'}(t) \\
\frac{\partial}{\partial r_t} B^*(t, T, x_t) &= \frac{\partial}{\partial x_t} B^*(t, T, x_t) \\
\frac{\partial^2}{\partial r_t^2} B^*(t, T, x_t) &= \frac{\partial}{\partial x_t^2} B^*(t, T, x_t)
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $\mu^{\mathbb{Q}}(t) = -\kappa x_t + \lambda^{'}(t)$ ya estamos en condiciones de plantear la EDP en términos de x.

La ecuación que vamos a resolver es

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial B(t,T)}{\partial t} - \kappa x \frac{\partial B(t,T)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) \frac{\partial^2 B(t,T)}{\partial x^2} = (x + \lambda_t) B(t,T) \\
& s.t \quad B(T, T, x) = 1
\end{aligned} \tag{28}
$$

Representamos la ecuación de forma más conveniente a través del cambio de variable

$\tau = T - t.$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} + -\kappa x \frac{\partial B(\tau)}{\partial x} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\tau}^{2}\frac{\partial^{2} B(\tau)}{\partial x^{2}} = \left(x + \hat{\lambda}_{\tau}\right) B(\tau) \\
&s.t \quad B(0,x) = 1
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Supongamos que la solución de la ecuación es del tipo,

$$B(\tau) = A(\tau)e^{-G(\tau)x} \tag{30}$$

La idea es susutituir (30) en (29). Para ello calculamos primero las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} &= A'(\tau)e^{-G(\tau)x} - xG^{'}(\tau)B(\tau) \\
\frac{\partial B(\tau)}{\partial x} &= -G(\tau)B(\tau) \\
\frac{\partial^2 B(\tau)}{\partial x^2} &= G^2(\tau)B(\tau)
\end{aligned} \tag{31}$$

Sustituyendo en (29) y reorganizando términos obtenemos que,

$$\underbrace{-\frac{A^{'}(\tau)}{A(\tau)}-\hat{\lambda}_{\tau}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\tau}^{2}G^{2}(\tau)}_{sólo\ depende\ de\ \tau}=\underbrace{x\left(1-G^{'}(\tau)-\kappa G(\tau)\right)}_{depende\ de\ x} \tag{32}$$

Es sencillo ver que esta igualdad únicamente tiene sentido cuando ambas ecuaciones on nulas. Es decir, de la igualdad anterior sacamos un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales,

$$-\frac{A^{'}(\tau)}{A(\tau)}-\hat{\lambda}_{\tau}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\tau}^{2}G^{2}(\tau) = 0 \;\; s.t \;\; A(0)=1 \tag{33}$$

$$1-G^{'}(\tau)-\kappa G(\tau) = 0 \;\; s.t \;\; G(0)=0 \tag{34}$$

Resolvemos primero la ecuación (34)

$$1 - G^{'}(\tau) - \kappa G(\tau) = 0 \;\; s.t \;\; G(0) = 0$$

Separamos los términos dependientes de τ y multiplicamos ambos términos por $e^{\kappa\tau}$ tal que,

$$e^{\kappa\tau}\left(G^{'}(\tau) + \kappa G(\tau)\right) = e^{\kappa\tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau} e^{\kappa\tau} G(\tau) = e^{\kappa\tau}$$

e integrando ambos lados obtenemos,

$$G(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa} \tag{35}$$

Respecto a la ecuación (33)

$$\frac{A^{'}(\tau)}{A(\tau)} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{\tau}^{2}G^{2}(\tau) - \hat{\lambda}_{\tau} \tag{36}$$

Directamente integrando obtenemos

$$A(\tau) = e^{\frac{1}{2}\int_{0}^{T-t}\hat{\sigma}^{2}(s)G^{2}(s)ds}e^{-\int_{0}^{T-t}\hat{\lambda}(s)ds} \tag{37}$$

Resumiendo, hemos encontrado que la solución del bono cupón zero es, deshaciendo el cambio de variable $\tau = T - t$,

$$\boxed{B(t,T) = \underbrace{e^{\frac{1}{2}\int_{t}^{T}\sigma^{2}(u)G^{2}(u,T)du}e^{-\int_{t}^{T}\lambda(s)ds}}_{A(t,T)}e^{-G(\kappa,t,T)x_{t}}} \tag{38}$$

En principio, tendríamos todo como para ser capaces de calcular dicho precio, una vez que hemos dado valores a los parámetros. Únicamente nos quedaría ver qué valor toma $\lambda(t)$. Hemos comentado que buscaremos ese valor tal que seamos consistentes con la estructura de tipos de interés vista hoy ($t = 0$).

Es decir, si $B^M(0,T)$ es el factor de descuento que observamos hoy en mercado y buscamos que el modelo sea capaz de recogerlo, buscaremos que (sustituyendo $t = 0$ en (38))

$$B^M(0,T) = e^{\frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(u)G^2(u,T)du} e^{-\int_0^T \lambda(s)ds} \tag{39}$$

y por tanto, tomando logaritmos a ambos lados,

$$\int_0^T \lambda(s)ds = -\log B^M(0,T) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^T \sigma^2(u)G^2(u,T)du}_{V(0,T)} \tag{40}$$

y derivando respecto a T

$$\boxed{\lambda(t) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\log B^M(0,t)}_{f^M(0,t)} + \int_0^t \sigma^2(u)G(u,t)G^{'}(u,t)du} \tag{41}$$

Es decir, bajo la medida riesgo neutro el tipo instantáneo está centrado ligeramente por encima del tipo forward instantáneo que observamos hoy en mercado.

Ya, por fin, tenemos todo lo que necesitábamos para calcular el precio del Bono Cupón zero, en cualquier instante t, sustituyendo (51) en (38),

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-G(\kappa,t,T)x_t} \tag{42}$$

Donde

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \frac{B^M(0,T)}{B^M(0,t)}e^{\frac{1}{2}(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t))} \\ G(\kappa,t,T) &= \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \end{aligned} \tag{43}$$

Observación

El precio del ZCB en un instante futuro t es una función determinista de la realización del proceso markoviano x_t. Esto implica, que a partir de la realización de x_t tenemos un continuo de la curva de tipos de interés definida en t.

Bono Cupón Zero vía valor esperado

Hemos visto que el precio de un bono cupón zero también podemos sacarlo, calculando el valor esperado bajo la medida $\mathbb{Q}$ del flujo de caja cierto futuro (1 u.m) descontado. Es decir,

$$B(t,T) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s,x_s)ds}|\mathcal{F}_t\right)$$

Lo primero que haremos será ver qué pinta tiene $\int_t^T r(s,x_s)ds$

$$\int_t^T r(s)ds = \int_t^T x(s)ds + \int_t^T \lambda(s)ds \tag{44}$$

De los dos términos de la ecuación anterior hemos visto en la sección anterior la pinta que tiene $\int_t^T \lambda(s)ds$ por lo que nos centraremos en el término de x

Integrando (24) obtenemos que,

$$\int_t^T x(t^{'})dt^{'} = x(t)\int_t^T e^{-\kappa(t^{'}-t)}dt^{'} + \int_t^T \left(\int_t^{t^{'}} \sigma(s)e^{-\kappa(t^{'}-s)}dW^{\mathbb{Q}}(s)\right) dt^{'} \quad (45)$$

En la ecuación anterior aparece una integral doble. Vamos, a través de una cambio en el orden de integración, a intentar sacar el browniano fuera de la primera integral de tal forma que podamos aplicar el principio de isometría.

$$\int_{t'=t}^T \left(\int_{s=t}^{t^{'}} \sigma(s)e^{-\kappa(t^{'}-s)}dW^{\mathbb{Q}}(s)\right) dt^{'} = \int_{s=t}^T \sigma(s) \underbrace{\left(\int_{t'=s}^T e^{-\kappa(t^{'}-s)}dt^{'}\right)}_{G(\kappa,s,T)} dW^{\mathbb{Q}}(s)$$

Entonces, sustituyendo la integral doble (después de haber hecho el cambio) en (45) obtenemos que

$$\int_t^T x(t^{'})dt^{'} = x(t)G(\kappa, t, T) + \int_{s=t}^T \sigma(s)G(\kappa, s, T)dW^{\mathbb{Q}}(s) \tag{46}$$

Donde la integral de x puede verse que se distribuye como una normal, tal que

$$\int_t^T x(t^{'})dt^{'} \overset{D}{\sim} N\left(x(t)G(\kappa, t, T), \int_{s=t}^T \sigma^2(s)G^2(\kappa, s, T)ds\right) \tag{47}$$

Tenemos todo para saber cómo se distribuye la integral del tipo instantáneo entre dos momentos de tiempo

$$\int_t^T r(s)ds = x(t)G(\kappa, t, T) + \int_t^T \lambda(s)ds + \int_{s=t}^T \sigma(s)G(\kappa, s, T)dW^{\mathbb{Q}}(s) \tag{48}$$

Por lo que,

$$\int_t^T r(s)ds \overset{D}{\sim} N\left(x(t)G(\kappa, t, T) + \int_t^T \lambda(s)ds, \underbrace{\int_{s=t}^T \sigma^2(s)G^2(\kappa, s, T)ds}_{V(t,T)}\right) \tag{49}$$

Observación

Sea X una variable aleatoria tal que $X \overset{D}{\sim} N(\mu, v^2)$

$$E(e^X) = e^{\mu + \frac{1}{2}v^2}$$

Estamos en condiciones de calcular el valor esperado que veníamos buscando,

$$E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}|\mathcal{F}_t\right) = e^{-G(\kappa,t,T)x(t) - \int_t^T \lambda(s)ds + \frac{1}{2}V(t,T)} \tag{50}$$

En la sección anterior vimos que,

$$\int_t^T \lambda(s)ds = \int_0^T \lambda(s)ds - \int_0^t \lambda(s)ds = \log \frac{B^M(0,t)}{B^M(0,T)} + \frac{1}{2}\left(V(0,T) - V(0,t)\right) \tag{51}$$

Por lo que

$$E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \underbrace{\frac{B^M(0,T)}{B^M(0,t)}e^{\frac{1}{2}(V(t,T)-V(0,T)+V(0,t))}}_{A(t,T)}e^{-G(\kappa,t,T)x(t)} \tag{52}$$

SDE del ZCB bajo $\mathbb{Q}$

Hasta ahora hemos visto cuál es el precio del bono cupón zero en cualquier instante del tiempo. Vamos a ver qué pinta tiene la ecuación diferencial estocástica que cumple el precio del ZCB bajo $\mathbb{Q}$ de acuerdo al modelo gaussiano. Esto lo haremos, porque lo utilizaremos a la hora de sacar las expresiones para el precio de Caps/Floors y Swaptions.

Sabemos que en un instante t el precio del ZCB viene definido por,

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-G(\kappa,t,T)x_t}$$

Si aplicamos Ito a esta ecuación,

$$\begin{aligned}\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} &= \frac{A^{'}(t,T)}{A(t,T)}dt - x_t G^{'}(\kappa,t,T)dt - G(\kappa,t,T)dx_t + \frac{1}{2}G^2(\kappa,t,T)\sigma^2(t)dt \\ &= O(dt) - G(\kappa,t,T)\sigma(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)\end{aligned} \tag{53}$$

Sabemos que por no arbitrage, el drift del bono cupón zero bajo la medida riesgo neutro $\mathbb{Q}$ debe ser $r(t)$. Por lo que,

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r(t)dt - \underbrace{G(\kappa,t,T)\sigma(t)}_{\Sigma(t,T)} dW^{\mathbb{Q}}(t) \tag{54}$$

Por lo que el ZCB sigue un proceso lognormal de solución

$$B(t^{'},T) = B(t,T)\exp\left(\int_t^{t^{'}}\left(r(s) - \frac{1}{2}\Sigma^2(s,T)ds\right) + \int_t^{t^{'}}\Sigma(s,T)dW^{\mathbb{Q}}(s)\right) \tag{55}$$

Dinámica del tipo Forward Libor

Denotamos el tipo forward libor visto en t que fija en t_{j-1} y resetea en t_j como $F_j(t)$. Vamos a inferir la dinámica del tipo forward a partir de la dinámica que cumple el ZCB bajo $\mathbb{Q}$. El tipo forward libor, $F_j(t)$, se define como,

$$F_j(t) = \left(\frac{B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)}{B(t, t_j)} \right) \delta_j^{-1} = \left(\frac{B(t, t_{j-1})}{B(t, t_j)} - 1 \right) \delta_j^{-1}$$

Observación

El tipo forward libor es el valor de una cartera de dos ZCB con distinto vencimiento, medida en términos del ZCB de mayor vencimiento. Como veremos más adelante el tipo forward libor será martingala bajo la medida forward inducida por el ZCB del denominador.

Vamos a aplicar Ito sobre el cociente de ZCB, al que llamamos $\xi_j(t) = \frac{B(t, t_{j-1})}{B(t, t_j)}$.

$$\frac{d\xi_j(t)}{\xi_j(t)} = \Sigma(t,t_j)\left(\Sigma(t,t_j) - \Sigma(t,t_{j-1})\right)dt + \underbrace{\left(\Sigma(t,t_j) - \Sigma(t,t_{j-1})\right)}_{\phi_j(t)} dW^{\mathbb{Q}}(t) \qquad (56)$$

Por otro lado sabemos que

$$\xi_j(t) = 1 + \delta_j F_j(t)$$

Por tanto,

$$dF_j(t) = \delta_j^{-1} d\xi_j(t)$$

por lo que sustituyendo,

$$\frac{dF_j(t)}{\left(\delta_j^{-1} + F_j(t)\right)} = \Sigma(t,t_j)\phi_j(t)dt + \phi_j(t)dW^{\mathbb{Q}}(t) \qquad (57)$$

Es decir, bajo la medida $\mathbb{Q}$ el forward libor sigue un proceso log-normal desplazado cuya dinámica viene dada por,

$$\boxed{\frac{dF_j(t)}{\big(\delta_j^{-1} + F_j(t)\big)} = \Sigma(t, t_j)\phi_j(t)dt + \phi_j(t)dW^{\mathbb{Q}}(t)} \tag{58}$$

Sin embargo, cuando calculemos precio del caplet sobre $F_j(t)$ lo haremos bajo la medida $\mathbb{Q}_j$ asociada al ZCB de vencimiento t_j por ser sta la medida bajo la cual el tipo forward es martingala.

Para ver la dinámica del tipo libor bajo $\mathbb{Q}_j$ aplicamos Ito a la derivada Radon Nykodin que nos permitirá relacionar Brownianos en ambas medidas.

Sea

$$\psi_j(t) = \frac{B(t,t_j)}{\beta(t)} \frac{\beta(0)}{B(0,t_j)}$$

Aplicando Ito a $\psi_j(t)$ obtenemos que éste, es martingala bajo $\mathbb{Q}$

$$\frac{d\psi_j(t)}{\psi_j(t)} = -\Sigma(t,t_j)dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

por lo que por el teorema de Girsanov,

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW^{\mathbb{Q}_j}(t) - \Sigma(t,t_j)dt$$

Por tanto, sustituyendo, el tipo forward $F_j(t)$ bajo la medida forward $\mathbb{Q}_j$ es martingala y con dinámica

$$\boxed{\frac{dF_j(t)}{\left(\delta_j^{-1} + F_j(t)\right)} = \phi_j(t)dW^{\mathbb{Q}_j}(t)} \tag{59}$$

cuya solución puede verse que es,

$$\boxed{F_j(t) = \left(\delta_j^{-1} + F_j(0)\right) e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \phi_j^2(s)ds + \int_0^t \phi_j(s)dW^{\mathbb{Q}_j}(s)} - \delta_j^{-1}}$$

lo mismo ocurrirá para el cociente de ZCB , $\xi_j(t)$ que bajo la medida $\mathbb{Q}_j$ tendrá la pinta,

$$\boxed{\frac{d\xi_j(t)}{\xi_j(t)} = \phi_j(t)dW^{\mathbb{Q}_j}(t)} \tag{60}$$

Precio de un Caplet

Sea $F_j(t_{j-1})$ el tipo libor que fija en t_{j-1} y resetea en t_j visto en t_{j-1}. Sea una opción sobre ese tipo libor que nos da el derecho a recibirlo a cambio de pagar un cantidad fija K. Sabemos por el teorema fundamental de valoración que el precio de este derivado viene definido por,

$$V(t) = B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j} \left((F_j(t_{j-1}) - K)^+ \right) \delta_j \tag{61}$$

Donde

- $E_t^{\mathbb{Q}_j}(\cdot)$ representa el valor esperado bajo la medida forward j-ésima.
- δ_j es la fracción de año entre los tiempos t_{j-1} y t_j

Hemos visto que el tipo libor lo podemos expresar como,

$$F_j(t_{j-1}) = \left(\frac{B(t_j, t_j)}{B(t_j, t_{j+1})} - 1\right)\bar{\delta}_j^{-1}$$

donde $\bar{\delta}_j^{-1}$ es la fracción de año entre t_{j-1} y t_j utilizada para el cálculo del tipo libor y que puede ser distinta a la fracción de año de pago del caplet.

Por lo que sustituyendo esta definición en (61)

$$V(t) = B(t, t_j)\frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j}E_t^{\mathbb{Q}_j}\left((\xi_j(t_{j-1}) - \hat{K})^+\right) \tag{62}$$

Donde $\hat{K} = 1 + \bar{\delta}_j K$

NOTA.
Sea X_t un proceso martingala bajo $\mathbb{Q}_N$ que cumple,

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \sigma(t) dW^{\mathbb{Q}_N}(t)$$

Entonces

$$E_t^{\mathbb{Q}_N}\left((X_T - K)^+\right) = X_t N(d_+) - K(d_-) \tag{63}$$

Donde

$$d_+ = \frac{\log(\frac{X_t}{K}) + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}} \quad ; \quad d_- = d_+ - \underbrace{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)ds}}_{\nu}$$

A esta fórmula la llamaremos la fórmula de Black,

$$Black(t, T, X_t, K, \nu) = E_t^{\mathbb{Q}_N}\left((X_T - K)^+\right)$$

De la sección anterior sabemos que,

$$\frac{d\xi_j(t)}{\xi_j(t)} = \phi_j(t)dW^{\mathbb{Q}_j}(t) \tag{64}$$

por lo que de acuerdo a (63),

$$E_t^{\mathbb{Q}_j}\left((\xi_j(t_{j-1}) - \hat{K})^+\right) = \frac{B(t,t_{j-1})}{B(t,t_j)}N(d_+) - \hat{K}N(d_-) \tag{65}$$

Donde

$$d_+ = \frac{\log(\frac{B(t,t_{j-1})}{B(t,t_j)\hat{K}}) + \frac{1}{2}\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}} \quad ; \quad d_- = d_+ - \sqrt{\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}$$

Sustituyendo el resultado del valor esperado en (62), obtenemos

$$V(t) = \frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j} B(t,t_j) \left(\frac{B(t,t_{j-1})}{B(t,t_j)} N(d_+) - \hat{K} N(d_-) \right) \tag{66}$$

Que representado de una forma más conveniente,

$$V(t) = \delta_j B(t,t_j) \left(\left(\bar{\delta}_j^{-1} + F_j(t) \right) N(d_+) - \left(\bar{\delta}_j^{-1} + K \right) N(d_-) \right) \tag{67}$$

Donde

$$d_+ = \frac{\log\left(\frac{\bar{\delta}_j^{-1} + F_j(t)}{\bar{\delta}_j^{-1} + K}\right) + \frac{1}{2}\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}} \quad ; \quad d_- = d_+ - \sqrt{\int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s)ds}$$

Es decir, el precio de un caplet bajo el modelo gaussiano no es más que la fórmula de Black donde tanto el forward como K lo deslazamos por el valor de $\bar{\delta}_j^{-1}$

$$\boxed{Caplet_{Gaussian}(t, t_j, K, F_j(t), \nu) = \delta_j B(t, t_j) Black(t, t_j, \left(F_j(t) + \bar{\delta}_j^{-1}\right), \left(K + \bar{\delta}_j^{-1}\right), \nu)}$$

donde hemos llamado $\nu^2 = \int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s) ds$

Precio de un caplet en función del precio de un floor sobre un ZCB

En este apartado expresaremos el precio de un caplet en función del precio de un floor sobre un ZCB. Esto lo haremos porque luego lo usaremos en la valoración del swaption donde veremos que éste puede descomponerse en la suma de floors sobre ZCB.

Recordamos el que el precio de un caplet sobre el forward $F_j(t)$ puede expresarse como,

$$V(t) = B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j} \left((F_j(t_{j-1}) - K)^+ \right)$$

sustituyendo el tipo forward por la cartera de ZCB tenemos que,

$$\begin{aligned} V(t) &= \delta_j B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j} \left(\left(\frac{\overbrace{B(t_{j-1}, t_{j-1})}^{1}}{B(t_{j-1}, t_j)} - 1 \right) \bar{\delta}_j^{-1} - K)^+ \right) \\ &= \frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j} B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j} \left(\frac{1}{B(t_{j-1}, t_j)} - \hat{K})^+ \right) \end{aligned} \tag{68}$$

donde $\hat{K} = 1 + \bar{\delta}_j K$ tiene el mismo significado que antes. Ahora haremos un cambio de medida $\mathbb{Q}_j \to \mathbb{Q}_{j-1}$

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j} B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j} \left(\frac{1}{B(t_{j-1}, t_j)} - \hat{K})^+ \right) \\ &= \frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j} B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_{j-1}} \left(\frac{1}{B(t_{j-1}, t_j)} - \hat{K})^+ \frac{d\mathbb{Q}_j}{d\mathbb{Q}_{j-1}} \right) \end{aligned} \tag{69}$$

donde la derivada Radon Nikodyn viene definida por,

$$\frac{d\mathbb{Q}_j}{d\mathbb{Q}_{j-1}} = \frac{B(t_{j-1}, t_j)}{B(t_{j-1}, t_{j-1}} \frac{B(t, t_{j-1})}{B(t, t_j)}$$

que sustituyendo en la ecuación anterior nos da,

$$V(t) = \frac{\delta_j}{\bar{\delta}_j} B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_{j-1}} \left((1 - \hat{K} B(t_{j-1}, t_j))^+ \right)$$

y ya por último sacando factor común $\hat{K}$

$$V(t) = \underbrace{\frac{\hat{K}\,\delta_j}{\bar{\delta}_j}}_{Nominal} B(t, t_{j-1}) E_t^{\mathbb{Q}_{j-1}} \left(\left(\underbrace{\frac{1}{\hat{K}}}_{Strike} - B(t_{j-1}, t_j) \right)^+ \right) \tag{70}$$

que sería equivalente al precio de un floor sobre el ZCB de vencimiento t_j con strike $\frac{1}{\hat{K}}$ y nominal $\frac{\hat{K}\delta_j}{\bar{\delta}_j}$.

$$V_{Caplet}(t) = \textbf{ZCBFO}(t, t_{j-1}, t_j, \frac{\hat{K}\delta_j}{\bar{\delta}_j}, \frac{1}{\hat{K}}) \tag{71}$$

donde

$$\textbf{ZCBFO}(t, t_o, t_v, N, K) = B(t, t_o) E_t^{\mathbb{Q}_o} \left((K - B(t_o, t_v))^+ \right) N \tag{72}$$

Observación

Hemos visto que el tipo forward libor sigue la dinámica de un proceso log-normal desplazado con desplazamiento igual a la inversa de la fracción de año correspondiente al tipo libor. Esto hará que el tipo libor en términos log-normales presente un *smile* de volatilidad estrictamente decreciente.

Precio de un Swaption

Sea un IRS que comienza en t_a de vencimiento t_b cuya pata fija paga K en tiempos $(t_j)_{j=a+1,\ldots,b}$. El valor de este IRS en t_a vendrá definido por,

$$IRS_{a,b}(t_a,x) = \underbrace{1 - B(t_a,t_b,x)}_{pata\ flotante} - \underbrace{K\sum_{j=a+1}^{b}\delta_j B(t_a,t_j,x)}_{pata\ fija}$$

Donde hemos hecho explícita la dependencia del IRS en en la realización de la variable x en el momento t_a. Para calcular el precio de un swaption estaremos interesados en la parte positiva del IRS. Es decir, en

$$IRS_{a,b}(t_a,x)^+$$

El valor del IRS en t_a es creciente en función del valor de x. Esto implica que habrá un valor de x que denotamos x^* a partir del cual el valor del IRS pasa a ser positivo (la parte en la que estamos interesados para el cálculo del valor del swaption). Este valor x^* debe cumplir,

$$1 = B(t_a, t_b, x^*) + K \sum_{j=a+1}^{b} \delta_j B(t_a, t_j, x^*) \tag{73}$$

Sólo notad que de la definición de x^* es tal que es equivalente escribir

$$IRS_{a,b}(t_a, x)^+ = IRS_{a,b}(t_a, x)\mathbf{1}_{\{x>x^*\}}$$

El precio del swaption en el momento t vendrá definido por,

$$Swaptn(t, t_a, t_b, K) = B(t, t_a)E_t^{\mathbb{Q}_a}\left(\left(1 - B(t_a, t_b, x) + K \sum_{j=a+1}^{b} \delta_j B(t_a, t_j, x)\right)\mathbf{1}_{\{x>x^*\}}\right) \tag{74}$$

Sustituyendo (73) en (74) podemos representar el precio del swaption como una suma de floors sobre ZCB.

$$
\begin{aligned}
Swaptn(t, t_a, t_b, K) =& B(t, t_a) E_t^{\mathbb{Q}_a}\left((K_b - B(t_a, t_b, x))\mathbf{1}_{\{x > x^*\}}\right) \\
&+ K \sum_{j=a+1}^{b} \delta_j B(t, t_a) E_t^{\mathbb{Q}_a}\left((K_j - B(t_a, t_j, x))\mathbf{1}_{\{x > x^*\}}\right)
\end{aligned} \tag{75}
$$

Donde

$$
K_j = B(t_a, t_j, x^*)
$$

Debido a que $\frac{\partial}{\partial x} B(t_a, t_j, x) < 0 \;\; \forall j$ la ecuación de arriba es equivalente a,

$$
\begin{aligned}
Swaptn(t, t_a, t_b, K) =& B(t, t_a) E_t^{\mathbb{Q}_a}\left((K_b - B(t_a, t_b, x))^+\right) \\
&+ K \sum_{j=a+1}^{b} \delta_j B(t, t_a) E_t^{\mathbb{Q}_a}\left((K_j - B(t_a, t_j, x))^+\right)
\end{aligned} \tag{76}
$$

o lo que es lo mismo

$$\boxed{Swaptn(t, t_a, t_b, K) = \textbf{ZCBFO}(t, t_a, t_b, 1, K_b) + \sum_{j=a+1}^{b} \textbf{ZCBFO}(t, t_a, t_j, K\delta_j, K_j)} \tag{77}$$

Es importante notar que el precio del swaption de vencimiento t_a dependerá de la función de volatiltidad de x hasta el tiempo t_a, $\sigma(t)\ \forall t \in (0, t_a)$. Esto tendrá implicaciones a la hora de calibrar el model gaussiano a la superficie de swaptions.

Aproximación del tipo Swap

En la sección anterior hemos expresado el precio de un swaption como una combinación de precios de floor sobre ZCB. En cada sumando, una búsqueda de zeros es necesaria. En algunos casos de calibración podríamos querer una función de valoración mucho más ligera.

Por eso, en esta sección presentamos una aproximación para el precio de un Swaption. Esto lo haremos a partir de aproximar la dinámica del tipo swap bajo la medida asociada a la anualidad, $\mathbb{Q}_A$. Para ello, suponemos el tipo swap $S_{a,b}(t)$

Aproximamos la solución del tipo swap a vencimiento alrededor de un punto $\bar{x}$,

$$S_{a,b}(t_a, x_{t_a}) = S_{a,b}(t_a, \bar{x}) + \frac{\partial S_{a,b}(t_a, x)}{\partial x}|_{x=\bar{x}} \left(x_{t_a} - \bar{x}\right) + \mathcal{O}\left(\left(x_{t_a}\right) - \bar{x}\right)^2\Big) \tag{78}$$

tomando la parcial del tipo swap obtenemos que,

$$\frac{\partial S_{a,b}(t_a,x)}{\partial x} = -\frac{B(t_a,t_a,x)G(\kappa,t_a,t_a) - B(t_a,t_b,x)G(\kappa,t_a,t_b)}{A_{a,b}(t_a,x)} + \frac{S_{a,b}(t_a,x)}{A_{a,b}(t_a,x)}\sum_{j=a+1}^{b}\delta_j B(t_a,t_j,x)G(\kappa,t_a,t_j) \tag{79}$$

De acuerdo a la aproximación que hemos hecho el tipo swap a vencimiento se distribuye normalmente,

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(S_{a,b}(t_a,x_{t_a})\right) &= S_{a,b}(t_a,\bar{x}) + \frac{\partial S_{a,b}(t_a,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\left(E_{t_0}^{\mathbb{Q}_A}(x_{t_a}) - \bar{x}\right) \\ Var_t\left(S_{a,b}(t_a,x_{t_a})\right) &:= V_{a,b}^2 = \left(\frac{\partial S_{a,b}(t_a,\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)^2 Var_t(x_{t_a}) \end{aligned} \tag{80}$$

donde,

$$Var_t(x_{t_a}) = \int_t^{t_a} \sigma^2(s) e^{-2\kappa(t_a - s)} ds$$

$$E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(S_{a,b}(t_a, x_{t_a})\right) = \frac{1}{A_{a,b}(t)} \sum_{j=a+1}^{b} \delta_j B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j}(x(t_a))$$

Y bajo esta aproximación el precio de un swaption tiene solución cerrada,

$$\boxed{V(t) = A_{a,b}(t)\left((S_{a,b}(t) - K)\Phi(d) + V_{a,b}\phi(d)\right)} \tag{81}$$

donde,

$$d = \frac{S_{a,b}(t) - K}{V_{a,b}}$$

Ilustración

Para una parametrización determinada mostrar para una parrilla de swaptions la diferencia entre los precios de swaptions calculados de forma exacta frente a los calculados de acuerdo a la aproximación.

Calibración a precios de Swaption

Supongamos que tenemos a nuestra disposición una serie de $N-1$ cotizaciones para un vector de swaptions de vencimientos $(t_j)_{j=0,\ldots,N-1}$. Donde cada uno de esos swaptions tiene un tenor para el IRS subyacente determinado que no tiene por qué ser el mismo.

Hemos visto que un swaption de maturity arbitrario t_k depende de la función $\sigma(t)$ $\forall t \in (0, t_k)$. Esta dependencia particular del swaption en $\sigma(t)$ hace que podamos recursivamente cada uno de los swaptions con distintos vencimientos que habíamos definido de la siguiente forma.

Supongamos que definimos $\sigma(t)$ como una función constante por tramos tal que σ_k es el valor constante que asume σ entre (t_k, t_{k+1}).

1. Supongamos que hemos calculado $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ y hemos asignado exógenamente un valor para la velocidad de reversión κ.

2. Buscaríamos σ_k tal que el precio del swaption $k+1$-esimo coincide con el valor del swaption del mercado invirtiendo la fórmula (76)

3. Repetiríamos el paso (2) hasta cuadrar el precio de los N swaptions de mercado.

Esta forma de calibrado es lo que coloquialmente se denomina *bootstrapping* y consiste en resolver una ecuación (en nuestro caso no lineal) recursívamente añadiendo, en cada paso, la información encontrada en el paso anterior.

En esta calibración reproduciríamos de forma exacta el precio de N swaptions de mercado. El *bootstrapping* podría fallar en el paso 2 si la volatilidad de mercado del swaption $k+1$-ésimo fuera mucho menor que la volatilidad de mercado del swaption de anterior vencimiento. Esta situación podría arreglarse subiendo la velocidad de reversión en algunos casos.

Implementación en EDP

En esta sección veremos como aplicar el esquema de diferencias finitas para encontrar el precio de un derivado, $V(t)$, que paga a vencimiento t_a una función $\phi(t_a, x)$

Sabemos que $V(t, x_t) = V$ debe satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} - \kappa x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (x + \lambda_t)\, V \\ &s.t \quad V(t_a, x) = \phi(t_a, x) \end{aligned} \tag{82}$$

Vamos a centrarnos en la parte que depende explícitamente de x que denotaremos como,

$$\mathcal{L}V = \kappa x \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r(t,x)V \tag{83}$$

Las derivadas parciales las aproximaremos por diferencias finitas. Para ello supongamos que hemos discretizado la variable espacial $(x_j)_{j=0,\dots,N}$ de forma equiespaciada. El valor del derivado en esos puntos lo denotaremos V_j

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_j}{\partial x} &\approx \frac{V_{j+1} - V_{j-1}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} &\approx \frac{V_{j+1} - 2V_j + V_{j-1}}{\Delta^2 x}\end{aligned} \tag{84}$$

Sustituyendo la aproximación de las derivadas parciales en (83) y reagrupando términos, obtenemos una aproximacin para $\mathcal{L}V_j(t)$ que denotaremos por $\hat{\mathcal{L}}V_j(t)\ \forall j = 1, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}V_j(t) =& \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j - \frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)\right)}_{u_j} V_{j+1} \\ &+ \underbrace{\left(\frac{\sigma^2(t)}{\Delta^2 x} + r(t, x_j)\right)}_{m_j} V_j \\ &- \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j + \frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)\right)}_{l_j} V_{j-1} \end{aligned} \tag{85}$$

O escrito de forma más compacta,

$$\hat{\mathcal{L}}V_j(t) = u_j V_{j+1}(t) + m_j V_j(t) + d_j V_j(t) \quad \forall j = 1, \ldots, N-1 \tag{86}$$

Hasta ahora no hemos dicho nada acerca de las condiciones de contorno que queremos imponer a V. Asumiremos que la segunda derivada del precio del derivado respecto a x se anula en los contornos. Es decir,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}|_{x=x_0} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}|_{x=x_N} = 0 \tag{87}$$

Esto implica que podemos reescribir (86) como

$$\hat{\mathcal{L}}V_j(t) = u_j V_{j+1}(t) + m_j V_j(t) + d_j V_j(t) \quad \forall j = 0, \ldots, N \tag{88}$$

Donde definimos el valor de los coeficientes en el contorno como,

$$c_0 = \frac{\kappa x_0}{\Delta x} + r(t, x_0) \quad ; \quad u_0 = -\frac{\kappa x_0}{\Delta x} \tag{89}$$

$$d_n = -\frac{\kappa x_n}{\Delta x} \quad ; \quad c_n = \frac{\kappa x_n}{\Delta x} + r(t, x_n) \tag{90}$$

Podemos reexpresar (88) en términos matriciales como

$$\hat{\mathcal{L}}V(t) = \hat{A}(t)V = \begin{pmatrix} m_0(t) & u_0(t) & 0 & \dots & & & \\ d_1(t) & m_1(t)b & u_1(t) & 0 & \dots & & \\ \dots & & \dots & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & d_N(t) & m_N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \dots \\ V_N \end{pmatrix}$$

Una vez aproximada las derivadas parciales en x, nos quedaría aproximar la derivada parcial en t.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \sim \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{\Delta t} \sim \hat{A}(t)V(t)$$

Queda por definir dónde evaluaremos la parte de derecha de la ecuación de arriba que definirá el esquema de discretización de la EDP. Imaginemos que lo evaluamos en un punto a definir por el parámetro θ entre $[t_i, t_{i+1}]$

Es decir,

$$\frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{\Delta t} = \theta \hat{A}(t_i)V(t_i) + (1-\theta)\hat{A}(t_{i+1})V(t_{i+1}) \tag{91}$$

Agrupando términos en t_i y en t_{i+1}, la ecuación que debemos resolver sería

$$\left(\mathbf{I} - \theta\Delta_t \hat{A}(t_i)\right)\hat{V}(t_i) = \left(\mathbf{I} + (1-\theta)\Delta_t \hat{A}(t_{i+1})\right)\hat{V}(t_{i+1}) \tag{92}$$

Esto se trata de un sistema lineal tridiagonal de ecuaciones que deberíamos resolver hacia atrás para todo t_i partiendo de la condición terminal .

$$V(t_N, x) = \phi(t_N, X)$$

Supongamos que decidiéramos utilizar un esquema explícito ($\theta = 0$). Sustituyendo $\theta = 0$ en (92) y mirando al nodo espacial j-ésimo de la malla tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{V_j(t_{i+1}) - V_j(t_i)}{\Delta_t} =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j - \frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)\right) V_{j+1}(t_{i+1}) \\ &+ \left(\frac{\sigma^2(t)}{\Delta^2 x} + \underbrace{r(t_i, x_j)}_{trick}\right) V_j(t_{i+1}) \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j + \frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)\right) V_{j-1}(t_{i+1}) \qquad (93)\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado como tipo instantáneo el que vemos en t_i en vez de el que vemos en t_{i+1}.

Operando obtenemos que

$$\begin{aligned}(1+r(t_i,x_j)\Delta_t)\,V_j(t_i) =& \frac{\Delta_t}{2}\left(\frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)-\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j\right)V_{j+1}(t_{i+1}) \\ &-\Delta_t\left(\frac{\sigma^2(t)}{\Delta^2 x}-\frac{1}{\Delta_t}\right)V_j(t_{i+1}) \\ &+\frac{\Delta_t}{2}\left(\frac{1}{\Delta x}\kappa x_j+\frac{1}{\Delta^2 x}\sigma^2(t)\right)V_{j-1}(t_{i+1}) \end{aligned} \tag{94}$$

Si hacemos el supuesto que,

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sigma(t)\sqrt{3\Delta_t} \\ x_j &= j\Delta x\end{aligned}$$

y sustituimos en (94) obtenemos que el valor del derivaod en $V_j(t_i)$ viene definido por,

$$V_j(t_i) = \frac{1}{(1+r(t_i,x_j)\Delta_t)}\left(p_u(i,j)V_{j+1}(t_{i+1}) + p_m(i,j)V_j(t_{i+1}) + p_d(i,j)V_{j-1}(t_{i+1})\right) \tag{95}$$

Donde

$$\begin{aligned} p_u(i,j) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\kappa j \Delta_t \\ p_m(i,j) &= \frac{2}{3} \\ p_d(i,j) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\kappa j \Delta_t \end{aligned} \tag{96}$$

Tal que $p_u(i,j) + p_m(i,j) + p_d(i,j) = 1$ pueden considerarse probabilidades.

Ilustración

Implementar una EDP, dada una parametrización determinada del modelo gaussiano, para valorar un swaption ATM de vencimiento 5 años y tenor 5 años.

Implementación por Monte Carlo

Al igual que hiciéramos cuando resolvíamos el valor de un derivado por EDP, vamos a resolver el precio de un derivado por simulación. Una gran ventaja del modelo gaussiano es que la función de densidad de transición es perfectamente conocida, lo que nos va a permitir simular de un salto de forma exacta.

Supongamos un derivado de tipos de interés que paga en T un flujo que es una función $\phi(T)$ del estado de la curva de tipos de interés en T.

Sabemos que en t el valor del derivado viene definido por,

$$V(t) = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\phi(T, x_T)\right)$$

Donde ahora hemos hecho explícita la dependencia de la función $\phi(\cdot)$ en x_T ya que la realización en T de nuestra variable x_T nos define un continuo de la curva de tipos interés en T.

El valor esperado depende de dos variables aleatorias, x_T y $\int_t^T r(s)ds$, por lo que vamos a necesitar simularlas conjuntamente. Esto implica que debemos conocer sus distribuciones marginales así como su distribución conjunta.

Empecemos por X_T

Hemos visto en (24)

$$x(T^{'}) = x(t)e^{-\kappa(T-t)} + \int_t^T \sigma(s)e^{-\kappa(T-s)}dW^{\mathbb{Q}}(s) \tag{97}$$

Por lo que X_T se distribuye normalmente con momentos,

$$E\left(X_T|x_t\right) = x(t)e^{-\kappa(T-t)}$$

$$Var\left(X_T|x_t\right) = \int_t^T \sigma^2(s)e^{-2\kappa(T-s)}ds$$

Por lo que para simular X_T en un salto podríamos hacer

$$X_T = E\left(X_T|x_t\right) + \sqrt{Var\left(X_T|x_t\right)}N(0,1)$$

Nos queda simular $\int_t^T r(s)ds$.

Hemos visto en (48) que

$$\int_t^T r(s)ds = x(t)G(\kappa, t, T) + \int_t^T \lambda(s)ds + \int_{s=t}^T \sigma(s)G(\kappa, s, T)dW^{\mathbb{Q}}(s)$$

Donde $\int_t^T \lambda(s)ds$ es una función determinista y perfectamente conocida. Por tanto, $\int_t^T r(s)ds$ se distribuye normalmente cono momentos,

$$E\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right) = x(t)G(\kappa, t, T) + \int_t^T \lambda(s)ds$$

$$Var\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right) = \int_{s=t}^T \sigma^2(s)G^2(\kappa, s, T)ds$$

Por lo que para simular $\int_t^T r(s)ds$ en un salto podríamos hacer

$$\int_t^T r(s)ds = E\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right) + \sqrt{Var\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right)}N(0,1)$$

Si aplicáramos directamente el esquema que acabamos de comentar donde las dos normales recogidas son independientes, estaríamos resolviendo implícitamente el siguiente valor esperado,

$$E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\right)E^{\mathbb{Q}}\left(\phi(T,x_T)\right)$$

Por lo que necesitamos meterle algún tipo de dependencia entre las dos variables. Para ello necesitamos calcular la correlación entre las dos variables,

$$\begin{aligned} Cov\left(x_T,\ \int_t^T r(s)ds\right) &= E\left(\int_t^T \sigma(s)e^{-\kappa(T-s)}dW^{\mathbb{Q}}(s)\ \int_{s=t}^T \sigma(s)G(\kappa,s,T)dW^{\mathbb{Q}}(s)\right) \\ &= \int_{u=t}^T\int_{s=t}^T \sigma(u)e^{-\kappa(T-u)}\sigma(s)G(\kappa,s,T)E\left(dW^{\mathbb{Q}}(s)dW^{\mathbb{Q}}(s)\right) \\ &= \int_t^T \sigma(s)^2e^{-\kappa(T-s)}G(\kappa,s,T)ds \end{aligned} \tag{98}$$

Luego

$$\rho(t,T) := Corr\left(x_T,\ \int_t^T r(s)ds\right) = \frac{\int_t^T \sigma(s)^2 e^{-\kappa(T-s)} G(\kappa,s,T)ds}{\sqrt{\int_{s=t}^T \sigma^2(s)G^2(\kappa,s,T)ds}\sqrt{\int_{s=t}^T \sigma^2(s)G^2(\kappa,s,T)ds}}$$

Por lo que ahora sí estaríamos en disposición de simular los dos procesos conjuntamente,

$$X_T = E\left(X_T|x_t\right) + \sqrt{Var\left(X_T|x_t\right)}\left(\rho(t,T)N_1 + \sqrt{1-\rho(t,T)^2}N_2\right)$$

$$\int_t^T r(s)ds = E\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right) + \sqrt{Var\left(\int_t^T r(s)ds|x(t)\right)}N_1$$