Escuela de Finanzas Aplicadas

Ecuaciones en derivadas parciales

Diferencias Finitas

Nicolás Gómez-Sellés (nicolas.gomez@bbva.es)

MEFC-BBVA, febrero de 2019

Índice

1. Introducción: las edps en finanzas

La ecuación de Black-Scholes

Partimos de dos activos: la cuenta bancaria y un subyacente $\mathcal{S}$.

La cuenta bancaria es el activo sin riesgo cuyo valor en cada instante es B_t. Su evolución cumple:

$$dB_t = r\, B_t\, dt$$

Si $B_0 = 1 \Rightarrow B_t = e^{rt}$.

Tal y como hemos hecho en *teoría de valoración*, la cuenta bancaria jugará el papel de numerario.

El subyacente $\mathcal{S}$ es el activo con riesgo, cuyo valor es S_t. Postulamos que la evolución de S_t viene dada por el siguiente proceso de Itô:

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$$

Recordemos que el hecho de que en la deriva aparezca r hace que el precio del activo descontado, $S_t e^{-rt}$, sea martingala.

Supongamos que queremos valorar un derivado $\mathcal{X}$, cuyo pago (payoff) a vencimiento T es $h(S_T)$, siendo h una función real de variable real. Por ejemplo, si el derivado es una call, $h(S_T) = (S_T - K)^+$.

En general, podemos obtener la ecuación de Black-Scholes mediante los siguientes argumentos:

Cobertura: debido a que el derivado que queremos valorar es sólo sobre el subyacente S, formamos una cartera de réplica con el propio S y con la cuenta bancaria B (activos básicos).

El derivado es replicable si existe una cartera autofinanciada

$$\lambda_t = (\alpha_t, \beta_t)^\intercal$$

tal que

$$V_T = h(S_T),$$

siendo V el proceso de valor de la cartera λ:

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

El proceso estocástico V es función de S y del tiempo t, entonces por el lema de Ito:

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma\, S \frac{\partial V}{\partial S}\, dW \,. \end{aligned}$$

Por otro lado, al ser λ una cartera autofinanciada,

$$\begin{aligned} dV &= \alpha\, dS + \beta\, dB \\ &= (\alpha\, r\, S + \beta\, r\, B)\, dt + \alpha\, \sigma\, S dW \,. \end{aligned}$$

Igualando los términos en dW y en dt:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\partial V}{\partial S} \quad \text{(cobertura delta)} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \beta\, r\, B \,. \end{cases}$$

Por último,

$$V = \alpha\, S + \beta B \Rightarrow \beta = \frac{V - \frac{\partial V}{\partial S}\, S}{B}\,.$$

Si sustituimos el valor de β en la ecuación de la página anterior, llegamos a la siguiente ecuación en derivadas parciales comúnmente conocida como la ecuación de Black-Scholes:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\sigma^2\, S^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\, S\, \frac{\partial V}{\partial S} - r\, V = 0}$$

Observación

Es importante notar que el razonamiento anterior es de “ida y vuelta”:

Una cartera de réplica es autofinanciada si y sólo si su proceso de valor verifica la ecuación de Black-Scholes.

Eliminación del riesgo: formamos la cartera sin riesgo $\Pi = V - \Delta S$, siendo V el proceso de valor del derivado. Apelando de nuevo al lema de Itô,

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS \;\Rightarrow$$

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Por argumentos de no arbitraje, el retorno sin riesgo de la cartera tras un intervalo de tiempo dt es r, por lo que $d\,\Pi = r\,\Pi\,dt$. Por ello, hemos de eliminar el factor estocástico (el riesgo) poniendo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ (cobertura *delta*). Así :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V = 0}$$

Probabilidad de valoración: si existe una probabilidad de valoración asociada al numerario cuenta bancaria y el derivado es replicable, por ausencia de oportunidad de arbitraje, el proceso $\frac{V}{B}$ ha de ser martingala. Haciendo uso del lema de Itô para el producto de dos procesos,

$$d\left(\frac{V}{B}\right) = dV \cdot \frac{1}{B} + d\left(\frac{1}{B}\right) \cdot V + dV \cdot d\left(\frac{1}{B}\right)$$

Para que el proceso $\frac{V}{B}$ sea martingala, su deriva tiene que ser cero. Operando, llegamos igualmente a:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V = 0}$$

Observación

Divdendos continuos:

Si queremos introducir una tasa asociada a la rentabilidad por dividendos sería de la siguiente manera: supongamos que el activo S tiene una rentabilidad continua por dividendos q por unidad de tiempo. Si en tiempo t la cotización es S_t, entonces, en tiempo $t + dt$,

$$S_t \quad \longrightarrow \quad \underbrace{S_{t+dt}}_{\text{cambio cotización}} + \underbrace{S_{t+dt}\, q\, dt}_{\text{por dividendo}}$$

Además, reinvertimos en activo este rendimiento extra por dividendo, esto es, el valor $S_{t+dt}(1+q\,dt)$ supone que tenemos $(1 + q\,dt)$ unidades de subyacente.

Si suponemos que $S_{t+dt}(1 + q\,dt) \approx S_{t+dt}\, e^{q\,dt}$, argumentando de manera similar a la hecha anteriormente, podemos reformular la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)\, S \frac{\partial V}{\partial S} - r\, V = 0\,.$$

Por lo que la asunción de existencia de dividendos continuos no añade complejidad a la ecuación de Black-Scholes. En lo que sigue, supondremos que $q = 0$.

Una vez establecida la ecuación en derivadas parciales (edp) de Black-Scholes, para que el problema esté bien planteado, tenemos que añadir una condición final. La condición final será precisamente la función de pago de la opción, y en muchos casos es lo que distinguirá un derivado de otro. Por ejemplo, si queremos valorar una call, la condición final será:

$$V(S,T) = V_T(S) = (S-K)^+ \,.$$

Sabemos también que para determinadas opciones (determinadas condiciones finales) se conoce la solución analítica de la ecuación: opciones vainilla, opciones digitales, opciones barrera, etc. Esto es, gracias al teorema de Feynman-Kac, si

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$$

la solución de la edp de Black-Scholes es:

$$V(S,t) = B(t) \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\left(\frac{V_T(S)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

por lo que el cálculo de la solución de ecuación de Black-Scholes se reduce a computar una esperanza, la cual tendrá solución explícita para los casos mencionados.

Pero, en general, no se conocen soluciones analíticas y hay que recurrir a los métodos numéricos.

Hasta ahora, los métodos que se han estudiando han sido:

- Método de Monte Carlo.
- Método de árboles.

Pero también se pueden utilizar métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales, que tradicionalmente se han utilizado en problemas de física e ingeniería y que, en algunos casos (dependiendo de la ecuación estudiada), son bastante sofisticados y “difíciles”. Algunas de la ventajas de estos métodos son:

- Para problemas de una o dos dimensiones los algoritmos pueden ser mucho más eficientes que Monte Carlo o árboles.
- Al construir la solución sobre un mallado espacial-temporal, el cálculo de griegas es muy simple.
- La extensión de estos métodos para resolver problemas no lineales como el de valoración de opciones americanas es relativamente simple y proporciona buenas soluciones.

2. Algunas propiedades de las edps

Más concretamente, la ecuación de Black-Scholes es una ecuación en derivadas parciales parabólica: tiene segunda derivada con respecto a una de las variables, S, y derivada primera con respecto a la otra de las variables, t. Las edps parabólicas se pueden representar como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0$$

Tal y como acabamos de mencionar, la ecuación de Black-Scholes con coeficientes constantes se incluye dentro de esta formulación:

$$a(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \quad b = r\,x \quad c = -r.$$

Este tipo de ecuaciones se conocen como ecuaciones de difusión (o ecuaciones del calor), ya que el representante más simple de las mismas es la ecuación de difusión (o del calor):

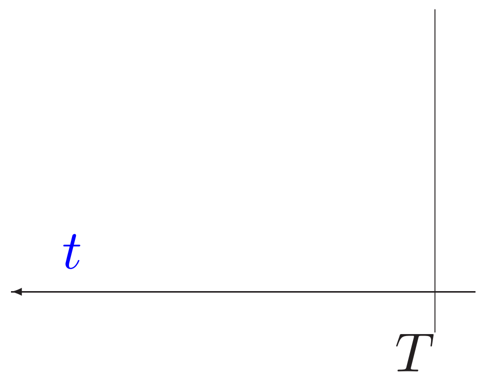
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con u la temperatura, t el tiempo, y x la posición.

Condición final o inicial: ecuación backward o forward.

Para que la ecuación de Black-Scholes tenga solución (y ésta sea única), es decir, la ecuación esté bien propuesta, es necesario dar una **condición final** (que será el payoff de la opción):

$$u(x, T) = u_T(x) \quad \text{para } x > 0$$



La solución $u = u(x, t)$ está definida para $t < T$. El valor de u en el tiempo $t = t_0$ será el precio del derivado.

Hemos dado una condición final porque la ecuación es *backward*, esto es, el coeficiente $a(x, t)$ $(= \frac{1}{2}\sigma^2 x^2)$ de la ecuación de Black-Scholes es positivo.

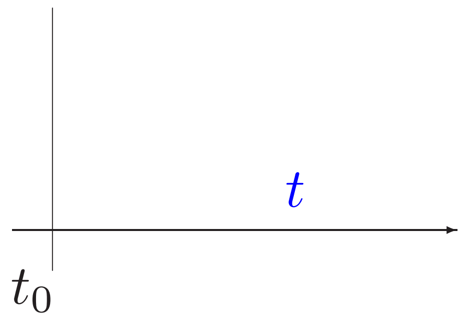
Si pensamos ahora en la ecuación más sencilla posible, la ecuación de difusión,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

el signo del coeficiente $a(x,t)\,(= -1)$ es negativo, y por ello se denomina *forward*.

Para que una ecuación *forward* tenga solución (y ésta sea única) (la ecuación esté bien propuesta), es necesario dar una **condición inicial**:

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$



Propiedades regularizantes de la difusión

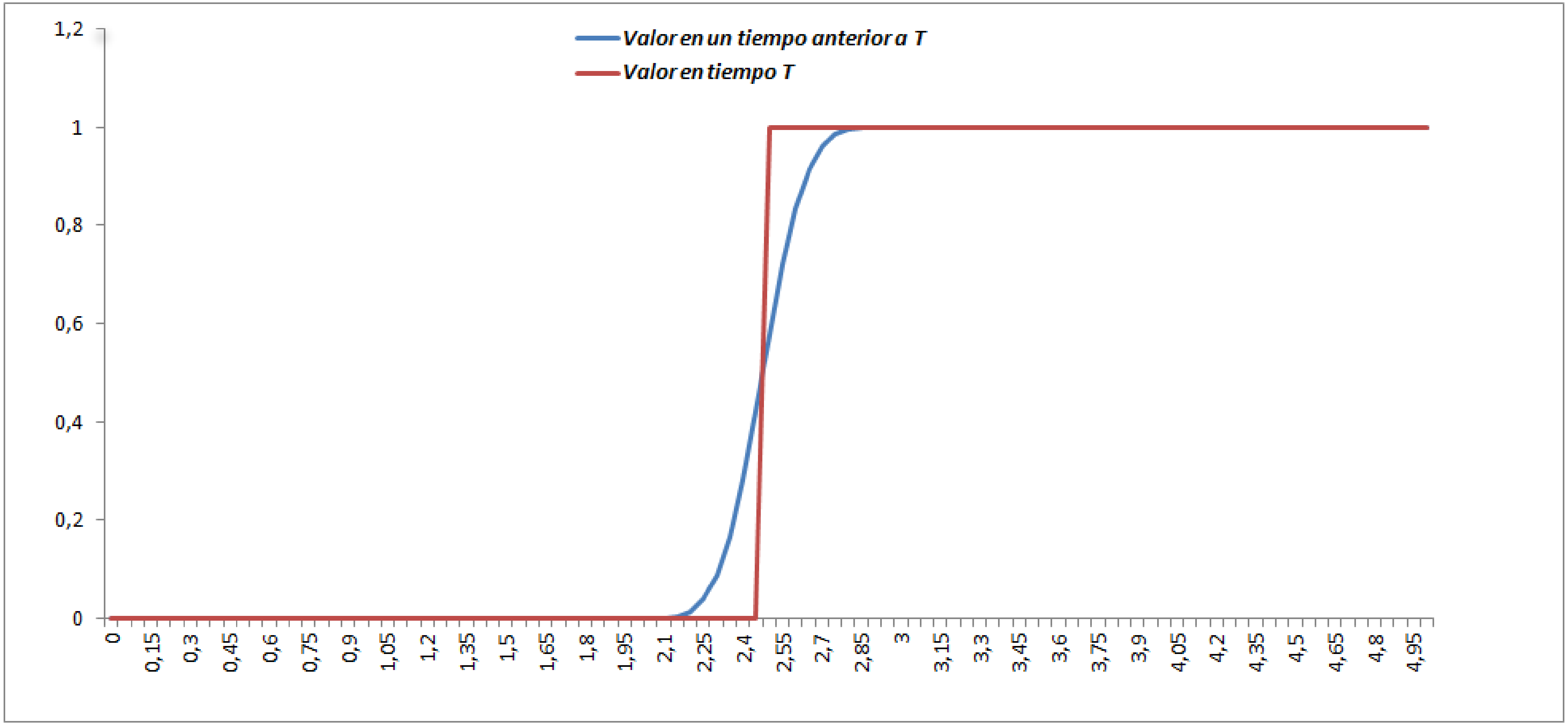
Tanto si partimos de una ecuación backward o de una forward, si tenemos una condición final o inicial continua y acotada, la solución de la ecuación es indefinidamente derivable para $t < T$ o para $t > t_0$, por tanto, se dice que las ecuaciones de difusión son regularizantes.

En cambio, en finanzas, puede pasar que la condición final no sea continua en un punto (calls binarias), aún así, la solución, para cada tiempo $t < T$ será suficientemente regular.

Observación

Una solución que sea derivable indefinidamente para todo $t > 0$ es una *solución clásica*.

No obstante, si por ejemplo queremos valorar una call binaria mediante un método en diferencias finitas implícito, puede ocurrir que la solución que nos arroje el método sea inestable y no podamos calcular las griegas en los puntos de inestabilidad. En ese caso tendríamos que aplicar métodos más generales como los *elementos finitos*, los cuales nos arrojarán *soluciones débiles* no derivables indefinidamente.


Valor en un tiempo anterior a T
Valor en tiempo T
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,15
0,3
0,45
0,6
0,75
0,9
1,05
1,2
1,35
1,5
1,65
1,8
1,95
2,1
2,25
2,4
2,55
2,7
2,85
3
3,15
3,3
3,45
3,6
3,75
3,9
4,05
4,2
4,35
4,5
4,65
4,8
4,95

Condiciones de contorno

Hemos mencionado que si una ecuación parabólica (ya sea backward o forward) tiene definida una condición final o inicial, dicha ecuación tiene solución única. Cabe observar que no hemos hecho restricción alguna sobre el dominio de x, el cual puede ser infinito (positivo en el caso de Black-Scholes o incluso cualquier número en el caso de la ecuación de difusión).

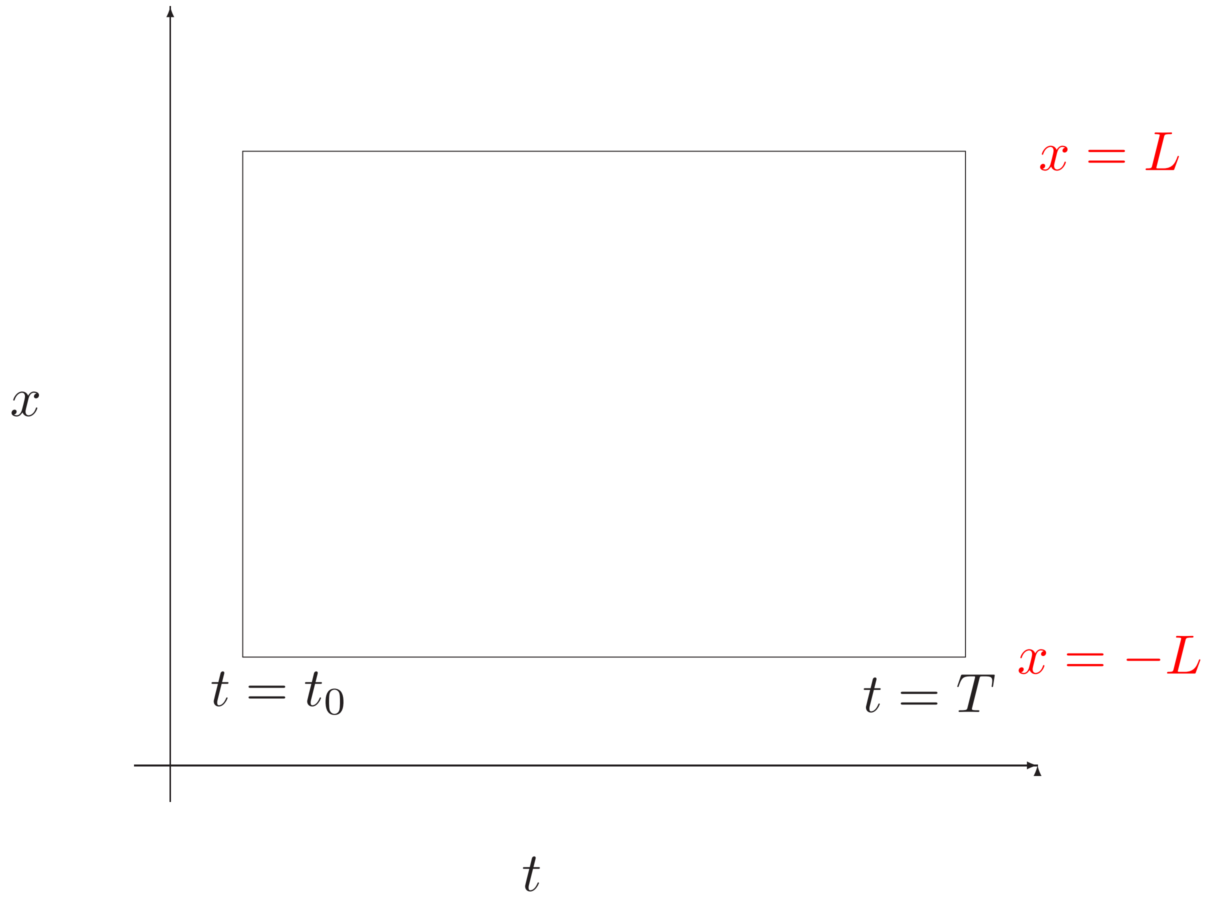
Obviamente, si queremos implementar un método numérico tenemos que acotar el dominio, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0 \quad x \in [-L, L]$$

$$u(x,T) = u_T(x) \quad x \in [-L, L]$$

o, si es una ecuación forward,

$$u(x,t_0) = u_0(x) \quad x \in [-L, L]$$



Para que el problema anterior esté bien puesto es necesario además añadir condiciones de contorno en los extremos $x = -L$ y $x = L$.

Tipos de condiciones de contorno:

- **Condiciones tipo Dirichlet**: se especifica el valor de la función en los extremos. Es decir, dadas unas funciones $u_- = u_-(t)$ y $u_+ = u_+(t)$ se impone

$$u(-L,t) = u_-(t) \qquad u(L,t) = u_+(t)$$

- **Condiciones tipo Neumann**: se especifica el valor de la derivada primera de la función en los extremos. Es decir, dadas unas funciones $v_- = v_-(t)$ y $v_+ = v_+(t)$ se impone

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L,t) = v_-(t) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = v_+(t)$$

Problema bien propuesto

Es importante notar que tanto la forma de la ecuación como las condiciones de contorno determinan si un problema está bien propuesto/planteado. Un problema está bien propuesto si:

- Existe solución.
- La solución es única.
- La solución depende de forma regular de los datos del problema.

Las dos primeras condiciones de un problema bien propuesto tienen un significado financiero bien relevante:

- Existencia de la solución: completitud, podemos replicar el derivado mediante una cartera de réplica que obtenemos al resolver el problema.

- Unicidad de la solución: no arbitraje, si existieran dos soluciones a la ecuación, tendríamos dos activos financieros que valen lo mismo a vencimiento pero distinto a inicio, por lo que podríamos formar una cartera que origine arbitraje.

La tercera condición no es menos relevante que las dos primeras, ya que, cuando implementemos aproximaciones numéricas de las soluciones de las ecuaciones, querremos garantizar cierta estabilidad, y una condición necesaria para ello es la dependencia regular de la solución de los datos del problema (condiciones iniciales o finales).

En lo que sigue, supondremos que el problema financiero está bien propuesto.

Soluciones numéricas

Como ya hemos anticipado, en la mayoría de los casos tendremos que implementar un método numérico para aproximar la solución de la ecuación de Black-Scholes.

A continuación, describiremos los métodos numéricos más utilizados en finanzas para aproximar la solución de la ecuación de Black-Scholes: las **diferencias finitas**.

- Primero describiremos el método de las Diferencias Finitas.
- Después aplicaremos las Diferencias Finitas al problema parabólico más sencillo: la ecuación de difusión.
- Por último aplicaremos las Diferencias Finitas a problemas parabólicos generales, en concreto a la ecuación de Black-Scholes.

3. El método de las Diferencias Finitas

Las diferencias finitas son métodos numéricos para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

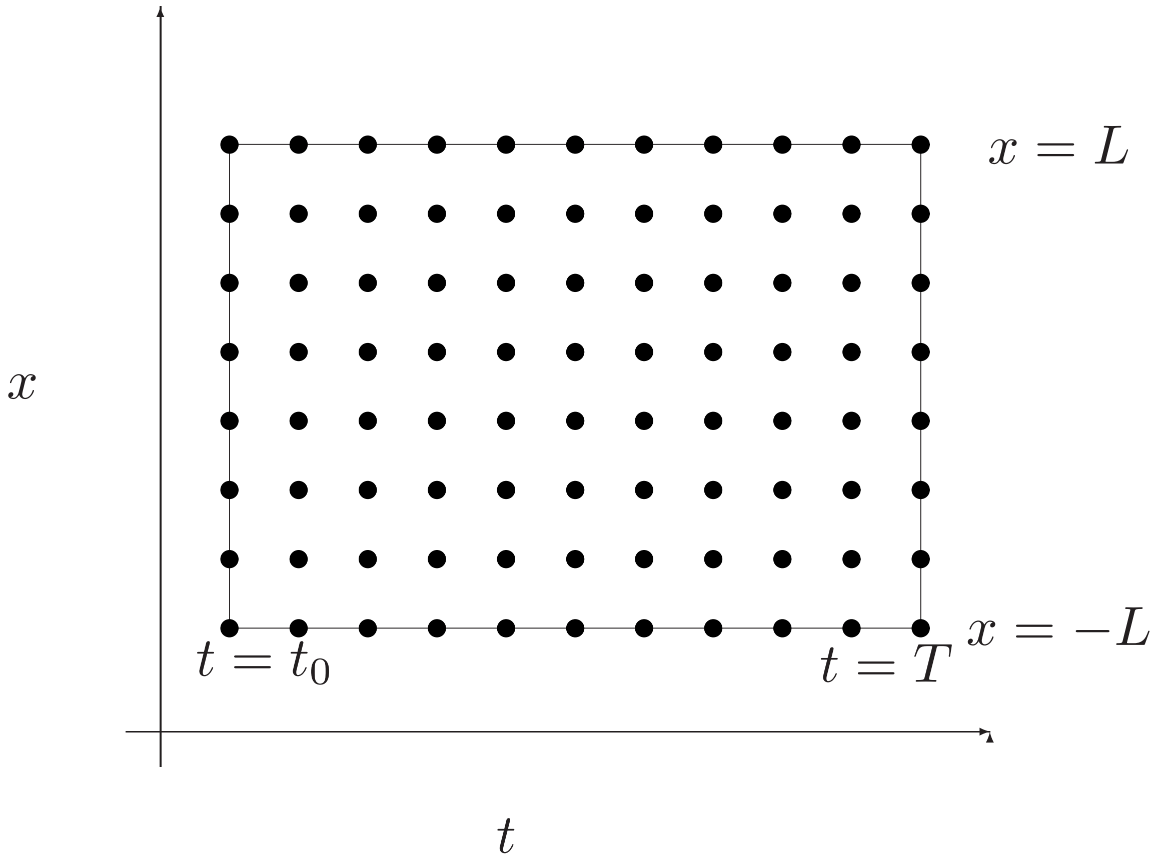
1. **Mallado espacial-temporal**:

El dominio espacial temporal del problema $(x, t) \in [-L, L] \times (t_0, T)$ se reemplaza por un mallado de puntos equiespaciados. Es decir, dados

- Δt: paso temporal $\qquad \Delta t = (T - t_0)/n$
- Δx: paso espacial $\qquad \Delta x = 2L/m$

Consideramos el mallado compuesto por los puntos (x_j, t_i)

$$
\begin{aligned}
x_j &= -L + j\Delta x \\
& \quad j = 0, \ldots, m \\
t_i &= t_0 + i\Delta t \\
& \quad i = 0, \ldots, n
\end{aligned}
$$



Mediante el método de diferencias finitas se calculará una aproximación de la función solución en los puntos de la malla, es decir, de $u_i(j) \approx u(x_j, t_i)$.

2. Se reemplazan las derivadas por fórmulas en diferencias

Aproximaciones de la derivada temporal $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

La derivada puede ser definida como:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t}$$

En lugar de hacer el límite para Δt tendiendo a cero, se toma un Δt finito pero pequeño. Se obtiene la **diferencia finita forward**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Pero también se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t}$$

a partir de la cual se llega a la **diferencia finita backward**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t)-u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Finalmente, también se puede definir:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

que da lugar a la aproximación llamada **diferencia finita centrada**:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2)$$

Cuando se aplican a la ecuación de difusión, forward y backward diferencias finitas dan lugar a esquemas explícitos e implícitos, respectivamente. Las diferencias centradas en la variable temporal no se usan en la práctica porque dan lugar a esquemas inestables.

En su lugar, se usan diferencias centradas de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t+0{,}5\Delta t) - u(x,t-0{,}5\Delta t)}{\Delta t} + O((\Delta t)^2)$$

que darán lugar a esquemas de tipo Crank-Nicolson.

Aproximaciones de la derivada espacial $\frac{\partial u}{\partial x}$.

De la misma manera, podemos definir las aproximaciones por diferencias finitas para la primera derivada espacial de u. Las diferencias finitas forward, backward y central son:

Diferencia finita forward:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Diferencia finita backward:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x,t) - u(x-\Delta x, t)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Diferencia finita central:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x-\Delta x, t)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

Derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Se puede definir una aproximación por diferencias finitas simétrica como la diferencia finita forward de la diferencia finita backward que aproxima a la primera derivada (o como la diferencia finita backward de la diferencia finita forward que aproxima a la primera derivada). En ambos casos se obtiene la **diferencia finita central simétrica**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

4. Diferencias Finitas aplicadas a la ecuación de difusión

Esquema explícito

Vamos a aplicar un esquema de diferencias explícito al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condición inicial:

$$u(x,0) = U_0(x)$$

y condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$u(-L,t) = U_-(t), \qquad u(L,t) = U_+(t)$$

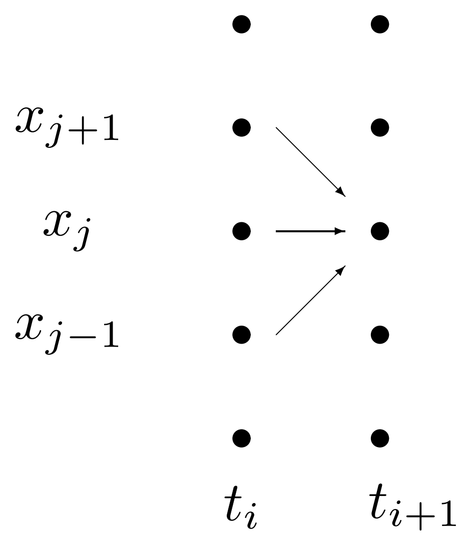
Usando la diferencia forward para la derivada temporal, y la centrada simétrica para la derivada espacial se obtiene:

$$\frac{u_{i+1}(j) - u_i(j)}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{u_i(j+1) - 2u_i(j) + u_i(j-1)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Ignorando los términos de $O(\Delta t)$ y $O((\Delta x)^2)$, podemos reorganizar los términos para llegar a la ecuación en diferencias:

$$u_{i+1}(j) = \alpha u_i(j+1) + (1-2\alpha)u_i(j) + \alpha u_i(j-1) \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

El método se llama explícito porque a partir de la solución conocida en tiempo t_i ($\{u_i(j)\}_{j=0}^m$) podemos calcular explícitamente la solución en tiempo t_{i+1} ($\{u_{i+1}(j)\}_{j=0}^m$).
El valor de la solución en (x_j, t_{i+1}) depende sólo del valor de la solución en (x_{j+1}, t_i), (x_j, t_i) y (x_{j-1}, t_i).



Condiciones de contorno

En este punto debemos notar que la recursión anterior no es válida para los extremos $x = -L$ y $x = L$ del intervalo espacial, porque involucra a puntos de la malla de fuera del dominio. Más precisamente, para calcular u_0^{i+1} necesitaríamos u_{-1}^i y para calcular u_m^{i+1} necesitaríamos u_{m+1}^i, que no son conocidos (ni están definidos).

Lo que se hace es utilizar la condición de contorno de Dirichlet para hacer:

$$u_{i+1}(0) = U_-(t_{i+1})$$

y

$$u_{i+1}(m) = U_+(t_{i+1})$$

Claramente tenemos un proceso iterativo, que empieza con la condición inicial:

$$u_0(j) = U_0(x_j) \qquad j = 0, \ldots, m$$

Convergencia y estabilidad

Siempre que implementemos un método numérico que aproxime la solución de una edp, nos debemos preguntar si efectivamente lo hemos diseñado bien, es decir, si es **convergente**.

Diremos que un método es convergente, si la solución que arroja el método $u_i(j)$ se aproxima a la solución teórica $u(x_j, t_i)$ todo lo que queramos, siempre y cuando la malla espacio-temporal esté suficientemente refinada ($\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$).

Comprobar si un método es convergente mediante la definición anterior puede ser complicado, para ello, nos serviremos del *Teorema de convergencia de Lax*:

"Un método es convergente si y sólo si es estable".

Y por último, un método es estable si la diferencia de dos soluciones numéricas distintas del método se puede expresar como diferencia de las distintas condiciones iniciales.

No obstante, no demostraremos para cada método las condiciones de estabilidad, sólo las exhibiremos.

Empezaremos viendo las condiciones de estabilidad para el problema de difusión, para posteriormente ver las condiciones equivalentes en problemas parabólicos generales (y en particular para la ecuación de Black-Scholes).

Observación

La noción de estabilidad está íntimamente relacionada con la tercera condición de los problemas bien propuestos: si la solución teórica no dependiera de forma regular de los datos iniciales, sería imposible diseñar un método numérico que convergiera a dicha solución.
En efecto, si existiera un método para el que $u_i(j) \to u(x_j, t_i)$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$, el propio método sería estable, y por ello, la diferencia entre dos soluciones teóricas distintas dependería de la diferencia de las condiciones iniciales, es decir, la solución dependería de forma regular de la condición inicial.

El método explícito es de primer orden en tiempo y de segundo orden en espacio

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

También, por ser explícito es muy simple de implementar, no obstante, tiene la desventaja de que se vuelve inestable para ciertos parámetros del mallado. En concreto:

Estable	**Inestable**
$0 < \alpha \leq 0{,}5$	$\alpha > 0{,}5$

Así, si comenzamos con una solución estable en un mallado y duplicamos el número de nodos espaciales, por ejemplo, deberemos multiplicar por 4 el número de nodos temporales.

Ejercicio

Resuelve, mediante un esquema de diferencias finitas explícito, la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in [0,\ 5] \times [0,\ 0,1]$$

con condición inicial

$$u(x,0) = U_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \text{ ó } x > 3 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

y de contorno

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{para todo } t\ .$$

Prueba a aplicar el método con $nt = 100$ y $nx = 50$ y después para $nt = 10$ y $nx = 50$. ¿Qué ha sucedido?.

Esquemas implícitos

Los esquemas implícitos que vamos a ver serán incondicionalmente estables y, por tanto, serán usados frente a los esquemas explícitos para no tener que restringirse a mallados que verifiquen la condición de estabilidad. Es decir, con los métodos implícitos podremos usar un número grande de pasos espaciales (m) sin tener que tomar pasos de tiempo extremadamente pequeños.

La contrapartida que hay que pagar para obtener métodos incondicionalmente estables es que, en cada paso temporal tendremos que resolver un sistema lineal. Para ello utilizaremos o bien métodos directos o bien métodos iterativos.

Esquema totalmente implícito

Vamos a aplicar un esquema de diferencias totalmente implícito al problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condición incial:

$$u(x,0) = U_0(x)$$

y condiciones de contorno de tipo Dirichlet:

$$u(-L,t) = U_-(t), \qquad u(L,t) = U_+(t)$$

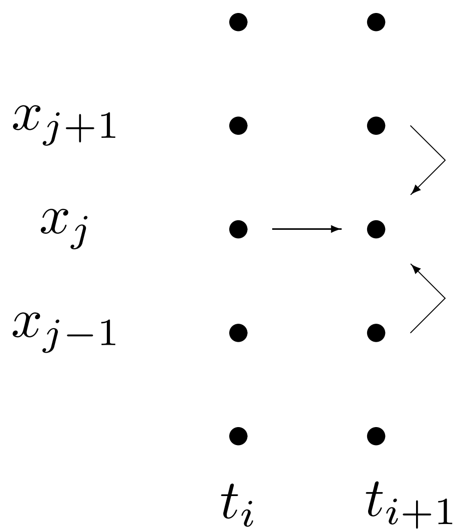
Usando la diferencia forward para la derivada temporal, y la centrada simétrica para la derivada espacial se obtiene

$$\frac{u_{i+1}(j) - u_i(j)}{\Delta t} + O(\Delta t) = \frac{u_{i+1}(j+1) - 2u_{i+1}(j) + u_{i+1}(j-1)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

Ignorando los términos de $O(\Delta t)$ y $O((\Delta x)^2)$, podemos reoganizar los términos para llegar a la ecuación en diferencias:

$$-\alpha u_{i+1}(j-1) + (1+2\alpha)u_{i+1}(j) - \alpha u_{i+1}(j+1) = u_i(j)$$

En la ecuación vemos que $u_{i+1}(j-1)$, $u_{i+1}(j)$ y $u_{i+1}(j+1)$ dependen de $u_i(j)$ de manera implícita, no tenemos fórmula explícita.



Condiciones de contorno

Al igual que en el caso explícito, se utiliza la condición de contorno de Dirichlet para discretizar la ecuación en los extremos:

$$u_{i+1}(0) = U_-(t_{i+1}) \quad \text{y} \quad u_{i+1}(m) = U_+(t_{i+1})$$

- $j = 1$

$$-\alpha u_{i+1}(0) + (1+2\alpha)u_{i+1}(1) - \alpha u_{i+1}(2) = u_i(1)$$

lo que equivale a:

$$(1+2\alpha)u_{i+1}(1) - \alpha u_{i+1}(2) = u_i(1) + \alpha U_-(t_{i+1})$$

- $j = m-1$

$$-\alpha u_{i+1}(m-2) + (1+2\alpha)u_{i+1}(m-1) - \alpha u_{i+1}(m) = u_i(m-1)$$

lo que equivale a:

$$-\alpha u_{i+1}(m-2) + (1+2\alpha)u_{i+1}(m) = u_i(m-1) + \alpha U_+(t_{i+1})$$

Claramente tenemos un proceso iterativo en tiempo, que comienza en $i = 0$ por:

$$u_j^0 = U_0(x_j) \qquad j = 0, \ldots, m$$

y para los sucesivos tiempos $i = 1, \ldots, n$ se calculará la solución $\{u_j^i\}_{j=0}^m$ a partir de la solución del instante anterior resolviendo el siguiente sistema lineal $(m-1) \times (m-1)$

$$M\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{b}^i$$

La matriz del sistema es invariante con respecto al tiempo:

$$M = \begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ldots & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}$$

El segundo miembro del sistema va variando con el paso temporal:

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{u}_i + \begin{pmatrix} \alpha U_-(t_{i+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha U_+(t_{i+1}) \end{pmatrix}$$

Se puede desmostrar que para $\alpha > 0$ la matriz M es invertible, entonces,

$$\mathbf{u}_{i+1} = M^{-1}\mathbf{b}^i$$

para $i = 0, \ldots, n-1$.

Resolución del sistema lineal: métodos directos

La matriz del sistema es tridiagonal, simétrica, y además no depende de iterante temporal i.

Podemos usar para resolver el sistema lineal en cada paso te tiempo un método de factorización de la matriz. Así se aprovecha la independencia temporal de la misma, porque se factorizara la matriz 1 vez, y luego, en cada iterante temporal se resuelven los sistemas triangulares.

La matriz del sistema es simétrica y definida positiva, así que se puede desarrollar una factorizacón tipo Cholesky. No obstante, proponderemos una factorización tipo LU, que funciona también para matrices no simétricas, pensando en generalizar el programa más adelante para matrices no simétricas.

Lo que se propone entonces es factorizar

$$M = LU$$

con L matriz triangular inferior con unos en a diagonal, y U matriz triangular superior.

Como la factorización conserva la estructura triangular de la matriz, se tiene:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & l_{m-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & v_{m-2} \\ 0 & 0 & & & u_{m-1} \end{pmatrix}$$

Una vez realizada la factorización, el problema de calcular $\mathbf{u}_{i+1}$ tal que:

$$M\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{b}^i$$

se reduce a:

$$LU\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{b}^i$$

es decir, a resolver los dos sistemas triangulares siguientes:

$$L\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{b}^i, \quad U\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{q}^{i+1}$$

NOTA. Otra manera de resolver el sistema lineal en cada etapa es mediante el uso de métodos iterativos. La gran ventaja de los métodos iterativos es que se generalizan de manera muy simple para resolver problemas de valoración de opciones americanas, y que son más fáciles de programar que los métodos directos. Una desventaja es que son un poco más lentos que los métodos directos en el contexto de valoración de opciones de tipo europeo.

Convergencia y estabilidad

Por construcción, sabemos qu el anterior algoritmo es de primer orden en tiempo y de segundo orden en espacio

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Comparados con los métodos explícitos, los métodos implícitos son generalmente más eficientes.

Además, la gran ventaja, es que el método totalmente implícito explicado es incondicionalmente estable.

Ejercicio

Resuelve, mediante un esquema de diferencias finitas implícito, la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in [0,\ 5] \times [0,\ 0,1]$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \text{ ó } x > 3 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

y de contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para todo } t.$$

Esquema de Crank-Nicolson

El último esquema que estudiaremos es un esquema implícito que será también incondicionalmente estable, pero cuyo orden de convergencia temporal será $O((\Delta t)^2)$, más preciso entonces que los esquemas implícito y explícito ya vistos.

El método de Crank-Nicolson es esencialmente un promedio de los métodos implícito y explícito, es decir:

$$\begin{aligned}\frac{u_{i+1}(j) - u_i(j)}{\Delta t} \quad &= \quad \frac{1}{2}\Bigg(\frac{u_i(j+1) - 2u_i(j) + u_i(j-1)}{(\Delta x)^2} \\ &\quad + \frac{u_{i+1}(j+1) - 2u_{i+1}(j) + u_{i+1}(j-1)}{(\Delta x)^2}\Bigg)\end{aligned}$$

De nuevo, lo que se obtiene es un esquema implícito

$$
\begin{aligned}
u_{i+1}(j) - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i+1}(j-1) - 2u_{i+1}(j) + u_{i+1}(j+1)\right) \\
= u_i(j) + \frac{\alpha}{2}\left(u_i(j-1) - 2u_i(j) + u_i(j+1)\right)
\end{aligned}
$$

Condiciones de contorno

Al igual que en los casos explícito e implícito, se utiliza la condición de contorno de Dirichlet para hacer:

$$
u_{i+1}(0) = U_{-}(t_{i+1}) \quad \text{y} \quad u_{i+1}(m) = U_{+}(t_{i+1})
$$

Podemos escribir la ecuación discretizada en los extremos:

- $j = 1$

$$u_{i+1}(1) - \frac{\alpha}{2}\left(U_-(t_{i+1}) - 2u_{i+1}(1) + u_{i+1}(2)\right) = u_i(1) + \frac{\alpha}{2}\left(U_-(t_i) - 2u_i(1) + u_i(2)\right)$$

lo que equivale a:

$$u_{i+1}(1) - \frac{\alpha}{2}\left(-2u_{i+1}(1) + u_{i+1}(2)\right)$$
$$= u_i(1) + \frac{\alpha}{2}\left(-2u_i(1) + u_i(2)\right) + \frac{\alpha}{2}\left(U_-(t_i) + U_-(t_{i+1})\right)$$

- $j = m - 1$

$$\begin{aligned} u_{i+1}(m-1) - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i+1}(m-2) - 2u_{i+1}(m-1) + U_+(t_{i+1})\right) \\ = u_i(m-1) + \frac{\alpha}{2}\left(u_i(m-2) - 2u_i(m-1) + U_+(t_i)\right) \end{aligned}$$

lo que equivale a:

$$\begin{aligned} u_{i+1}(m-1) - \frac{\alpha}{2}\left(u_{i+1}(m-2) - 2u_{i+1}(m-1)\right) \\ = u_i(m-1) + \frac{\alpha}{2}\left(u_i(m-2) - 2u_i(m-1)\right) + \frac{\alpha}{2}\left(U_+(t_{i+1}) + U_+(t_i)\right) \end{aligned}$$

Ilustración

Escribe de forma matricial el algoritmo de Crank-Nicolson.

Tenemos el siguiente sistema lineal $(m-1) \times (m-1)$

$$M\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{b}^i$$

donde:

$$M = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \frac{1}{2}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & 1-\alpha & \frac{1}{2}\alpha & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\alpha \\ 0 & 0 & & \frac{1}{2}\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}^i = N\mathbf{u}_i + \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}\left(U_-(t_{i+1}) + U_-(t_i)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\alpha}{2}\left(U_+(t_{i+1}) + U_+(t_i)\right) \end{pmatrix}$$

Convergencia y estabilidad

El algoritmo de Crank-Nicolson es de segundo orden en tiempo y de en espacio

$$O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

Además es incondicionalmente estable.

Ilustración

Comprueba, mediante desarrollos de serie de Taylor, el orden del esquema de Crank-Nicolson.

Ejercicio

Resuelve, mediante un esquema de diferencias finitas de Crank-Nicolson, la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (x, t) \in [0,\ 5] \times [0,\ 0,1]$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \text{ ó } x > 3 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

y de contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad \text{para todo } t.$$

Resumen de métodos en diferencias finitas

	Explícito	Implícito	Crank-Nicolson
Orden	$O(\Delta t + (\Delta x)^2))$	$O(\Delta t + (\Delta x)^2))$	$O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2))$
Estabilidad	Condicional ($\alpha \leq 0{,}5$)	Incondicional	Incondicional
Implementación	Muy fácil	Menos fácil	Menos fácil

5. Diferencias Finitas aplicadas a la ecuación de Black-Scholes

> Uso diferencias finitas el 75 % del tiempo, simulaciones Monte Carlo el 20 % del tiempo, y el resto empleo fórmulas explícitas.
>
> Paul Wilmott

Para muchos derivados que dependen de un subyacente, bajo ciertos supuestos, el precio del mismo verifica la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V = 0$$

La condición final (el payoff del derivado) será la que distinga una opción de otra.

Además, si queremos resolver el problema de valoración con un método de diferencias finitas tenemos que añadir ciertas condiciones de contorno (que también definirán el derivado que estamos estudiando).

Recordemos que la ecuación de Black-Scholes que acabamos de exhibir es una edp del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0,$$

con coeficientes constantes, donde: $a(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \quad b = rx \quad c = -r\,.$

Si queremos resolver numéricamente esta ecuación, podemos hacer un cambio de variable y pasar directamente a la ecuación de difusión, pero es preferible abordar directamente su resolución numérica. Por un lado, como estamos resolviendo la ecuación en las variables originales, tenemos más intuiciones financieras sobre el problema. Por otro lado, nos va a permitir contemplar problemas más generales.

NOTA. En realidad, mediante un cambio de variable para pasar a coordenadas logarítmicas, llegamos a una ecuación con coeficientes constantes:

$$x = \ln(S)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial V}{\partial x} - r\,V = 0$$

Por ejemplo, si generalizamos el modelo de Black-Scholes a un modelo de volatilidad local (en el que la volatilidad pasa de ser una constante a una función que puede depender del nivel del subyacente y del tiempo), la ecuación que habría que resolver es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(S,t)\,S^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r\,S\,\frac{\partial V}{\partial S} - r\,V = 0\,,$$

o también,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0\,,$$

$$\text{con:}\quad a(x,t) = \frac{1}{2}\sigma(x,t)^2x^2 \quad b = rx \quad c = -r\,.$$

Además, los modelos de tipos de interés instantáneos también dan lugar a este tipo de ecuaciones (con coeficientes variables).

Es decir, nos hemos encontrado con ecuaciones con coeficientes variables que no sabemos transformar a otras con coeficientes constantes, por lo que estaremos interesados en estudiar las resoluciones numéricas de ecuaciones con coeficientes variables.

Así, para la valoración de productos derivados, consideraremos ecuaciones backwards:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0\,,$$

con:

$$u(x,T) = U_T(x).$$

Definida en el dominio $[L,R] \times [t_0,T]$ con condiciones de contorno (de momento) de tipo Dirichlet:

$$u(L,t) = U_L(t) \qquad U(R,t) = U_R(t)$$

NOTA. Cuando la ecuación considerada modela un derivado sobre "equity" la variable x represenará al activo subyacente y en general tendremos $[L,R] = [0,R]$ con R un número suficientemente grande. En la práctica, R se suele tomar como 3 o 4 veces el valor del subyacente en la zona de interés.

Mallado

Consideramos

- Δt: paso temporal $\qquad \Delta t = (T - t_0)/n$
- Δx: paso espacial $\qquad \Delta x = (R - L)/m$

Entonces el mallado está compuesto por los puntos

$$x_j = L + j\Delta x \qquad j = 0, \ldots, m$$

$$t_i = T - i\Delta t \qquad i = 0, \ldots, n$$

o, más precisamente, por los puntos producto:

$$(x_j, t_i) \qquad j = 0, \ldots, m \quad i = 0, \ldots, n$$

Entonces calcularemos una aproximación de u en los nodos del mallado:

$$u(x_j, t_i) \approx u_i(j)\,.$$

Nuestro problema consistirá en:

- Dados los valores $\{u_n(j)\}_{j=0}^{m}\,(u_n(j) = U_T(x_j))$
- ... y los valores $u_i(0) = U_L(t_i), u_i(m) = U_R(t_i)$ para $i = n, \ldots, 0$

calcular $u_i(j)$ para $i = n-1, n-2, \ldots, 0$ y $j = 0, \ldots, m-1\,.$

Al igual que en la ecuación de difusión, describiremos tres esquemas aplicados a una ecuación general parabólica de coeficientes variables. Los esquemas presentan las mismas características con respecto a la convergencia y la estabilidad que los correspondientes esquemas aplicados a la ecuación de difusión.

Por lo tanto, estudiaremos el esquema explícito como ilustración, pero estaremos interesados en esquemas incondicionalmente estables, es decir, en el esquema implícito y en el esquema de Crank-Nicolson.

Además, en el caso de esquemas implícitos habrá que resolver también sistemas lineales. En el caso más general, si la ecuación tiene coeficientes que dependen del tiempo, habrá que resolver un sistema lineal en cada paso de tiempo.

Método explícito para coeficientes variables

Conocida la solución para $i = n$:

$$u_n(j) = U_T(x_j) \qquad j = 0, \ldots, m$$

y las condiciones de contorno

$$u_i(0) = U_L(t_i) \qquad u_i(m) = U_R(t_i)$$

para los sucesivos tiempos $i = n-1, \ldots, 0$ se calculará la solución $\{u_n(j)\}_{j=0}^{m}$ a partir de la solución del instante posterior mediante la ecuación discreta:

$$\frac{u_i(j) - u_{i-1}(j)}{\Delta t} + a_i(j)\,\frac{u_i(j+1) - 2u_i(j) + u_i(j-1)}{(\Delta x)^2} + \\ + b_i(j)\,\frac{u_i(j+1) - u_i(j-1)}{2\Delta x} + c_i(j)\,u_i(j) = 0$$

donde $a_i(j) = a(x_j, t_i),\ b_i(j) = b(x_j, t_i),\ c_i(j) = c(x_j, t_i)\,.$

Si introducimos además

$$\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\rho = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

tenemos:

$$u_{i-1}(j) = u_i(j) + \alpha\, a_i(j)\Big(u_i(j+1) - 2\, u_i(j) + u_i(j-1)\Big) \; + \frac{\rho}{2}\, b_i(j)\Big(u_i(j+1) - u_i(j-1)\Big) + \Delta t c_i(j)\, u_i(j)$$

o lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} u_{i-1}(j) = {} & u_i(j+1)\Big(\alpha\, a_i(j) + \frac{\rho}{2}\, b_i(j)\Big) + \\ & u_i(j)\Big(1 - 2\,\alpha\, a_i(j) + \Delta t c_i(j)\Big) + \\ & u_i(j-1)\Big(\alpha\, a_i(j) - \frac{\rho}{2}\, b_i(j)\Big)\,. \end{aligned}$$

Condiciones de contorno

Al igual que en la ecuación de difusión, debemos notar que la recursión anterior no es válida para los extremos $x = L$ y $x = R$ del intervalo espacial, porque involucra a puntos de la malla de fuera del dominio.

Lo que se hace es utilizar la condición de contorno de Dirichlet para computar:

$$u_{i-1}(0) = U_L(t_{i-1})$$

$$u_{i-1}(m) = U_R(t_{i-1})\,.$$

Convergencia y estabilidad

Debido a la discretización de las derivadas, el método es de orden

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Ahora bien, al tratarse de una edp con coeficientes variables, el análisis de estabilidad es más complicado. En concreto, si pensamos en la forma general de la ecuación de Black-Scholes en el que el subyacente satisface:

$$dx(t) = \mu(x,t)\,dt + \sigma(x,t)\,dW(t)\,,$$

el método explícito será estable si:

$$\frac{2}{\alpha}\sigma_i^2(j) \geq \sigma_i^4(j) + \mu_i^2(j)\,\Delta x^2 + |\mu_i^2(j)\,\Delta x^2 - \sigma_i^4(j)|$$

para todo $i = 0, \ldots, n-1$, y para todo $j = 1, \ldots, m-1\,.$

Por ejemplo, para pequeñas derivas en el subyacente $(\mu(x,t) \approx 0)$, tendremos que comprobar que:

$$\sigma_i^2(j) \leq \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

en todos los puntos $i = 0, \ldots, n-1$ y $j = 1, \ldots, m-1$, lo cual puede ser bastante tedioso.

Por ello, no utilizaremos el método explícito para resolver la ecuación de Black-Scholes.

Método implícito para coeficientes variables

La ecuación discreta para pasar de tiempo t_i a tiempo t_{i-1} es:

$$\frac{u_i(j) - u_{i-1}(j)}{\Delta t} + a_{i-1}(j)\,\frac{u_{i-1}(j+1) - 2u_{i-1}(j) + u_{i-1}(j-1)}{(\Delta x)^2} + \\ + b_{i-1}(j)\,\frac{u_{i-1}(j+1) - u_{i-1}(j-1)}{2\Delta x} + c_{i-1}(j)\,u_{i-1}(j) = 0$$

donde $a_i(j) = a(x_j, t_i)$, $b_i(j) = b(x_j, t_i)$, $c_i(j) = c(x_j, t_i)$.

Operando,

$$u_{i-1}(j) - \alpha\, a_{i-1}(j)\Big(u_{i-1}(j+1) - 2\,u_{i-1}(j) + u_{i-1}(j-1)\Big) \\ - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(j)\Big(u_{i-1}(j+1) - u_{i-1}(j-1)\Big) + \Delta t c_{i-1}(j)\,u_{i-1}(j) \; = u_i(j)$$

Y reagrupando términos, llegamos a:

$$
\begin{aligned}
&u_{i-1}(j+1)\Big(-\alpha\, a_{i-1}(j) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(j)\Big) + \\
&u_{i-1}(j)\Big(1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(j) - \Delta t c_{i-1}(j)\Big) + \\
&u_{i-1}(j-1)\Big(-\alpha\, a_{i-1}(j) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(j)\Big) \ = u_i(j)\,.
\end{aligned}
$$

Condiciones de contorno

Utilizamos condiciones de contorno tipo Dirichlet para hacer:

$$
u_{i-1}(0) = U_L(t_{i-1}) \quad \text{y} \quad u_{i-1}(m) = U_R(t_{i-1})\,.
$$

- $j = 1$

$$u_{i-1}(2)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(1) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(1)\Big) +$$
$$u_{i-1}(1)\Big(1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(1) - \Delta t c_{i-1}(1)\Big) +$$
$$u_{i-1}(0)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(1) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(1)\Big) \; = u_i(1)$$

lo que equivale a:

$$u_{i-1}(2)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(1) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(1)\Big) +$$
$$u_{i-1}(1)\Big(1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(1) - \Delta t c_{i-1}(1)\Big) =$$
$$u_i(1) - U_L(t_{i-1})\Big(- \alpha\, a_{i-1}(1) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(1)\Big) \, .$$

- $j = m - 1$

$$
\begin{aligned}
&u_{i-1}(m)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(m-1) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(m-1)\Big) + \\
&u_{i-1}(m-1)\Big(1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(m-1) - \Delta t c_{i-1}(m-1)\Big) + \\
&u_{i-1}(m-2)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(m-1) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(m-1)\Big) \;= u_i(m-1)
\end{aligned}
$$

lo que equivale a:

$$
\begin{aligned}
&u_{i-1}(m-1)\Big(1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(m-1) - \Delta t c_{i-1}(m-1)\Big) + \\
&u_{i-1}(m-2)\Big(- \alpha\, a_{i-1}(m-1) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(m-1)\Big) \;= \\
&u_i(m-1) - U_R(t_{i-1})\Big(- \alpha\, a_{i-1}(m-1) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(m-1)\Big)\,.
\end{aligned}
$$

El algoritmo se puede escribir de forma matricial; se inicializa la solución para $i = n$:

$$u_n(j) = U_T(x_j) \qquad j = 0, \ldots, m$$

y para los sucesivos tiempos $i = n-1, \ldots, 0$ se calculará la solución $\{u_n(j)\}_{j=0}^{m}$ a partir de la solución del instante posterior el siguiente sistema lineal $(m-1) \times (m-1)$

$$M^{i-1}\mathbf{u}_{i-1} = \mathbf{b}^i$$

La matriz del sistema depende del tiempo:

$$M^{i-1} = \begin{pmatrix} di_{i-1}(1) & up_{i-1}(1) & 0 & \ldots & 0 \\ lo_{i-1}(2) & di_{i-1}(2) & up_{i-1}(2) & \ldots & 0 \\ 0 & lo_{i-1}(3) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & up_{i-1}(m-2) \\ 0 & 0 & & lo_{i-1}(m-1) & di_{i-1}(m-1) \end{pmatrix}$$

con:

$$up_{i-1}(j) = -\alpha\, a_{i-1}(j) - \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(j)$$

$$di_{i-1}(j) = 1 + 2\,\alpha\, a_{i-1}(j) - \Delta t c_{i-1}(j)$$

$$lo_{i-1}(j) = -\alpha\, a_{i-1}(j) + \frac{\rho}{2}\, b_{i-1}(j)\,,$$

y $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ y $\rho = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

En el segundo miembro aparecen las condiciones de contorno:

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{u}_i - \begin{pmatrix} lo_{i-1}(1)U_L(t_{i-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ up_{i-1}(m-1)U_R(t_{i-1}) \end{pmatrix}$$

Convergencia y estabilidad

Por construcción, el algoritmo es de primer orden en tiempo y de segundo orden en espacio

$$O(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Además, pese a que la ecuación tenga coeficientes variables, el método totalmente implícito es de nuevo incondicionalmente estable.

Método de Crank-Nicolson para coeficientes variables

La ecuación discreta para pasar de tiempo t_i a tiempo t_{i-1} es:

$$\frac{u_i(j) - u_{i-1}(j)}{\Delta t} +$$
$$\frac{a_{i-1}(j)}{2} \frac{u_{i-1}(j+1) - 2u_{i-1}(j) + u_{i-1}(j-1)}{(\Delta x)^2} + \frac{a_i(j)}{2} \frac{u_i(j+1) - 2u_i(j) + u_i(j-1)}{(\Delta x)^2} +$$
$$\frac{b_{i-1}(j)}{2} \frac{u_{i-1}(j+1) - u_{i-1}(j-1)}{2\Delta x} + \frac{b_i(j)}{2} \frac{u_i(j+1) - u_i(j-1)}{2\Delta x} +$$
$$\frac{c_{i-1}(j)}{2} u_{i-1}(j) + \frac{c_i(j)}{2} u_i(j) \; = 0$$

donde $a_i(j) = a(x_j, t_i),\; b_i(j) = b(x_j, t_i),\; c_i(j) = c(x_j, t_i)\,.$

Juntando los términos correspondientes al mismo instante temporal, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&u_{i-1}(j+1)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(j)-\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(j)\Big)+u_{i-1}(j)\Big(1+\alpha\,a_{i-1}(j)-\frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(j)\Big)+\\
&u_{i-1}(j-1)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(j)+\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(j)\Big)\;=\\
&u_{i}(j+1)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(j)+\frac{\rho}{4}\,b_{i}(j)\Big)+u_{i}(j)\Big(1-\alpha\,a_{i}(j)+\frac{\Delta t}{2}c_{i}(j)\Big)+\\
&u_{i}(j-1)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(j)-\frac{\rho}{4}\,b_{i}(j)\Big)
\end{aligned}
$$

Condiciones de contorno

Nuevamente, utilizamos condiciones de contorno de Dirichlet para computar:

$$
\begin{aligned}
u_{i-1}(0)=U_L(t_{i-1}) \quad &\text{y} \quad u_{i-1}(m)=U_R(t_{i-1})\\
u_{i}(0)=U_L(t_{i}) \quad &\text{y} \quad u_{i}(m)=U_R(t_{i})
\end{aligned}
$$

- $j = 1$

$$u_{i-1}(2)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(1)\Big)+u_{i-1}(1)\Big(1+\alpha\,a_{i-1}(1)-\frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(1)\Big)+$$
$$u_{i-1}(0)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(1)\Big)\;=$$
$$u_{i}(2)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i}(1)\Big)+u_{i}(1)\Big(1-\alpha\,a_{i}(1)+\frac{\Delta t}{2}c_{i}(1)\Big)+$$
$$u_{i}(0)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i}(1)\Big)$$

lo que equivale a:

$$u_{i-1}(2)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(1)\Big)+u_{i-1}(1)\Big(1+\alpha\,a_{i-1}(1)-\frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(1)\Big)=$$
$$u_{i}(2)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i}(1)\Big)+u_{i}(1)\Big(1-\alpha\,a_{i}(1)+\frac{\Delta t}{2}c_{i}(1)\Big)$$
$$-U_L(t_{i-1})\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(1)\Big)+U_L(t_i)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i}(1)\Big)$$

- $j = m-1$

$$u_{i-1}(m)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(m-1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(m-1)\Big)+u_{i-1}(m-1)\Big(1+\alpha\,a_{i-1}(m-1)-\frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(m-1)\Big)+$$
$$u_{i-1}(m-2)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(m-1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(m-1)\Big)\;=$$
$$u_{i}(m)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(m-1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i}(m-1)\Big)+u_{i}(m-1)\Big(1-\alpha\,a_{i}(m-1)+\frac{\Delta t}{2}c_{i}(m-1)\Big)+$$
$$u_{i}(m-2)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(m-1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i}(m-1)\Big)$$

lo que equivale a:

$$u_{i-1}(m-1)\Big(1+\alpha\,a_{i-1}(m-1)-\frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(m-1)\Big)+u_{i-1}(m-2)\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(m-1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(m-1)\Big)\;=$$
$$u_{i}(m-1)\Big(1-\alpha\,a_{i}(m-1)+\frac{\Delta t}{2}c_{i}(m-1)\Big)+u_{i}(m-2)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(m-1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i}(m-1)\Big)$$
$$-\,U_R(t_{i-1})\Big(-\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(m-1)-\frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(m-1)\Big)+U_R(t_i)\Big(\frac{\alpha}{2}\,a_{i}(m-1)+\frac{\rho}{4}\,b_{i}(m-1)\Big)\,.$$

El algoritmo se puede escribir de forma matricial; se inicializa la solución para $i = n$:

$$u_n(j) = U_T(x_j) \qquad j = 0, \ldots, m$$

y para los sucesivos tiempos $i = n-1, \ldots, 0$ se calculará la solución $\{u_n(j)\}_{j=0}^{m}$ a partir de la solución del instante posterior el siguiente sistema lineal $(m-1) \times (m-1)$

$$M^{i-1}\mathbf{u}_{i-1} = \mathbf{b}^i$$

La matriz del sistema depende del tiempo:

$$M^{i-1} = \begin{pmatrix} di_{i-1}(1) & up_{i-1}(1) & 0 & \ldots & 0 \\ lo_{i-1}(2) & di_{i-1}(2) & up_{i-1}(2) & \ldots & 0 \\ 0 & lo_{i-1}(3) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & up_{i-1}(m-2) \\ 0 & 0 & & lo_{i-1}(m-1) & di_{i-1}(m-1) \end{pmatrix}$$

donde:

$$up_{i-1}(j) = -\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(j) - \frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(j)$$

$$di_{i-1}(j) = 1 + \alpha\,a_{i-1}(j) - \frac{\Delta t}{2}c_{i-1}(j)$$

$$lo_{i-1}(j) = -\frac{\alpha}{2}\,a_{i-1}(j) + \frac{\rho}{4}\,b_{i-1}(j)\,,$$

y $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ y $\rho = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

En el segundo miembro aparecen las condiciones de contorno:

$$\mathbf{b}^i = N^i\mathbf{u}_i - \begin{pmatrix} lo_{i-1}(1)U_L(t_{i-1}) - lo'_i(1)U_L(t_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ up_{i-1}(m-1)U_R(t_{i-1}) - up'_i(m-1)U_R(t_i) \end{pmatrix}$$

Y también aparece la matriz:

$$N^i = \begin{pmatrix} di'_i(1) & up'_i(1) & 0 & \dots & 0 \\ lo'_i(2) & di'_i(2) & up'_i(2) & \dots & 0 \\ 0 & di'_i(3) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & up'_i(m-2) \\ 0 & 0 & & lo'_i(m-1) & di'_i(m-1) \end{pmatrix}$$

donde:

$$up'_i(j) = \frac{\alpha}{2}\, a_i(j) + \frac{\rho}{4}\, b_i(j)$$

$$di'_i(j) = 1 - \alpha\, a_i(j) + \frac{\Delta t}{2} c_i(j)$$

$$lo'_i(j) = \frac{\alpha}{2}\, a_i(j) - \frac{\rho}{4}\, b_i(j)\,,$$

Convergencia y estabilidad

Por construcción, el algoritmo es de segundo orden en tiempo y en espacio (al tomar derivadas primeras centrales respecto de x conservamos el orden)

$$O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$$

De nuevo, aunque la ecuación tenga coeficientes variables, el método de Crank-Nicolson es incondicionalmente estable.

Sobre las condiciones final y de contorno

Nos vamos a restringir a la valoración de derivados tipo equity en entorno Black-Scholes, es decir, queremos resolver la ecuación:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

definida para $S \in [0, \infty]$.

El valor del derivado a vencimiento, como función del activo subyacente, es precisamente el payoff. El payoff a vencimiento es una de las características que definen el contrato, y, por tanto, es conocido

$$V(S, T) = \text{Payoff}(S, T)\,.$$

Además, también hemos de fijar ciertas condiciones de contorno, las cuales dependerán del propio derivado que pretendamos valorar.

Condiciones de contorno de Dirichlet para algunos derivados

- **Condiciones de contorno para $S = 0$.**
  Si en algún momento $S = 0$, S continuará siendo nula en momentos posteriores. Ello es debido a que estamos considerando para S un proceso estocástico lognormal

$$dS = r\, S\, dt + \sigma\, S\, dW_t$$

La ecuación para $S = 0$ se reduce a una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\partial V}{\partial t} - r\, V = 0$$

con condición final $V(0, T) = V_T(0)$ y solución

$$V(0, t) = V_T(0)\, e^{-r(T-t)}\,.$$

Esta condición de contorno es exacta, no introduce ningún error.

- **Condiciones de contorno para $S = R$.**
  Tenemos que cortar el dominio espacial e introducir una condición de contorno aproximada en general, que introducirá un error en nuestra aproximación. Si se toma R suficientemente grande, el error no afectará a las regiones del dominio donde nos interesa la solución.

  En la práctica, R se suele tomar como 3 o 4 veces el valor del subyacente en la "zona de interés'".

  Aunque cada producto puede ser estudiado de forma particular, podemos proponer alguna aproximación general. Por ejemplo, que el valor del derivado, para subyacente muy grande se comporta como el payoff, o, más precisamente, se comporta como el payoff descontado.

Problema de valoración de una opción call:

Dominio: $(S, t) \in [0, S_{max}] \times [0, T]$.

$$V(S,T) = \max(S - K, 0)$$
$$V(0,t) = 0$$
$$V(S_{max}, t) \approx S_{max} - K\, e^{-r(T-t)}\,.$$

Problema de valoración de una opción put:

Dominio: $(S, t) \in [0, S_{max}] \times [0, T]$.

$$V(S,T) = \max(K - S, 0)$$
$$V(0,t) = K\, e^{-r(T-t)}$$
$$V(S_{max}, t) \approx 0\,.$$

Problema de valoración de una opción barrera put down-and-out:

Este derivado se anula si la cotización del subyacente cae por debajo de S_b .

Dominio: $(S,t) \in [S_b, S_{max}] \times [0,T]$.

$$\begin{aligned} V(S,T) &= \max(K-S,0) \\ V(S_b,t) &= 0 \\ V(S_{max},t) &\approx 0\,. \end{aligned}$$

NOTA. En esta opción barrera hemos sustituido la condición de contorno de la izquierda $S=0$ por $S=S_b>0$.

Ejercicio

Valorar mediante los esquemas totalmente implícito y de Crank-Nicolson, una call vainilla y una opción barrera put down-and-out. ¿Cómo valoraremos una put down-and-in?.

Imponer condiciones de contorno de Dirichlet.

Condiciones de contorno de Neumann

Hasta ahora, en la descripción de los métodos numéricos para la resolución de la ecuación de Black-Scholes, hemos utilizado condiciones de contorno tipo Dirichlet, las cuales son particulares para cada derivado.

No obstante, podemos definir condiciones de contorno un poco más generales relativas a las primeras o segundas derivadas del proceso de valor del derivado respecto al subyacente.

Volvamos a la representación parabólica de la ecuación de Black-Scholes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = 0,$$

donde: $a(x,t) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\,,\quad b = rx$ y $c = -r\,.$

- **En los bordes, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.**

  Si la segunda derivada de u en m es 0, la diferencia backward en t_{i-1} cumplirá:

$$\frac{u_{i-1}(m) - 2\,u_{i-1}(m-1) + u_{i-1}(m-2)}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; u_{i-1}(m) = 2\,u_{i-1}(m-1) - u_{i-1}(m-2)\,.$$

  También la segunda derivada de u en 0 es 0, por lo que:

$$\frac{u_{i-1}(2) - 2\,u_{i-1}(1) + u_{i-1}(0)}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; u_{i-1}(0) = 2\,u_{i-1}(1) - u_{i-1}(2)\,.$$

- **En los bordes, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.**

  O equivalentemente, $u(t,x) \approx e^x$.

  Si discretizamos backward la primera derivada respecto de x, tenemos:

  para $j = m$

$$\frac{u_{i-1}(m) - u_{i-1}(m-1)}{\Delta x} = \frac{u_{i-1}(m) - 2\,u_{i-1}(m-1) + u_{i-1}(m-2)}{(\Delta x)^2}$$

Si $\Delta x \neq 1$

$$u_{i-1}(m) = u_{i-1}(m-2)\,\frac{1}{\Delta x - 1} + u_{i-1}(m-1)\frac{\Delta x - 2}{\Delta x - 1},$$

similarmente, para $j = 0$,

$$u_{i-1}(0) = u_{i-1}(1)\,\frac{\Delta x + 2}{\Delta x + 1} - u_{i-1}(2)\frac{1}{\Delta x + 1}.$$

Observación

- Al establecer estas condicones de contorno, independientemente del payoff final del derivado, hemos hecho algunas asunciones sobre el comportamiento asintótico de u, imponiendo cierta dependencia funcional entre u y x en los bordes del dominio.
- También es importante recalcar que, al cambiar la formulación de las condiciones de contorno, se verán modificadas la primera y la última fila de las matrices de los métodos de diferencias finitas que acabamos de ver.

Limitaciones: oscilaciones en las soluciones numéricas

Vimos que los esquemas explícitos eran estables si:

$$\frac{2}{\alpha}\sigma^2 \geq \sigma^4 + \mu^2\,\Delta x^2 + |\mu^2\,\Delta x^2 - \sigma^4|\,.$$

La condición de estabilidad no se cumple si, por ejemplo,

- $\Delta t >> \Delta x$,
- o también si, para Δt y Δx fijados, $\mu >> \sigma$.

La última condición es habitual en finanzas en derivados sobre tipos de interés, ya que se suele imponer cierto “decay” en la volatilidad:

$$\sigma(t) = \sigma_0\, e^{-a(T-t)} \quad \text{con } \sigma_0,\ a \text{ fijados}\,.$$

Aunque los esquemas implícitos son incondicionalmente estables, si $\mu >> \sigma$ pueden originarse oscilaciones en la solución numérica en tiempos anteriores al vencimiento.

Para solucionarlo, debemos verificar la siguiente desigualdad

$$\sigma_i^2(j) \geq |\mu_i(j)|\,\Delta x$$

en los puntos de la malla donde aparecen las oscilaciones.

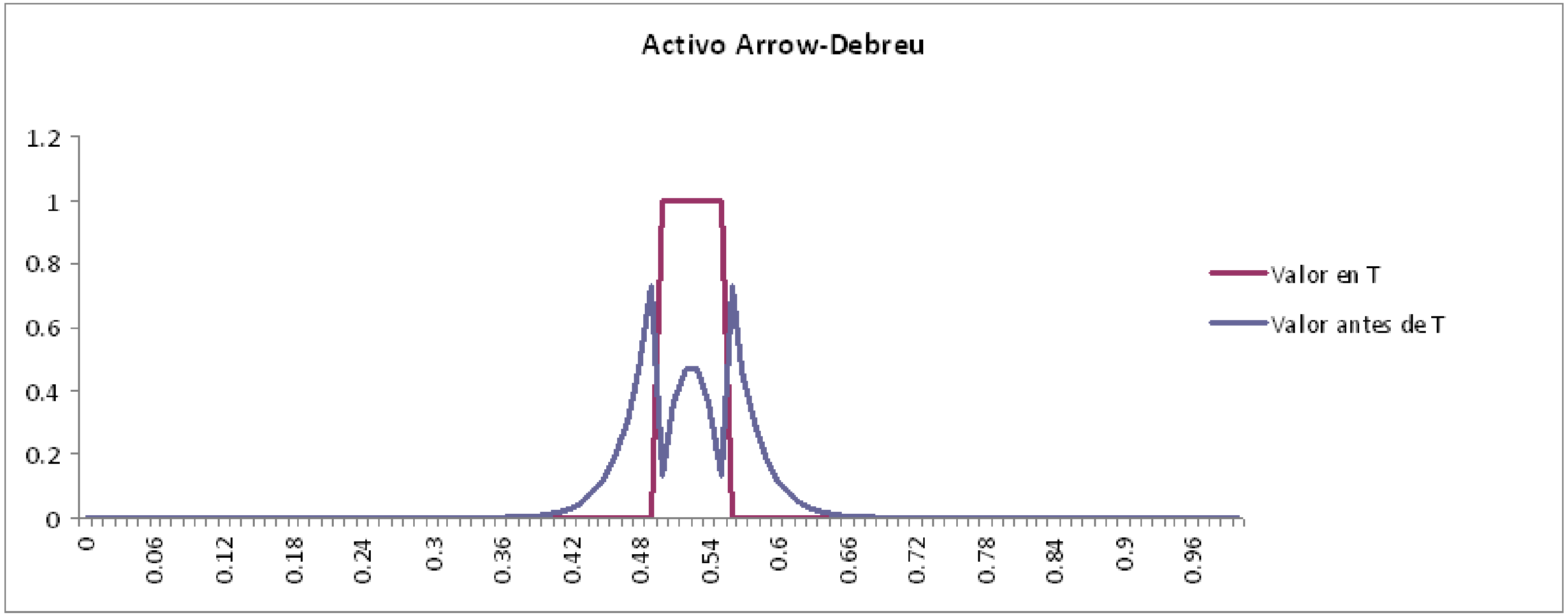
Una alternativa para verificar esto último es cambiar la discretización de la primera derivada de u respecto de la variable x, dicho proceso se conoce como **upwinding**. Así, las primeras derivadas respecto de x se formulan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{u(t,x+\Delta x)-u(t,x-\Delta x)}{2\,\Delta x} & \text{si } |\mu(x,t)|\,\Delta x \leq \sigma^2(x,t) \\ \frac{u(t,x)-u(t,x-\Delta x)}{\Delta x} & \text{si } \mu(x,t)\,\Delta x < -\sigma^2(x,t) \\ \frac{u(t,x+\Delta x)-u(t,x)}{\Delta x} & \text{si } \mu(x,t)\,\Delta x > \sigma^2(x,t) \end{cases}$$

Nótese que en el segundo y en el tercer caso se baja el orden de convergencia en x a $O(\Delta x)$.

Payoffs discontinuos: Crank-Nicolson

En el método de Crank-Nicolson, puede ocurrir que al valorar opciones con payoffs discontinuos (calls binarias, activos Arrow-Debreu, . . .), aparezcan oscilaciones en instantes intermedios antes de la fecha valor t_0.



Para solucionarlo, podemos adaptar la malla de discretización añadiendo puntos cerca de las discontinuidades. Esto hace que tengamos que implementar métodos específicos para cada payoff.

Otra alternativa, debido a la discontinuidad de la solución en tiempo T, puede ser implementar métodos numéricos más generales que no necesitan de suficiente regularidad en la solución; estos métodos se conocen como *elementos finitos*.

6. Árboles de CRR: relación con los Métodos Explícitos

Partamos de la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0\,.$$

Primero, hagamos el cambio de variable $x = \ln S$ tal que:

$$u(x,t) = V(S,t)$$

entonces, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} & = \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{\partial V}{\partial S} & = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dS} = \frac{1}{S}\,\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} & = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \\ & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{dx}{dS}\,\frac{1}{S} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{S^2}\right) = \\ & = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{1}{S^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{1}{S^2}\,. \end{cases}$$

Por lo que, sustituyendo en la ecuación de Black-Scholes, llegamos a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - r\,u = 0\,.$$

Ahora, aplicamos un método de diferencias finitas explícitas a la edp que define $u(x,t)$:

$$\frac{u_i(j) - u_{i-1}(j)}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u_i(j+1) - 2u_i(j) + u_i(j-1)}{(\Delta x)^2} +$$
$$+ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \frac{u_i(j+1) - u_i(j-1)}{2\Delta x} - r\,u_{i-1}(j) = 0\,,$$

operando,

$$\begin{aligned}(1 + r\,\Delta t)\,u_{i-1}(j) = & \,u_i(j+1)\left(\frac{\alpha}{2}\sigma^2 + \frac{\rho}{2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) + \\ & u_i(j)\left(1 - \alpha\,\sigma^2\right) + \\ & u_i(j-1)\left(\frac{\alpha}{2}\sigma^2 - \frac{\rho}{2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right).\end{aligned}$$

Es decir,

$$u_{i-1}(j) = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\Big(a\,u_i(j+1) + b\,u_i(j) + c\,u_i(j-1)\Big)\,,$$

donde:

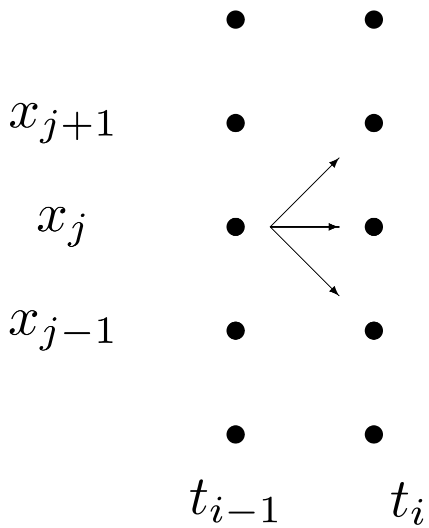
$$a = \frac{1}{2}\Big(\alpha\,\sigma^2 + \rho\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Big)\,,$$

$$b = 1 - \alpha\,\sigma^2\,,$$

$$c = \frac{1}{2}\Big(\alpha\,\sigma^2 - \rho\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Big)\,.$$

Nótese que mediante el cambio de coordenadas empleado, hemos transformado una edp con coeficientes variables a una edp con coeficientes constantes, por ello, los parámetros a, b, c con los mismos en cada salto de tiempo.

Claramente $a + b + c = 1$, si además, $a, b, c \geq 0$, podemos interpretar estos parámetros como probabilidades. Por ejemplo, a puede representar la probabilidad de subir desde el nodo j al nodo $j + 1$ en un intervalo de tiempo Δt .



Comprobar que $a, b, c \geq 0$ es equivalente a verificar:

$$\alpha\,\sigma^2 \,\leq\, 1\,,$$

$$\alpha\,\sigma^2 \,\geq\, -\rho\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\,,$$

$$\alpha\,\sigma^2 \,\geq\, \rho\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\,,$$

de manera que,

$$\sigma\,\sqrt{\Delta t} \,\leq\, \Delta x \,\leq\, \frac{\sigma^2}{|r - \frac{1}{2}\,\sigma^2|}\,.$$

Imaginemos ahora que los coeficientes a, b, c puedan ser negativos (¡probabilidades negativas!). Por ejemplo, podemos suponer que $\Delta x \,<\, \sigma\,\sqrt{\Delta t} \,\leq\, \frac{\sigma^2}{|r - \frac{1}{2}\,\sigma^2|}$.

Según las condiciones de estabilidad para métodos explícitos (página 71), ha de darse:

$$2\,\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\,\sigma^2 \geq \sigma^4 + \left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 + \left|\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 - \sigma^4\right| ,$$

ahora bien, $\Delta x \ < \sigma\,\sqrt{\Delta t} \ \leq \ \frac{\sigma^2}{|r - \frac{1}{2}\,\sigma^2|} \ \Leftrightarrow 1 \ < \ \sigma^2\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \ \leq \ \frac{\sigma^4}{\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2}$,
por lo cual, $\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 \ \leq \ \sigma^4$.

Si nos fijamos en el segundo miembro de la condición de estabilidad,

$$\sigma^4 + \left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 + \left|\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 - \sigma^4\right| =$$

$$\sigma^4 + \left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 - \left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)^2 \Delta x^2 + \sigma^4 \ = 2\,\sigma^4 .$$

Por otro lado,

$$\sigma^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 1 \Leftrightarrow 2\,\sigma^4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} > 2\,\sigma^2 \Leftrightarrow 2\,\sigma^4 > 2\,\sigma^2 \frac{\Delta x^2}{\Delta t},$$

por lo que el método es inestable.

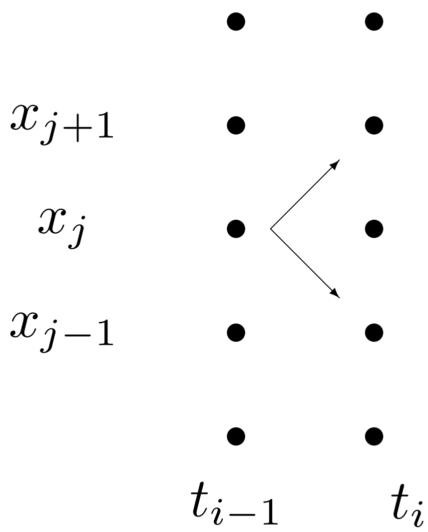
Resumiendo, hemos dado una explicación probabilística a la noción de estabilidad: una probabilidad negativa en un árbol trinomial construido bajo un esquema de diferencias explícitas, es equivalente a que el propio esquema sea inestable.

Árbol binomial de CRR

Acabamos de ver cómo construir un árbol trinomial bajo un esquema de diferencias finitas explícito; para construir un árbol binomial basta con tomar $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{\sigma^2}$, y así $b = 0$.

El esquema binomial queda como:

$$u_{i-1}(j) = \frac{1}{1 + r\,\Delta t}\Big(a\,u_i(j+1) + c\,u_i(j-1)\Big)\,,$$



donde:

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\,,$$

$$c = 1 - a\,.$$

Por último, hagamos algunas cuentas para llegar a la formulación del árbol de CRR.

En el mallado en x, $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, por lo que:

$$S_{j+1} = e^{x_j + \Delta x} = S_j \cdot e^{\Delta x} = S_j \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \, .$$

De esta forma, podemos escribir $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Fijado u, la probabilidad de subida o de bajada en el árbol de CRR tiene la expresión:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - \frac{1}{u}}{u - \frac{1}{u}} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}$$

Si desarrollamos en series de Taylor los sumandos que aparecen en la expresión de p,

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= 1 + r\,\Delta t + O(\Delta t^2)\,, \\ -e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &= -1 + \sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \frac{1}{6}\sigma^3\Delta t^{3/2} + O(\Delta t^2)\,, \\ e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} &= 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \frac{1}{6}\sigma^3\Delta t^{3/2} + O(\Delta t^2)\,, \end{aligned}$$

y sustituimos, llegamos a:

$$p = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\Big) + O(\Delta t^{3/2}) = a + O(\Delta t^{3/2})\,.$$

De manera que, si

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t} \quad \text{y} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

la diferencia entre p y a es del orden $O(\Delta t^{3/2})$.

En consecuencia, el método explícito con $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ es "casi" un método (árbol) binomial.

Detalle Matemático

$$\begin{aligned}
p &= \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\
&= \frac{r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \frac{1}{6}\sigma^3\Delta t^{3/2} + O(\Delta t^2)}{2\sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{3}\sigma^3\Delta t^{3/2} + O(\Delta t^2)} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right) + \frac{1}{6}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})}{1 + \frac{1}{6}\sigma^2\Delta t + O(\Delta t^{3/2})} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\right) + O(\Delta t^{3/2})\,.
\end{aligned}$$