Modelos de Crédito: Modelos de una Referencia

Juan E. Palomar (juan.palomar@bbva.com)

MEFC-BBVA, 10 - 18 de mayo de 2019

Índice

1. Instrumentos de mercado

- Bono Corporativo
- Par Asset Swap
- Credit Default Swap
- Par Asset Swap Spread vs Credit Default Swap Spread. Factores que influyen en la base.
- Digital Default Swap
- Recovery Swaps
- CDS Forward

2. Modelo Estático de una Referencia

- Modelización del Evento de Default
- Valoración de Instrumentos de Mercado
- Valoración de un CDS
- Relación entre la Prima de CDS y la Intensidad del Evento de Quiebra
- Relación entre Primas de CDS Spot y Prima de CDS Forward
- Calibración

3. Modelos Dinámicos sobre una Referencia (Generalidades)

- Introducción
- Modelos Dinámicos de Crédito de un Factor
- Filtración Background
- Factores de Descuento y Probabilidad de Supervivencia
- Probabilidad de Supervivencia Bajo Distintas Medidas
- Valoración de Pagos en Quiebra

4. Modelo de Black para CD Swaptions

- Opciones cobre CDS (Credit Default Swaptions)
- DV01(t) como Numerario
- Medida de Supervivencia Forward
- Modelo de Black para CD Swaptions

5. Réplica de un derivado de crédito. Ecuación en derivadas parciales.

- Procesos de Poisson y lema de Itô con saltos.
- Caso 1. Crédito estocástico, resto de factores deterministas
- Caso 2. Crédito y tipos de interés estocásticos.

6. Basis Bono-CDS.

- Bono y CDS diferencial.
- PDE para un bono.

7. Modelo N-factorial: HJM con crédito.

- Modelo HJM para tipos de interés (repaso).
- Intensidades de default según HJM.

8. Crédito y FX.

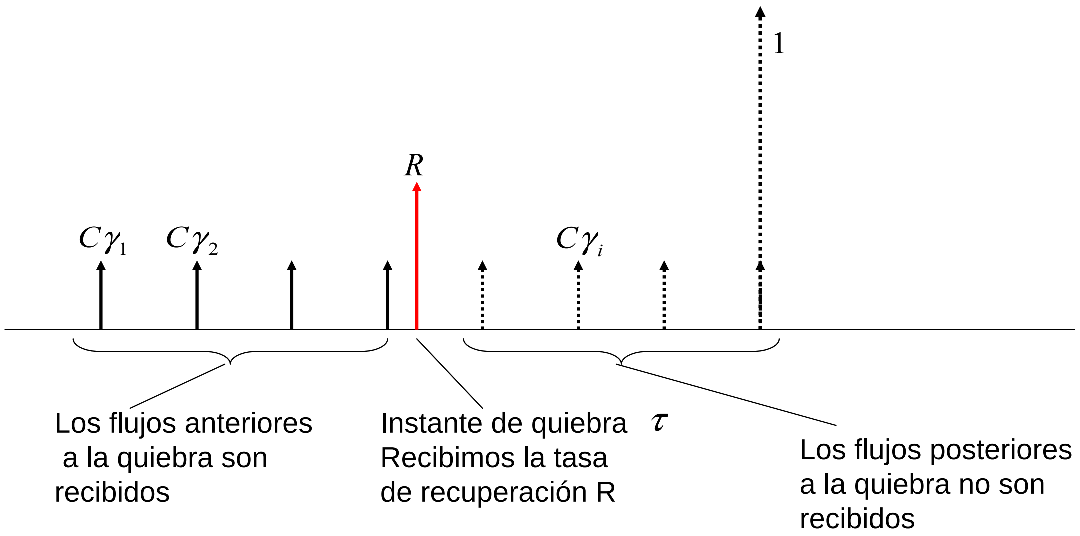
- Modelo de Merton.
- Quanto CDS.
- Cobertura de derivados quanto.

1. Instrumentos de Mercado

Bono Corporativo de Cupón Fijo

Un bono corporativo es un bono emitido por una empresa.

No obstante, debemos considerar la posibilidad de quiebra por parte del emisor. De manera que los flujos de caja son como los representados en la figura:



c: Cupón del Bono.
γ_i: Fracción de año comprendida entre las fechas de pago T_{i-1} y T_i.
R: Tasa de recuperación del bono.

Podemos distinguir los flujos que recibimos de un bono corporativo en 2 tipos:

- Flujos en supervivencia.
- Flujos en default.

De forma que conviene definir los siguientes activos:

$\bar{B}(T,T) = \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ siendo $\bar{B}(t,T)$ su valor en una fecha $t \leq T$.

$e(T,T) = \mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}}$ siendo $e(t,T)$ su valor en una fecha $t \leq T$.

$\bar{B}(t,T)$ nos ayudará a valorar flujos en supervivencia y $e(t,T)$ flujos en default.

Tasa de recuperación

La tasa de recuperación es el valor del título en el momento de default expresado como porcentaje del nominal del título. Se trata de una cantidad difícil de aquilatar con precisión.

La tasa de recuperación R es un número comprendido entre 0 y 1. En caso de impago por cada euro se recuperan R. A $\mathrm{Sev} = 1 - \mathrm{R}$ se le conoce como severidad y mide cuanto se pierde, como fracción del nominal.

La tasa de recuperación depende fundamentalmente del orden de prelación (seniority) de esa deuda en concreto sobre el conjunto de la deuda de ese emisor. Pero la tasa de recuperación se determina en mercado y se pretende que se determine (casi) en el momento de default, de manera que depende de percepciones sobre la situación específica de la empresa en default y de la situación de los mercados y la economía en el momento de default.

Hay información estadística recogida por las agencias de rating de tasa de recuperación en función del nivel de seniority del rating, del sector, . . . , que se emplean para estimar a priori la potencial tasa de recuperación.

Las tasas de recuperación medias (históricas) para distintos órdenes de prelación son las siguientes:

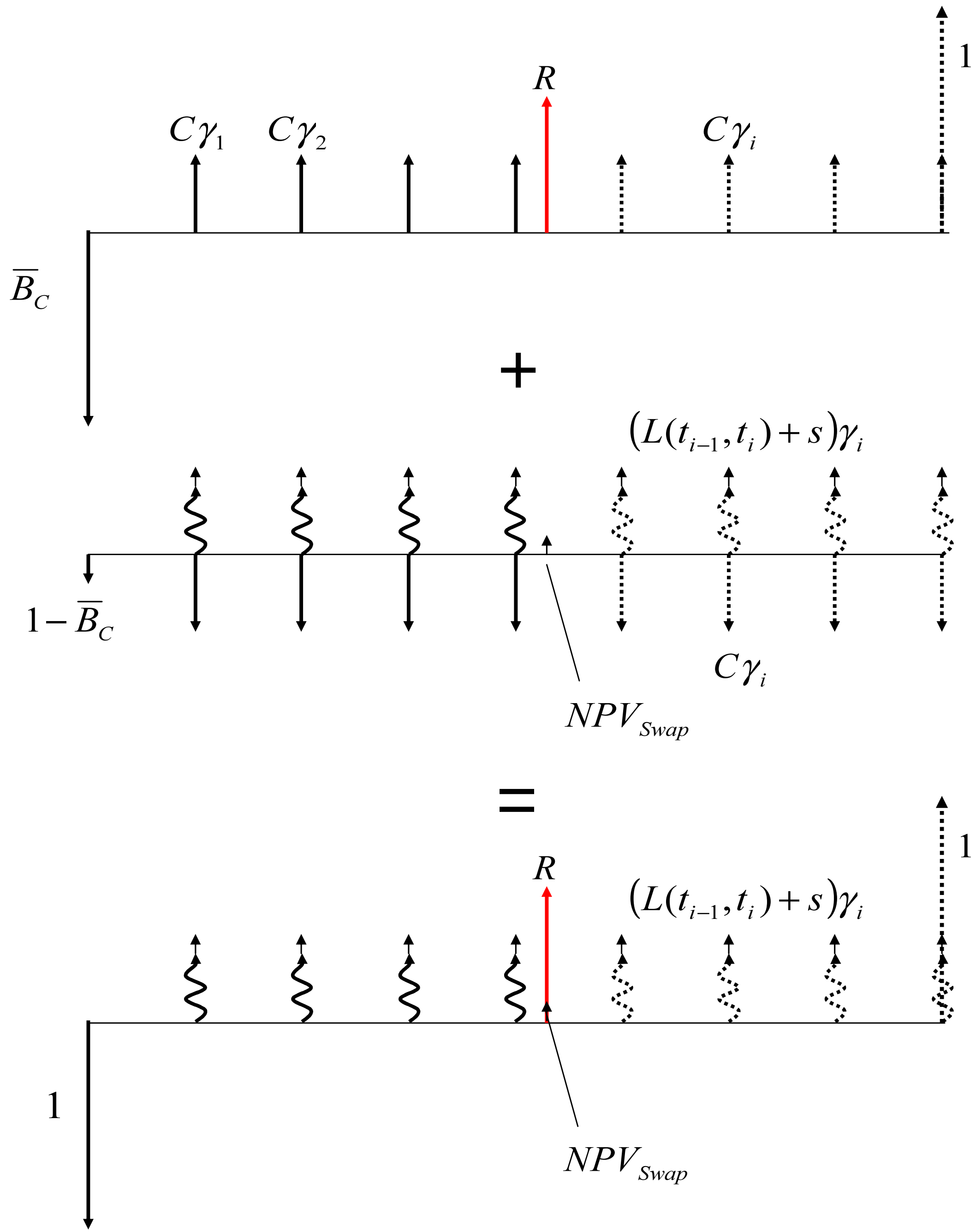
Orden de Prelación	**Media**	**Desv. típica**
Senior secured	63.75	31.06
Senior unsecured	49.92	34.72
Senior subordinated	28.18	28.26
Junior subordinated	12.81	18.42
All instruments	51.14	37.38

Una regla habitual es utilizar como promedio de la tasa de recuperación de la deuda senior un 40 % y de la deuda subordinada un 20 %. Para préstamos la tasa de recuperación de referencia es de 70 %.

Par Asset Swap

Un bono corporativo emitido por una empresa tiene riesgo de tipos de interés y riesgo de crédito. Si queremos aislar el riesgo de crédito, debemos entrar en un swap de tipos de interés mediante el cual intercambiamos los cupones fijos del bono por cupones flotantes.

Una forma de hacerlo es lo que llamamos par asset swap.


1
R
$C\gamma_1$
$C\gamma_2$
$C\gamma_i$
$\overline{B}_C$
+
$(L(t_{i-1},t_i)+s)\gamma_i$
$1-\overline{B}_C$
$C\gamma_i$
NPV_{Swap}
=
1
R
$(L(t_{i-1},t_i)+s)\gamma_i$
1
NPV_{Swap}

El swap de tipos de interés es tal que pagamos el cupón fijo pagado por el bono y recibimos flotante más spread. Determinamos el spread del swap de manera que el precio neto de toda la estructura sea par. Es decir, que s debe ser el valor que hace que:

$$NPV_{swap}(0) = 1 - \bar{B}_c(0) = (SW(0) + s - c))\, PV01(0)$$

$\bar{B}_c(0)$: Precio del bono con riesgo de crédito.

$SW(0)$: Tipo par swap definido para las fechas de pago del bono.

c: Cupón del bono.

$PV01(0) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i B(0, t_i)$: Valor de la anualidad.

Al spread s es a lo que llamamos par asset swap spread del bono.

$$s = \frac{1 - \bar{B}_c(0)}{PV01(0)} + c - SW(0)$$

Si operamos sobre la expresión anterior:

$$1 - \bar{B}_c(0) = -(c-s)PV01(0) + SW(0)PV01(0) = -(c-s)PV01(0) + 1 - B(0,t_n)$$

Donde $B(0,t_n)$ es el factor de descuento a la última fecha de pago del bono.

$$-\bar{B}_c(0) = sPV01(0) - cPV01(0) - B(0,t_n)$$

Pero $cPV01(0) + B(0,t_n)$ es el valor de un bono sin riesgo de crédito con los mismos flujos que el bono $\bar{B}_c(0)$. Es decir, $B_c(0) = cPV01(0) + B(0,t_n)$.

$$B_c(0) - \bar{B}_c(0) = sPV01(0) \Rightarrow s = \frac{B_c(0) - \bar{B}_c(0)}{PV01(0)}$$

Luego el par asset swap spread es la diferencia entre el precio de un bono sin riesgo de crédito y un bono con riesgo de crédito en unidades de anualidad.

El par asset swap del bono nos da una indicación del riesgo de crédito percibido por el mercado, tanto en términos de probabilidad de quiebra como en términos de tasa de recuperación.

Aquellos bonos para los cuales se perciba que el riesgo de crédito es mayor que el representado por la curva swap tendrán un par asset swap spread positivo. Por el contrario, aquellos bonos con una calidad crediticia superior a la representada por la curva swap tendrán un par asset swap spread negativo.

En caso de quiebra, debemos liquidar el valor de mercado del swap (el cual dependerá del nivel de tipos en el instante de quiebra).

Ilustración

Calcular el par asset swap spread de un bono de cupones anuales igual al $5\,\%$ teniendo una curva de tipos plana a niveles del $4{,}5\,\%$. El precio del bono es de $99\,\%$ y su vencimiento es 5 años

Credit Default Swap

Un credit default swap es un instrumento de tipo swap entre dos partes. Una parte compra protección sobre el potencial default (evento de crédito) de una referencia $\mathcal{Z}$ y la otra vende protección. Se fija un nominal nocional (Nom) de referencia.

- La parte que compra protección paga un spread (tasa fija) sobre el nocional, mientras no haya evento de crédito.
- La parte que vende protección no paga nada salvo que haya default y en ese momento compensa a la contraparte por la pérdida que hubiera tenido en caso de tener un bono de esa referencia con nominal el nocional del CDS.

Liquidación en caso de quiebra:

Liquidación por diferencias. La parte que vende protección paga

$$(100\,\% - \mathrm{R}) \times \mathrm{Nom}$$

donde R se determina a partir de los precios en default de una serie de emisiones concretas de la referencia, aunque a veces se determina contractualmente,

Liquidación física. El vendedor de protección paga $100\,\% \times \mathrm{Nom}$ y el comprador de protección entrega el bono en default con nominal total igual al nocional del CDS.

En el momento de quiebra, existe la posibilidad de que el contrato obligue al comprador de protección a pagar el cupón corrido de la prima desde la última fecha de pago hasta el momento de la quiebra.

Fechas de pago de spread

Calendario predefinido, IMM. Fechas estandarizadas de pago. Trimestralmente, los días 20 de marzo, junio, septiembre y diciembre. En mercado, los CDS suelen cotizar con fechas de pago IMM. Se pueden o no ajustar las fechas efectiva y de vencimiento a este calendario de pago. En caso de ajuste, es más común ajustar el vencimiento, resultando el nuevo vencimiento la siguiente fecha IMM al vencimiento inicial. La construcción de fechas de pago, se haría hacia atrás desde vencimiento.

Estándar. La protección comprada comienza en una fecha inmediata, o en una fecha forward que se negocia.

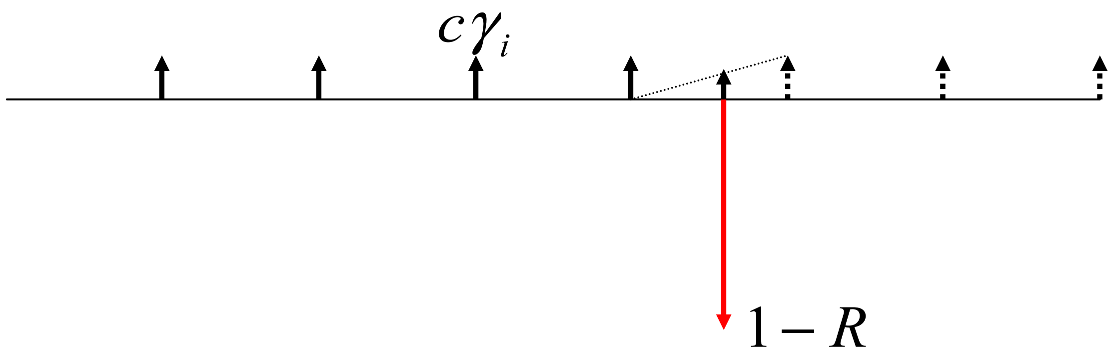
Spread inicial, breakeven. El spread del CDS se determina al inicio para que el valor inicial de las dos ramas (rama de spread y rama de default) sea el mismo. Es decir, el coste inicial del CDS es 0.

El spread del CDS depende de

• las expectativas del potencial default (PD) *de la compaññía* : cuanto más probable sea la percepción de PD, mayor spread;

• las expectativas de severidad del bono en cuestión en caso de default (LGD): cuanta mayor severidad esperada, mayor spread.

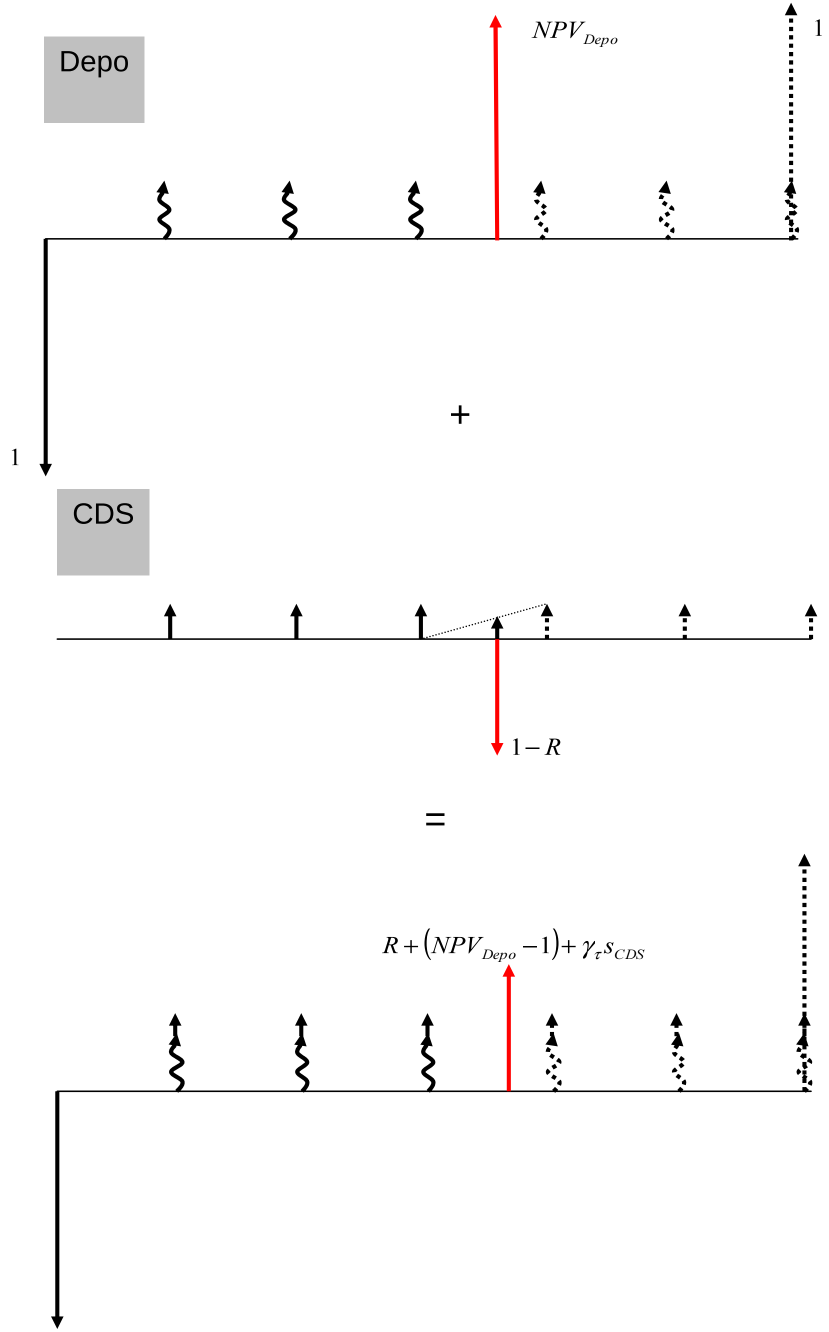
Los spreads de CDS tienen estructura temporal, es decir, los spread cotizados dependen del plazo de cobertura. Normalmente, los spreads cotizados de los CDS a plazo largos son mayores que los de a plazos cortos, pero no tiene porque ser así siempre. Los spreads de CDS son dinámicos y volátiles.


$c\gamma_i$
$1-R$

Par Asset Swap Spread vs CDS Spread

De cara a comparar el par asset swap spread con el CDS spread, comparamos los portfolios siguientes:

- Bono en par asset swap.
- Depósito (libre de riesgo) más venta de protección en CDS.


Depo
NPV_{Depo}
1
1
+
CDS
$1-R$
=
$R+(NPV_{Depo}-1)+\gamma_{\tau}s_{CDS}$

Los flujos en tiempo de quiebra son:

- Par Asset Swap: $R + NPV_{swap}(\tau)$
- Depósito + CDS: $R + NPV_{depo}(\tau) - 1 + \gamma_\tau s_{CDS}$

Donde γ_τ es la fracción de año compredida entre la fecha de pago anterior a la fecha de quiebra y la fecha de quiebra.

Si hacemos la hipótesis de que las fechas de quiebra se concentran en fechas de pago, entonces:

$$NPV_{depo}(T_i) = 1, \gamma_{T_i} = 0 \Rightarrow R + NPV_{depo}(T_i) - 1 + \gamma_{T_i} s_{CDS} = R$$

Mientras que el pago para el par asset swap es:

$$R + NPV_{swap}(T_i)$$

De manera que, a grandes rasgos, la mayor diferencia de los pagos en quiebra reside en el valor del swap de tipos en la fecha de default.

Por otro lado, los pagos en supervivencia tienen forma de flotante mas spread en ambos casos.

En aquellos casos es los que el bono cotice inicialmente a la par, se cumplirá que $NPV_{swap}(0) = 0$, de manera que en estos casos será más sencillo que se cumpla:

$$s_{CDS} \approx s_{Asset}$$

Para aquellos bonos que coticen al descuento $(\bar{B}_c(0) < 1)$, tendremos que $NPV_{swap}(0) > 0$. En estos casos, parece razonable pensar que:

$$s_{CDS} > s_{Asset}$$

Equivalentemente, para aquellos bonos que coticen a la prima se cumplirá:

$$s_{CDS} < s_{Asset}$$

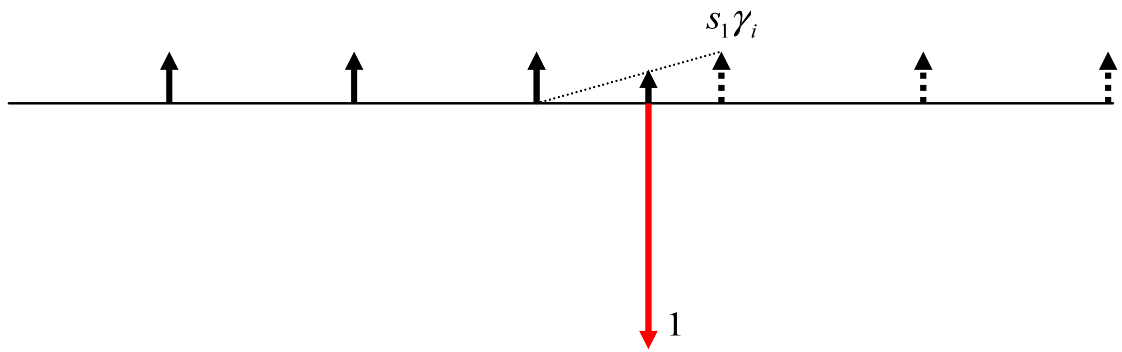
No obstante, si el bono no cotiza muy lejos de la par, los niveles de asset swap spread son una buena estimación de los spreads de CDS.

Digital Default Swap

En el caso de un CDS, el pago en default está dado por la tasa de recuperación del bono. La tasa de recuperación del bono es el precio en mercado del bono tras el instante de quiebra. Obviamente, esta cantidad no es conocida antes de ese instante.

Las primas de CDS reflejan las probabilidades de quiebra y tasas de recuperación implícitas en mercado. De manera que no tenemos aisladas las probabilidades de quiebra descontadas por el mercado.

Por el contrario un digital default swap es un contrato en el cual el pago en default se acuerda en el contrato, de manera que ya no tenemos la incertidumbre de la tasa de recuperación. Es típico que el pago en caso de default sea el nominal del contrato.



Debido a que no tenemos incertidumbre sobre el pago en default, podremos inferir probabilidades de quiebra descontadas por el mercado, sin la necesidad de hacer hipótesis alguna sobre la tasa de recuperación.

Obviamente, debido a que el pago en quiebra es mayor en el caso de CDS digital, ha de cumplirse que:

$$S_1 > S_R$$

S_1: Spread de CDS digital.

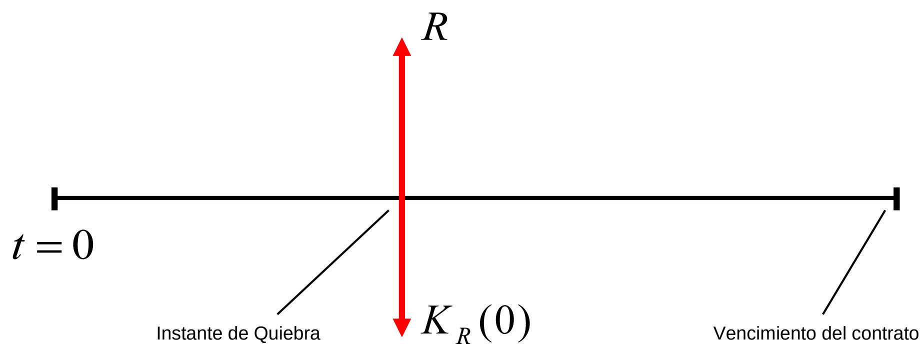
S_R: Spread de CDS.

S_1 se negocia de manera que el swap tiene valor nulo en la fecha de contratación.

Recovery Swaps

Un recovery swap es un contrato mediante el cual dos contrapartidas se comprometen a intercambiarse unos flujos en caso de que una referencia crediticia quiebre antes del vencimiento del recovery swap.

Una de las contrapartidas recibe la tasa de recuperación del bono subyaciente y paga una cantidad negociada en la fecha de contratación $K_R(0)$.



La cantidad $K_R(0)$ da una medida de cuál es la tasa de recuperación implícita en mercado. Se negocia en la fecha de contratación de manera que el contrato tenga valor cero.

CDS, CDS digital y Recovery Swap

Intentemos relacionar las cantidades $s_1(t)$, $s_R(t)$ y $K_R(t)$ (primas y recovery implícito de tres contratos con mismas fechas de pago y mismo vencimiento).

Para ello consideramos un portfolio formado por las siguientes posiciones:

- Venta de protección en CDS por un nominal de 1 a la prima de mercado $s_R(t)$ a un vencimiento T_n.
- Compra de protección en CDS digital por un nominal $\frac{s_R(t)}{s_1(t)}$ a la prima de mercado $s_1(t)$ al mismo vencimiento T_n.

Debido a que se trata de dos swaps de mercado, el valor en tiempo de contratación t de la estructura es 0.

En fechas de pago el pago neto es:

$$\gamma_i s_R(t) 1 - \gamma_i s_1(t) \frac{s_R(t)}{s_1(t)} = 0$$

Siendo γ_i la fracción de año comprendida entre las fechas de pago T_{i-1} y T_i.

Y en el instante de default:

$$-1 + R + \frac{s_R(0)}{s_1(0)} = R - \left(1 - \frac{s_R(0)}{s_1(0)}\right)$$

Como hemos comentado, el valor de la estructura en la fecha de contratación es nulo. Además se trata de un contrato según el cual recibimos R y pagamos una cantidad $\left(1 - \frac{s_R(0)}{s_1(0)}\right)$,determinada en el momento de contratación, en caso de quiebra anterior a la fecha de vencimiento del contrato. De manera que estamos replicando un recovery swap.

De lo anterior se deduce que las cantidades $s_1(t)$, $s_R(t)$ y $K_R(t)$ se relacionan según:

$$K_R(t) = \left(1 - \frac{s_R(t)}{s_1(t)}\right) \Rightarrow s_1(t) = \frac{s_R(t)}{1 - K_R(t)}$$

Forward Credit Default Swaps

Un forward CDS es un contrato por el que se acuerda ahora entrar en un CDS de un cierto plazo, digamos 5 años, en una fecha futura T.

El spread para ese CDS (del futuro) se fija ahora para que el contrato del forward CDS valga 0 al inicio; análogamente a como ocurrre con los forward swap de tipos de interés.

Si hubiera default antes de la fecha T de comienzo del CDS, el contrato queda cancelado.

Adoptemos la perspectiva del comprador de protección en ese CDS forward. Se puede conseguir la misma protección, entrando como comprador de protección en un CDS a $T+5$ años y vendiendo protección en un CDS a T años, ambos con el mismo nocional. Durante los T años hasta el arranque del forward CDS se pagarán (si el spread del CDS a $T+5$ es mayor que el spread del CDS a T años, como es habitual) cupones. De manera que esa compraventa no replica los flujos del forward CDS. Pero si nos dice que el spread del CDS forward debe ser tal que haga que la rama que paga protección en el CDS forward debe valer lo mismo que la rama de protección (una comprada y otra vendida) de la cartera anterior.

2. Modelo Estático sobre una Referencia

Modelización del evento de Default

Nos disponemos a modelizar el evento de quiebra de una empresa. Para ello vamos a dividir el tiempo en intervalos de longitud diferencial dt. En cada uno de esos intervalos definiremos la variable λ_t.

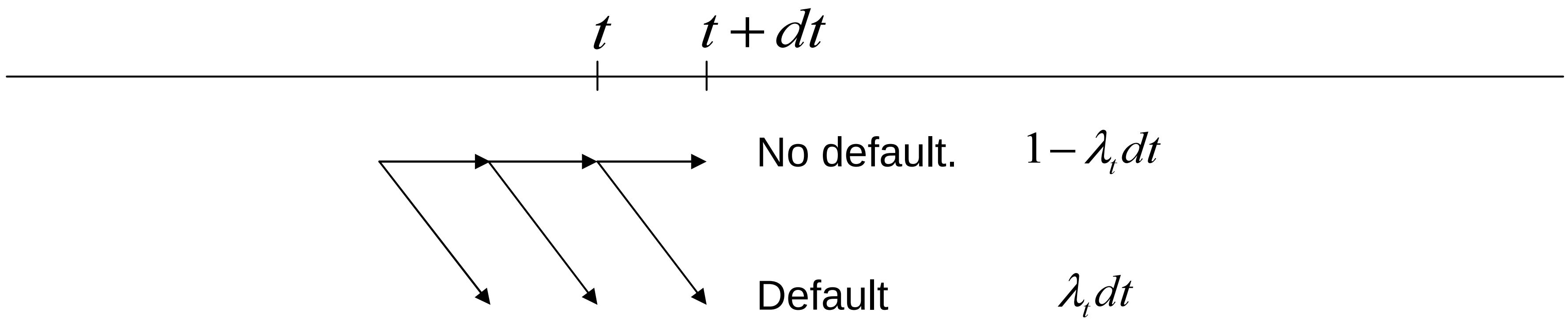
$$Pr\left[\tau \leq t + dt | \tau > t\right] = \lambda_t dt$$

τ: Instante de quiebra.

De manera que λ_t es la probabilidad de quiebra por unidad de tiempo condicionada a la supervivencia al inicio del intervalo.

Llamamos a λ_t la intensidad del evento de default.

En general λ_t será una función del tiempo (determinista o estocástica).



$$P[\tau \leq t + dt \mid \tau > t] = \lambda_t dt$$

Tiempo de quiebra

Intensidad del proceso de default

Relación entre λ_t y la Probabilidad de Supervivencia

En principio, supondremos que la función λ_t es una función determinista del tiempo.

Definamos la función

$$P(t,T) = Pr\left[\tau > T|\mathcal{F}_t\right]$$

Que no es más que la probabilidad de supervivencia a la fecha futura T condicionada a la información disponible en tiempo t ($\mathcal{F}_t$).

Para el horizonte $T + dT$ tendremos

$$P(t,T+dT) = Pr\left[\tau > T|\mathcal{F}_t\right] Pr\left[\tau > T+dT|\mathcal{F}_t, \tau > T\right] = P(t,T)\left(1-\lambda_T dT\right)$$

$$\Downarrow$$

$$dP(t,T) = -\lambda_T P(t,T) dT$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{s=0}^{T} \frac{dP(t,s)}{P(t,s)} = -\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds$$

$$\Downarrow$$

$$\ln\left(\frac{P(t,T)}{P(t,t)}\right) = -\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds$$

$$\Downarrow$$

$$P(t,T) = P(t,t)\exp\left(-\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds\right)$$

Pero $P(t,t) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}$, luego

$$P(t,T) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\exp\left(-\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds\right)$$

Probabilidades de Supervivencia Forward

Definimos la probabilidad de supervivencia forward como:

$$P(t,T,S) = Pr\left[\tau > S | \tau > T, \mathcal{F}_t\right], S \geq T$$

Y nos servimos de que

$$P(t,S) = Pr\left[\tau > S|\mathcal{F}_t\right] = Pr\left[\tau > T|\mathcal{F}_t\right] Pr\left[\tau > S|\mathcal{F}_t, \tau > T\right] = P(t,T)P(t,T,S)$$

De manera que

$$P(t,T,S) = \frac{P(t,S)}{P(t,T)}$$

O lo que es lo mismo

$$P(t,T,S) = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_{s=0}^{S} \lambda_s ds\right)}{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_{s=0}^{T} \lambda_s ds\right)}$$

De manera que si $\tau > t$

$$P(t,T,S) = \exp\left(-\int_{s=T}^{S} \lambda_s ds\right)$$

No estando la probabilidad forward definida en caso contrario.

Función de Distribución del Tiempo de Quiebra

Definimos

$$F(t,T) = Pr\left[\tau <= T|\mathcal{F}_t\right] = 1 - Pr\left[\tau > T|\mathcal{F}_t\right] = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_{s=0}^{T} \lambda_s ds\right)$$

Función de Densidad del Tiempo de Quiebra

$$f(t,T) = \frac{\partial F(t,T)}{\partial T} = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \lambda_T \exp\left(-\int_{s=0}^{T} \lambda_s ds\right)$$

Ilustración

Teniendo $\lambda_t = 1 + \frac{sin(t)}{2}$, obtener la curva de probabilidades de supervivencia y la función de densidad del tiempo de quiebra. Simular tiempos de default.

Valoración de Instrumentos de Mercado

En general, necesitaremos la valoración de los siguientes tipos de flujo de caja:

- **Flujo fijo en supervivencia**

  Aplicamos el teorema fundamental de valoración tomando como numerario la cuenta corriente $\beta(t)$:

$$\bar{B}(T,T) = \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \Rightarrow \bar{B}(t,T) = E\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}}{\beta(T)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

  Debido a que λ_t es una función determinista del tiempo, las variables aleatorias $\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}$ y $\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$ son independientes, por lo que:

$$\bar{B}(t,T) = E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = P(t,T)B(t,T)$$

Siendo $B(t,T)$ el factor de descuento de vencimiento T observado en t.

- **Flujo fijo en quiebra**

$$e(T,T) = \mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}} \Rightarrow e(t,T) = E\left[\frac{\mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}}}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right]$$

Pero $\mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}}$ y $\beta(T)$ son independientes, por lo que

$$e(t,T) = B(t,T)E\left[\mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}}|\mathcal{F}_t\right] = B(t,T)E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T-dT\}} - \mathbf{1}_{\{\tau\geq T\}}|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= B(t,T)\left(P(t,T-dT) - P(t,T)\right) = B(t,T)f(t,T)dT$$

Donde, como definimos con anterioridad, $f(t,T)$ es la función de densidad del tiempo de quiebra vista en t.

Valoración de CDS

Imaginemos que tenemos definida una función determinísta del tiempo λ_t. Como vimos anteriormente, la función λ_t determina $P(t,T)$.

Queremos valorar un CDS que paga una prima anual S en fechas de pago $T_1, \ldots, T_n$ posteriores a la fecha de valoración t.

El valor del CDS para el vendedor de protección es (prima igual a s):

$$NPV_{CDS}(t) = \underbrace{S\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i B(t,T_i)P(t,T_i) + \int_{s=t}^{T_n} \bar{\gamma}_s B(t,s)f(t,s)ds\right)}_{\text{Pata de prima}}$$

$$\underbrace{-(1-R)\int_{s=t}^{T_n} B(t,s)f(t,s)ds}_{\text{Pata de quiebra}}$$

$\bar{\gamma}_s$ es la fracción de año comprendida entre la fecha de pago anterior a la fecha de quiebra y esta última.

$$\bar{\gamma}_s = DCF(T_k, s), k = \max_j (T_j \leq s)$$

El término en sumatorio representa flujos en supervivencia y los dos términos en integral representan al flujo en quiebra (cupón corrido desde la última fecha de pago más recompensa por default).

El término que va multiplicado por la prima, es el valor de una anualidad con riesgo de crédito. Llamaremos a este término $DV01$, para así distinguirlo de la anualidad sin riesgo de crédito $PV01$. A la pata de quiebra la llamaremos DL. De manera que tenemos:

$$NPV_{CDS} = S \cdot DV01 - DL$$

Y la prima de mercado (aquella que hace que el valor del CDS sea nulo) es:

$$S_{\mathsf{par}}(t) = \frac{DL(t)}{DV01(t)}$$

Si queremos valorar un CDS con una prima distinta a la de mercado, las patas de quiebra del CDS de mercado y del CDS en cuestión son iguales (para dos contratos con el mismo vencimiento). Y para el CDS de mercado, pata de quiebra es lo mismo que pata de prima (el valor del contrato es nulo). De esto se deduce que la pata de quiebra de todo CDS es igual a la pata de prima del CDS de mercado (con mismo vencimiento y mismas fechas de pago).

$$NPV_{CDS}(t) = S \cdot DV01(t) - DL(t) = S \cdot DV01(t) - S_{par}(t)DV01(t) = \\ (S - S_{\mathsf{par}}(t))DV01(t)$$

Visto el valor del CDS desde el punto de vista del vendedor de protección.

Relación entre Prima de CDS e Intensidad del Evento de Quiebra

Vamos a intentar justificar una fórmula aproximada muy utilizada en mercado para relacionar la prima de un CDS de mercado y la intensidad del proceso de default.

Para ello, vamos a obtener la prima de mercado de un CDS de frecuencia continua (se paga la prima de forma continua). Es decir, en cada instante s, el vendedor de protección recibe $S_{\mathsf{PAR}}\, ds$

Hacemos la hipótesis de que la función λ_s es constante ($\lambda_s = \lambda \forall s$).

$$NPV_{CDS}(t) = 0 = S_{\mathsf{PAR}}(t) \int_{s=t}^{T} B(t,s) \exp(-\lambda(s-t)) ds$$
$$-(1-R) \int_{s=t}^{T} B(t,s) \underbrace{\lambda \exp(-\lambda(s-t))}_{f(t,s)} ds$$

De lo que se deduce que:

$$0 = S_{\mathsf{PAR}}(t) - (1 - R)\lambda$$

Luego

$$\lambda = \frac{S_{\mathsf{PAR}}(t)}{1 - R}$$

Obsérvese que es la misma relación que encontramos entre spread de CDS y spread de CDS digital.

Relación entre primas CDS spot y prima CDS forward

Observamos una prima de CDS de mercado a vencimiento T_1 y otra a vencimiento T_2. Nos preguntamos sobre qué relación hay entre las primas $S(t, T_1)$, $S(t, T_2)$ y la prima foward $S(t, T_1, T_2)$.

Si compramos protección a vencimiento T_1 y la vendemos a vencimiento T_2 por igual nocional, nuestra pata de quiebra queda viva (recibimos flujo en caso de default) entre T_1 y T_2 (como en el caso de venta de protección forward). De manera que la pata de prima forward ha de ser igual a la pata de prima de la estructura propuesta. De lo que se deduce que:

$$S(t, T_2)DV01(t, t, T_2) - S(t, T_1)DV01(t, t, T_1) = S(t, T_1, T_2)DV01(t, T_1, T_2)$$

Donde $DV01(t, T, H)$ es el valor de la anualidad con riesgo de crédito obsevada en la fecha t y con pagos comprendidos entre las fechas T y H.

Por lo que:

$$S(t,T_1,T_2) = \frac{S(t,T_2)DV01(t,t,T_2) - S(t,T_1)DV01(t,t,T_1)}{DV01(t,T_1,T_2)}$$

Pero $DV01(t,T_1,T_2) = DV01(t,t,T_2) - DV01(t,t,T_1)$ por lo que:

$$S(t,T_1,T_2) = \frac{S(t,T_2)DV01(t,t,T_2) - S(t,T_1)DV01(t,t,T_1)}{DV01(t,t,T_2) - DV01(t,t,T_1)}$$

Obsérvese que, a no ser que $S(t,T_1) = S(t,T_2)$, no podremos replicar un CDS forward con la estructura anterior, ya que recibiríamos una prima igual a $S(t,T_2) - S(t,T_1)$ hasta la fecha forward T_1.

CDS Forward Diferencial

Se trata de una abstracción que nos ayudará a introducir los modelos dinámicos. Es un CDS forward que nos da protección durante un intervalo de longitud diferencial $[T, T + dT]$.

La pata de prima implica un pago igual a $S(t, T, T + dT)dT$.

La prima que hace que el valor del contrato sea cero hoy es:

$$0 = B(t, T)P(t, T)S(t, T, T + dT)dT - (1 - R)\lambda_T P(t, T)B(t, T)dT$$

De lo que se deduce que:

$$S(t, T, T + dT) = (1 - R)\lambda_T$$

Luego existe una relación estrecha entre las primas de CDS forwards diferenciales y la intensidad del proceso de default.

Calibración

En mercado disponemos de un número finito de cotizaciones de CDS sobre una referencia (típicamente de vencimientos 3,5,7 y 10 años). Calibrar el modelo implica encontrar una curva de intensidades de default λ_t que ajuste las primas de CDS de mercado.

Obviamente, existen infinitas curvas de intensidad del proceso de default que cumplen la condición anterior. De manera que tenemos que suponer una forma funcional que sea lo suficientemente flexible para ajustar todas las primas y cuya solución sea los más rápida posible en términos computacionales.

La idea más simple es suponer que la función λ_t es constante entre fechas de vencimiento de los instrumentos de mercado.

Además, haciendo la suposición anterior, el procedimiento de calibración se reduce a un bootstrapping.

Si suponemos que disponemos de cotizaciones de vencimientos 3, 5, 7 y 10 años, la forma de proceder es la siguiente:

- Encontrar el valor constante $\lambda_{0,3}$ que calibre la prima del CDS de vencimento 3 años.
- El CDS a 5 años será función de $\lambda_{0,3}$ (ya calibrado) y $\lambda_{3,5}$. Calibrar $\lambda_{3,5}$.
- El CDS a 7 años será función de $\lambda_{0,3}$, $\lambda_{3,5}$ (ya calibrados) y $\lambda_{5,7}$. Calibrar $\lambda_{5,7}$.
- El CDS a 10 años será función de $\lambda_{0,3}$, $\lambda_{3,5}$,$\lambda_{5,7}$ (ya calibrados) y $\lambda_{7,10}$. Calibrar $\lambda_{7,10}$.

ILUSTRACIÓN

Calibrar la curva de probabilidades de solvencia por el procedimiento anteriormente descrito dada una curva de CDSs

3. Modelos Dinámicos sobre una Referencia (Generalidades)

Introducción

Los modelos estáticos nos pueden ayudar a dar precio a instrumentos similares a un CDS o a un bono corporativo. Pero sufren una gran limitación.

Como vimos en el capítulo anterior, existe una estrecha relación entre la intensidad del proceso de default y las primas de CDS. Las primas de CDS que observamos en mercado varían en el tiempo, reflejando que la percepción sobre el riesgo de crédito de una compañía (en términos de probabilidades de quiebra y de tasas de recuperación) cambia según se va incorporando nueva información al mercado .

La limitación del modelo estático surge al intentar valorar un instrumento sujeto a riesgo de crédito que pueda ser cancelado (bien por parte del emisor o por parte del inversor). Obviamente, la decisión de cancelación dependerá del riesgo de crédito (reflejado en las primas de CDS) que veamos en las futuras fechas de cancelación.

Nos vemos pues en la necesidad de utilizar modelos que den estocasticidad a la curva de CDS, o lo que es lo mismo, a la intensidad del proceso de default.

Modelos Dinámicos de Crédito de un Factor

En este tipo de modelos, la dinámica de la curva de tipos vendrá impuesta por la evolución del tipo a corto:

$$dr_t = \mu_t^r dt + \sigma_t^r dW_t^r$$

De manera que el valor de los factores de descuento vendrá dado por:

$$B(t,T) = E\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)\right]$$

Donde hemos supuesto que tomamos como numerario la cuenta corriente.

De forma análoga, la dinámica de la curva de crédito vendrá impuesta por la evolución de la intensidad del proceso de default.

$$d\lambda_t = \mu_t^\lambda dt + \sigma_t^\lambda dW_t^\lambda$$

Y obviamente es posible introducir una dependencia entre los dos procesos:

$$dW_t^r dW_t^\lambda = \rho dt$$

Filtración Background

Una vez establecido el proceso para la intensidad del evento de default, la forma más inmedita de simular un instante de quiebra sería:

Dividimos el tiempo en intervalos discretos.

En el intervalo t_i, t_{i+1}:

- Simulamos el valor de λ_i.
- Simulamos si la empresa quiebra en ese intervalo dado el valor de λ_i.

Filtración Background, conozco todo, es decir los posibles lambdas y los tipos, menos si ha habido Default o No

No obstante, una segunda idea es la siguiente:

- Simulamos la evolución de λ_i hasta la última fecha relevante de nuestro producto.
- Con el camino λ_i $\forall i$ construimos la probabilidad de supervivencia $\exp\left(-\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\Delta t\right)$ (versión discreta de la integral). Nótese que la curva de supervivencia generada será distinta en cada simulación.
- Simulamos un número aleatorio uniforme que proyectamos sobre la inversa de la curva de supervivencia para obtener el tiempo de quiebra.

En el esquema de cálculo anterior hemos condicionado a la evolución de λ_t y luego, como en el caso determinista, hemos simulado el tiempo de quiebra. De manera que hemos separado en dos la aleatoriedad del problema: La evolución de r_t y λ_t ha sido separada del evento de quiebra.

De manera que podemos definir una nueva filtración:

La compuesta por la evolución en el tiempo de la curva de tipos (r_t) y la curva de crédito (λ_t) (sin incluir en este conjunto de información el tiempo de quiebra). Llamaremos a este conjunto de información filtración Background $(\mathcal{G}_t)$.

Nótese que condicionando a $\mathcal{G}_t$, estamos en una situación similar a la de no estocasticidad.

Factores de Descuento y Probabilidades de Supervivencia

En el modelo estático visto en el capítulo anterior vimos que:

$$\bar{B}(t,T) = P(t,T)B(t,T)$$

¿Pero se seguirá cumpliendo la relación anterior si hay estocasticidad?:

Usemos como numerario la cuenta corriente:

$$\bar{B}(t,T) = E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right) | \mathcal{F}_t\right]$$

De la expresión anterior, parece difícil extraer conclusión alguna. Pero condicionemos a la evolución de todas las variables del modelo (excepto el tiempo de quiebra) hasta la fecha T:

$$\bar{B}(t,T) = E\left[E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)|\mathcal{G}_T\right]|\mathcal{F}_t\right]$$

Condicionado a $\mathcal{G}_T$, $\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)$ ya es conocido, luego puede salir del valor esperado:

$$\bar{B}(t,T) = E\left[E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_T\right]\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)|\mathcal{F}_t\right]$$

Y al condicionar a $\mathcal{G}_T$, λ_t $t \leq T$ ya es conocida, por lo que:

$$E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_T\right] = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\exp\left(-\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds\right)$$

De lo que se deduce que:

$$\bar{B}(t,T) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T}\lambda_s ds\right)\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)|\mathcal{F}_t\right] =$$
$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T}\lambda_s ds\right)\right] E\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)|\mathcal{F}_t\right]$$
$$+\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} Cov\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T}\lambda_s ds\right), \exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)\right]$$

Luego:

$$\bar{B}(t,T) = B(t,T)P(t,T) + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} Cov\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T}\lambda_s ds\right), \exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right)\right]$$

Salvo en el caso de independencia entre los procesos r_t y λ_t, el término de covarianza no es nulo, por lo que deja de cumplirse la relación.

Probabilidades de Supervivencia Bajo Distintas Medidas

Repitamos el ejercicio anterior tomando como numerario el factor de descuento $B(t,T)$:

Aplicando el teorema fundamental de valoración:

$$\frac{\bar{B}(t,T)}{B(t,T)} = E\left[\frac{\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}}{B(T,T)}|\mathcal{F}_t\right] = E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t\right] = P(t,T)$$

Y vemos que tomando como numerario $B(t,T)$ sí se cumple la relación.

En este punto es importante recalcar que las probabilidades de supervivencia, como toda probabilidad, dependen de la medida. De manera que no son iguales las probabilidades de supervivencia tomando como numerario $B(t,T)$ (bajo esta medida sí se cumple la relación) que las probabilidades de supervivencia tomando como numerario la cuenta corriente (bajo esta medida, en general, no se cumple la relación).

Comparemos las probabilidades de supervivencia bajo dos numerarios libres de riesgo de crédito N_t y M_t. Para ello, aplicamos la derivada Radon-Nykodim:

$$E_{\mathbb{N}}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{M_0}{N_0}E_{\mathbb{M}}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\frac{N_T}{M_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

$$P_{\mathbb{N}}(t,T) = P_{\mathbb{M}}(t,T) + \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{M_0}{N_0}Cov\left[\exp\left(-\int_{s=t}^{T}\lambda_s ds\right), \frac{N_T}{M_T}\right]$$

De manera que las probabilidades de supervivencia bajo medidas asociadas a distintos numerarios sin riesgo de crédito son iguales únicamente bajo independencia entre tipos y crédito.

Valoración de Pagos en Quiebra

Si tomamos como numerario la cuenta corriente:

$$e(t,T) = E\left[\mathbf{1}_{\{T-dT<\tau\leq T\}} \exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right) |\mathcal{F}_t\right]$$

Y condicionando a la filtración Background:

$$e(t,T) = E\left[\lambda_T dT \exp\left(-\int_{s=t}^{T} \lambda_s ds\right) \exp\left(-\int_{s=t}^{T} r_s ds\right) |\mathcal{F}_t\right]$$

Que, salvo en caso de independencia, no podemos simplificar más.

> NOTA. En el modelo dinámico, las fórmulas de valoración de $\bar{B}(t,T)$ y $e(t,T)$ coinciden con las obtenidas en el modelo estático sólo en el caso de independencia entre tipos y crédito.

4. Modelo de Black para CD Swaptions

Opciones sobre CDS (Credit Default Swaptions)

Se trata de la opción de entrar en un CDS en una fecha futura a una prima acordada hoy. Podemos tener la opción de entrar comprando protección (CD Swaption Payer) o tener la opción de entrar vendiendo protección (CD Swaption Receiver).

Supongamos que queremos valorar una opción Payer (la opción de entrar en un CDS en una fecha futura pagando una prima anual K). K será el strike de nuestra opción.

El la fecha de vencimiento T, el valor del CDS subyacente será:

$$NPV_{CDS}(T) = DL(T) - K \cdot DV01(T)$$

$DL(T)$: Valor de la pata de quiebra en la fecha T.

$DV01(T)$: Valor de la anualidad con riesgo de crédito en la fecha T.

Nótese que ambas variables se anulan si la quiebra ocurre antes del vencimiento T.

Pero el valor del la pata de quiebra es igual al valor de la pata de prima de un CDS de mercado con igual vencimiento, fechas y base de pago que el CDS que subyacente. De manera que:

$$NPV_{CDS}(T) = S(T)DV01(T) - K \cdot DV01(T) = (S(T) - K)\, DV01(T)$$

$S(T)$: Prima de CDS de mercado.

Obviamente, la opción será ejercida si en la fecha de vencimiento el valor del CDS subyacente es positivo. De manera que el valor de la opción en la fecha de vencimiento será:

$$NPV_{\text{CD Swaption}}(T) = S(T)DV01(T) - K \cdot DV01(T) = (S(T) - K)^{+}\, DV01(T)$$

Y debido a que $DV01(T) = \mathbf{0}_{\{\tau \leq T\}}$, el valor de la opción a vencimiento se anula si la referencia ha quebrado antes de T.

DV01(t) como numerario

Dado el valor de la opción en la fecha de vencimiento, parece tentador elegir $DV01(t)$ como numerario. Esta elección de numerario presenta un par de ventajas:

- El valor de la prima del CDS forward de mercado vendrá dada por $S(t) = \frac{DL(t)}{DV01(t)}$, de manera que esta magnitud, al ser cociente entre dos activos negociables, es martingala bajo la medida de valoración asociada a $DV01(t)$.

- La ecuación de la valoración bajo ese numerario queda simplificada:

$$\frac{NPV_{\text{CD Swaption}}}{DV01(0)} = E_{DV01}\left[\frac{(S(T)-K)^{+}\,DV01(T)}{DV01(T)}\right] = E_{DV01}\left[(S(T)-K)^{+}\right]$$

Donde $DV01(0)$ es el valor hoy de la anualidad con riesgo de crédito forward (que empieza a pagar flujos a partir de T).

En principio, debido a que $DV01(t)$ se anula en caso de que $\tau \leq t$, parece que la nueva elección de numerario presenta problemas (recordemos que en su día impusimos la condición de que todo numerario debiera ser una magnitud positiva).

No obstante, cuando $\tau \leq t$, el valor de la opción es nulo. Por lo que los caminos en los que tendríamos problemas no son de nuestro interés.

Medida de Supervivencia Forward

Veamos cuál es la probabilidad de supervivencia bajo la medida asociada al nuevo numerario:

$$P_{DV01}(t,T) = E_{DV01}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\right]$$

Y aplicando la derivada Radon-Nykodim:

$$P_{DV01}(t,T) = E_{DV01}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\right] = \frac{\beta(0)}{DV01(0)}\mathbf{E}_{\beta}\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\frac{DV01(T)}{\beta(T)}\right]$$

Pero $DV01(T)$ es positivo sólo si $\tau > T$, por lo que $\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\frac{DV01(T)}{\beta(T)} = \frac{DV01(T)}{\beta(T)}$, de lo que se deduce que:

$$P_{DV01}(t,T) = \frac{\beta(0)}{DV01(0)}\mathbf{E}_{\beta}\left[\frac{DV01(T)}{\beta(T)}\right] = \frac{\beta(0)}{DV01(0)}\frac{DV01(0)}{\beta(0)} = 1$$

Es decir, que la medida asociada al nuevo numerario no asigna probabilidad a que $\tau \leq T$. Por ello, a toda medida asociada a un numerario que se anula en caso de quiebra (como es el caso del DV01) se la llama medida de supervivencia forward (forward survival measure).

NOTA. Nótese que las medidas asociadas a los numerarios β y $DV01$ no están de acuerdo en lo que es y no es posible (para la medida asociada al DV01 la probabilidad de que $\tau \leq T$ es nula). Luego no son dos medidas equivalentes.

Modelo de Black para CD Swaptions

Nuestro objetivo es calcular el siguiente valor esperado:

$$\frac{NPV_{\text{CD Swaption}}}{DV01(0)} = E_{DV01}\left[(S(T)-K)^{+}\right]$$

Vamos a hacer la hipótesis de que, bajo la medida real $\mathbb{P}$, la prima del CDS forward que empieza en T evoluciona según:

$$dS(t) = \mu_t dt + S(t)\sigma dW_t^{\mathbb{P}}$$

Es decir, no hacemos hipótesis alguna sobre la deriva, pero sí suponemos que su difusión es lognormal.

El teorema de Girsanov, junto con la condición antes citada de que $S(t)$ será martingala bajo la medida asociada a $DV01(t)$, nos garantiza que bajo $\mathbb{S}$ (medida asociada a DV01):

$$dS(t) = S(t)\sigma dW_t^{\mathbb{S}}$$

De lo que se deduce que:

$$S(T) = S(t)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{S}} - W_t^{\mathbb{S}}\right)\right)$$

Por lo que podemos calcular el precio de la opción sin más que aplicar la fórmula de Black.

Ilustración

Calcular el valor de un Payer CD Swaption.

5. Réplica de un derivado de crédito. Ecuación en derivadas parciales.

Procesos de Poisson y lema de Itô con saltos

Un proceso N_t se dice de Poisson si:

1) Para un cierto $\lambda > 0$ y para cualquier tiempo s $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ es independiente de N_s y tiene una distribución de Poisson con parámetro $\theta = \lambda(t-s)$, es decir:

$$\mathbf{P}[N_t - N_s = k] = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}$$

2) Con probabilidad 1, el proceso N_t es contínuo por la derecha con límite por la izquierda, es decir:

$$N_t = \lim_{s \to t^+} N_s, \;\; \text{pero en general } N_t \neq \lim_{s \to t^-} N_s$$

De aquí se concluye que:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[dN_t = 0] &= 1 - \lambda dt \text{ (probabilidad de que no haya salto)} \\ \mathbf{P}[dN_t = 1] &= \lambda dt \text{ (probabilidad de que haya salto)} \end{aligned} \tag{1}$$

Para cada proceso de Poisson existe otro llamado proceso de Poisson compensado M_t, que tiene la propiedad de martingala:

$$M_t = N_t - \lambda dt$$

$$E[dM_t] = E[dN_t] - \lambda dt = 0$$

Un derivado de crédito V_t tiene sensibilidad a que haya un evento de quiebra de la referencia crediticia. Cuando calculemos el diferencial dV_t debemos tener en cuenta este salto. Esto se traduce en que, además de los habituales términos de Itô, debemos añadir un término que recoja la variación abrupta que va a experimentar el derivado si se produce el evento de quiebra. Esto puede expresarse haciendo uso de un proceso de Poisson. De este modo, si el derivado depende de una referencia crediticia cuya intensidad de default es λ, su diferencial será:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}d\lambda^2 + \Delta V\, dN_t$$

donde ΔV es la variación que sufre V_t en caso de que haya un default en t, es decir, $\Delta V = V(t) - V(t^-)$.

Caso 1. Crédito estocástico, resto de factores deterministas

Como en el caso de derivados sobre otro tipo de subyacentes, el precio de un derivado de crédito será el precio de su cartera de réplica. Vamos a ver que hay dos tipos de riesgo asociados a un derivado de crédito. En primer lugar, puesto que el crédito es estocástico, veamos cual es su dinámica. Consideremos que el spred de crédito instantáneo verifica que:

$$ds = \mu_t^s dt + \bar{\sigma}_t dW_t^s$$

Para ver los riesgos asociados a un derivado de crédito V_t, aplicaremos Itô:

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial s^2} \bar{\sigma}^2 dt + \Delta V_t dN_t$$

Tenemos dos fuentes de riesgo. como podemos ver en la expresión anterior somos sensibles a:

- Movimientos de spread, debido al término $\frac{\partial V_t}{\partial s} ds$

- Saltos a default, debido al término $\Delta V_t dN_t$

Como tenemos dos fuentes de riesgo, necesitaremos de dos instrumentos sensibles a dichos riesgos en nuestra cartera de cobertura, de manera que el portfolio total (derivado + cobertura), quede libre de riesgo. Si llamamos A_t y D_t a dichos instrumentos, la cartera de cobertura será:

$$V_t = \alpha_t A_t + \epsilon_t D_t + \beta_t$$

De manera que las sensibilidades del derivado y de la cartera de réplica a movimientos de spread y a salto a default sean iguales. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \alpha_t \frac{\partial A}{\partial s} + \epsilon_t \frac{\partial D}{\partial s} \\ \Delta V &= \alpha_t \Delta A + \epsilon_t \Delta D \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que:

$$\alpha_t = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta D}\frac{\partial D}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s}}{\frac{\Delta A}{\Delta D}\frac{\partial D}{\partial s} - \frac{\partial A}{\partial s}}$$

$$\epsilon_t = \frac{\frac{\Delta V}{\Delta A}\frac{\partial A}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial s}}{\frac{\Delta A}{\Delta D}\frac{\partial D}{\partial s} - \frac{\partial A}{\partial s}}$$

Por liquidez, lo habitual es escoger dos CDS de distinto vencimiento como instrumentos de cobertura.

EDP para el derivado de crédito

A continuación vamos a obtener la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer un derivado de crédito. Para ello nos basaremos en su cartera de réplica. Por simplificar, escogeremos como instrumentos de cobertura un CDS de maturity T, $C(t,T)$, y un CDS de vencimiento diferencial, $\Theta(t, t+dt)$. Este último CDS vale par, y satisface que:

$$d\Theta = (1-R)dN_t - sdt$$

Con esto la cartera de réplica es:

$$V_t = \alpha_t C_t + \epsilon_t \Theta_t + \beta_t$$

Aplicando Itô y agrupando términos, análogamente a como hemos hecho en el caso anterior, obtenemos que las cantidades a comprar de cada CDS para eliminar los riesgos de spread y default son:

$$\alpha_t = \frac{\frac{\partial V_t}{\partial s}}{\frac{\partial C_t}{\partial s}} \qquad \epsilon_t = \frac{\Delta V_t - \alpha_t \Delta C_t}{1-R}$$

Si aplicamos Itô a la ecuación de réplica y tenemos en cuenta las relaciones anteriores, tenemos que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \alpha_t \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \right) - s\frac{\Delta V_t - \alpha_t \Delta C_t}{1-R} + r_t V_t - r_t \alpha_t C_t$$

donde hemos usado que el CDS diferencial vale par. Agrupando términos obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta V_t-r_tV_t=\frac{\frac{\partial V}{\partial s}}{\frac{\partial C}{\partial s}}\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta C_t-r_tC_t\right)$$

y de aquí:

$$\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial s}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta V_t-r_tV_t\right)=$$
$$\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial s}}\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta C_t-r_tC_t\right)$$

Como los términos que la igualdad son el resultado de aplicar un operador sobre V_t o C_t, se tiene que satisfacer que:

$$\frac{1}{\frac{\partial V}{\partial s}}\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta V_t - r_t V_t\right) =$$

$$\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial s}}\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2}+\frac{s}{1-R}\Delta C_t - r_t C_t\right) = \bar{\sigma}_t \bar{M}(t,s)$$

A la cantidad $\bar{M}(t,s)$ la llamaremos *market price of credit risk*, ya que simboliza el retorno esperado por encima del tipo libre de riesgo dividido por la volatilidad.

Si sumamos μ_t^s a ambos lados se llega a que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &+ (\mu_t^s - \bar{\sigma}_t \bar{M}(t,s))\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{s}{1-R}\Delta V_t = r_t V_t \\
V(T^*) &= V(T,s_T)\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} + \underbrace{V(\tau,s_\tau)+\Delta V(\tau,s_\tau)}_{D_\tau}\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} \\
T^* &= \min(T,\tau)
\end{aligned}$$

Para determinar $\chi_t \equiv \mu_t^s - \bar{\sigma}_t \bar{M}(t,s)$, lo que se suele hacer es suponerla sólo función del tiempo, y calibrar dicha función para recuperar los factores de descuento con riesgo. La cantidad D_τ es el valor en default del derivado. Como ha habido quiebra, ya no existe la entidad de referencia ni su curva de crédito, y por tanto D_τ sólo puede depender de t. Bajo la suposición de que lo único que tiene estocasticidad es el crédito, D_t será libre de riesgo. Se cumplirá entonces que:

$$dD_t = r_t D_t dt$$

Para determinar el precio de un derivado de crédito tendremos que resolver la EDP anterior. Pero también existe como es de esperar una formulación en términos de valores esperados. Para ello definiremos:

$$X_u = e^{-\int_t^u r_s ds} \left(V_u \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + D_u \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right)$$

Aplicando Itô tenemos que, bajo la medida $\mathbf{Q}$ en la que el drift del spread de crédito es $\mu_u^s - \bar{\sigma}_u \bar{M}(u,s)$:

$$
\begin{aligned}
dX_u &= e^{-\int_t^u r_s ds}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\left(\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\bar{\sigma}^2+\frac{\partial V}{\partial s}(\mu_u^s-\bar{\sigma}_u\bar{M}(u,s))du+\frac{\partial V}{\partial s}dW_u^{\mathbf{Q}}+\right.\\
&+ \left.\Delta V_u dN_t^{\mathbf{Q}}-r_uV_u\right)+e^{\int_t^u r_s ds}\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}\left(\frac{dD_u}{du}-r_uD_u\right)
\end{aligned}
$$

El último término de esta ecuación es nulo. Si hacemos uso de la relación que establece la ecuación en derivadas parciales, llegamos a que:

$$dX_u = e^{\int_t^u r_s ds}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\left(\frac{\partial V}{\partial s}dW_u^{\mathbf{Q}}+\Delta V_u\left(dN_u^{\mathbf{Q}}-\frac{s}{1-R}\right)\right)$$

La parte que acompaña a ΔV_u no es más que un proceso de Poisson y su compensador, por lo que si ahora tomamos valores esperados, tenemos que:

$$E^{\mathbf{Q}}\left[dX_u \mid \mathcal{F}_t\right]=0$$

y de aquí:

$$V_t = E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\left(V_T \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + D_T \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\right) \Big| \mathcal{F}_t\right]$$

Caso 2. Crédito y tipos de interés estocásticos

Para obtener la EDP que debe satisfacer un derivado híbrido tipos-crédito V_t partiremos de la cartera de réplica. Para ver los riesgos a cubrir calcularemos el diferencial dV_t

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial r}dr + \frac{\partial V_t}{\partial s}ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial r^2}dr^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial s^2}ds^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r \partial s}\rho dr ds + \Delta V_t dN_t$$

Siendo r el tipo a corto y s el spread instantáneo de crédito, dN_t un proceso de Poisson cuyo valor es 1 en caso de default y 0 en caso contrario, y ρ la correlación entre r y s. Supondremos dinámica normal para el tipo a corto y el spread instantáneo

$$dr = \mu_t^r dt + \sigma_t dW_t^r \qquad ds = \mu_t^s dt + \bar{\sigma}_t dW_t^s$$

Tenemos que cubrirnos ante movimientos de los tipos de interés, los movimientos de los spreads de crédito y los saltos a default. Para ello montaremos un portfolio de réplica que contenga:

- Un derivado de tipos B_t

- Un CDS de maturity T, $C(t, T)$

- Un CDS diferencial, de maturity $t + dt$, $\Theta(t, t + dt)$

- Una cuenta corriente libre de riesgo para invertir el sobrante de cash o financiar su defecto

Así, la cartera de réplica es

$$V_t = \alpha C_t + \gamma B_t + \epsilon \Theta_t + \beta_t$$

Aplicando el lema de Itô con saltos a la cartera de réplica tenemos:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 dt + \frac{\partial V_t}{\partial s_t}ds_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 dt + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t dt + \Delta V_t dN_t^{\mathbb{P}} =$$

$$\alpha_t\left(\frac{\partial C_t}{\partial t}dt + \frac{\partial C_t}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 dt + \frac{\partial C_t}{\partial s_t}ds_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 dt + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t dt + \Delta C_t dN_t^{\mathbb{P}}\right) +$$

$$\gamma_t\left(\frac{\partial B_t}{\partial t}dt + \frac{\partial B_t}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 dt\right) +$$

$$\epsilon_t\left(s_t dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}\right) + r_t\left(V_t - \alpha_t C_t - \gamma_t B_t - \epsilon_t \Theta_t\right)dt$$

Agrupando los términos que multiplican a dr, ds y dN, obtenemos que las cantidades a comprar en cada uno de los instrumentos de réplica deben satisfacer que:

$$\alpha_t = \frac{\frac{\partial V_t}{\partial s_t}}{\frac{\partial C_t}{\partial s_t}} \;\; ; \;\; \epsilon_t = \frac{-\Delta V_t + \alpha_t \Delta_t C_t}{(1-R)} \;\; ; \;\; \gamma_t = \frac{-\alpha_t\frac{\partial C_t}{\partial r_t} + \frac{\partial V_t}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_t}{\partial r_t}}$$

Con esto eliminamos el riesgo en tipos, spread de crédito y salto a default, y sólo sobreviven los términos en dt. Agrupando y sustituyendo ϵ_t por su valor

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t V_t =$$

$$\alpha_t \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t C_t\right) +$$

$$\gamma_t \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 - r_t B_t\right) +$$

$$\frac{-\Delta V_t + \alpha_t \Delta_t C_t}{(1-R)} s_t$$

si agrupamos los términos en V_t and C_t y sustituyendo γ_t por su valor

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t V_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t =$$

$$\alpha_t \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t C_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta_t C_t\right) +$$

$$\frac{-\alpha_t \frac{\partial C_t}{\partial r_t} + \frac{\partial V_t}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_t}{\partial r_t}} \left(\frac{\partial B_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 - r_t B_t\right)$$

Como B_t es un derivado de tipos de interés debe satisfacer la EDP de los derivados de tipos de interés. Así

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t V_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t =$$

$$\alpha_t\left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_t C_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta_t C_t\right) +$$

$$\frac{-\alpha_t\frac{\partial C_t}{\partial r_t} + \frac{\partial V_t}{\partial r_t}}{\frac{\partial B_t}{\partial r_t}}\left(-(\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial B_t}{\partial r_t}\right)$$

Agrupando términos en en V_t y C_t y sustityendo α_t por su valor

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_tV_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t =$$

$$\frac{\frac{\partial V_t}{\partial s_t}}{\frac{\partial C_t}{\partial s_t}}\left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial C_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_tC_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta_t C_t\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{\partial V_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_tV_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t}{\frac{\partial V_t}{\partial s_t}} =$$

$$\frac{\frac{\partial C_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial C_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 C_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t - r_tC_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta_t C_t}{\frac{\partial C_t}{\partial s_t}}$$

Si añadimos a ambos términos μ_t^s y dividimos por $\bar{\sigma}_t$, lo que obtenemos a ambos lados puede interpretarse como el valor esperado del retorno sobre el tipo libre de riesgo de un derivado híbrido tipos-crédito cuyo riesgo de tipos de interés ha sido cubierto.

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \bar{\mu}_t\frac{\partial V_t}{\partial s_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t - r_t V_t = \bar{M}(t, r_t, \lambda_t)\bar{\sigma}_t\frac{\partial V_t}{\partial s_t}$$

$\bar{M}_t$ puede ser asociado al market price of credit risk. Finalmente, tenemos que la PDE a resolver para un derivado híbrido tipos-crédito es:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + (\mu_t - M_t\sigma_t)\frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \left(\bar{\mu}_t - \bar{\sigma}_t\bar{M}_t\right)\frac{\partial V_t}{\partial s_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {r_t}^2}\sigma_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial {s_t}^2}\bar{\sigma}_t^2 + \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t \partial s_t}\rho\sigma_t\bar{\sigma}_t + \frac{s_t}{1-R}\Delta V_t = r_t V_t$$

De nuevo, para determinar $\bar{M}(t, r_t, s_t)$ lo supondremos función del tiempo, de manera que puede ser fijada a partir de de los bonos con riesgo.

El precio del derivado de crédito puede ser escrito en términos de un valor esperado. Para ello debemos proceder como en el caso anterior, pero ahora, por ser los tipos estocásticos, la función D_t depende también de r_t. Después de un poco de álgebra se llega a que:

$$V_t = E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-\int_t^u r_s ds}\left(V_u \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + D_u \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

6. Basis Bono-CDS

Definición

Si calibramos la intensidad de default λ_t al mercado de CDS, y con esa λ_t calculamos precios de bonos, veremos que no reproducimos los precios de mercado. Tendremeos en general dos juegos de λ, una λ_t^{CDS} consistentes con el mercado de CDS, y una λ_t^B consitente con el mercado de bonos. A la diferencia $\lambda_t^{CDS} - \lambda_t^B$ se la llama spread bono-CDS. Esto parece indicar que la modelización del crédito que estamos proponiendo no es completa.

En esta sección vamos a justificar de donde viene este spread.

Bono y CDS diferencial

Vamos a establecer una relación entre el tipo de financiación a corto plazo f_t y la prima de CDS a corto plazo h_t. Para ello compararemos las siguientes estrategias:

- Vender protección a fecha t con vencimiento $t + dt$.
- Comprar un bono en t que vence en $t + dt$ por medio de una transacción REPO venciendo también a fecha $t + dt$.

Ambas estrategias implican un flujo neto de caja nulo en t. En $t + dt$, los flujos son (suponiendo que $\tau > t$):

$$\text{CDS:} \qquad s_t dt - (1-R)1_{\{\tau \le t+dt\}}$$

$$\begin{aligned}\text{REPO:} \qquad & (1+f_t dt)1_{\{\tau > t+dt\}} + R1_{\{\tau \le t+dt\}} - (1+r_t dt) = \\ & = (1+f_t dt) - (1+r_t dt) - (1-R+f_t dt)1_{\{\tau \le t+dt\}} = \\ & = (f_t - r_t)dt - (1-R)1_{\{\tau \le t+dt\}}\end{aligned}$$

Donde r_t es un tipo REPO a corto plazo sobre el bono a corto plazo de vencimiento $t + dt$. Entonces:

$$\underbrace{s_t}_{\text{Prima de CDS a corto plazo}} = \underbrace{f_t}_{\text{tipo de financiación a corto plazo}} - \underbrace{r_t}_{\text{Tipo REPO a corto plazo}} \qquad (2)$$

De lo que se deduce:

$$\underbrace{z_t := f_t - c_t}_{\text{Spread de financiación a corto sobre Eonia}} = \underbrace{s_t}_{\text{Prima de CDS a corto plazo}} + \underbrace{(r_t - c_t)}_{\text{base REPO / OIS}}$$

De modo que la base bono-CDS viene determinada por la diferencia en los tipos a los cuales los CDS y los bonos pueden financiarse.

$$\underbrace{z_t - s_t}_{\text{base Bond / CDS}} = \underbrace{r_t - c_t}_{\text{base REPO / OIS}}$$

EDP para un bono

Hemos visto que a nivel diferencial la base bono-CDS viene de que los CDS están colateralizados, mientras que la compra de un bono se financia al tipo repo. Vamos ahora a ver las implicaciones de estos argumentos en la EDP que sigue un bono, que podremos comparar con la PDE de un CDS. Para ello, pensemos en la réplica de un derivado de crédito colateralizado en $cash$, E_t, con dos bonos: $B^C(t,T)$, que paga un cupón C, y un bono de vencimiento diferencial $B(t, t+dt)$. Escogemos uno de vencimiento diferencial por simplificar el álgebra. La ecuación de réplica es:

$$E_t = \alpha_t B^C(t,T) + \gamma_t B(t, t+dt) + \beta_t$$

donde la cuenta corriente β_t se compone de:

- E_t debido al colateral, que se remunera a un tipo c_t.
- $-\alpha_t B^C(t,T)$ debido al repo para financiar la compra del bono, remuneramos a tipo r_t^T (rep a corto para el bono $B^C(t,T)$).
- $-\gamma_t B(t,t+dt)$ debido al repo a corto para financiar la compra del bono diferencial, que remuneramos a $r_t := r_t^{t+dt}$ (repo a corto para el bono $B(t,t+dt)$).

Para simplificar el álgebra asumiremos que los tipos de interés son deterministas, de modo que el único factor estocástico es s_t. La ecuación de réplica es entonces:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{\partial E_t}{\partial t}dt + \tfrac{\partial E_t}{\partial s_t}dh_t + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2\tfrac{\partial^2 E_t}{\partial s_t^2}dt + \Delta E_t dN_t^{\mathbb{P}} = \\
&\alpha_t\left(\tfrac{\partial B^C(t,T)}{\partial t}dt + \tfrac{\partial B^C(t,T)}{\partial h_t}ds_t + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2\tfrac{\partial^2 B^C(t,T)}{\partial s_t^2}dt + \Delta B^C(t,T)dN_t^{\mathbb{P}}\right) \\
&+\gamma_t B(t,t+dt)\left(f_t dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}\right) \\
&+c_t E_t dt - r_t^T\alpha_t B^C(t,T)dt - r_t\gamma_t B(t,t+dt)dt
\end{aligned}
\tag{3}
$$

donde hemos tenido en cuenta que $\frac{dB(t,t+dt)}{B(t,t+dt)} = f_t dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}$, y $\Delta B^C(t,T)$ es el salto de $B^C(t,T)$ en caso de quiebra de la referencia crediticia.

Para estar cubiertos:

$$
\alpha_t = \frac{\frac{\partial E_t}{\partial s_t}}{\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial s_t}} \qquad \gamma_t B(t,t+dt) = \alpha_t\frac{\Delta B^C(t,T)}{1-R} - \frac{\Delta E_t}{1-R} \tag{4}
$$

De las ecuaciones (4), (3) y (2) se tiene que

$$\frac{\frac{\partial E_t}{\partial t}+\mu_t^{\mathbb{P}}\frac{\partial E_t}{\partial s_t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 E_t}{\partial s_t^2}+\frac{s_t}{1-R}\Delta E_t-c_tE_t}{\sigma_t\frac{\partial E_t}{\partial s_t}}=\frac{\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial t}+\mu_t^{\mathbb{P}}\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial s_t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 B^C(t,T)}{\partial s_t^2}+\frac{s_t}{1-R}\Delta B^C(t,T)-r_t^TB^C(t,T)}{\sigma_t\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial s_t}} \tag{5}$$

De modo que la EDP que cumple el bono es:

$$\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial t}+\left(\mu_t^{\mathbb{P}}-\sigma_tM_t\right)\frac{\partial B^C(t,T)}{\partial s_t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 B^C(t,T)}{\partial s_t^2}+\frac{s_t}{1-R}\Delta B^C(t,T)-r_t^TB^C(t,T)=0 \tag{6}$$

La última ecuación implica que los flujos de caja del bono deben ser descontados a su tipo repo a corto r_t^T. Esto refleja el hecho que que finaciamos su compra a dicho tipo.

El precio del bono viene dado entonces por:

$$\begin{aligned} B^C(t,T) &= \underbrace{E_{\mathbb{Q}}\left[C\sum_{j=1}^{n}\gamma_j 1_{\{\tau>t_j\}}\exp\left(-\int_{s=t}^{t_j} r_s^T ds\right) + \exp\left(-\int_{s=t}^{t_n} r_s^T ds\right)1_{\{\tau>t_n\}}\Big|\mathcal{F}_t\right]}_{\text{Bond coupons \& notional}} \\ &+ \underbrace{E_{\mathbb{Q}}\left[\int_{s=t}^{t_n} R(T)\exp\left(-\int_{u=t}^{s} r_u^T du\right)1_{\{\tau\in(s,s+ds]\}}\Big|\mathcal{F}_t\right]}_{\text{Recovery leg}} \end{aligned} \tag{7}$$

en la medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual la intensidad de default es $\frac{s_t}{1-R}$ y el drift de s_t es $\mu_t^{\mathbb{P}} - \sigma_t M_t$.

$R(T)$ es el recovery del bono de maturity T.

7. Modelo N-factorial: HJM con crédito

Modelo HJM para tipos de interés (repaso)

En el modelo HJM N-factorial daremos dinámica al los tipos forward $f(t,T)$:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N_f} \sigma_i(t,T)dW_t^i$$

siendo N_f el número de factores del modelo. El bono *zero coupon risk-free* viene dado por:

$$B(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$$

Para determinar el drift bajo la medida riesgo neutro exigiremos que:

$$d\left(\frac{B(t,T)}{\beta_t}\right) = \mathcal{O}(dW_t) \tag{8}$$

Por comodidad definiremos $Y(t,T) = -\int_t^T f(t,s)ds$. Teniendo en cuenta esta definición en la ec. (8) obtenemos:

$$d\left(\frac{B(t,T)}{\beta_t}\right) = \frac{B(t,T)}{\beta_t}\left(dY(t,T) + \frac{1}{2}dY^2(t,T) - r_t dt\right) \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
dY_{t,T} &= -\left(\int_t^T df(t,u)du - f(t,t)dt\right) = \\
&= r_t dt - \int_t^T \left[\alpha(t,u)dt + \sum_{i=1}^{N_f} \sigma_i(t,u)dW_t^i\right] du \\
&= r_t dt - A(t,T)dt - \sum_{i=1}^{N_f} \Omega_i^T(t,T)dW_t^i \\
dY_{t,T}^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_f} \Omega_i^T(t,T)\Omega_j(t,T)\rho_{i,j}^{r,r} dt
\end{aligned}$$

donde hemos definido $A(t,T) \equiv \int_t^T \alpha(t,u)du$, $\Omega_i^T(t,T) \equiv \int_t^T \sigma_i(t,u)du$. Sustituyendo en la ecuación (8) y exigiendo que el término que multiplica a dt sea nulo (condición de martingala) se debe verificar que:

$$A(t,T) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}\Omega^T(t,T)\Omega(t,T)\rho_{i,j}^{r,r}$$

y derivando respecto de T, obtenemos finalmente la expresión para el drift bajo la medida riesgo neutro de un forward instantáneo de tipo de interés:q

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_f}\rho_{i,j}^{r,r}\sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_j(t,u)du$$

Intensidades de default según HJM

A continuación enriqueceremos nuestro modelo HJM dándole dinámica al crédito. Para ello supondremos que las intensidades forward de default siguen un modelo HJM con N_λ factores:

$$d\lambda(t,T) = \alpha_\lambda(t,T)dt + \sum_{i=1}^{N_\lambda} \sigma_i^\lambda(t,T)dW_t^{i,\lambda} \tag{10}$$

Como en el caso de tipos de interés, calcularemos el drift $\alpha_\lambda(t,T)$ bajo la medida cuenta corriente. Para ello nos fijaremos en el precio del bono con riesgo de crédito y recovery 0:

$$
\begin{aligned}
\bar{B}(t,T) &\equiv E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T f(t,u)du} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = E\left[E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T f(t,u)du} \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{-\int_t^T f(t,u)du} E\left[\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \,\middle|\, \mathcal{G}_T\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left[e^{-\int_t^T (f(t,u)+\lambda(t,u))du} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}
$$

Vemos que podemos expresar $\bar{f}(t,u) = f(t,u) + \lambda(t,u)$.

Bajo la medida cuenta corriente el proceso $\frac{\bar{B}(t,T)}{\beta_t}$ es martingala. Esto implica que el siguiente proceso no tiene drift:

$$
d\left(\frac{\bar{B}(t,T)}{\beta_t}\right) = \mathcal{O}(dW_t) \tag{11}
$$

Siguiendo un razonamiento análogo al caso sin riesgo, obtenemos que la condición de martingala implica que:

$$
\begin{aligned}
0 &= -A_\lambda(t,T) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_\lambda}\sum_{j=1}^{N_\lambda}\rho_{i,j}^{\lambda,\lambda}\Omega_i^\lambda(t,T)\Omega_j^\lambda(t,T) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_\lambda}\sum_{j=1}^{N_f}\rho_{j,i}^{r,\lambda}\Omega_i^\lambda(t,T)\Omega_j(t,T) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_\lambda}\Omega_i(t,T)\rho_{i,j}^{r,\lambda}\Omega_j^\lambda(t,T)
\end{aligned}
$$

donde hemos definido $A_\lambda(t,T) \equiv \int_t^T \alpha_\lambda(t,u)du$, $\Omega_i^\lambda(t,T) \equiv \int_t^T \sigma_i^\lambda(t,u)du$. Despejando $A_\lambda(t,T)$ y derivando respecto de T obtenemos finalmente:

$$
\begin{aligned}
\alpha_\lambda(t,T) &= \sum_{i=1}^{N_\lambda}\sum_{j=1}^{N_\lambda}\rho_{i,j}^{\lambda,\lambda}\sigma_i^\lambda(t,T)\int_t^T \sigma_j^\lambda(t,s)ds + \sum_{i=1}^{N_\lambda}\sum_{j=1}^{N_f}\rho_{j,i}^{r,\lambda}\sigma_i^\lambda(t,T)\int_t^T \sigma_j(t,s)ds \\
&+ \sum_{i=1}^{N_f}\sum_{j=1}^{N_\lambda}\rho_{i,j}^{r,\lambda}\sigma_i(t,T)\int_t^T \sigma_j^\lambda(t,s)ds
\end{aligned}
$$

8. Crédito y FX

No es raro encontrar derivados de crédito en los que hay un FX involucrado. Este sería por ejemplo el caso de un CDS quanto, que estudiaremos más adelante. Si el FX está correlado de alguna manera al nombre subyacente al crédito, ouede que con un simple modelo de Black-Scholes no tengamos suficiente riqueza como para describir la dinámica. Pensemos por ejemplo en un derivado de crédito sobre un soberano LATAM cuya divisa doméstica es DOM, que involucra el FX USD-DOM. En el instante de default del soberano es de esperar que el FX dé un salto súbito (hacia arriba en este caso). Este efecto no es recogido en un modelo de Black-Scholes, donde lo más que podemos hacer es correlar los brownianos que rigen la dinámica del FX y el crédito. Necesitamos un modelo que sea capaz de simular saltos en el FX. Un buen candidato es el modelo de Merton,

Modelo de Merton

Como hemos adelantado, el modelo de Merton es un modelo de difusión con saltos. Este modelo satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t$$

donde dJ_t es un proceso de saltos.

En el caso del modelo de Merton escogemos

$$dJ_t = (J-1)dN_t$$

siendo:

- N_t un proceso de Poisson con probabilidad de salto en un dt de λdt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[dN_t = 0] &= 1 - \lambda dt \text{ (probabilidad de que no haya salto)} \\ \mathbf{P}[dN_t = 1] &= \lambda dt \text{ (probabilidad de que haya salto)} \end{aligned}$$

- J es una variable aleatoria con distribución log-normal, independiente de W_t y N_t.

- S_{t^-} es el valor del subyacente justo antes de un salto, $S_{t^-} = \lim_{u \to t^-} S_u$.

Vemos que se satisface que J se relaciona con la variación en el subyacente antes y después del salto ΔS_t en la forma:

$$\frac{\Delta S_t}{S_{t^-}} = \frac{S_t - S_{t^-}}{S_{t^-}} = J - 1 \;\to\; \frac{S_t}{S_{t^-}} = J$$

Veamos a continuación la dinámica riesgo neutro del modelo de Merton. En la medida riesgo neutro se satisfacerá que:

$$E^{\mathbf{Q}}\left[d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = 0 \Rightarrow E^{\mathbf{Q}}\left[\frac{dS_t}{S_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = r_t dt$$

Por tanto se tiene que:

$$E^{\mathbf{Q}}\left[\frac{dS_t}{S_t^-} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = r_t dt = (\mu_t^S dt + E[\lambda(J-1)]dt \Rightarrow \mu_t^S = r_t - E[\lambda(J-1)]$$

Así, la ecuación diferencial estocástica queda:

$$\frac{dS_t}{S_{t^-}} = (r_t - E[\lambda(J-1)])\,dt + \sigma_t dW_t + (J-1)dN_t$$

En el razonamiento anterior la amplitud de salto J no es un proceso estocástico, y es por tanto independiente de dN_t y dW_t.

Evolución del activo entre dos instantes de tiempo t, T. Precio de opciones europeas.

Si aplicamos el lema de Itô con saltos al logaritmo del activo:

$$d(\ln(S_t)) = \frac{dS_t^c}{S_{t^-}} - \frac{1}{2}\left(\frac{dS_t^c}{S_{t^-}}\right)^2 + (\ln(S_t) - \ln(S_{t^-}))dN_t$$

donde S_t^c hace referencia a la parte contínua de la difusión. Haciendo uso de la ecuación diferencial estocástica para el activo, tenemos que:

$$d(\ln(S_t)) = (r_t - E[\lambda(J-1)])dt - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t + (\ln J)dN_t$$

y finalmente, integrando:

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left\{\int_t^T \left(r_u - E[\lambda(J-1)] - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) du + \int_t^T \sigma_u dW_u\right\} \prod_{i=1}^{N_T - N_t} J_i$$

Muchas veces se recurre a modelar los saltos lognormales, de manera que:

$$J = e^{J_N} \sim \quad \text{Log-normal} \quad \Rightarrow J_N \sim N(\mu, \delta)$$

Con esto tenemos que, conocido el activo en un instante t, se cumplirá que para un $T > t$ tendremos:

$$\left.\frac{S_T}{S_t}\right|_{\Delta N_{t,T}=k} = \exp\left\{\int_t^T \left(r_u - E[\lambda(J-1)] - \frac{1}{2}\sigma_u^2\right) du + \int_t^T \sigma_u dW_u + \xi(k\mu, \sqrt{k}\delta)\right\}$$

De aquí se tiene llega a que:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{t,T}(\Delta N = k) &= S_t \exp\left\{\int_t^T \left(r_u - E[\lambda(J-1)]\right) du + k\mu + \frac{1}{2}k\delta^2\right\} \\
\hat{\sigma}_T(\Delta N = k) &= \sqrt{\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_u^2 du + k\delta^2}
\end{aligned}$$

El precio de una opción europea de strike K y vencimiento T bajo el modelo de Merton queda en la forma:

$$C_{K,T} = B_{t,T} \sum_{k=0}^{\infty} BS\left(\hat{F}_{t,T}(\Delta N = k), K, T-t, \hat{\sigma}_T(\Delta N = k)\right) \mathbf{P}(\Delta N = k)$$

Ejercicio

Simular un activo según el modelo de Merton. Calcular el valor de una call europea por Montecarlo y comparar con la solución analítica

En el caso de default de un estado, parece razonable pensar que los tipos de cambio de divisas con cruce con la moneda doméstica de ese estado van a sufrir un cambio repentino (un salto). Podemos inferir la magnitud de ese salto que infiere el mercado si disponemos de cotizaciones de CDS quanto (lo cual es habitual en el caso de soberanos). Para ello supondremos un modelo de Merton para la difusión del FX:

$$X_T = X_t e^{\int_t^T \left(r_s^L - r_s^\$ - \lambda(J-1) - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_t^T \sigma_s dW_s} J_T \quad \left(\frac{\mathrm{L}}{\$}\right)$$

donde hemos supuesto que le FX puede realizar un único salto de amplitud constante J. La intensidad de salto λ es la misma que la intensidad de default del soberano, y

$J_T = J\mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} + \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$.

Primero vamos a suponer que existen CDSs a corto plazo definidos sobre una referencia crediticia denominados en las divisas D y F, con spreads h_t^D and h_t^F. Denotaremos con $CDS^D(t, t+dt)$ y $CDS^F(t, t+dt)$ los NPV de ambas estructuras en sus respectivas divisas D y F. h_t^D y h_t^F son tales que ambos NPVs son 0 en t.

Vamos a ver que es posible cubrir el salto del FX en default si disponemos de estos dos instrumentos en mercado. Veamos cuáles son los cambios diferenciales de cada uno de los CDS, cada uno medido en su divisa.

$$dCDS^D(t,T) = h_t^D dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}$$
$$dCDS^F(t,T) = h_t^F dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}$$

El NPV del $CDS^F(t,T)$ medido en D viene dado por $X_t CDS^F(t,T)$. Si expresamos el cambio de este CDS en la divisa D, obtenemos, aplicando el lema de Itô para procesos con saltos:

$$d\left(X_t CDS^F(t, t+dt)\right) = X_t h_t^F dt - (1-R) X_t J_t^{\mathbb{P}} dN_t^{\mathbb{P}}$$

Si vendemos protección a corto plazo sobre un nominal 1 en divisa D y compramos protección a corto plazo por un nominal de $1/X_t$ en divisa F, el cambio diferencial que sufre nuestro portfolio es:

$$d\pi_t = \left(h_t^D - h_t^F\right) dt - (1 - J_t^{\mathbb{P}})(1 - R)dN_t^{\mathbb{P}} \tag{12}$$

Vemos que la parte de default nos serviría para cubrir saltos repentinos en el FX asociados al default de la referencia crediticia. Puesto que ambos CDS tienen $NPV = 0$, se tiene que se cumplirá que bajo la medida $\mathbf{Q}$, por ser el portfolio martingala:

$$\begin{aligned} 0 &= E_{\mathbb{Q}}\left[\left(h_t^D - h_t^F\right) dt - (1 - J_t)\,(1 - R)dN_t\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \left(h_t^D - h_t^F\right) dt - \left(1 - E_{\mathbb{Q}}\left[J_t\middle|\mathcal{F}_t\right]\right)(1 - R)\frac{h_t^D}{1 - R}dt \end{aligned}$$

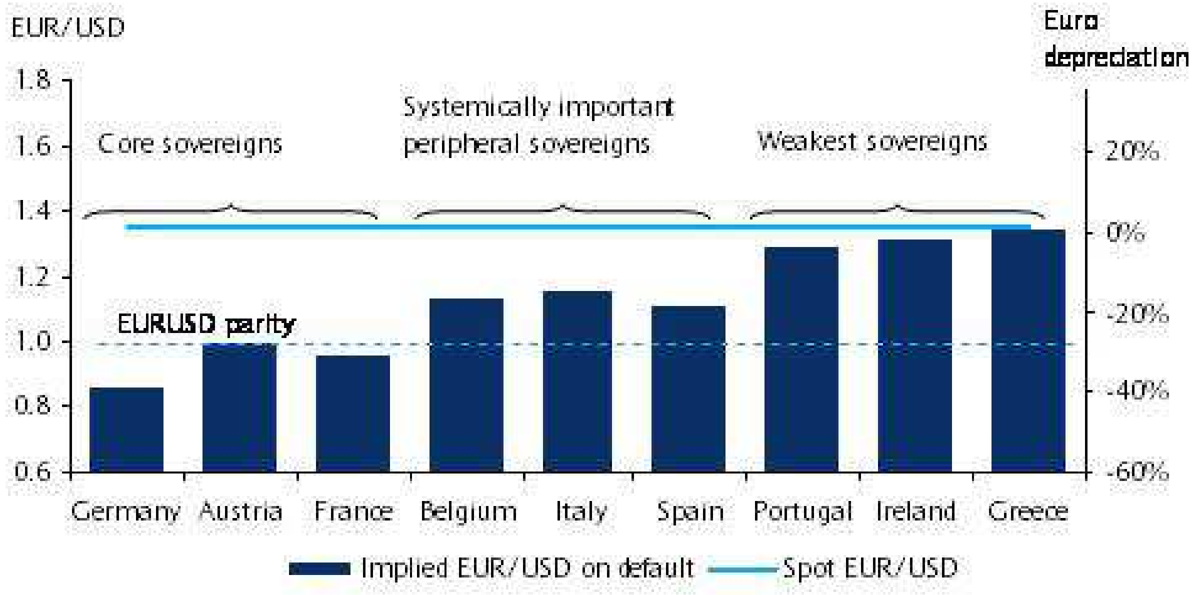
Donde hemos tenido en cuenta que la intensidad de default bajo la medida $\mathbf{Q}$ viene dada por $\frac{h_t^D}{1-R}$. De aquí:

$$J_t^{\mathbb{Q}} = E_{\mathbb{Q}}\left[J_t \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{h_t^F}{h_t^D}$$

Es decir, del cociente entre los spreads de crédito diferenciales podemos inferir el salto esperado que va sufrir el FX en caso de default.

Ejemplo

Países de la zona euro:
De la anterior relación vemos que de las cotizaciones de los spread de CDS en EUR y USD podemos obtener el salto que infiere el mercado para el EUR-USD ante el evento de default de uno de los países de la zona euro. Aquí mostramos datos de octubre 2011. Véase cómo el mercado descontaba ya el default de Grecia.



Cobertura de derivados quanto

Exploraremos ahora la cobertura de un derivado de crédito E_t definido sobre una referencia crediticia y denominado en una divisa foránea F. Montaremos la cartera de réplica con derivados de crédito denominados en divisa doméstica D. El NPV del derivado E_t expresado en la divisa D es:

$$X_t E_t$$

de modo que su cambio diferencial es:

$$d\left(X_t E_t\right) = X_t d\widetilde{E}_t + E_t d\widetilde{X}_t + d\widetilde{X}_t d\widetilde{E}_t + \Delta\left(X_t E_t\right) dN_t^{\mathbb{P}} \quad (13)$$

donde $d\widetilde{X}_t$ y $d\widetilde{E}_t$ representan los cambios contínuos de X_t y E_t respectivamente. $\Delta\left(X_t E_t\right)$ representa el salto en default de $X_t E_t$.

Por sencillez, asumiremos un modelo de un factor para el crédito, si bien todas las conclusiones que sacaremos son fácilmente extendibles al caso general de N factores.

Supondremos que la dinámica de h_t^D viene determinada por un factor estocástico, y que:

$$h_t^F = J_t^{\mathbb{Q}} h_t^D$$

Así, el cambio diferencial de $X_t E_t$ vendrá dado por:

$$d\left(X_t E_t\right) = X_t \left(\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h E_t dt \right) + E_t d\widetilde{X}_t + \rho_t \sigma_t^h X_t \sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dt + \Delta\left(X_t E_t\right) dN_t^{\mathbb{P}} \tag{14}$$

donde $\mathcal{L}_h = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial (h_t^D)^2}(\sigma_t^h)^2$ y ρ_t es la correlación instantánea entre h_t^D y X_t.

Como en anteriores ocasiones, supondremos que el portfolio de cobertura contiene dos derivados de crédito denominados en D, siendo uno de ellos un CDS diferencial y el otro un derivado genérico H_t:

$$E_t X_t = \alpha_t H_t + \gamma_t CDS^D(t, t+dt) + \beta_t^D + X_t \beta_t^F$$

con β_t^D and β_t^F la cantidades en cuenta corriente en ambas divisas. Estas cantidades vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_t^D &= -\alpha_t H_t \\ \beta_t^F &= E_t \end{aligned} \tag{15}$$

puesto que $CDS^D(t, t+dt) = 0$.

Teniendo en cuenta que:

$$dH_t = \frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h H_t dt + \Delta H_t dN_t^{\mathbb{P}} \tag{16}$$

y que:

$$\begin{aligned} d\beta_t^D &= c_t^D \beta_t dt \\ dCDS^D(t, t+dt) &= h_t^D dt - (1-R) dN_t^{\mathbb{P}} \end{aligned} \tag{17}$$

y que, por otro lado tenemos que el cambio diferencial de $X_t\beta_t^F$ es:

$$\begin{aligned} d(\beta_t^F X_t) &= \beta_t^F d\widetilde{X}_t + X_t d\widetilde{\beta}_t^F + \Delta(X_t\beta_t^F) \\ &= \beta_t^F d\widetilde{X}_t + c_t^F X_t\beta_t^F dt + (J_t^{\mathbb{P}} - 1)X_t\beta_t^F dN_t^{\mathbb{P}} \end{aligned} \tag{18}$$

Tenemos que la ecuación de réplica diferencial es:

$$\begin{aligned} & X_t\left(\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h E_t dt\right) + E_t d\widetilde{X}_t + \rho_t\sigma_t^h X_t\sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dt + \Big(X_t(J_t^{\mathbb{P}} - 1)(E_t + \Delta E_t) + X_t\Delta E_t\Big) dN_t^{\mathbb{P}} \\ & = \alpha_t\left(\frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h H_t dt + \Delta H_t dN_t^{\mathbb{P}}\right) \underbrace{-c_t^D\alpha_t H_t dt}_{d\beta_t^D} + \gamma_t \underbrace{\left(h_t^D dt - (1-R)dN_t^{\mathbb{P}}\right)}_{dCDS^D(t,t+dt)} \\ & + \underbrace{E_t d\widetilde{X}_t + c_t^F X_t E_t dt + (J_t^{\mathbb{P}} - 1)X_t E_t dN_t^{\mathbb{P}}}_{d(X_t\beta_t^F)} \end{aligned} \tag{19}$$

En esta expresión tenemos 4 factores de riesgo distintos: $(dh_t^D,\ d\widetilde{X}_t,\ J_t^{\mathbb{P}},\ dN_t^{\mathbb{P}})$. Nótese que $d\widetilde{X}_t$ se cancela. Tenemos 3 factores de riesgo y sólo dos grados de libertad, α_t y

γ_t, lo caul indica que necesitamos un instrumento adicional para cubrir el derivado. Este instrumento adicional puede ser un CDS a corto plazo definido en divisa F, de modo que la ecuación de réplica es

$$E_t X_t = \alpha_t H_t + \gamma_t CDS^D(t, t+dt) + \epsilon_t X_t CDS^F(t, t+dt) + \beta_t^D + X_t \beta_t^F$$

y en forma diferencial:

$$\begin{aligned}
&X_t \left(\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h E_t dt \right) + E_t d\widetilde{X}_t + \rho_t \sigma_t^h X_t \sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dt + \left(X_t (J_t^{\mathbb{P}} - 1)(E_t + \Delta E_t) + X_t \Delta E_t \right) dN_t^{\mathbb{P}} \\
&= \alpha_t \left(\frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h H_t dt + \Delta H_t dN_t^{\mathbb{P}} \right) \underbrace{-c_t^D \alpha_t H_t dt}_{d\beta_t^D} + \gamma_t \underbrace{\left(h_t^D dt - (1-R) dN_t^{\mathbb{P}} \right)}_{dCDS^D(t,t+dt)} \\
&+ \epsilon_t \underbrace{\left(X_t h_t^F dt - (1-R) X_t J_t^{\mathbb{P}} dN_t^{\mathbb{P}} \right)}_{d(X_t CDS^F(t,t+dt))} \\
&+ \underbrace{E_t d\widetilde{X}_t + c_t^F X_t E_t dt + (J_t^{\mathbb{P}} - 1) X_t E_t dN_t^{\mathbb{P}}}_{d(X_t \beta_t^F)}
\end{aligned} \tag{20}$$

Reorganizando términos:

$$
\begin{aligned}
& X_t \left(\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h E_t dt - c_t^F E_t dt \right) + \rho_t \sigma_t^h X_t \sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} dt + X_t J_t^{\mathbb{P}} \Delta E_t dN_t^{\mathbb{P}} \\
& = \alpha_t \left(\frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} dh_t^D + \mathcal{L}_h H_t dt + \Delta H_t dN_t^{\mathbb{P}} - c_t^D H_t dt \right) + \gamma_t \left(h_t^D dt - (1 - R) dN_t^{\mathbb{P}} \right) \\
& + \epsilon_t \left(X_t h_t^F dt - (1 - R) X_t J_t^{\mathbb{P}} dN_t^{\mathbb{P}} \right)
\end{aligned} \tag{21}
$$

Con lo que para estar cubiertos se debe cumplir que:

$$
\begin{aligned}
X_t \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} &= \alpha_t \frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} \\
0 &= \alpha_t \Delta H_t - (1 - R) \gamma_t \\
\Delta E_t &= -(1 - R) \epsilon_t
\end{aligned} \tag{22}
$$

de aquí:

$$\frac{\mathcal{L}_h E_t - c_t^F E_t + \Delta E_t \frac{h_t^F}{1-R} + \rho_t \sigma_t^h \sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D}}{\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D}} = \frac{\mathcal{L}_h H_t + \Delta H_t \frac{h_t^D}{1-R} - c_t^D H_t}{\frac{\partial H_t}{\partial h_t^D}} \tag{23}$$

Añadiendo el drift en medida real de h_t^D a ambos términos y dividiendo por σ_t^h

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial E_t}{\partial t} + \mu_t^{h,\mathbb{P}} \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} + \frac{1}{2}(\sigma_t^h)^2 \frac{\partial^2 E_t}{\partial (h_t^D)^2} + \Delta E_t \frac{h_t^F}{1-R} + \rho_t \sigma_t^h \sigma_t^X \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D} - c_t^F E_t}{\sigma_t^h \frac{\partial E_t}{\partial h_t^D}} \\ &= \frac{\frac{\partial H_t}{\partial t} + \mu_t^{h,\mathbb{P}} \frac{\partial H_t}{\partial h_t^D} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial (h_t^D)^2} + \frac{h_t}{1-R}\Delta H_t - c_t^D H_t}{\sigma_t^h \frac{\partial H_t}{\partial h_t^D}} = M^D(t, h_t^D) \end{aligned} \tag{24}$$

Donde $M(t, h_t^D)$ es el market price of credit risk en D.

Así, la PDE que satisfacen los derivados definidos en divisa F es:

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\left(\mu_t^{h,\mathbb{P}}-M^D(t,h_t^D)\sigma_t^h+\rho_t\sigma_t^h\sigma_t^X\right)\frac{\partial E_t}{\partial h_t^D}+\frac{1}{2}(\sigma_t^h)^2\frac{\partial^2 E_t}{\partial (h_t^D)^2}+\Delta E_t\frac{h_t^F}{1-R}-c_t^F E_t=0$$

Y la solución a esta PDE puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} NPV_t^{\mathsf{CDS},F} \;=\; & \underbrace{S E_{\mathbb{Q}^f}\left[\sum_{j=1}^{n}\gamma_j 1_{\{\tau>t_j\}}\exp\left(-\int_{s=t}^{t_j} c_s^F ds\right)\Big|\mathcal{F}_t\right]}_{\text{Premium leg}} \\ & -(1-R)\underbrace{E_{\mathbb{Q}}\left[\int_{s=t}^{t_n}\exp\left(-\int_{u=t}^{s} c_u^F du\right)1_{\{\tau\in(s,s+ds]\}}\Big|\mathcal{F}_t\right]}_{\text{Default leg}} \end{aligned}$$

En la medida $\mathbb{Q}^f$ bajo la cual el drift de h_t^D viene dado por $\mu_t^{h,\mathbb{P}} - M^D(t, h_t^D)\sigma_t^h + \rho_t \sigma_t^h \sigma_t^X$ y la intensidad de default por $\frac{h_t^F}{1-R}$.

Es importante recalcar que en esta medida:

- El drift de h_t^D cambia por el ajuste quanto.
- La intensidad de default cambia de $\frac{h_t^D}{1-R}$ a $\frac{h_t^F}{1-R}$.