

# Modelos de Tipos de Interés: LMM

---

Fernando de Lope Contreras (fernando.delope@bbva.com)

---

MEFC-BBVA, 22 de Marzo de 2019



# Índice

## ■ Modelo HJM

- Drifts de no Arbitraje.
- Condiciones de Markovianidad.
- Modelo Gaussiano a partir del HJM.
- LMM bajo  $\mathbb{Q}$  a partir del HJM.

## ■ LMM

- LMM Bajo la Medida Forward.
  - Comentarios sobre Medidas de probabilidad.
- Valoración de Caplets.
- Aproximación de la dinámica del tipo swap.
- Valoración de Swaptions.
- Especificación del LMM.
- Especificación de la función de volatilidad instantánea.
- Especificación de la función de correlación instantánea.
- Calibración de la función de volatilidad.

- **Simulación del LMM.**
  - **Esquemas de discretización.**

# 1. Dinámica HJM

---

## Dinámica HJM para el tipo forward

En esta parte del curso vamos a ver modelización de tipos de mercado. Estos modelos pasan por dar dinámica a la curva de interés a través de la definición de la dinámica que van a tener los tipos que sí son observables en mercado y componen esa curva.

Vamos a empezar por ver la dinámica que tendría que tener el tipo forward instantáneo en un mundo riesgo neutro para a partir de ahí derivar otros modelos.

Definimos el tipo forward instantáneo visto en  $t$  y de vencimiento  $T$  como,

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln B(t, T) \quad (1)$$

O lo que es lo mismo

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

Es decir, el precio del ZCB,  $B(t, T)$ , queda definido en  $t$  por un continuo de la curva de forwards instantáneos cuyo vencimiento van hasta  $T$ .

Heath, Jarrow y Morton en 1992 asumieron que, para un determinado vencimiento  $T$ , el tipo forward instantáneo  $f(t, T)$  evoluciona de acuerdo a

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t) \quad s.t \quad f(0, T) = f^{Mket}(0, T) \quad (2)$$

Donde tanto  $\mu(t, T)$ ,  $\sigma(t, T)$  son procesos adaptados a la información disponible en  $t$ .

La ventaja de dar dinámica a tipos forward como en (2) es que por construcción reproducen la estructura temporal de tipos de interés ya que la condición inicial del proceso es el tipo observado hoy en mercado.

La dinámica en (2) no es necesariamente riesgo-neutra, aunque nos hayamos garantizado reproducir la estructura temporal de tipos actual. Para hacer el proceso riesgo neutro, deberemos encontrar el valor de  $\mu(t, T)$  que haga el model libre de arbitrage.

## Dinámica de no arbitrage para el forward instantáneo

Para encontrar el drift de no arbitrage del tipo forward instantáneo vamos a seguir la siguiente ruta.

- Inferiremos la dinámica de un instrumento negociable,  $B(t, T)$  a partir de (2)
- Veremos el drift de no arbitrage que debe cumplir la dinámica de ese activo negociable que será función de  $\mu(t, T)$ .
- Relacionaremos  $\mu(t, T)$  con el drift del activo negociable.

## Dinámica del ZCB a partir de la dinámica del forward instantáneo

Hemos visto que, en términos del forward instantáneo, el ZCB se define como,

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}$$

Aplicando Ito sobre la ecuación anterior tenemos que,

$$dB(t, T) = -B(t, T)d\left(\int_t^T f(t, u)du\right) + B(t, T)\frac{1}{2}\left(d\left(\int_t^T f(t, u)du\right)\right)^2 \quad (3)$$

Donde

$$d\left(\int_t^T f(t, u)du\right) = -f(t, t)dt + \int_t^T df(t, u)du \quad (4)$$



Si sustituimos (2) en la ecuación anterior,

$$d \left( \int_t^T f(t, u) du \right) = -f(t, t)dt + \underbrace{\int_t^T \mu(t, u) du}_{M(t, T)} dt + \underbrace{\int_t^T \sigma(t, u) du}_{\Sigma(t, T)} dW(t) \quad (5)$$

Y

$$\left( d \left( \int_t^T f(t, u) du \right) \right)^2 = \Sigma(t, T)^2 dt \quad (6)$$

Sustituyendo en (3) obtenemos que,

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = \left( \underbrace{f(t, t)}_{r(t)} - M(t, T) + \frac{1}{2} \Sigma(t, T)^2 \right) dt - \Sigma(t, T) dW(t) \quad (7)$$

Por otro lado, sabemos que  $B(t, T)$  medido en términos de cuenta corriente debe ser martingala. Es decir, que podemos expresar

$$d \left( \frac{B(t, T)}{\beta(t)} \right) = - \left( \frac{B(t, T)}{\beta(t)} \right) \Sigma(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (8)$$

Aplicando Ito a  $\frac{B(t, T)}{\beta(t)}$  teniendo en cuenta (7), tenemos que

$$d \left( \frac{B(t, T)}{\beta(t)} \right) = \frac{B(t, T)}{\beta(t)} \left( \left( \frac{1}{2} \Sigma(t, T)^2 - M(t, T) \right) dt - \Sigma(t, T) dW(t) \right)$$

Por lo que,

$$\Sigma(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t) = \Sigma(t, T) dW(t) - \underbrace{\left( \frac{1}{2} \Sigma(t, T)^2 - M(t, T) \right) dt}_{\Sigma(t, T) \theta(t)} \quad (9)$$

Derivando respecto a  $T$  a ambos lados, obtenemos

$$\sigma(t, T)dW^{\mathbb{Q}}(t) = \sigma(t, T)dW(t) - (\sigma(t, T)\Sigma(t, T) - \mu(t, T))dt \quad (10)$$

Finalmente, sustituyendo en (2) obtenemos la dinámica de no arbitrage para el tipo instantáneo.

$$df(t, T) = \sigma(t, T)\Sigma(t, T)dt + \sigma(t, T)dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (11)$$

y la del ZCB

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r(t)dt - \Sigma(t, T)dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (12)$$

**OBSERVACIÓN**

La dinámica riesgo neutro del forward instantáneo queda plenamente definida una vez definimos la función de volatilidad.

## Condición de Markovianidad

A la hora de definir la dinámica del tipo forward instantáneo lo único que debemos hacer es dar una forma funcional a la volatilidad  $\sigma(t, T)$ . En esta sección nos planteamos si cualquier forma funcional serviría para nuestros propósitos.

Imaginemos que la curva de tipos de interés queda definida por un único browniano y que queremos simular dos forwards con distinto vencimiento. Integrando (11) vemos la ecuación que cumple el forward instantáneo

$$f(t', T) = f(t, T) + \int_t^{t'} \sigma(s, T) \Sigma(s, T) ds + \int_t^{t'} \sigma(s, T) dW^{\mathbb{Q}}(s) \quad (13)$$

Imaginemos que  $\sigma(t, T)$  es determinista y por tanto conocemos la distribución de  $\int_t^{t'} \sigma(s, T) dW^{\mathbb{Q}}(s)$  de forma exacta tal que somos capaces de simularla de un salto. En el caso de un único Browniano, deberíamos ser capaces de simular los dos forwards instantáneos con una única realización de la normal. Pero esto no será el caso, en general ya que

$$\int_t^{t'} \sigma(s, T_1) dW^{\mathbb{Q}}(s) \stackrel{D}{\sim} N(0, \int_t^{t'} \sigma^2(s, T_1) ds)$$

$$\int_t^{t'} \sigma(s, T_2) dW^{\mathbb{Q}}(s) \stackrel{D}{\sim} N(0, \int_t^{t'} \sigma^2(s, T_2) ds)$$

Son dos normales distintas con correlación distinta de 1 tal que

$$\text{Corr} \left( \int_t^{t'} \sigma(s, T_1) dW^{\mathbb{Q}}(s), \int_t^{t'} \sigma(s, T_2) dW^{\mathbb{Q}}(s) \right) = \frac{\int_t^{t'} \sigma(s, T_1) \sigma(s, T_2) ds}{\sqrt{\int_t^{t'} \sigma^2(s, T_1) ds} \sqrt{\int_t^{t'} \sigma^2(s, T_2) ds}}$$

Para que el forward instantáneo sea Markoviano será condición necesaria y suficiente que la función de volatilidad sea separable. Buscaremos funciones de volatilidad que cumplan,

$$\sigma(t, T) = \phi(t)\psi(T) \tag{14}$$

## Modelo Gaussiano a partir del HJM

Imaginemos que definimos como función de volatilidad

$$\sigma(t, T) = \sigma(t)e^{-\kappa(T-t)}$$

Queremos ver qué pinta tendría el tipo instantáneo bajo esta parametrización de la función de volatilidad. Para ello sabemos que  $f(t, t) = r(t)$  por lo que sustituyendo en (13)

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(s, t)\Sigma(s, t)ds + \int_0^t \sigma(s, t)dW^{\mathbb{Q}}(s) \quad (15)$$

Donde recordamos que,

$$\Sigma(s, t) = \int_s^t \sigma(s, u)du = \sigma(s) \int_s^t e^{-\kappa(t-u)}du = \sigma(s) G(\kappa, s, t)$$

Donde

$$G(\kappa, t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$$

Sustituyendo en (15),

$$r(t) = \underbrace{f(0, t) + \int_0^t \sigma^2(s) G'(\kappa, s, t) G(\kappa, s, t) ds}_{\lambda(t)} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s) e^{-\kappa(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s)}_{x(t)}$$

Es decir que

$$r(t) = x(t) + \lambda(t)$$

recuperamos el modelo gaussiano de tipo a corto visto en la primera parte.



## Dinámica del LMM a partir del HJM

A partir de las dinámicas que hemos definido hasta ahora vamos a intentar inferir la dinámica de no arbitraje para el tipo forward libor. A partir de aquí definiremos el modelo de curva que da dinámica al tipo libor conocido como Libor Market Model (LMM).

Partiremos de la dinámica del ZCB bajo la medida asociada a la cuenta bancaria,  $\mathbb{Q}$ .

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r(t)dt - \Sigma(t, T) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Donde  $W^{\mathbb{Q}}(t) = (W_1(t), \dots, W_N(t))$  es un vector de dimensión  $N$  de Brownianos estándar.

Definimos una estructura de tiempos  $(t_j)_{j=0,\dots,N}$  que definen la estructura de tenors de nuestros tipo libors. De esta forma definimos nuestros tipos forward libor  $F_j(t) \forall j = 1, \dots, N$  como el tipo libor que fija en  $t_j$  y vence en  $t_{j+1}$ . Es decir,

$$F_j(t) = \left( \underbrace{\frac{B(t, t_{j-1})}{B(t, t_j)}}_{\xi_j} - 1 \right) \delta_j^{-1} \quad (16)$$

Donde  $\delta_j$  es la fracción de año que hay entre  $t_j$  y  $t_{j+1}$ , por simplificar la notación denotaremos  $\xi_j = \frac{B(t, t_{j-1})}{B(t, t_j)} = 1 + \delta_j F_j(t)$ .

La ruta que seguiremos es la siguiente, a partir de la definición del tipo libor (16) inferiremos una dinámica para éste a partir de la dinámica que conocemos para el ZCB (es decir, bajo  $\mathbb{Q}$ ). Como todo esto lo haremos bajo la medida  $\mathbb{Q}$  vamos a suponer una dinámica general para el tipo libor  $j$ -ésimo bajo  $\mathbb{Q}$  como la siguiente,

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \mu_j^{\mathbb{Q}}(t)dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (17)$$

donde  $dW^{\mathbb{Q}}(t) = (dW_1^{\mathbb{Q}}(t), \dots, dW_N^{\mathbb{Q}}(t))$  es un vector de Brownianos independientes de dimensión  $N$  bajo  $\mathbb{Q}$ .

$\phi(t, F_j(t))$  es un vector de dimensión  $N$  que podemos descomponer en,

$$\phi(t, F_j(t)) = \sigma_j(t, F_j(t))C_j(t)$$

tal que,

$$C_j(t) \cdot C_k(t) = \rho_{j,k}(t)$$

es la correlación instantánea entre los libors  $j$ -ésimo y  $k$ -ésimo.

De (16) sabemos que,

$$d\xi_j(t) = d(1 + \delta_j F_j(t)) = \delta_j dF_j(t) = \delta_j F_j(t) \left( \mu_j^{\mathbb{Q}}(t) dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t) \right) \quad (18)$$

Debemos, entonces, sacar la dinámica de  $\xi_j(t)$ .

Aplicando Ito a  $\xi_j(t)$

$$d\xi_j(t) = dB(t, t_{j-1}) \frac{1}{B(t, t_j)} + B(t, t_{j-1}) d \left( \frac{1}{B(t, t_j)} \right) + d \langle B(t, t_{j-1}), \frac{1}{B(t, t_j)} \rangle \quad (19)$$

Después de un poco de álgebra llegamos a que,

$$\frac{d\xi_j(t)}{\xi_j(t)} = (\Sigma(t, t_j) - \Sigma(t, t_{j-1})) \cdot \Sigma(t, t_j) dt + (\Sigma(t, t_j) - \Sigma(t, t_{j-1})) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (20)$$

Recordamos de (18) que ,

$$d\xi_j(t) = \delta_j F_j(t) \left( \mu_j^{\mathbb{Q}}(t) dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t) \right)$$

Por lo que igualando términos en  $dW^{\mathbb{Q}}(t)$  en las dos ecuaciones, Obtenemos que

$$\Sigma(t, t_j) - \Sigma(t, t_{j-1}) = \frac{\delta_j F_j(t) \phi(t, F_j(t))}{1 + \delta_j F_j(t)} \quad (21)$$

Igualando ahora los términos en  $dt$ , vemos que

$$\mu_j^{\mathbb{Q}}(t) \delta_j F_j(t) = \xi_j(t) (\Sigma(t, t_j) - \Sigma(t, t_{j-1})) \cdot \Sigma(t, t_j) = \delta_j F_j(t) \phi(t, F_j(t)) \cdot \Sigma(t, t_j) \quad (22)$$

Eliminado términos,

$$\mu_j^{\mathbb{Q}}(t) = \phi(t, F_j(t)) \cdot \Sigma(t, t_j) \quad (23)$$

Es decir, el *drift* queda en función de la volatilidad del ZCB. Esta volatilidad la podemos expresar como,

$$\Sigma(t, t_j) = \sum_{k=\gamma(t)+1}^j (\Sigma(t, t_k) - \Sigma(t, t_{k-1})) + (\Sigma(t, t_{\gamma(t)}) - \Sigma(t, t)) \quad (24)$$

Donde  $\gamma(t)$  es una función auxiliar que determina el índice, dentro de la estructura de tenors definida, del primer libor vivo a tiempo  $t$ .

$$t_{\gamma(t)-1} < t \leq t_{\gamma(t)}$$

Si tenemos en cuenta que  $\Sigma(t, t) = 0$  y sustituimos, obtenemos finalmente el drift del tipo libor  $j$ -ésimo bajo la medida  $\mathbb{Q}$

$$\mu_j^{\mathbb{Q}}(t) = \phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=\gamma(t)+1}^j \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} + \phi(t, F_j(t)) \cdot \Sigma(t, t_{\gamma(t)}) \quad (25)$$

Por lo que la dinámica completa del tipo libor vendrá definida por,

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \phi(t, F_j(t)) \cdot \left( \sum_{k=\gamma(t)+1}^j \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} + \Sigma(t, t_{\gamma(t)}) \right) dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (26)$$

Donde recordamos que  $\Sigma(t, T)$  es la volatilidad instantánea del ZCB de vencimiento  $T$ , que a su vez puede expresarse en términos de la volatilidad del forward instantáneo,

$$\Sigma(t, T) = \int_t^T \sigma_f(t, u) du$$



Hemos visto que el drift del tipo libor depende de la volatilidad del forward instantáneo cuando lo medimos bajo la medida asociada al numerario cuenta corriente. Esta dependencia puede eliminarse si consideramos una cuenta corriente que se remunera discretamente a las fechas definidas por nuestra estructura de tenors. Definimos el nuevo numerario, cuenta corriente discreta como,

$$B(t) = B(t, t_{\gamma(t)}) \prod_{j=1}^{\gamma(t)} (1 + \delta_j F_j(t_{j-1})) \quad (27)$$

Bajo la medida  $\bar{\mathbb{Q}}$  asociada a la cuenta corriente discreta se puede ver que la dinámica del tipo libor viene definida por,

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=\gamma(t)+1}^j \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\bar{\mathbb{Q}}}(t) \quad (28)$$

## 2. Modelo LMM.

---

## LMM Bajo medida forward

Una medida que se utiliza frecuentemente para simular el LMM es la medida asociada al último ZCB de la estructura de tenors (en nuestro caso  $T_{N+1}$ ). Tenemos definida la dinámica del tipo libor bajo la medida  $\mathbb{Q}$  por lo que tenemos que ver qué herramientas tenemos a nuestra disposición que nos relacione un Browniano en la medida  $\mathbb{Q}$  con el mismo Browniano en la medida  $\mathbb{Q}_{N+1}$ .

Para ello definimos,

$$\psi(t) = \frac{B(t, t_{N+1})}{\beta(t)}$$

El proceso  $\psi(t)$  debe ser martingala bajo la medida  $\mathbb{Q}$  al no ser más que un activo negociable medido en términos de cuenta corriente.

Aplicando Ito a  $\psi(t)$ , obtenemos que

$$\frac{d\psi(t)}{\psi(t)} = -\Sigma(t, t_{N+1}) \cdot dW^{\mathbb{Q}}(t)$$

Por lo que según el teorema de Girsanov

$$dW^{\mathbb{Q}_{N+1}}(t) = dW^{\mathbb{Q}}(t) + \Sigma(t, t_{N+1})dt$$

Por otro lado, de la sección anterior conocemos que,

$$\Sigma(t, t_{N+1}) = \sum_{k=\gamma(t)+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} + \Sigma(t, t_{\gamma(t)})$$

Sustituyendo en (26), Obtenemos que

$$\boxed{\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = -\phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}_{N+1}}(t)} \quad (29)$$

NOTA. Hemos visto que podemos expresar

$$\phi(t, F_j(t)) = \sigma_j(t, F_j(t))C_j(t)$$

Tal que

$$\text{Corr}(dF_j(t), dF_k(t)) = \rho_{j,k}(t) = C_j(t) \cdot C_k(t)$$

De aquí en adelante asumiremos que la volatilidad instantánea del libor  $j$ -ésimo es determinista y no depende del tipo libor. Es decir,

$$\sigma_j(t, F_j(t)) = \sigma_j(t) \quad \rightarrow \quad \phi(t, F_j(t)) = \phi_j(t)$$

Para esta parametrización de la volatilidad llamaremos al modelo Lognormal LMM.

## Comentarios sobre qué medida utilizar

En general, la distribución del tipo libor, independientemente de la medida de probabilidad utilizada, no es conocida de forma exacta, por lo que para simular el LMM nos veremos obligados a hacerlo bajo algún esquema de discretización.

En lo siguiente resaltamos algunas implicaciones de simular bajo una medida determinada.

- Actualizar el numerario de un salto al siguiente es más costoso desde un punto de vista computacional en el caso de la medida terminal que en el caso de la medida Spot.
- El error de discretización está peor distribuido en el caso de la medida terminal.
- El uso de la medida Spot limita a la hora de dar saltos de simulación más grandes que le tenor del libor.

## Valoración de Caplets

La valoración de caplets será una tarea sencilla porque en el LMM directamente le estamos dando dinámica a la curva forward libor. Hemos visto que una vez definida la función de volatilidad  $\phi_j(t) \forall t$  la dinámica del tipo libor  $j$ -ésimo viene definida bajo  $\mathbb{Q}_j$  por

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \phi_j(t) dW^{\mathbb{Q}_j}(t)$$

por lo que el precio de un caplet vanilla sobre un libor que fija en  $t_{j-1}$  y paga en  $t_j$  bajo el LMM vendrá determinado por la fórmula de Black, donde la varianza que entra como input es la varianza integrada del tipo  $j$ -ésimo hasta el instante  $t_{j-1}$ .

$$Caplet_{LMM}(t, t_{j-1}, t_j, K) = Caplet_{Black}(t, t_{j-1}, t_j, K, \nu^2 = \int_t^{t_{j-1}} \phi_j^2(s) ds)$$

## Aproximación de la dinámica del tipo swap

Hasta ahora hemos visto cómo debe ser la dinámica de no arbitraje de cada uno de los forward libor que componen la curva de tipos de interés. Según de qué divisa estemos hablando el mercado de volatilidad de swaptions es más líquido que el de Caps por lo que será importante tener la capacidad de valorar Swaptions con el LMM de forma analítica.

En lo siguiente trataremos de aproximar la dinámica del tipo Swap a partir de la dinámica que hemos visto para los tipo libor. Recordamos la definición del tipo swap de fixing  $t_a$  y reseteo  $t_b$  que definimos como,

$$S_{a,b}(t) = \frac{B(t, t_a) - B(t, t_b)}{\underbrace{\sum_{j=a+1}^b \delta_j B(t, t_j)}_{A_{a,b}(t)}} \quad (30)$$



Es decir, el tipo swap no es más que un cociente de activos negociables y por tanto será martingala bajo la medida asociada a  $A_{a,b}(t)$  que denotaremos por  $\mathbb{Q}_A$ .

Por el teorema de representación de martingalas sabemos que podemos representar,

$$\frac{dS_{a,b}(t)}{S_{a,b}(t)} = \varphi(t) dW^{\mathbb{Q}_A}(t) \quad (31)$$

donde  $\varphi(t)$  es una función determinista. De esta forma el mapeo con la volatilidad *Black* de mercado es directa a partir de la relación,

$$\sigma_{a,b}^{Black} T_a = \int_{t_0}^{T_a} \varphi^2(s) ds$$

En lo sucesivo intentaremos tratar (30) e intentar mapearlo con la ecuación que hemos asumido para el tipo swap (31). Para ello vamos a expresar el tipo swap de una forma más conveniente,

$$S_{a,b}(t) = \frac{\sum_{j=a+1}^b \delta_j B(t, t_j) F_j(t)}{A_{a,b}(t)} = \sum_{j=a+1}^b \omega_j(t) F_j(t)$$

Aplicando Ito tenemos que,

$$dS_{a,b}(t) = \sum_{j=a+1}^b (d\omega_j(t) F_j(t) + \omega_j(t) dF_j(t)) \quad (32)$$

En principio la variabilidad de los  $\omega_j(t)$  será mucho más pequeña que la de los forwards  $F_j(t)$ . Por otro lado, bajo la medida asociada a la anualidad los  $\omega_j(t)$  son martingala por lo que la ecuación anterior la podemos aproximar como (asumiendo  $t_0$  como el momento actual),

$$dS_{a,b}(t) = \sum_{j=a+1}^b \omega_j(t_0) dF_j(t) = O(dt) + \sum_{j=a+1}^b \omega_j(t_0) F_j(t) \phi_j(t) \cdot dW^{\mathbb{A}}(t) \quad (33)$$

Estamos interesados en encontrar la forma de  $\varphi(t, S_{a,b})$  y sabemos que según  $dS_{a,b}$

$$\frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} \frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} = \varphi(t)^2 dt$$

Haciendo lo mismo en (33) obtenemos,

$$\frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} \frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} = \frac{1}{S_{a,b}^2(t)} \sum_{i,j=a+1}^b \omega_i(t_0) \omega_j(t_0) F_i(t) F_j(t) \phi_i(t) \cdot \phi_j(t) dt$$

Como nuestra idea es la de definir un proceso para el tipo swap tal que sea consistente con la dinámica de Black eliminamos toda dependencia de cualquier variable de estado de la ecuación anterior congelando todos los términos estocásticos, tal que

$$\frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} \frac{dS_{a,b}(t)}{dS_{a,b}} \approx \frac{1}{S_{a,b}^2(t_0)} \sum_{i,j=a+1}^b \omega_i(t_0) \omega_j(t_0) F_i(t_0) F_j(t_0) \phi_i(t) \cdot \phi_j(t) dt$$

A partir de la definición de la volatilidad del tipo libor hemos definido una dinámica del tipo swap aproximada,

$$\boxed{\frac{dS_{a,b}(t)}{S_{a,b}(t)} \approx \hat{\varphi}_{a,b}(t) dW^{\mathbb{Q}_A}(t)} \quad (34)$$

donde,

$$\hat{\varphi}_{a,b}^2(t) = \frac{1}{S_{a,b}^2(t_0)} \sum_{i,j=a+1}^b \omega_i(t_0) \omega_j(t_0) F_i(t_0) F_j(t_0) \phi_i(t) \cdot \phi_j(t)$$

## Valoración de swaptions

Existe, según para que divisas, un mercado líquido de cotizaciones para swaptions. Estas cotizaciones vienen, en general, en términos de volatilidades implícitas (o de Black) lognormales. Para traducir estas volatilidades en precios tenemos un traductor que llamamos fórmula de Black que nos permite expresar estas volatilidades en primas. La dinámica del tipo swap,  $S_{a,b}$ , que es consistente con este precio sería,

$$\frac{dS_{a,b}(t)}{S_{a,b}} = \sigma_{a,b} dW^{\mathbb{A}}(t)$$

donde  $\sigma_{a,b}$  es la volatilidad cotizada en mercado.

$$Swaption^{Black}(t, t_a, t_b, \nu_{a,b}^2, K) = A_{a,b}(t) (S_{a,b}(t)N(d_+) - KN(d_-))$$

donde

$$d_+ = \frac{\ln \frac{S_{a,b}(t)}{K} - \frac{1}{2}\nu_{a,b}^2}{\nu_{a,b}}, \quad d_- = d_+ - \nu_{a,b}$$

Donde  $\nu_{a,b}^2$  es,

$$\nu_{a,b}^2 = Var \left( \int_t^{t_a} \frac{dS_{a,b}(u)}{S_{a,b}(u)} \right)$$

que en el caso de Black es

$$\nu_{a,b}^2 = t_a \sigma_{a,b}^2$$

y en el caso del LMM lognormal, sería

$$\nu_{a,b}^2 = \int_t^{t_a} \hat{\varphi}_{a,b}(s)^2 ds$$

Es decir, que bajo el LMM lognormal el precio de un swaption puede calcularse a través de la fórmula de Black cambiando la función de volatilidad.

$$Swapt^{LMM}(t, t_a, t_b, K) = Swaptn^{Black}(t, t_a, t_b, \nu_{a,b}^2 = \int_t^{t_a} \hat{\varphi}_{a,b}(s)^2 ds, K) \quad (35)$$

y si quisiéramos reproducir con el LMM el precio que observamos en mercado, deberíamos imponer que,

$$\sigma_{a,b}^2 t_a = \frac{1}{S_{a,b}^2(t)} \sum_{i,j=a+1}^b \omega_i(t) \omega_j(t) F_i(t) F_j(t) \int_t^{t_a} \phi_i(s) \cdot \phi_j(s) ds \quad (36)$$

## Pasos a seguir en la definición del LMM

Una vez fijada la estructura de tenors de forwards libors  $(T_j)_{j=0,\dots,M}$ , el número de factores que se quieren utilizar y la forma básica de volatilidad, que de aquí en adelante asumiremos que es del tipo

$$\phi(t, F_k(t)) = \phi_k(t)$$

Es decir, que no depende del tipo libor y únicamente de  $t$ .

Los pasos que debemos tomar para tener una especificación completa del modelo son,

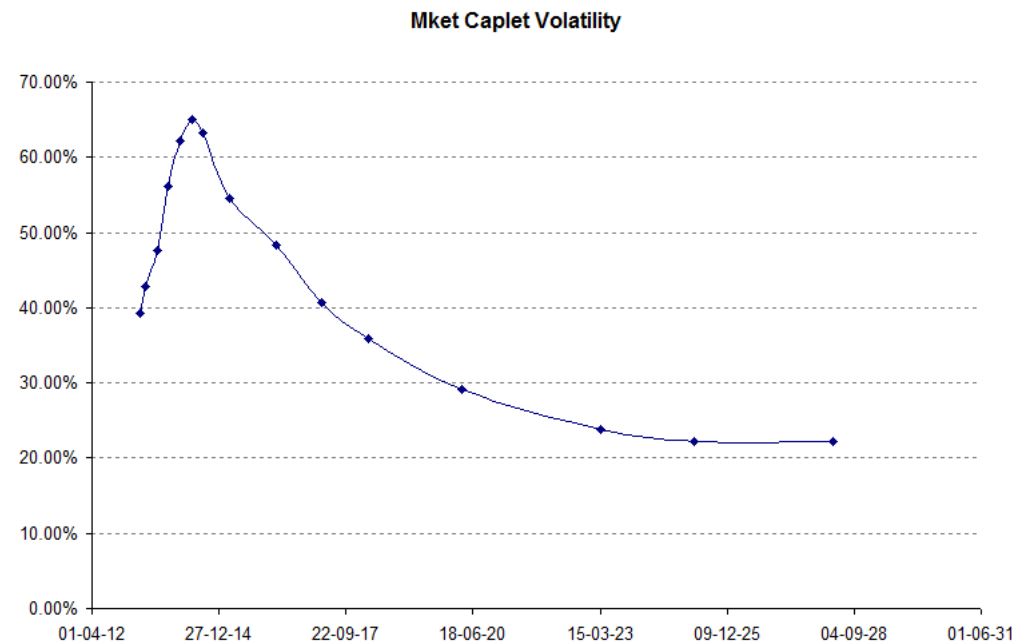
- Especificar la forma de  $\phi_k(t)$
- Establecer la forma de la correlación instantánea entre los tipos libor  $\rho_{j,k}(t)$
- Elegir los instrumentos de mercado a los que nos vamos a calibrar.
- Calibración de la función de volatilidad y correlación.



## Especificación de la volatilidad instantánea de los tipos Libor

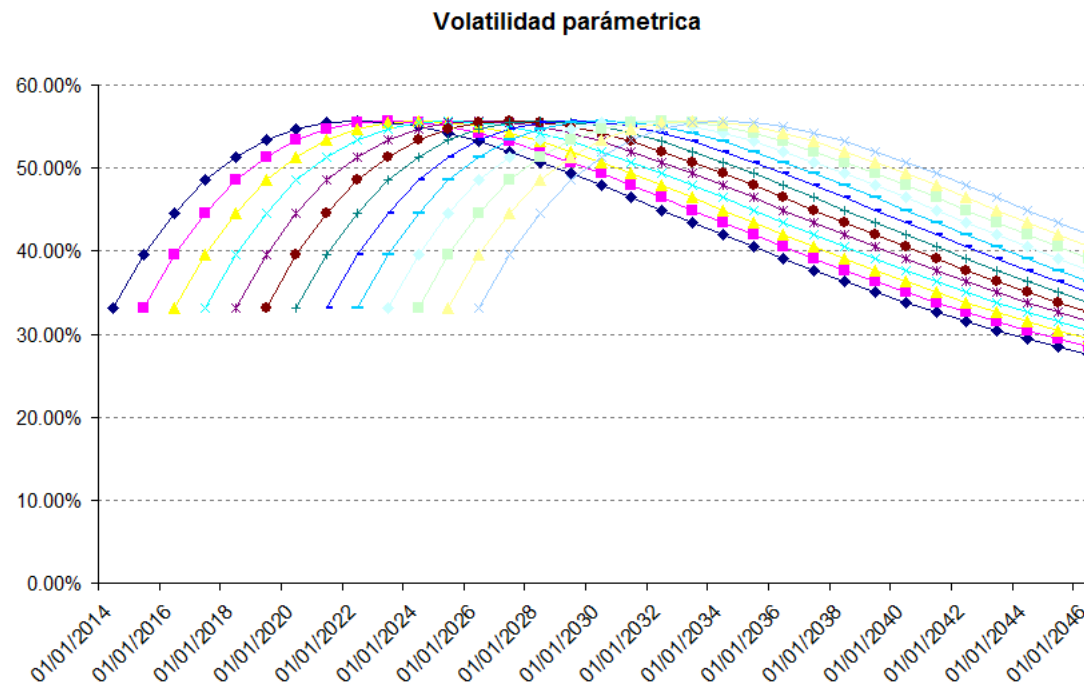
De momento, en esta sección presentaremos una función de volatilidad determinada para luego presentar un algoritmo de calibración para dicha función.

La estructura temporal de volatilidad que se observa en mercado para el tipo forward es una función con forma de joroba que tiende a repetirse a lo largo del tiempo. A esta característica la denominamos homogeneidad en el tiempo.



En esa línea, varias formas paramétricas para la volatilidad han sido propuestas en la literatura. Una muy conocida es la propuesta por Rebonato,

$$||\phi_j(t)|| = (a + b(t_j - t)) e^{-c(t_j - t)} + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}_+ \quad (37)$$



Esta forma funcional es estacionaria o homogénea en el tiempo y se trata de una función suave. Sin embargo, no permitirá, en general, una suficientemente buena calibración a precios de mercado. En este sentido, algunos autores han propuesto formas funcionales para la volatilidad que sean separables,

$$\phi_j(t) = \psi(t)\xi(t_j - t)$$

Nosotros en cambio, vamos a utilizar una forma no paramétrica para la volatilidad. Asumiremos que la función de volatilidad para el forward  $j$ -ésimo es una función constante por tramos que supondremos continua por la izquierda.

Vol. Inst.	Libor: $F_2(t)$	$F_3(t)$	$\dots$	$F_{M+1}(t)$
$t \in (t_0, t_1]$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{3,1}$	$\dots$	$\sigma_{M+1,1}$
$t \in (t_1, t_2]$	No vivo	$\sigma_{3,2}$	$\dots$	$\sigma_{M+1,2}$
$t \in (t_2, t_3]$	No vivo	No vivo	$\dots$	$\sigma_{M+1,3}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$t \in (t_{M-1}, t_M]$	No vivo	No vivo	$\dots$	$\sigma_{M+1,M}$

Cuadro 1: Malla volatilidad instantánea para el tipo libor.

Es decir, calcularemos la volatilidad instantánea para el libor  $k$ -ésimo en el instante  $t$ , como

$$\|\phi_k(t)\| = \sum_{j=1}^M \mathbf{1}_{\{t_{j-1} < t \leq t_j\}} \sigma_{k,j}$$

Notad que hemos perdido la característica deseable de homogeneidad en el tiempo, pero

a cambio tenemos  $\frac{M(M+1)}{2}$  grados de libertad a nuestra disposición para utilizar en la calibración.

## Especificación de la correlación.

En esta sección propondremos una forma de parametrizar la matriz de correlaciones instantáneas entre los distintos forward libor que componen la curva de tipos de interés. Antes de esto, comentamos que características nos gustaría que cumpliera esta matriz.

- Dicha matriz debe ser semi-definida positiva.
- En general, esperaremos correlaciones positivas,

$$\rho_{j,k} \geq 0 \quad \forall j, k$$

- A medida que nos separemos de la diagonal principal la correlación debería disminuir. Es decir, forwards cuya fecha de fijación está más cercana entre sí deberían presentar una mayor correlación que forwards más separados.

$$\frac{\partial \rho_{j,k}}{\partial j} < 0 \quad \forall j > k$$

- Cuanto mayor sea el tiempo de fijación del libor, mayor será la correlación entre forwards adyacentes. Esto implicará que las sub-diagonales de la matriz de correlaciones serán funciones monótonas crecientes

$$\frac{\partial \rho_{j+n,j}}{\partial j} > 0 \quad n \rightarrow \text{fixed}$$

Si tenemos  $N$  forwards, la matriz de correlaciones tendrá  $\frac{N(N-1)}{2}$  entradas distintas, teniendo en cuenta que la matriz de correlaciones es simétrica y que tiene unos en la diagonal.

Nosotros buscaremos representar esta matriz de correlaciones en función de un número reducido de factores. Para ello presentamos la parametrización de Rebonato,

## Representación de Rebonato de la matriz de correlaciones

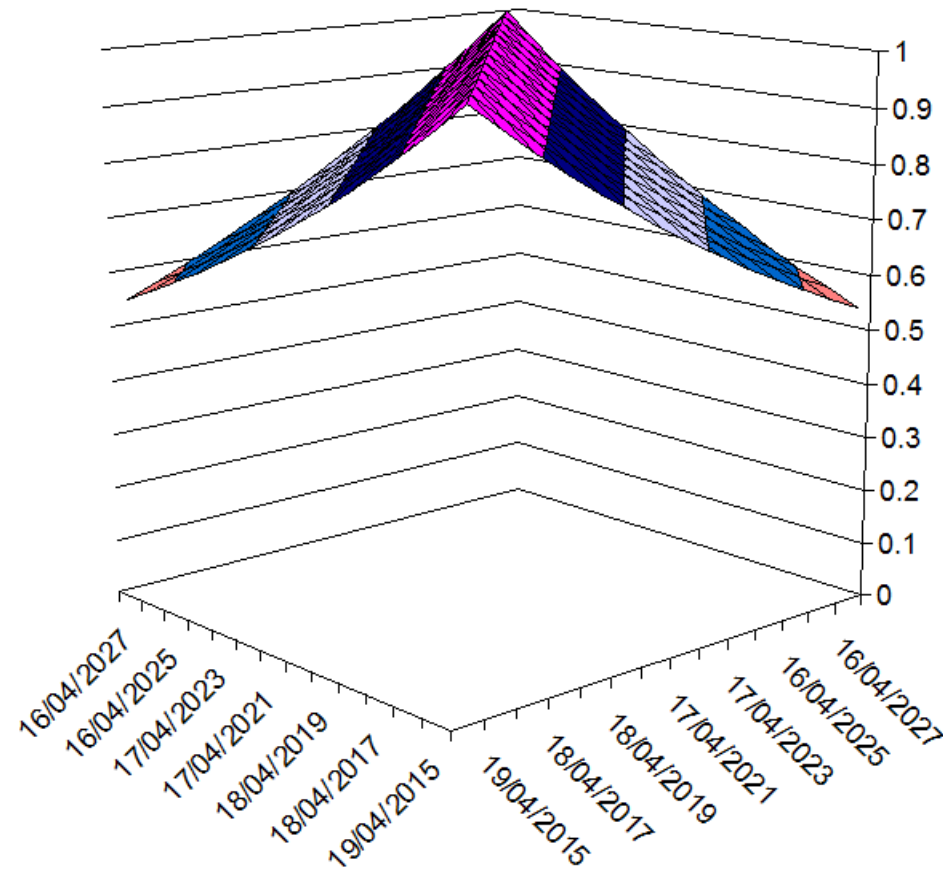
Rebonato propone representar la correlación de dos tipos forward libor  $j, k$ ,  $\rho_{j,k}$  como

$$\rho_{j,k} = \rho_{\infty} + (1 - \rho_{\infty}) e^{-\beta|t_i - t_j|} \quad \forall \beta > 0 \quad (38)$$

Donde existen dos parámetros que debemos determinar,

- $\rho_{\infty}$  representa la correlación instantánea entre dos forwards muy alejados en el tiempo.
- $\beta$  representa la tasa con la que la correlación entre dos forwards decae con el tiempo.





## Calibración de la función de volatilidad.

En esta sección vamos a comentar cómo calibrar el model lognormal LMM a una superficie de volatilidades ATM cotizadas de swaptions. Es conocido, que la superficie de swaptions no contiene una información clara acerca de las correlaciones instantáneas entre tipos libor sino que contiene información acerca de correlaciones terminales entre tipos libor. Estas correlaciones terminales dependen de la correlación instantánea de los tipos y de sus volatilidades. Es por esto, que asumiremos que las correlaciones instantáneas vienen definidas (ya veremos cómo) por fuera.

En cuanto a la función de volatilidad, asumiremos que cada tipo libor tiene una función asociada de volatilidad que es constante por tramos en función del tiempo como hemos visto en el cuadro (1).

Cuando calculábamos el precio de un swaption de vencimiento  $t_a$  y reseteo  $t_b$  veíamos que para reproducir la volatilidad de mercado debíamos buscar aquellas volatilidades de forwards tal que respetásemos,

$$\sigma_{a,b}^2 t_a = \frac{1}{S_{a,b}^2(t)} \sum_{i,j=a+1}^b \omega_i(t) \omega_j(t) F_i(t) F_j(t) \int_t^{t_a} \rho_{i,j}(s) \sigma_i(s) \sigma_j(s) ds \quad (39)$$

Vamos a suponer, que como entrada tenemos una superficie de volatilidad de mercado donde la pata flotante del IRS subyacente es anual. En la siguiente tabla representamos esta superficie y en cada swaption ponemos las volatilidades libor a las que va ser sensible ese swaption.

Mty - Tenor	1y	2y	...	My
1y	$\sigma_2(t_1)$	$\sigma_2(t_1), \sigma_3(t_1)$	...	$\sigma_2(t_1), \dots, \sigma_{M+1}(t_1)$
2y	$\sigma_3(t_1)$	$\sigma_3(t_1), \sigma_4(t_1)$	...	$\sigma_3(t_1), \dots, \sigma_{M+2}(t_1)$
	$\sigma_3(t_2)$	$\sigma_3(t_2), \sigma_4(t_2)$	...	$\sigma_3(t_2), \dots, \sigma_{M+2}(t_2)$
...	...	...	...	...
Ny	$\sigma_{N+1}(t_1)$	$\sigma_{N+1}(t_1), \sigma_{N+2}(t_1)$	...	$\sigma_{N+1}(t_1), \sigma_{N+M}(t_1)$
	...	...	...	...
	$\sigma_{N+1}(t_N)$	$\sigma_{N+1}(t_N), \sigma_{N+2}(t_N)$	...	$\sigma_{N+1}(t_N), \sigma_{N+M}(t_N)$

Cuadro 2: Dependencia de la volatilidad del Swaption en términos de la volatilidad libor.

Si nos fijamos en la tabla anterior, ésta presenta una serie de características,

- Para una fila dada, cuando nos movemos a la derecha una única columna el nuevo swaption únicamente depende de una única volatilidad adicional. Es decir si estamos en la volatilidad swaption  $\sigma_{a,b}$ , la volatilidad  $\sigma_{a,b}$  depende de las mismas volatilidades libor definidas y además de  $\sigma_b(t_a)$ .
- El caso anterior no se cumple si nos movemos en una fila distinta a la primera hasta la última columna de la matriz de swaptions. Es decir, imaginemos que nos movemos de la volatilidad swaption  $\sigma_{a,a+M-1} \quad \forall \quad a \neq 1$  hasta  $\sigma_{a,a+M-1}$ . Esta nueva volatilidad swaption dependerá adicionalmente de  $a$  volatilidades libor más  $\sigma_{M+a}(1), \dots, \sigma_{M+a}(a)$ .

Salvo por el segundo punto, parece que bajo la definición que hemos hecho de la función de volatilidad para el tipo libor, la calibración de la superficie de volatilidades de swaption, si bien elegido el orden en el que nos movemos, podría reducirse a resolver secuencialmente ecuaciones no lineales (cuadráticas) en una dimensión.

Para no alterar esta lógica supondremos en lo siguiente que cuando lleguemos a la

última columna, para una fila dada, y tengamos  $n$  volatilidades libor que resolver para una única volatilidad de swaption, que estas volatilidades libor son todas iguales.

Así que imaginemos que estamos en medio del proceso de calibración y que acabamos de calibrar la volatilidad swaption  $\sigma_{m,l-1}$  y pasamos a calibrar la volatilidad  $\sigma_{m,l}$ . Sabemos que la ecuación que debemos resolver es,

$$\begin{aligned}
 S_{m,l}^2(t) \sigma_{m,l}^2 t_m &= \sum_{i,j=m+1}^l \omega_i(t) \omega_j(t) F_i(t) F_j(t) \int_t^{t_m} \rho_{i,j}(s) \sigma_i(s) \sigma_j(s) ds \\
 &= \sum_{i,j=m+1}^l \omega_i(t) \omega_j(t) F_i(t) F_j(t) \sum_{k=1}^m \rho_{i,j}(s) \sigma_i(t_k) \sigma_j(t_k) \Delta
 \end{aligned} \tag{40}$$

Donde hemos hecho uso del hecho que la volatilidad del tipo libor es constante por tramos y hemos asumido que la estructura de tenors está equiespaciada.

En este punto distinguiremos entre los dos casos que hemos comentado anteriormente.

Esto es, si nos encontramos en la última columna (para una fila distinta a la primera) o en una distinta.

**Columna distinta a la última** En este caso, la única incognita que tenemos será  $\sigma_l(t_m)$  por lo que separando los términos que dependen de esta volatilidad en (40) obtenemos,

$$\begin{aligned}
S_{m,l}^2(t)\sigma_{m,l}^2 t_m = & \sum_{i,j=m+1}^{l-1} \omega_i(t)\omega_j(t)F_i(t)F_j(t) \sum_{k=1}^m \sigma_i(t_k)\sigma_j(t_k)\rho_{i,j}(t_k)\Delta \\
& + 2 \sum_{j=m+1}^{l-1} \omega_l(t)\omega_j(t)F_l(t)F_j(t) \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_l(t_k)\sigma_j(t_k)\rho_{l,j}(t_k)\Delta \\
& + \omega_l^2(t)F_l^2(t) \sum_{k=1}^{m-1} \sigma_l^2(t_k)\Delta \\
& + 2 \sum_{j=m+1}^{l-1} \omega_l(t)\omega_j(t)F_l(t)F_j(t) \boxed{\sigma_l(t_m)} \sigma_j(t_m)\rho_{l,j}(t_m)\Delta \\
& + \omega_l^2(t)F_l^2(t) \boxed{\sigma_l^2(t_m)} \Delta
\end{aligned}
\tag{41}$$

Nos encontramos en la última columna

Imaginemos que queremos calibrar  $\sigma_{m,l}$  donde  $l$  coincide con la última columna de la matriz y  $m$  es una fila distinta a la primera. En este caso tendremos que resolver una ecuación en  $m$  incógnitas. Es decir, deberemos buscar  $\sigma_l(t_1), \dots, \sigma_l(t_m)$  tal que (40) se cumpla. Asumiremos que,

$$\sigma_l(t_1) = \sigma_l(t_2) = \dots = \sigma_l(t_m)$$

De la misma forma que antes, aplicando (40) obtenemos que,



$$\begin{aligned}
S_{m,l}^2(t)\sigma_{m,l}^2 t_m = & \sum_{i,j=m+1}^{l-1} \omega_i(t)\omega_j(t)F_i(t)F_j(t) \sum_{k=1}^m \sigma_i(t_k)\sigma_j(t_k)\rho_{i,j}(t_k)\Delta \\
& + 2 \sum_{j=m+1}^{l-1} \omega_l(t)\omega_j(t)F_l(t)F_j(t) \sum_{k=1}^{m-1} \boxed{\sigma_l(t_k)} \sigma_j(t_k)\rho_{l,j}(t_k)\Delta \\
& + \omega_l^2(t)F_l^2(t) \boxed{\sigma_l^2(t_m)} t_m
\end{aligned}
\tag{42}$$

Entonces, hemos visto que la calibración de la superficie de volatilidad de swaption puede hacerse mediante la resolución recursiva de una ecuación algebraica de segundo orden.

**ILUSTRACIÓN**

Dada una superficie de volatilidad de Swaptions y una función de correlación sacar la función escalonada de volatilidad de los distintos tipos libor, de acuerdo al método de la cascada presentado anteriormente.

## Simulación del LMM

Una vez que hemos calibrado el LMM y hemos parametrizado tanto la función de volatilidad como la estructura de correlaciones estamos en condiciones de utilizar el modelo para valorar instrumentos exóticos o generar escenarios para la gestión del riesgo de crédito de los derivados financieros. Como hemos visto cuando hemos derivado la dinámica del tipo libor bajo una medida arbitraria, el drift del tipo forward libor depende, en general, de la realización de otras variables de estado (forward libors). Esto hace que la función de transición del tipo libor sea desconocida y por tanto que tengamos que recurrir, en general, a algún método numérico, en particular simulación por MC, para la valoración de derivados.

La idea de valoración de productos por MC es la siguiente:

- Simular caminos independientes para los distintos libors a lo largo del tiempo.
- Para cada camino, sumar todos los flujos que se produzcan en el tiempo, normalizados por el numerario a dicha fecha.
- repetir los pasos anteriores muchas veces y calcular la media.

En esta sección vamos a ver distintas formas que tenemos de acometer el primer punto. Es decir, veremos cómo, dada una medida de probabilidad y la realización de la curva de tipos forward a una fecha  $t$  cómo mover la curva entera de tipos forward libor hasta  $t + \Delta$ .

Como la función de distribución de transición del tipo libor no es conocida, no seremos capaces de simular el tipo forward a lo largo del tiempo de forma exacta y nos veremos obligados a utilizar algún tipo de esquema de discretización.

Para ello, vamos a comentar en términos generales en qué consiste el esquema de discretización de Euler.

## Esquema de discretización

Supongamos que, en términos generales, queremos simular el proceso unifactorial  $X$  cuya dinámica es,

$$dX(t) = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW(t) \quad (43)$$

entre los instantes de tiempo  $t$  y  $t + \Delta$ , donde tanto la parte de drift y difusión depende de la variable de estado  $X(t)$ . Para conocer el valor de  $X(t + \Delta)$  condicionado a que conocemos el valor de  $X(t)$  integramos (43) entre estos dos instantes,

$$X(t + \Delta) = X(t) + \int_t^{t+\Delta} \mu(u, X_u)du + \int_t^{t+\Delta} \sigma(u, X_u)dW(u) \quad (44)$$

el problema se encuentra en cómo calcular o aproximar ambas integrales. En lo siguiente, aplicamos Ito tanto a  $\mu(\cdot)$  como a  $\sigma(\cdot)$  para ver cómo podemos aproximar las integrales de arriba.

En cuanto a  $\mu(\cdot)$ ,

$$\begin{aligned}
d\mu(t, X_t) &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \mu(t, X_t) + \mu(t, X_t) \frac{\partial}{\partial t} \mu(t, X_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_t^2} \mu(t, X_t) \right) dt \\
&\quad + \sigma(t, X_t) \frac{\partial}{\partial X_t} \mu(t, X_t) dW(t) \\
&= \mathcal{L}_0 \mu(t, X_t) dt + \mathcal{L}_1 \mu(t, X_t) dW(t)
\end{aligned} \tag{45}$$

Donde hemos denotado,

$$\mathcal{L}_0 := \frac{\partial}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_t^2}, \quad \mathcal{L}_1 := \sigma(t, X_t) \frac{\partial}{\partial X_t}$$

Integrando (45) entre  $t$  y  $u$  tenemos que,

$$\mu(u, X_u) = \mu(t, X_t) + \int_t^u \mathcal{L}_0 \mu(u, X_u) du + \int_t^u \mathcal{L}_1 \mu(u, X_u) dW(u) \tag{46}$$

lo mismo obtendríamos para  $\sigma(\cdot)$

$$\sigma(u, X_u) = \sigma(t, X_t) + \int_t^u \mathcal{L}_0 \sigma(u, X_u) du + \int_t^u \mathcal{L}_1 \sigma(u, X_u) dW(u) \quad (47)$$

Sustituyendo (46) y (47) en (44) obtenemos,

$$\boxed{X(t + \Delta) = X(t) + \mu(t, X_t)\Delta + \sigma(t, X_t) (W(t + \Delta) - W(t)) + R} \quad (48)$$

donde  $R$  es el error que cometemos,

$$\begin{aligned} R = & \int_t^{t+\Delta} \int_t^u \mathcal{L}_0 \mu(s, X_s) ds du + \int_t^{t+\Delta} \int_t^u \mathcal{L}_1 \mu(s, X_s) dW(s) du + \\ & + \int_t^{t+\Delta} \int_t^u \mathcal{L}_0 \sigma(s, X_s) ds dW(u) + \int_t^{t+\Delta} \int_t^u \mathcal{L}_1 \sigma(s, X_s) dW(s) dW(u) \end{aligned} \quad (49)$$

Es decir que utilizando el esquema de Euler el error que cometemos es del orden  $R = \mathcal{O}(\Delta)$ . Si quisiéramos un esquema de discretización de orden superior, deberíamos retener ( y no despreciar) más términos de  $R$ .



## LMM: Esquema de Euler

Si nos centramos en la dinámica del tipo forward libor bajo la medida terminal  $\mathbb{Q}_{N+1}$  la dinámica que tenemos que discretizar es,

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = -\phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}_{N+1}}(t) \quad (50)$$

Aplicando el esquema de Euler visto en la sección anterior vemos que

$$F_j(t+\Delta) = F_j(t) \left( 1 - \phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} \Delta + \phi(t, F_j(t)) \cdot \sqrt{\Delta} N(0, 1) \right) \quad (51)$$

donde  $N(0, 1)$  es un vector de normales estándar.

## Esquema de Log-Euler

El esquema de Euler aplicado directamente sobre el nivel del forward podría permitir tipos negativos (en el caso de haber elegido un LMM lognormal esto tendría poco sentido). Un esquema que presenta una mejor convergencia sería aplicar el esquema de Euler en el logaritmo del tipo forward. Es decir sobre,

$$d \ln F_j(t) = -\phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} dt - \frac{1}{2} \phi^2(t, F_j(t)) dt + \phi(t, F_j(t)) \cdot dW^{\mathbb{Q}_{N+1}}(t)$$

tal que quedaría,

$$\ln \frac{F_j(t + \Delta)}{F_j(t)} = \left( \underbrace{-\phi(t, F_j(t)) \cdot \sum_{k=j+1}^N \frac{\delta_k F_k(t) \phi(t, F_k(t))}{1 + \delta_k F_k(t)} - \frac{1}{2} \phi^2(t, F_j(t))}_{\mu_j(t, \mathbf{F}(t))} \right) \Delta + \phi(t, F_j(t)) \cdot \sqrt{\Delta} N(0, 1) \quad (52)$$

donde  $\mu_j(t, \mathbf{F}(t))$  hace referencia a que el drift depende de la curva de forwards.

## Esquema predictor corrector

El esquema de Euler es un esquema puramente explícito, ya que para simular  $\mathbf{F}(t + \Delta)$  sólo hemos hecho uso de la curva libor en tiempo  $t$ ,  $\mathbf{F}(t)$ . El siguiente esquema hace uso, para simular  $\mathbf{F}(t + \Delta)$ , de la curva que observamos en  $t$ ,  $\mathbf{F}(t)$  así como de una curva estimada en  $t + \Delta$ ,  $\bar{\mathbf{F}}(t + \Delta)$ . El esquema consistiría en,

- Estimar  $\bar{\mathbf{F}}(t + \Delta)$  a partir de un esquema de Euler.

$$F(t + \Delta) = F_j(t) \exp \left( \left( \mu_j(t, \mathbf{F}(t)) - \frac{1}{2} \phi^2(t, F_j(t)) \right) \Delta + \phi(t, F_j(t)) \cdot \sqrt{\Delta} N(0, 1) \right)$$

- Corregir esa estimación evaluando el drift en un algún punto entre  $t$  y  $t + \Delta$ .

$$\begin{aligned}
 F(t + \Delta) = & F_j(t) \exp \left( \theta \left( \mu_j(t, \mathbf{F}(t)) - \frac{1}{2} \phi^2(t, F_j(t)) \right) \Delta \right) \\
 & \exp \left( (1 - \theta) \left( \mu_j(t, \bar{\mathbf{F}}(t + \Delta)) - \frac{1}{2} \phi^2(t, \bar{F}_j(t + \Delta)) \right) \Delta \right) \\
 & \exp \left( \phi(t, F_j(t)) \cdot \sqrt{\Delta} N(0, 1) \right)
 \end{aligned} \tag{53}$$

**ILUSTRACIÓN**

Dada una función de volatilidad, calibrada anteriormente, y una función de correlación valorar un swaption determinado por simulación por Monte Carlo de acuerdo a un esquema de discretización de los vistos anteriormente.