

Modelos de Renta Variable

Javier Rubén Madrid Alcaraz (javier.madrid@bbva.com)

MEFC-BBVA, Marzo-Abril 2019

Índice

1. Contrato Forward

- Activo renta variable
- Activo renta variable con dividendo continuo
- Activo renta variable con dividendo discreto absoluto
- Activo renta variable con dividendo discreto relativo
- Activo renta variable con dividendo discreto local
- Activo tipo de cambio

2. Modelo de Black-Scholes

- Modelo activo renta variable
- Modelo activo renta variable con dividendo continuo
- Modelo activo renta variable con dividendo discreto absoluto
- Modelo activo renta variable con dividendo discreto relativo
- Modelo activo renta variable con dividendo discreto local
- Modelo activo tipo de cambio
- Modelo activo renta variable con efecto quanto
- Modelo activo renta variable con efecto CMS

3. Smile de volatilidad

- Definición de volatilidad implícita
- Definición de volatilidad forward
- Relación volatilidad proceso Spot & Forward
- Condiciones de no arbitraje en superficies de volatilidad implícita
- Evolución temporal de la superficie de volatilidad implícita. Sticky Delta & Sticky Strike

4. Modelos de Smile

- Modelo de función de densidad
 - Función de densidad marginal
 - Replicación de payoffs europeos
- Modelos en tiempo continuo
 - Modelo de volatilidad local. Modelo de Dupire

1. Contrato Forward

Definición de contrato forward

El contrato forward se define como aquél en el cual dos contrapartidas acuerdan intercambiar, sin coste alguno, un activo al vencimiento de dicho contrato a un precio fijado a fecha de hoy.

De la anterior definición se desprenden los siguientes payoffs para cada una de las contrapartidas.

Payoff contrapartida que recibe el activo: $V_T = (S_T - K)$

Payoff contrapartida que entrega el activo: $V_T = (K - S_T)$

donde S_T es el precio del activo al vencimiento del contrato y K es el precio forward fijado en el contrato.

Por teoría de valoración sabemos que el precio de un instrumento derivado no es más que el precio de su réplica, estática o dinámica, según la naturaleza del payoff considerado. En los siguientes apartados vamos a tratar de encontrar el precio forward K del activo subyacente haciendo uso de argumentos de replicación estática.

Activo renta variable

Consideremos un activo de renta variable que no paga dividendos.

Desde el punto de vista de la contrapartida que entrega el activo al precio K , tenemos la siguiente estructura de flujos.

Tiempo t_0 :

Flujos (+): Financiación al plazo T en la cantidad S_0

Flujos (-): Compra de una unidad de activo al precio S_0

Tiempo T :

Flujos (+): Entrega del activo al precio K

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , $S_0/P(t_0, T)$

donde,

S_0 es el precio del activo en el tiempo t_0 (instante inicial)

$P(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

De lo anterior, cancelando los flujos que se producen en el tiempo T , necesariamente ha de ser:

$$K = \frac{S_0}{P(t_0, T)}$$

Activo renta variable con dividendo continuo

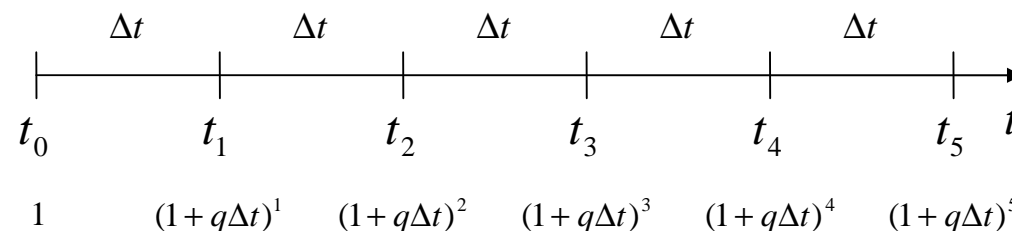
Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo continuo.

En este caso, debemos definir la forma en la que se paga el dividendo así como la forma en la que se reinvierte éste.

Modelo de dividendo continuo: Vamos a considerar que en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, el subyacente paga un dividendo proporcional al nivel del subyacente y al salto de tiempo ($qS_t\Delta t$).

Además, vamos a asumir que dicho pago se reinvierte completamente en el propio subyacente, por lo que en cada instante de tiempo t la cantidad de subyacente se incrementa en un factor $(1 + q\Delta t)$.

En el siguiente esquema podemos apreciar como evoluciona la cantidad de subyacente a lo largo del tiempo:



Si consideramos una inversión de plazo T en el activo, la cantidad de subyacente generada por la reinversión del dividendo vendrá dada por:

$$\alpha_T = (1 + q\Delta t)^n = (1 + q\Delta t)^{\frac{T-t}{\Delta t}}$$

siendo,

q el dividendo continuo (constante) que se paga en cada instante de tiempo

n el número de pasos en que se divide el intervalo $[t, T]$

Cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\alpha_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1 + q\Delta t)^{\frac{T-t}{\Delta t}} = e^{q(T-t)}$$

Si consideramos que el dividendo es una función determinista del tiempo q_t , la cantidad de activo vendrá dada por:

$$\alpha_T = \exp \left\{ \int_t^T q_t dt \right\}$$

Volviendo al contrato forward, desde el punto de vista de la contrapartida que entrega el activo al precio K , tenemos la siguiente estructura de flujos.

Tiempo t_0 :

Flujos (+): Financiación al plazo T en la cantidad $S_0 \exp \left\{ - \int_{t_0}^T q_t dt \right\}$

Flujos (-): Compra de $\exp \left\{ - \int_{t_0}^T q_t dt \right\}$ unidades de activo al precio S_0

Tiempo T :

Flujos (+): Entrega del activo al precio K

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , $S_0 \exp \left\{ - \int_{t_0}^T q_t dt \right\} / P(t_0, T)$

donde,

S_0 es el precio del activo en el tiempo t_0 (instante inicial)

$P(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

q_t es el dividendo que paga el activo por unidad de tiempo

De lo anterior, cancelando los flujos que se producen en el tiempo T , necesariamente ha de ser:

$$K = S_0 \frac{\exp \left\{ - \int_{t_0}^T q_t dt \right\}}{P(t_0, T)}$$

Activo renta variable con dividendo discreto absoluto

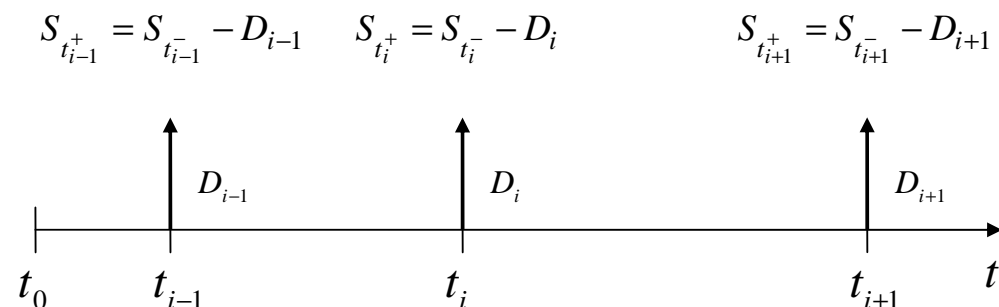
Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo discreto absoluto.

Al igual que en el caso anterior, debemos definir la forma en la que se pagan los dividendos así como la forma en la que se reinvierten estos.

Modelo de dividendo discreto absoluto: Vamos a considerar que en el intervalo de tiempo $[t, T]$, el subyacente paga una serie de dividendos discretos absolutos D_{t_i} , $i = 1, \dots, n$.

Además, vamos a asumir que dichos dividendos son deterministas, tanto en el momento de ser pagados, como en la cantidad reembolsada.

En el siguiente esquema podemos apreciar la estructura de dividendos a lo largo del tiempo:



Volviendo al contrato forward, desde el punto de vista de la contrapartida que entrega el activo al precio K , tenemos la siguiente estructura de flujos.

Tiempo t_0 :

Flujos (+): Financiación a los plazos t_i de las cantidades $D_{t_i} P(t_0, t_i) 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}$

Flujos (+): Financiación al plazo T de la cantidad $S_0 - \sum_{i=1}^n D_{t_i} P(t_0, t_i) 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}$

Flujos (-): Compra de una unidad de activo al precio S_0

Tiempo t_i :

Flujos (+): Cobro del dividendo correspondiente al instante t_i , D_{t_i}

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , D_{t_i}

Tiempo T :

Flujos (+): Entrega del activo al precio K

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , $\{S_0 - \sum_{i=1}^n D_{t_i} P(t_0, t_i) 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}\} / P(t_0, T)$

donde,

S_0 es el precio del activo en el tiempo t_0 (instante inicial)

$P(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

D_{t_i} es el dividendo pagado en el instante de tiempo t_i

$1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}$ es la función indicatriz de condición $\{t_0 < t_i \leq T\}$

De lo anterior, cancelando los flujos que se producen en el tiempo T , necesariamente ha de ser:

$$K = \frac{S_0 - \sum_{i=1}^n D_{t_i} P(t_0, t_i) 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}}{P(t_0, T)}$$

EJERCICIO

Obtener el precio forward para un activo que paga simultáneamente dividendo continuo q_t y dividendos discretos D_{t_i} , $i = 1, \dots, n$.

Activo renta variable con dividendo discreto relativo

Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo discreto relativo.

De igual manera que en los casos anteriores, debemos definir la forma en que se pagan los dividendos así como la forma en la que se reinvierten estos.

Modelo de dividendo discreto relativo: Vamos a considerar que en el intervalo de tiempo $[t, T]$, el subyacente paga una serie de dividendos discretos relativos de la forma $D_{t_i} = d_{t_i} S_{t_i}^-$, $i = 1, \dots, n$, donde tanto los instantes t_i como las cantidades d_{t_i} se consideran deterministas.

Además, vamos a asumir que cada uno de los pagos de dividendo se reinvierte completamente en el propio subyacente, por lo que en cada instante de tiempo t_i la cantidad de subyacente se incrementa en $\hat{\alpha}_{t_i} = \frac{d_{t_i}}{1 - d_{t_i}} \alpha_{t_i}^-$

Al igual que en el caso de dividendo continuo, si consideramos una inversión de plazo T en el activo, la cantidad de subyacente generada por la reinversión del dividendo vendrá dada por:

$$t_1 : \alpha_{t_1} = \alpha_{t_1^-} + \hat{\alpha}_{t_1} = \alpha_{t_0} + \frac{d_{t_1}}{1 - d_{t_1}} \alpha_{t_0} = \frac{1}{1 - d_{t_1}} \alpha_{t_0}$$

$$t_2 : \alpha_{t_2} = \alpha_{t_2^-} + \hat{\alpha}_{t_2} = \alpha_{t_1} + \frac{d_{t_2}}{1 - d_{t_2}} \alpha_{t_1} = \frac{1}{(1 - d_{t_1})(1 - d_{t_2})} \alpha_{t_0}$$

⋮

$$t_n : \alpha_{t_n} = \alpha_{t_n^-} + \hat{\alpha}_{t_n} = \alpha_{t_{n-1}} + \frac{d_{t_{n-1}}}{1 - d_{t_{n-1}}} \alpha_{t_{n-1}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 - d_{t_i})} \alpha_{t_0}$$

siendo,

α_{t_0} la cantidad de subyacente en el instante inicial t_0

n el número de dividendos devengados en el intervalo $[t_0, T]$

Para la replicación del contrato forward, tenemos la siguiente condición:

$$\alpha_T = \alpha_{t_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{t_0} = \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i})$$

Finalmente, desde el punto de vista de la contrapartida que entrega el activo al precio K , tenemos la siguiente estructura de flujos.

Tiempo t_0 :

Flujos (+): Financiación al plazo T en la cantidad $S_0 \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}})$

Flujos (-): Compra de $\prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}})$ unidades de activo al precio S_0

Tiempo T :

Flujos (+): Entrega del activo al precio K

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , $S_0 \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}}) / P(t_0, T)$

donde,

S_0 es el precio del activo en el tiempo t_0 (instante inicial)

$P(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

Nuevamente, cancelando los flujos que se producen en el tiempo T , necesariamente ha de ser:

$$K = \frac{S_0 \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}})}{P(t_0, T)}$$

Activo renta variable con dividendo discreto local

Hasta el momento hemos analizado dos políticas diferentes para el dividendo discreto. Dichas políticas representan casos particulares del enfoque más general denominado dividendo local, y que viene dado por una función general de la forma:

$$D_{t_i} = D_{t_i}(S_{t_i}^-)$$

La pregunta que nos hacemos en base a la definición anterior es la siguiente:

¿Existirá una estrategia de réplica estática para el contrato forward bajo el supuesto de dividendo discreto local?. En este caso, la respuesta es, de manera general, NO. De hecho, sólo en el caso particular donde el dividendo discreto local viene dado por una función lineal, es decir, dividendo discreto absoluto/relativo, existe una réplica estática del contrato forward tal como hemos visto en los dos apartados anteriores.

En apartados siguientes analizaremos más en detalle el carácter convexo del contrato forward cuando se utiliza la hipótesis de dividendo discreto local.

Activo tipo de cambio

Consideremos un activo tipo de cambio que expresa una unidad de divisa B en terminos de la divisa A. La divisa A se denomina “doméstica” mientras que la divisa B se denomina “foránea”.

En este caso, el contrato forward consiste en intercambiar una unidad de divisa foránea (B) a un precio prefijado K expresado en unidades de divisa doméstica (A).

Así pues, desde el punto de vista de la contrapartida que entrega la unidad de divisa foránea al precio K , tenemos la siguiente estructura de flujos.

Tiempo t_0 :

Flujos (+): Financiación al plazo T en la cantidad $X_0 P^f(t_0, T)$ (unid. doméstica)

Flujos (-): Compra del bono cupón cero de vencimiento T en divisa foránea al precio $X_0 P^f(t_0, T)$ (unid. doméstica)

Tiempo T :

Flujos (+): Entrega de la unidad de divisa foránea al precio K

Flujos (-): Devolución de la cantidad financiada en t_0 , $X_0 P^f(t_0, T)/P^d(t_0, T)$ (unid. doméstica)

donde,

X_0 es el precio de una unidad de divisa foránea expresada en unidades de divisa doméstica en el tiempo t_0

$P^d(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T en divisa doméstica

$P^f(t_0, T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T en divisa foránea

De lo anterior, cancelando los flujos que se producen en el tiempo T , necesariamente ha de ser:

$$K = X_0 \frac{P^f(t_0, T)}{P^d(t_0, T)}$$

2. Modelo de Black-Scholes

Introducción

El objeto de este apartado es definir los procesos estocásticos en tiempo continuo asociados a los distintos tipos de subyacentes que se han introducido en el apartado anterior a través de la réplica de sus precios forward. Para ello haremos uso de los conocimientos que tenemos sobre teoría de valoración así como de cálculo estocástico.

Dichos procesos serán deducidos dentro del ámbito del modelo de Black-Scholes, donde impondremos restricciones que **limiten el comportamiento de la volatilidad a una función determinista del tiempo**.

Por último, **vamos a considerar que los tipos de interés son deterministas**. Esta hipótesis nos va a permitir definir la siguiente dinámica para la curva de bonos cupón cero.

$$\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} = r_t dt \quad \Rightarrow \quad P_{t,T} = \exp \left\{ - \int_t^T r_t dt \right\}$$

Modelo activo renta variable

Consideremos un activo de renta variable que no paga dividendos.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Por teoría de valoración sabemos que la dinámica riesgo neutro bajo la medida \mathbb{Q} asociada al numerario cuenta corriente es:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}}$$

A continuación vamos a tratar de encontrar esta misma expresión partiendo de la definición de precio forward obtenida en el apartado anterior.

Atendiendo a la teoría de valoración, sabemos que existe una medida asociada al activo bono cupón cero de vencimiento T , que llamaremos medida T -forward y denotaremos por \mathbb{Q}^T , bajo la cual el activo forward es martingala. Por tanto, la dinámica del forward puede ser representada de la siguiente manera:

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad F_{t,T} = \frac{S_t}{P_{t,T}}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^F$ es la volatilidad del activo forward

$W_t^{\mathbb{Q}^T}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}^T

La condición de martingala puede ser vista a partir de la definición del payoff del contrato forward. En efecto, eligiendo como numerario el bono cupón cero de vencimiento T , la valoración del contrato forward queda como sigue:

$$0 = P_{t,T} E_{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{S_T - K}{P_{T,T}} | \mathcal{F}_t \right] \Rightarrow K = F_{t,T} = E_{\mathbb{Q}^T} [S_T | \mathcal{F}_t] = E_{\mathbb{Q}^T} [F_{T,T} | \mathcal{F}_t]$$

Nuestro objetivo es deducir la dinámica del activo subyacente S_t a partir de la dinámica seguida por el activo forward $F_{t,T}$. Para ello diferenciamos sobre la expresión de $F_{t,T}$:

$$dF_{t,T} = \frac{1}{P_{t,T}} dS_t + S_t d\left(\frac{1}{P_{t,T}}\right) = F_{t,T} \left(\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = r_t dt + \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

Pero dado que los tipos de interés se consideran deterministas, las medidas \mathbb{Q}^T y \mathbb{Q} son, de hecho, la misma medida, con lo que se llega a la ecuación inicial.

De la anterior expresión se puede escribir:

$$\sigma_t^S = \sigma_{t,T}^F$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Ahora sólo nos queda integrar la ecuación diferencial estocástica (SDE) del activo. Para ello, primero aplicamos el lema de Itô sobre la función $\ln S_t$:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{\partial(\ln S_t)}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\ln S_t)}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 = \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 = \\ &= \left(r_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Integrando sobre el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(r_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} \right\}$$

Modelo activo renta variable con dividendo continuo

Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo continuo.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Al igual que en el apartado anterior, nuestro objetivo es deducir la dinámica del activo subyacente S_t a partir de la dinámica seguida por el activo forward $F_{t,T}$.

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad F_{t,T} = S_t \frac{\exp \left\{ - \int_t^T q_t dt \right\}}{P_{t,T}}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^F$ es la volatilidad del activo forward

$W_t^{\mathbb{Q}^T}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}^T

Diferenciando sobre la expresión de $F_{t,T}$:

$$dF_{t,T} = F_{t,T} \left(\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} + q_t dt \right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q_t) dt + \frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = (r_t - q_t) dt + \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

De la anterior expresión se puede escribir:

$$\sigma_t^S = \sigma_{t,T}^F$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Integrando sobre el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left((r_t - q_t) - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} \right\}$$

Modelo activo renta variable con dividendo discreto absoluto

Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo discreto absoluto.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Al igual que en el apartado anterior, nuestro objetivo es deducir la dinámica del activo subyacente S_t a partir de la dinámica seguida por el activo forward $F_{t,T}$.

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad F_{t,T} = \frac{S_t - \sum_{i=1}^n D_{t_i} P_{t,t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}}}{P_{t,T}}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^F$ es la volatilidad del activo forward

$W_t^{\mathbb{Q}^T}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}^T

Diferenciando sobre la expresión de $F_{t,T}$:

$$dF_{t,T} = \frac{1}{P_{t,T}} dS_t - \frac{1}{P_{t,T}} d \left(\sum_{i=1}^n D_{t_i} P_{t,t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}} \right) -$$

$$- \frac{S_t - \sum_{i=1}^n D_{t_i} P_{t,t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}}}{P_{t,T}} \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} \right)$$

Teniendo en cuenta que:

$$d \left(1_{\{t < t_i \leq T\}} \right) = -\delta(t - t_i) dt$$

llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 dF_{t,T} &= \frac{dS_t - \sum_{i=1}^n D_{t_i} \left(r_t P_{t,t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}} - P_{t,t_i} \delta(t - t_i) \right) dt}{P_{t,T}} - r_t F_{t,T} dt = \\
 &= \frac{dS_t - r_t S_t dt + \sum_{i=1}^n D_{t_i} P_{t,t_i} \delta(t - t_i) dt}{P_{t,T}}
 \end{aligned}$$

donde,

$1_{\{t < t_i \leq T\}}$ es la función indicatriz de condición $\{t < t_i \leq T\}$
 $\delta(t - t_i)$ es la función delta de Dirac centrada en t_i

Por lo tanto,

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_{t,T}^F P_{t,T} F_{t,T} dW_t^{\mathbb{Q}^T} - \sum_{i=1}^n D_{t_i} \delta(t - t_i) dt$$

De la anterior expresión se puede escribir:

$$\sigma_t^S = \sigma_{t,T}^F P_{t,T} \frac{F_{t,T}}{S_t}$$

Por tanto,

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}^T} - \sum_{i=1}^n D_{t_i} \delta(t - t_i) dt$$

EJERCICIO

Deducir la dinámica para un activo que paga simultáneamente dividendo continuo q_t y dividendos discretos D_{t_i} , $i = 1, \dots, n$.

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

A la hora de integrar la anterior ecuación diferencial estocástica es importante considerar correctamente el término correspondiente a los dividendos discretos. En concreto, tenemos la siguiente condición de no arbitraje en la fechas en que se paga dividendo:

$$S_{t_i^+} = S_{t_i^-} - D_{t_i}$$

donde,

t_i^- es el instante de tiempo “justo” antes de pagar el dividendo

t_i^+ es el instante de tiempo “justo” después de pagar el dividendo

Así pues, atendiendo a la naturaleza de la función delta de Dirac, podemos presentar el siguiente esquema de integración:

1) Entre fechas de dividendo, es decir, en cada intervalo $[t_i^+, t_{i+1}^-]$, aplicar la ecuación diferencial deducida, pero sin tener en cuenta el término por dividendos. Por tanto, integrando, llegamos a la expresión que obteníamos para el activo que no paga dividendos:

$$\frac{S_{t_{i+1}^-}}{S_{t_i^+}} = \exp \left\{ \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \left(r_t - \frac{(\sigma_t^S)^2}{2} \right) dt + \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}} \right\}$$

2) En las fechas de dividendo, aplicar la relación de ausencia de arbitraje definida anteriormente, es decir:

$$S_{t_i^+} = S_{t_i^-} - D_{t_i}$$

ILUSTRACIÓN

Simular la evolución de un activo que paga dividendos discretos D_{t_i} , $i = 1, \dots, n$ asumiendo que la volatilidad del proceso “spot” σ_t^S es constante con el tiempo. ¿Qué ocurre con la volatilidad Black-Scholes del proceso “forward” σ_T^F en función del plazo?

Modelo activo renta variable con dividendo discreto relativo

Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo discreto relativo.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Como en apartados anteriores, nuestro objetivo es deducir la dinámica del activo subyacente S_t a partir de la dinámica seguida por el activo forward $F_{t,T}$.

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad F_{t,T} = \frac{S_t \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}})}{P(t, T)}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^F$ es la volatilidad del activo forward

$W_t^{\mathbb{Q}^T}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}^T

Diferenciando sobre la expresión de $F_{t,T}$:

$$dF_{t,T} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}})}{P_{t,T}} dS_t + \frac{S_t}{P_{t,T}} d \left(\prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}}) \right) - \frac{S_t \prod_{i=1}^n (1 - d_{t_i} 1_{\{t < t_i \leq T\}})}{P_{t,T}} \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} \right)$$

De nuevo, teniendo en cuenta que:

$$d \left(1_{\{t < t_i \leq T\}} \right) = -\delta(t - t_i) dt$$

llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 dF_{t,T} &= \left(\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} \right) F_{t,T} + \frac{S_t}{P_{t,T}} \sum_{i=1}^n \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (1 - d_{t_j} 1_{\{t < t_j \leq T\}}) \right] d_{t_i} \delta(t - t_i) dt = \\
 &= \left(\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} + \sum_{i=1}^n d_{t_i} \delta(t - t_i) dt \right) F_{t,T}
 \end{aligned}$$

donde,

$1_{\{t < t_i \leq T\}}$ es la función indicatriz de condición $\{t < t_i \leq T\}$
 $\delta(t - t_i)$ es la función delta de Dirac centrada en t_i

Por lo tanto,

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_{t,T}^F S_t dW_t^{\mathbb{Q}^T} - \sum_{i=1}^n S_{t_i^-} dt_i \delta(t - t_i) dt$$

De la anterior expresión se tiene:

$$\sigma_t^S = \sigma_{t,T}^F$$

Por tanto,

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}^T} - \sum_{i=1}^n S_{t_i^-} dt_i \delta(t - t_i) dt$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Al igual que ocurre con el modelo de dividendo discreto absoluto, a la hora de integrar la ecuación diferencial estocástica, es importante considerar correctamente el término correspondiente a los dividendos discretos. En concreto, para el caso particular del dividendo discreto relativo, la condición de no arbitraje en la fechas en que se paga dividendo queda:

$$S_{t_i^+} = S_{t_i^-} - D_{t_i} = S_{t_i^-}(1 - d_{t_i})$$

Por último, el esquema de integración para el modelo de dividendo discreto relativo corresponde al ya visto en el modelo de dividendo absoluto.

Modelo activo renta variable con dividendo discreto local

Consideremos un activo de renta variable que paga dividendo discreto local.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

A diferencia de los casos vistos anteriormente, en el caso general del modelo de dividendo discreto local, debido a la convexidad exhibida por el forward, no resulta directo deducir la dinámica del proceso spot S_t a partir del proceso forward. Así pues, debemos recurrir a la condición de no arbitraje existente en el pago de dividendo discreto para deducir la ecuación diferencial estocástica seguida por el activo subyacente.

$$S_{t_i^+} = S_{t_i^-} - D_{t_i} = S_{t_i^-} - D_{t_i}(S_{t_i^-})$$

A continuación, para facilitar la comprensión del desarrollo, vamos a proceder de manera inversa, es decir, vamos a postular la expresión general de la ecuación diferencial estocástica seguida por el subyacente para finalmente terminar comprobando la consistencia de dicha expresión con la condición de no arbitraje postulada anteriormente.

Comenzamos asumiendo la siguiente ecuación diferencial estocástica para el activo subyacente:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}} - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i}^-) \delta(t - t_i) dt$$

donde,

μ_t es el drift del activo subyacente

σ_t^S es la volatilidad del activo subyacente

Integrando en ambos miembros de la ecuación anterior en el intervalo $[t_i - \epsilon, t_i + \epsilon]$:

$$\int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} dS_t = \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} \left[\mu_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}} - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i}^-) \delta(t - t_i) dt \right]$$

Por último, tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$ se llega a la condición de no arbitraje:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} dS_t = \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} \left[\mu_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}} - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i}^-) \delta(t - t_i) dt \right] \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{t_i^+} - S_{t_i^-} = -D_{t_i}(S_{t_i}^-)$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Haciendo uso del esquema de integración visto anteriormente para los modelos de dividendo discreto absoluto/relativo, llegamos a la siguiente expresión general:

$$S_{t_2} = S_{t_1} \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\mu_t - \frac{(\sigma_t^S)^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}} \right\} \\ - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i}^-) 1_{\{t_1 < t_i \leq t_2\}} \exp \left\{ \int_{t_i}^{t_2} \left(\mu_t - \frac{(\sigma_t^S)^2}{2} \right) dt + \int_{t_i}^{t_2} \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}} \right\}$$

Dada la expresión anterior, podemos regresar ahora sobre el análisis del contrato forward que dejábamos abierto en una sección previa. En efecto, si consideramos el contrato de vencimiento T y tomamos valor esperado se tiene:

$$E_{\mathbb{Q}}[S_T | \mathcal{F}_{t_0}] = S_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^T \mu_t dt \right\} - \sum_{i=1}^n E_{\mathbb{Q}} \left[D_{t_i}(S_{t_i}^-) | \mathcal{F}_{t_0} \right] 1_{\{t_0 < t_i \leq T\}} \exp \left\{ \int_{t_i}^T \mu_t dt \right\}$$

A la vista del resultado anterior, es fácil apreciar la dependencia del precio forward con la volatilidad para toda definición del dividendo discreto local distinta de la función lineal:

$$D_{t_i}(S_{t_i}^-) = D_{t_i}^0 + d_{t_i} S_{t_i}^- \Leftrightarrow F_{t,T} \text{ no depende de } \sigma$$

ILUSTRACIÓN

Calcular el precio forward a vencimiento T de un activo que paga un dividendo discreto local de la forma $D_t(S_t^-) = \min(d_t S_t^-, \hat{D})$, $t < T$ asumiendo que la volatilidad del proceso “spot” σ_t^S es constante con el tiempo.

→ Ecuación diferencial de un derivado (PDE)

En este apartado pretendemos encontrar la ecuación diferencial en derivadas parciales (PDE) que subyace al modelo de dividendo discreto local. Obviamente, dado que los modelos de dividendo discreto absoluto y relativo son casos particulares del modelo local, la ecuación también será de aplicación para dichos modelos.

Como ya se ha visto, la ecuación diferencial estocástica (SDE) para el modelo de dividendo discreto local se escribe:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}} - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i}^-) \delta(t - t_i) dt$$

En un principio, de manera general, la aplicación de la fórmula de Feynman-Kac, nos conduce al siguiente resultado:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \left(\mu_t S_t - \sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i^-}) \delta(t - t_i) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} (\sigma_t^S)^2 S_t^2 - r_t V_t = 0$$

Sin embargo, la presencia del término $\delta(t - t_i)$ supone, al menos a priori, un inconveniente desde el punto de vista de la resolución numérica de la ecuación diferencial en derivadas parciales a través de, por ejemplo, un esquema en diferencias finitas.

Pero volviendo de nuevo a la expresión de la ecuación diferencial estocástica del activo S_t , en dicha expresión podemos distinguir dos términos, un término de difusión continua y otro término de saltos (inducido por el pago de dividendos), es decir:

$$dS_t = \underbrace{\mu_t S_t dt + \sigma_t^S S_t dW_t^{\mathbb{Q}}}_{dS_t^c} - \underbrace{\sum_{i=1}^n D_{t_i}(S_{t_i^-}) \delta(t - t_i) dt}_{dS_t^d}$$

Antes de continuar con el desarrollo, es importante hacer notar la naturaleza particular del término de saltos asociado a los dividendos dado que, bajo las hipótesis utilizadas en la formulación de dicho modelo, los instantes en los que se producen los saltos son deterministas, condición que necesariamente tendrá implicaciones en el comportamiento del derivado al cruzar una fecha de pago de dividendo t_i .

Así pues, retomando la formulación de Feynman-Kac, es necesario tener en cuenta la presencia del término de saltos identificado en la expresión anterior de cara a la correcta aplicación del lema de Itô sobre dV_t :

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dS_t^c + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} (\sigma_t^S)^2 S_t^2 dt + \sum_{i=1}^n \Delta V_{t_i} \delta(t - t_i) dt$$

donde,

$$\Delta V_{t_i} = V_{t_i^-}(S_{t_i}^+) - V_{t_i^-}(S_{t_i}^-)$$

Por tanto, la ecuación diferencial del derivado queda:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \mu_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} (\sigma_t^S)^2 S_t^2 + \sum_{i=1}^n \Delta V_{t_i} \delta(t - t_i) - r_t V_t = 0$$

De nuevo, al igual que ocurría con la expresión obtenida anteriormente, la ecuación diferencial no puede ser evaluada en los instantes $t = t_i$ debido a la presencia de la delta de Dirac. Sin embargo, al igual que hicimos para el caso de la discontinuidad en el subyacente S_t por el pago de dividendo, podemos plantear el siguiente esquema de resolución de la ecuación diferencial en derivadas parciales:

1) Entre fechas de dividendo, es decir, en cada intervalo $[t_i^+, t_{i+1}^-]$, resolvemos la ecuación diferencial sin término de Dirac:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \mu_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} (\sigma_t^S)^2 S_t^2 - r_t V_t = 0$$

2) En cada fecha de dividendo t_i , integramos la ecuación diferencial en el intervalo $[t_i - \epsilon, t_i + \epsilon]$ para posteriormente tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_i - \epsilon}^{t_i + \epsilon} \left[\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} \mu_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} (\sigma_t^S)^2 S_t^2 + \sum_{i=1}^n \Delta V_{t_i} \delta(t - t_i) - r_t V_t \right] dt = 0$$

\Downarrow

$$V_{t_i^+}(S_{t_i^+}) - V_{t_i^-}(S_{t_i^+}) = -(V_{t_i^-}(S_{t_i^+}) - V_{t_i^-}(S_{t_i^-})) \Rightarrow V_{t_i^+}(S_{t_i^+}) = V_{t_i^-}(S_{t_i^-})$$

Llegamos así a la condición de no arbitraje que satisface cualquier derivado al cruzar una fecha de dividendo discreto.

Modelo activo tipo de cambio

Consideremos un activo tipo de cambio.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Al igual que en apartados anteriores, nuestro objetivo es deducir la dinámica del activo subyacente X_t a partir de la dinámica seguida por el activo forward $FX_{t,T}$.

$$\frac{dFX_{t,T}}{FX_{t,T}} = \sigma_{t,T}^{FX} dW_t^{\mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad FX_{t,T} = X_t \frac{P_{t,T}^f}{P_{t,T}^d}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^{FX}$ es la volatilidad del activo forward

$W_t^{\mathbb{Q}^T}$ es un movimiento browniano bajo la medida \mathbb{Q}^T

Diferenciando sobre la expresión de $FX_{t,T}$:

$$dFX_{t,T} = FX_{t,T} \left(\frac{dX_t}{X_t} - \frac{dP_{t,T}^d}{P_{t,T}^d} + \frac{dP_{t,T}^f}{P_{t,T}^f} \right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f) dt + \frac{dFX_{t,T}}{FX_{t,T}} = (r_t^d - r_t^f) dt + \sigma_{t,T}^{FX} dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

De la anterior expresión se puede escribir:

$$\sigma_t^X = \sigma_{t,T}^{FX}$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Integrando sobre el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{X_{t_2}}{X_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left((r_t^d - r_t^f) - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} \right\}$$

Modelo activo renta variable con efecto quanto

Hasta el momento, cuando hemos hablado de contrato forward, nos hemos referido a la definición de payoff que vimos al principio del primer apartado:

$$V_T = (S_T - K)$$

donde en todo momento se asume que dicha cantidad V_T se liquida en la misma divisa en la que cotiza el activo subyacente, y que llamaremos divisa doméstica.

Sin embargo, existe la posibilidad de liquidar ese mismo payoff en una divisa distinta de la doméstica, y que llamaremos divisa de pago. A este tipo de contratos se los denomina derivados “quanto”.

La pregunta que nos viene a la cabeza es:

¿Existirá una replicación estática del contrato forward “quanto”? La respuesta es NO.

Para justificar la respuesta anterior vamos a utilizar el siguiente argumento:

Contrato forward quanto: (expresado en unidades de divisa de pago)

$$V_T^p = (S_T - K) \Rightarrow V_t^p = P_{t,T}^p E_{\mathbb{Q}_p^T} \left[\frac{S_T - K}{P_{T,T}^p} | \mathcal{F}_t \right]$$

Contrato forward quanto: (expresado en unidades de divisa doméstica)

$$V_T^d = (S_T - K)X_T \Rightarrow V_t^d = P_{t,T}^d E_{\mathbb{Q}_d^T} \left[\frac{(S_T - K)X_T}{P_{T,T}^d} | \mathcal{F}_t \right]$$

siendo

$$V_t^d = V_t^p X_t$$

donde,

X_t es el activo tipo de cambio que expresa el valor de una unidad de divisa de pago en términos de la divisa doméstica

A la vista de la segunda expresión, se aprecia claramente que el valor de K que anula el valor presente del contrato V_t^d , y por tanto de V_t^p , depende de la correlación existente entre el activo subyacente S_T y el tipo de cambio asociado X_T , y por tanto, depende también de la volatilidad de ambos subyacentes.

Así pues, dado que no disponemos de una réplica estática del contrato forward “quanto”, tenemos que obtener el valor de dicho activo utilizando las relaciones obtenidas con anterioridad para el precio en las divisas doméstica y de pago.

Divisa pago:

$$0 = P_{t,T}^p E_{\mathbb{Q}_p^T} \left[\frac{S_T - K}{P_{T,T}^p} | \mathcal{F}_t \right] \Rightarrow K = E_{\mathbb{Q}_p^T} [S_T | \mathcal{F}_t] = F_{t,T}^p$$

donde,

$F_{t,T}^p$ es el valor del activo forward “quanto” en la divisa de pago

$P_{t,T}^p$ es el valor del bono cupón cero de vencimiento T en la divisa de pago

Por otra parte, es fácil ver que, bajo la medida asociada al bono cupón cero de vencimiento T en la divisa de pago $P_{t,T}^p$, el activo forward quanto es martingala ya que $F_{T,T}^p = S_T$, y se tiene:

$$F_{t,T}^p = E_{\mathbb{Q}_p^T} [F_{T,T}^p | \mathcal{F}_t] \Rightarrow \frac{dF_{t,T}^p}{F_{t,T}^p} = \sigma_{t,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}_p^T}$$

Divisa doméstica:

$$0 = P_{t,T}^d E_{\mathbb{Q}_d^T} \left[\frac{(S_T - K) X_T}{P_{T,T}^d} | \mathcal{F}_t \right] \Rightarrow K = \frac{E_{\mathbb{Q}_d^T} [S_T X_T | \mathcal{F}_t]}{E_{\mathbb{Q}_d^T} [X_T | \mathcal{F}_t]}$$

donde,

$P_{t,T}^d$ es el valor del bono cupón cero de vencimiento T en la divisa doméstica

De todo lo anterior se tiene:

$$F_{t,T}^p = E_{\mathbb{Q}_p^T} [F_{T,T}^p | \mathcal{F}_t] = \frac{E_{\mathbb{Q}_d^T} [S_T X_T | \mathcal{F}_t]}{E_{\mathbb{Q}_d^T} [X_T | \mathcal{F}_t]}$$

A la vista de la anterior expresión, es necesario calcular el valor esperado del producto $S_T X_T$ en la medida bajo la cual ya hemos definido la dinámica para cada uno de ellos en apartados anteriores.

Activo renta variable S_t (no paga dividendo):

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp \left\{ \int_t^T \left(r_u^d - \frac{(\sigma_u^S)^2}{2} \right) du + \int_t^T (\sigma_u^S) dW_u^{S, \mathbb{Q}_d^T} \right\}$$

Activo tipo de cambio X_t :

$$\frac{X_T}{X_t} = \exp \left\{ \int_t^T \left((r_u^d - r_u^p) - \frac{(\sigma_u^X)^2}{2} \right) du + \int_t^T (\sigma_u^X) dW_u^{X, \mathbb{Q}_d^T} \right\}$$

La anterior expresión puede ser escrita en términos del valor forward $F_{t,T}^d$ del subyacente S_t así como el valor forward $FX_{t,T}$ del activo tipo de cambio X_t definidos como sigue:

$$F_{t,T}^d = \frac{S_t}{P_{t,T}^d} \quad / \quad FX_{t,T} = X_t \frac{P_{t,T}^p}{P_{t,T}^d}$$

Entonces se tiene:

$$F_{t,T}^p = \frac{E_{\mathbb{Q}_d^T} [F_{T,T}^d FX_{T,T} | \mathcal{F}_t]}{FX_{t,T}}$$

siendo:

$$\frac{F_{T,T}^d}{F_{t,T}^d} = \exp \left\{ \int_t^T \left(-\frac{(\sigma_u^S)^2}{2} \right) du + \int_t^T (\sigma_u^S) dW_u^{S, \mathbb{Q}_d^T} \right\}$$

$$\frac{FX_{T,T}}{FX_{t,T}} = \exp \left\{ \int_t^T \left(-\frac{(\sigma_u^X)^2}{2} \right) du + \int_t^T (\sigma_u^X) dW_u^{X, \mathbb{Q}_d^T} \right\}$$

Así pues, el valor esperado queda:

$$F_{t,T}^p = F_{t,T}^d \exp \left\{ \int_t^T (\rho_u^{S,X} \sigma_u^S \sigma_u^X) du \right\}$$

EJERCICIO

Deducir el precio forward del contrato forward “composite” cuyo payoff es $V_T = (S_T Y_T - K)$, siendo Y_t el activo tipo de cambio que permite expresar una unidad de divisa doméstica en unidades de la divisa de pago. ¿Existe réplica estática para dicho contrato?.

EJERCICIO

Calcular el precio forward “quanto” asumiendo que la volatilidad del proceso “spot” σ_t^S es: 1) constante, 2) lineal. Comparar este precio con aquél que se obtiene utilizando la expresión $F_T^p = F_T^d \exp \left\{ \rho^{S,X} \sigma_T^F \sigma_T^X \right\}$, donde σ_T^F es la volatilidad Black-Scholes del proceso “forward” definida en la divisa doméstica. ¿Obtenemos el mismo resultado en ambos supuestos?. Justificar la respuesta.

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Diferenciando en la anterior expresión:

$$\frac{dF_{t,T}^p}{F_{t,T}^p} = \frac{dF_{t,T}^d}{F_{t,T}^d} - \rho_t^{S,X} \sigma_t^S \sigma_t^X dt$$

Como ya sabemos de puntos anteriores, $F_{t,T}^d$ es martingala bajo la medida \mathbb{Q}_d^T asociada al bono cupón cero de vencimiento T . Sin embargo, bajo la medida \mathbb{Q}_p^T asociada al bono cupón cero de vencimiento T en la divisa de pago, la condición de martingala se pierde, apareciendo un término de drift:

$$\frac{dF_{t,T}^d}{F_{t,T}^d} = \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}_d^T} = \mu_t^{P^p_{t,T}} dt + \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}_p^T}$$

Sustituyendo la anterior expresión en la ecuación diferencial del precio forward del contrato quanto, y teniendo en cuenta la condición de martingala satisfecha por éste bajo la medida \mathbb{Q}_p^T se obtiene el valor del drift $\mu_t^{P_{t,T}^p}$:

$$\mu_t^{P_{t,T}^p} = \rho_t^{S,X} \sigma_t^S \sigma_t^X$$

Así pues, la ecuación diferencial para el precio forward $F_{t,T}^d$ en términos de la medida \mathbb{Q}_p^T nos permite determinar finalmente la ecuación seguida por el subyacente S_t bajo dicha medida:

$$\frac{dF_{t,T}^d}{F_{t,T}^d} = \rho_t^{S,X} \sigma_t^S \sigma_t^X dt + \sigma_{t,T}^S dW_t^{\mathbb{Q}_p^T} = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T}^d}{P_{t,T}^d} = \frac{dS_t}{S_t} - r_t dt$$

Por tanto:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \rho_t^{S,X} \sigma_t^S \sigma_t^X dt + \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}_p^T}$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Integrando la ecuación anterior en el intervalo $[t_1, t_2]$ llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left((r_t + \rho_t^{S,X} \sigma_t^S \sigma_t^X) - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}_p^T} \right\}$$

ILUSTRACIÓN

Simular la evolución de un activo “quanto” asumiendo que la volatilidad del proceso “spot” σ_t^S es: 1) constante, 2) lineal. Calcular el precio de una opción europea “quanto” e inferir la volatilidad Black-Scholes equivalente. Comprobar que, en ambos supuestos de σ_t^S , recuperamos la volatilidad Black-Scholes del proceso “forward” σ_T^F definida en la divisa doméstica.

Modelo activo renta variable con efecto CMS

Supongamos que nos referimos al contrato forward definido como hasta ahora, pero en lugar de liquidarlo en la fecha T_1 , lo liquidamos en un instante de tiempo posterior T :

$$V_T = (S_{T_1} - K)$$

donde se asume que dicha cantidad V_T se liquida en unidades monetarias del instante de tiempo T .

A este tipo de contratos con pago diferido se les denomina contratos CMS.

De nuevo, al igual que ocurría con el contrato “quanto”, la pregunta que nos viene a la cabeza es:

¿Existirá una replicación estática del contrato forward CMS?. Si asumimos un entorno de tipos de interés estocásticos, la respuesta es NO.

Para justificar la respuesta anterior vamos a utilizar el siguiente argumento:

Contrato forward CMS: (expresado en unidades monetarias del instante de tiempo T)

$$V_T = (S_{T_1} - K) \Rightarrow V_t = P_{t,T} E_{\mathbb{Q}^T} \left[\frac{S_{T_1} - K}{P_{T,T}} | \mathcal{F}_t \right]$$

Contrato forward CMS: (expresado en unidades monetarias del instante de tiempo T_1)

$$V_{T_1} = (S_{T_1} - K) P_{T_1,T} \Rightarrow V_t = P_{t,T_1} E_{\mathbb{Q}_d^{T_1}} \left[\frac{(S_{T_1} - K) P_{T_1,T}}{P_{T_1,T_1}} | \mathcal{F}_t \right]$$

donde,

P_{t,T_1} es el activo bono cupón cero de vencimiento T_1

$P_{t,T}$ es el activo bono cupón cero de vencimiento T

A la vista de la segunda expresión se aprecia claramente que el valor de K que anula el valor presente del contrato V_t depende de la correlación existente entre el activo subyacente S_{T_1} y el bono cupón cero $P_{T_1,T}$, y por tanto, depende también de la volatilidad de ambos subyacentes.

Así pues, dado que no disponemos de una replica estática del contrato forward CMS, tenemos que obtener el valor de dicho activo utilizando las relaciones obtenidas anteriormente para el precio de dicho contrato:

$$0 = P_{t,T} E_{\mathbb{Q}^T} \left[(S_{T_1} - K) | \mathcal{F}_t \right] \Rightarrow K = E_{\mathbb{Q}^T} \left[S_{T_1} | \mathcal{F}_t \right] = F_{t,T_1,T}$$

donde,

$F_{t,T_1,T}$ es el valor del activo forward CMS

Por otra parte, es fácil ver que bajo la medida asociada al bono cupón cero de vencimiento T , el activo forward CMS es martingala ya que $F_{T_1, T_1, T} = S_{T_1}$, y se tiene:

$$F_{t, T_1, T} = E_{\mathbb{Q}^T} [F_{T_1, T_1, T} | \mathcal{F}_t] \Rightarrow \frac{dF_{t, T_1, T}}{F_{t, T_1, T}} = \sigma_{t, T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

Pero también se tiene:

$$0 = P_{t, T_1} E_{\mathbb{Q}^{T_1}} [(S_{T_1} - K) P_{T_1, T} | \mathcal{F}_t] \Rightarrow K = \frac{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} [S_{T_1} P_{T_1, T} | \mathcal{F}_t]}{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} [P_{T_1, T} | \mathcal{F}_t]} = F_{t, T_1, T}$$

Por tanto,

$$F_{t, T_1, T} = E_{\mathbb{Q}^T} [S_{T_1} | \mathcal{F}_t] = \frac{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} [S_{T_1} P_{T_1, T} | \mathcal{F}_t]}{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} [P_{T_1, T} | \mathcal{F}_t]}$$

A la vista de la anterior expresión, es necesario calcular el valor esperado del producto $S_{T_1} P_{T_1,T}$ bajo la medida \mathbb{Q}^{T_1} asociada al bono cupón cero de vencimiento T_1 .

A continuación vamos a reescribir la anterior expresión utilizando la definición de bono cupón cero implícito $P_{t,T_1,T}$:

$$P_{t,T_1,T} = \frac{P_{t,T}}{P_{t,T_1}}$$

y aplicando el cambio de medida de \mathbb{Q}^{T_1} a \mathbb{Q}^T es fácil comprobar que:

$$E_{\mathbb{Q}^{T_1}} \left[P_{T_1,T} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{P_{t,T}}{P_{t,T_1}} E_{\mathbb{Q}^T} \left[P_{T_1,T} \frac{P_{T_1,T_1}}{P_{T_1,T}} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{P_{t,T}}{P_{t,T_1}} = P_{t,T_1,T}$$

Por tanto se tiene:

$$P_{t,T_1,T} = E_{\mathbb{Q}^{T_1}} \left[P_{T_1,T} | \mathcal{F}_t \right] = E_{\mathbb{Q}^{T_1}} \left[P_{T_1,T_1,T} | \mathcal{F}_t \right]$$

por lo que $P_{t,T_1,T}$ es martingala bajo la medida \mathbb{Q}^{T_1} asociada al bono cupón cero de vencimiento T_1

Así pues, aplicando el lema de Itô se tiene:

$$\frac{dP_{t,T_1,T}}{P_{t,T_1,T}} = \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} - \frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} - \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} \right) \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right) + \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right)^2$$

Ahora, asumimos la siguiente dinámica para la curva de bonos cupón cero bajo la medida \mathbb{Q} asociada al activo cuenta corriente:

$$\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} = r_t dt + \sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}} dW_t^{\mathbb{Q}} \quad / \quad \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} = r_t dt + \sigma_{t,T}^{P_T} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Así pues, de la condición de martingala se tiene:

$$\frac{dP_{t,T_1,T}}{P_{t,T_1,T}} = \sigma_{t,T}^{P_T} dW_t^{P_T, \mathbb{Q}^{T_1}} - \sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}} dW_t^{P_{T_1}, \mathbb{Q}^{T_1}}$$

Por otra parte, de la definición de activo forward, sabemos que:

$$F_{t,T_1} = \frac{S_t}{P_{t,T_1}} \Rightarrow F_{T_1,T_1} = S_{T_1}$$

es martingala bajo la misma medida \mathbb{Q}^{T_1}

Por tanto, aplicando otra vez el lema de Itô se tiene:

$$\frac{dF_{t,T_1}}{F_{t,T_1}} = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} - \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right) + \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right)^2$$

Otra vez, la condición de martingala del activo forward F_{t,T_1} bajo la medida \mathbb{Q}^{T_1} conduce a:

$$\frac{dF_{t,T_1}}{F_{t,T_1}} = \sigma_t^S dW_t^{S,\mathbb{Q}^{T_1}} - \sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}} dW_t^{P_{T_1},\mathbb{Q}^{T_1}}$$

De todo lo anterior se tiene:

Activo renta variable F_{t,T_1} :

$$\frac{F_{T_1,T_1}}{F_{t,T_1}} = \exp \left\{ \int_t^{T_1} -\frac{(\sigma_u^F)^2}{2} du + \int_t^{T_1} \sigma_u^S dW_u^{S,\mathbb{Q}^{T_1}} - \int_t^{T_1} \sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}} dW_u^{P_{T_1},\mathbb{Q}^{T_1}} \right\}$$

Activo bono cupón cero implícito $P_{t,T_1,T}$:

$$\frac{P_{T_1,T_1,T}}{P_{t,T_1,T}} = \exp \left\{ \int_t^{T_1} -\frac{(\sigma_u^{P_{t,T_1,T}})^2}{2} du + \int_t^{T_1} \sigma_{u,T}^{P_T} dW_u^{P_T,\mathbb{Q}^{T_1}} - \int_t^{T_1} \sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}} dW_u^{P_{T_1},\mathbb{Q}^{T_1}} \right\}$$

donde,

$$\sigma_u^F = \sqrt{(\sigma_u^S)^2 + (\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}})^2 - 2\rho_u^{S,P_{T_1}}(\sigma_u^S)(\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}})}$$

$$\sigma_u^{P_{t,T_1},T} = \sqrt{(\sigma_{u,T}^{P_T})^2 + (\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}})^2 - 2\rho_u^{P_T,P_{T_1}}(\sigma_{u,T}^{P_T})(\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}})}$$

Retomando el cálculo del valor del activo forward CMS $F_{t,T_1,T}$, tenemos:

$$F_{t,T_1,T} = \frac{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} \left[F_{T_1,T_1} P_{T_1,T_1,T} | \mathcal{F}_t \right]}{E_{\mathbb{Q}^{T_1}} \left[P_{T_1,T_1,T} | \mathcal{F}_t \right]}$$

Teniendo en cuenta las anteriores definiciones se llega a:

$$F_{t,T_1,T} = F_{t,T_1} \exp \left\{ \int_t^{T_1} \rho_u^{S,P_T}(\sigma_u^S)(\sigma_{u,T}^{P_T}) du - \int_t^{T_1} \rho_u^{S,P_{T_1}}(\sigma_u^S)(\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}}) du - \right. \\ \left. - \int_t^{T_1} \rho_u^{P_T,P_{T_1}}(\sigma_{u,T}^{P_T})(\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}}) du + \int_t^{T_1} (\sigma_{u,T_1}^{P_{T_1}})^2 du \right\}$$

→ Ecuación diferencial estocástica (SDE)

Diferenciando en la anterior expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{t,T_1,T}}{F_{t,T_1,T}} = \frac{dF_{t,T_1}}{F_{t,T_1}} & - \rho_t^{S,P_T}(\sigma_t^S)(\sigma_{t,T}^{P_T})dt + \rho_t^{S,P_{T_1}}(\sigma_t^S)(\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}})dt + \\ & + \rho_t^{P_T,P_{T_1}}(\sigma_{t,T}^{P_T})(\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}})dt - (\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}})^2 dt \end{aligned}$$

Como ya sabemos de puntos anteriores, F_{t,T_1} es martingala bajo la medida \mathbb{Q}^{T_1} asociada al bono cupón cero de vencimiento T_1 . Sin embargo, bajo la medida \mathbb{Q}^T asociada al bono cupón cero de vencimiento T en la divisa de pago, la condición de martingala se pierde, apareciendo un término de “drift”:

$$\frac{dF_{t,T_1}}{F_{t,T_1}} = \sigma_t^F dW_t^{\mathbb{Q}^{T_1}} = \mu_t^{P_{t,T}} dt + \sigma_t^F dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

Sustituyendo la anterior expresión en la ecuación diferencial del precio forward del contrato CMS, y teniendo en cuenta la condición de martingala satisfecha por éste bajo la medida \mathbb{Q}^T se obtiene el valor del drift $\mu_t^{P_t,T}$:

$$\mu_t^{P_t,T} = \rho_t^{S,P_T}(\sigma_t^S)(\sigma_{t,T}^{P_T}) - \rho_t^{S,P_{T_1}}(\sigma_t^S)(\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}}) - \rho_t^{P_T,P_{T_1}}(\sigma_{t,T}^{P_T})(\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}}) + (\sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}})^2$$

Por último, para obtener la ecuación diferencial estocástica seguida por el activo subyacente S_t , es necesario recurrir de nuevo al lema de Itô:

$$\frac{dF_{t,T_1}}{F_{t,T_1}} = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} - \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right) + \left(\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} \right)^2$$

Sin embargo, dado que ahora queremos obtener la dinámica del subyacente S_t bajo la medida \mathbb{Q}^T , es necesario expresar la dinámica del bono cupón cero P_{t,T_1} de vencimiento T_1 bajo dicha medida. Para ello, vamos a utilizar la condición de martingala satisfecha por los siguientes activos $B_t/P_{t,T}$ y $P_{t,T_1}/P_{t,T}$.

Condición de martingala para el activo $\frac{B_t}{P_{t,T}}$:

$$\frac{d\left(\frac{B_t}{P_{t,T}}\right)}{\frac{B_t}{P_{t,T}}} = \frac{dB_t}{B_t} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} - \left(\frac{dB_t}{B_t}\right) \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}}\right) + \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}}\right)^2$$

Por tanto, el drift $\mu_t^{P_{t,T}, \mathbb{Q}^T}$ del activo $P_{t,T}$ bajo la medida \mathbb{Q}^T asociada a si mismo queda:

$$\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} = \mu_t^{P_{t,T}, \mathbb{Q}^T} dt + \sigma_{t,T}^{P_T} dW_t^{P_T, \mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad \mu_t^{P_{t,T}, \mathbb{Q}^T} = r_t + \left(\sigma_{t,T}^{P_T}\right)^2$$

Condición de martingala para el activo $\frac{P_{t,T_1}}{P_{t,T}}$:

$$\frac{d\left(\frac{P_{t,T_1}}{P_{t,T}}\right)}{\frac{P_{t,T_1}}{P_{t,T}}} = \frac{P_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} - \frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} - \left(\frac{P_{t,T_1}}{P_{t,T_1}}\right) \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}}\right) + \left(\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}}\right)^2$$

Por tanto, el drift $\mu_t^{P_{t,T_1}, \mathbb{Q}^T}$ del activo P_{t,T_1} bajo la medida \mathbb{Q}^T asociada al bono cupón cero $P_{t,T}$ queda:

$$\frac{dP_{t,T_1}}{P_{t,T_1}} = \mu_t^{P_{t,T_1}, \mathbb{Q}^T} dt + \sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}} dW_t^{P_{T_1}, \mathbb{Q}^T} \quad \text{siendo} \quad \mu_t^{P_{t,T_1}, \mathbb{Q}^T} = r_t + \rho_t^{P_T, P_{T_1}} \sigma_{t,T_1}^{P_{T_1}} \sigma_{t,T}^{P_T}$$

Así pues, la ecuación diferencial para el precio forward F_{t,T_1} en términos de la medida \mathbb{Q}^T nos permite determinar finalmente la ecuación seguida por el subyacente S_t bajo dicha medida:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \rho_t^{S,P_T} (\sigma_t^S) (\sigma_{t,T}^{P_T}) dt + \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

→ Simulación del subyacente en el intervalo $[t_1, t_2]$

Integrando la ecuación anterior para el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left(\left(r_t + \rho_t^{S, P_T} (\sigma_t^S) (\sigma_{t, T}^{P_T}) \right) - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{Q}^T} \right\}$$

Habida cuenta que este resultado se obtiene bajo la hipótesis de tipos estocásticos, resulta necesario definir una dinámica para el tipo a corto r_t que permita hacer uso de dicha expresión. En concreto, para el caso que nos ocupa, vamos a elegir como modelo de difusión para el tipo a corto el llamado modelo de Hull&White normal de 1 factor, que se define como sigue:

$$dr_t = (\theta_t - a r_t) dt + \xi dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Conviene resaltar el hecho de que la dinámica anterior se asume definida bajo la medida riesgo neutro \mathbb{Q} asociada al activo cuenta corriente B_t .

En base al anterior modelo de difusión para el tipo a corto, la dinámica del bono cupón cero de vencimiento T viene dada según:

$$\frac{dP_{t,T}}{P_{t,T}} = r_t dt + \sigma_{t,T}^{P_T} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

siendo para este modelo:

$$P_{t,T} = \exp \left\{ \begin{aligned} & - r_t \int_t^T \exp \{ - a (u - t) \} du - \\ & - \int_t^T du \int_t^u \theta_s \exp \{ - a (u - s) \} ds \\ & + \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_{u,T}^{P_T})^2 du \end{aligned} \right\}$$

donde,

$\sigma_{t,T}^{P_T} = \frac{\xi}{a} \left[1 - \exp \{ -a(T-t) \} \right]$ es la volatilidad del bono cupón cero de plazo T

$\rho_t^{S,P_T} = -\rho_t^{S,r}$ es la correlación entre el activo S y el bono cupón cero de plazo T

Por último, obtenemos la dinámica del tipo a corto bajo la medida \mathbb{Q}^T asociada al bono cupón cero de vencimiento T :

$$dr_t = (\theta_t - a r_t - \xi \sigma_{t,T}^{P_T}) dt + \xi dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

ILUSTRACIÓN

Simular la evolución de un activo “CMS” y calcular su valor esperado a distintos plazos T_i anteriores al vencimiento T del contrato forward “CMS” asociado. Comparar dichos resultados contra el forward de “mercado” a cada uno de los plazos.

3. Smile de volatilidad

Definición de volatilidad implícita

La volatilidad implícita se define como el valor de volatilidad constante para el proceso seguido por el activo forward que permite recuperar el valor de una opción europea de strike K y vencimiento T .

Es decir, si consideramos el payoff de una opción europea (K, T) :

$$V_T = (S_T - K)^+ = (F_{T,T} - K)^+$$

Entonces, utilizando la siguiente dinámica para el proceso seguido por el precio forward del activo al vencimiento T de la opción:

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{K,T}^F dW_t^{\mathbb{Q}^T}$$

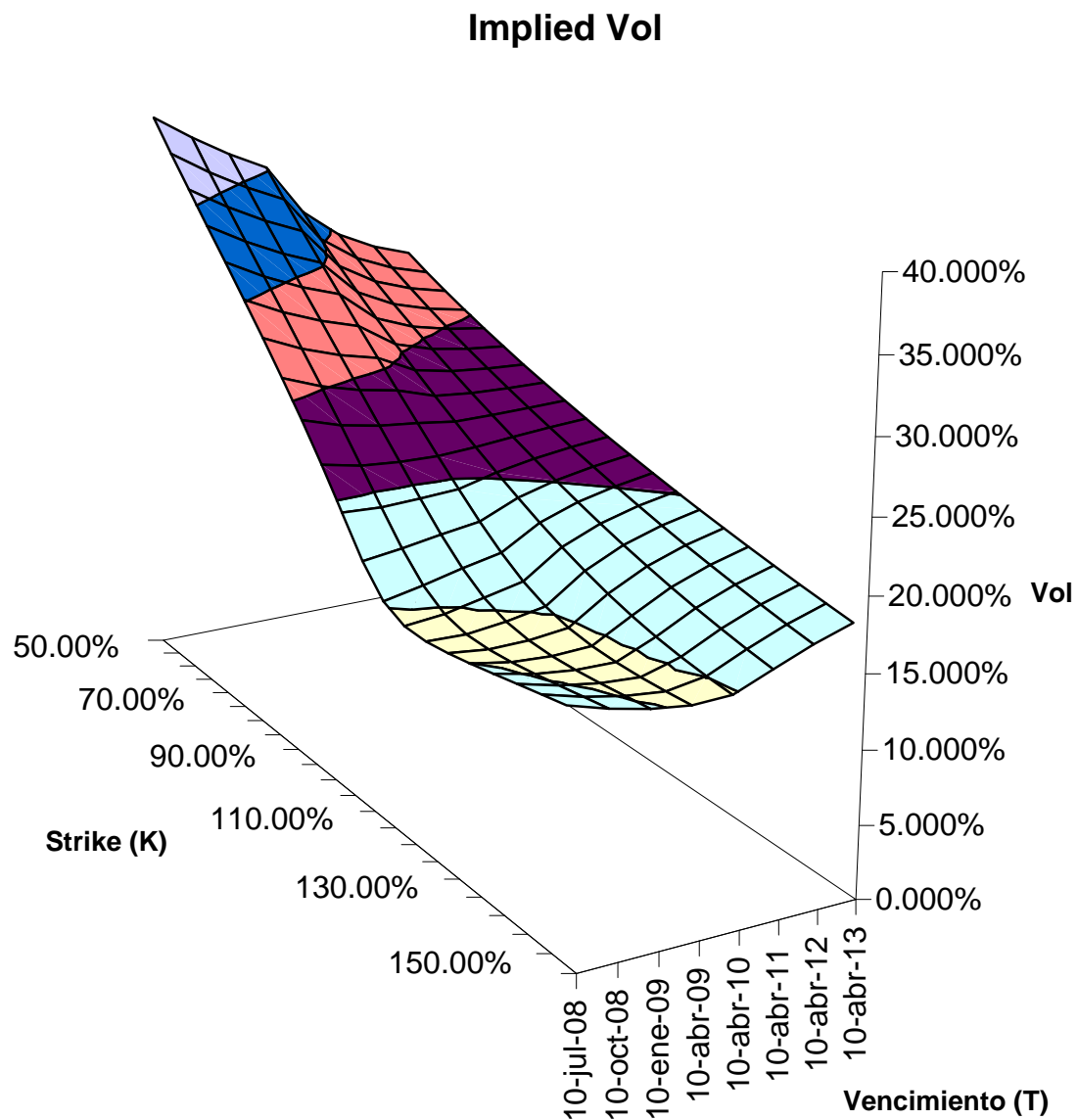
podemos definir $\sigma_{K,T}^F$ como el valor de la volatilidad implícita Black-Scholes para la opción europea (K, T) .

Como sabemos, para el modelo de Black-Scholes aplicado a valoración de opciones europeas existe fórmula cerrada. Así pues se tiene:

$$V_{K,T}(t_0) = BS(F_{t_0,T}, K, T - t_0, \sigma_{K,T}^F)$$

Por tanto, conocidos los precios de opciones europeas para un continuo de strikes (K) y vencimientos (T) se puede invertir la fórmula de Black-Scholes para obtener el valor de la volatilidad implícita correspondiente a cada pareja (K, T).

Por último, conviene apuntar que la anterior definición sólo aplica a los índices de acciones. En general, cuando el subyacente de renta variable es una acción singular, la volatilidad implícita que se cotiza proviene de opciones americanas y no de opciones europeas. La pregunta que surge entonces es la siguiente: ¿Podemos considerar que esta volatilidad implícita es válida para recuperar el precio de opciones europeas del mismo strike y mismo vencimiento que la opción americana equivalente?



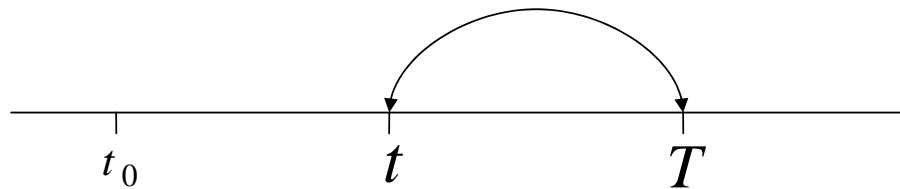
Definición de volatilidad forward

A continuación vamos a considerar la valoración del siguiente payoff:

$$V_T = \left(\frac{S_T}{S_t} - k \right)^+$$

donde t y T son dos instantes de tiempo futuros siendo $T > t$.

$$V(T) = \left(\frac{S_T}{S_t} - k \right)^+$$



Aplicando la ley de las expectativas iteradas se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{V(t_0)}{P_{t_0,T}} &= E\left[\frac{V(T)}{P_{T,T}}\middle|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \\ &= E\left[E\left[\frac{V(T)}{P_{T,T}}\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \\ &= BS(X_{t,t} = 1, k, T - t, \sigma_{t,T;k}^{Fwd})\end{aligned}$$

siendo $X_{t,t'} = \frac{S_{t'}}{S_t}$ con $T \geq t' \geq t$

$\sigma_{t,T;k}^{Fwd}$ es la volatilidad forward para el periodo $t \rightarrow T$

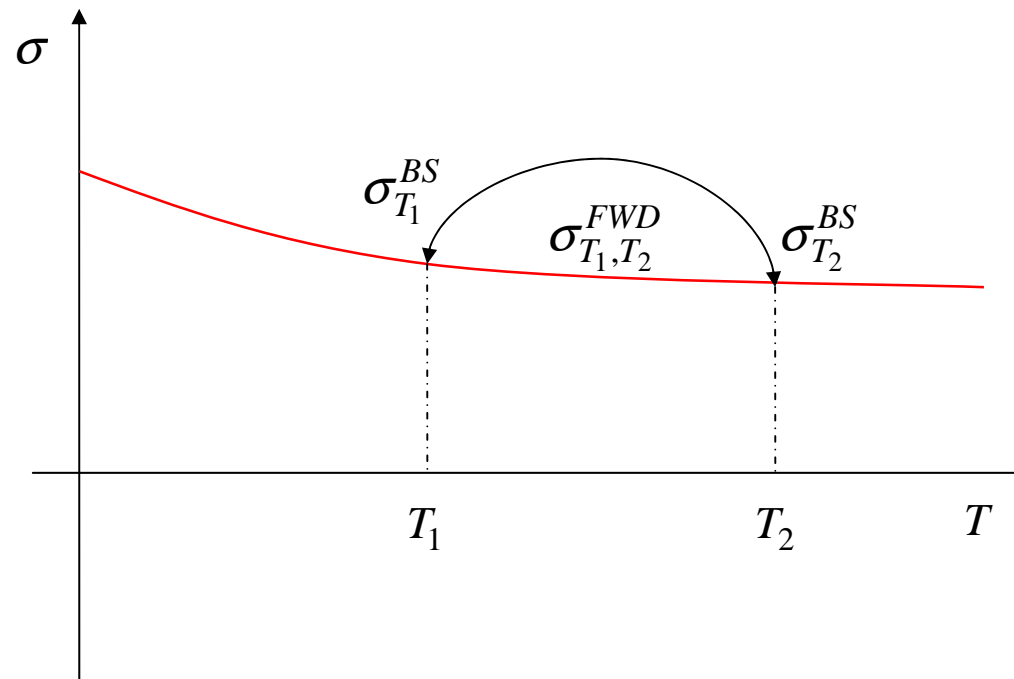
Volatilidad determinista

Asumiendo volatilidad instantánea determinista, se puede hacer uso de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\frac{S_t}{S_{t_0}} &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_{t_0}^t \sigma_s dW_s \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t r_s ds - \frac{(\sigma_t^{BS})^2}{2} (t - t_0) + \sigma_t^{BS} W_{t_0,t} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{S_T}{S_{t_0}} &= \exp \left\{ \int_{t_0}^T \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_{t_0}^T \sigma_s dW_s \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_{t_0}^T r_s ds - \frac{(\sigma_T^{BS})^2}{2} (T - t_0) + \sigma_T^{BS} W_{t_0,T} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{S_T}{S_t} &= \exp \left\{ \int_t^T \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma_s dW_s \right\} \\
&= \exp \left\{ \int_t^T r_s ds - \frac{(\sigma_{t,T}^{Fwd})^2}{2} (T - t) + \sigma_{t,T}^{Fwd} W_{t,T} \right\}
\end{aligned}$$



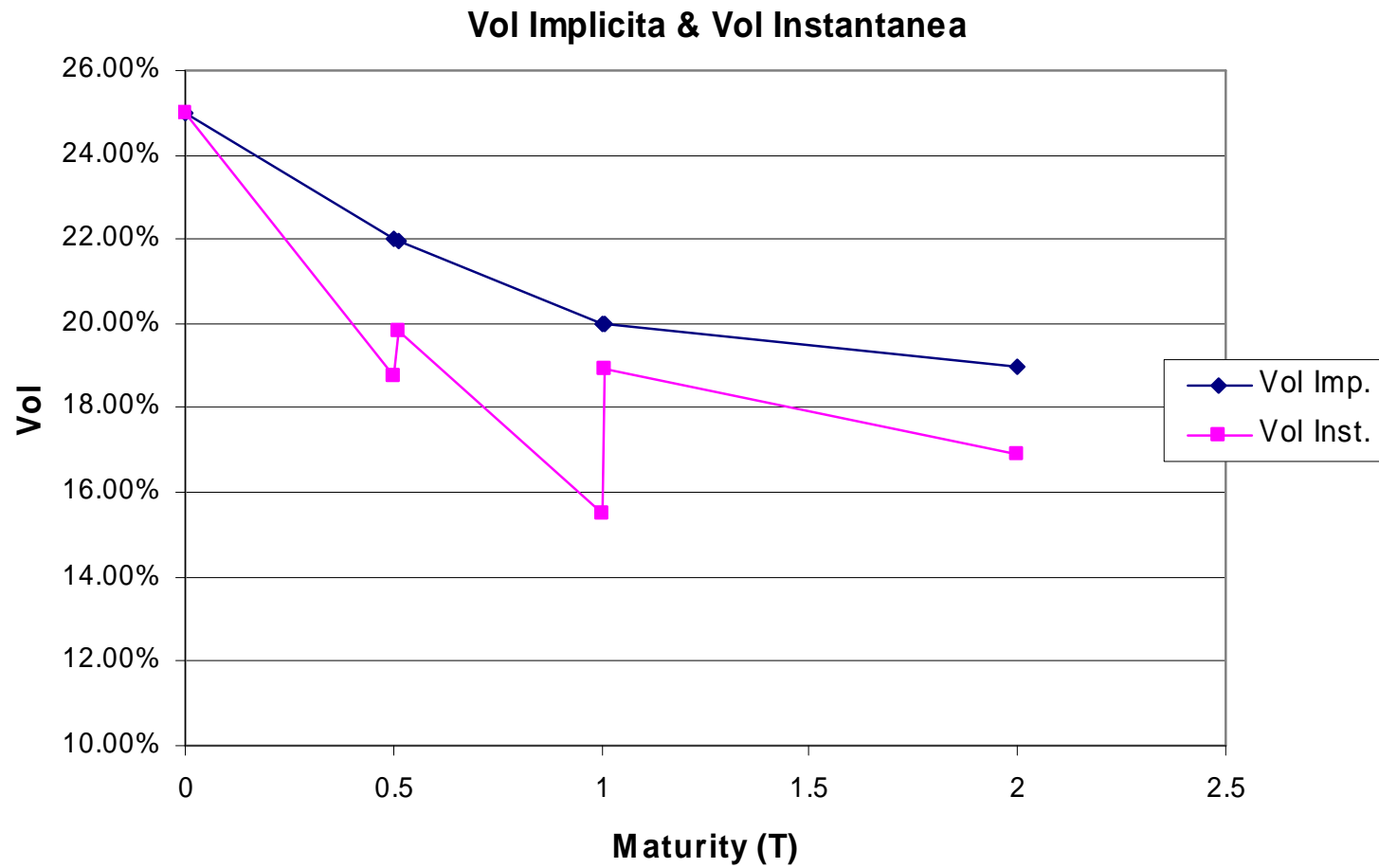
Por lo tanto se tiene:

$$(\sigma_{t,T}^{Fwd})^2 = \frac{(\sigma_T^{BS})^2(T - t_0) - (\sigma_t^{BS})^2(t - t_0)}{T - t}$$

$$\sigma_t^2 = \lim_{T \rightarrow t} (\sigma_{t,T}^{Fwd})^2 = \frac{\partial[(\sigma_t^{BS})^2(t - t_0)]}{\partial t}$$

EJERCICIO

Obtener la estructura temporal de volatilidad instantánea consistente con la estructura temporal de volatilidad Black-Scholes. A la vista del resultado, ¿qué se puede concluir sobre la forma de interpolar en volatilidad Black-Scholes?



Relación volatilidad proceso Spot & Forward

Hasta el momento, hemos analizado la relación entre volatilidad del proceso Forward y volatilidad del proceso Spot en un entorno de tipos de interés deterministas. En concreto, para el modelo de dividendo continuo encontrábamos la siguiente relación:

$$\sigma_{t,T}^F = \sigma_t^S$$

Sin embargo, en entorno de tipos estocásticos, la relación entre ambas volatilidades cambia debido a la presencia del término de volatilidad proveniente de los tipos de interés. Así, cuando estudiábamos el efecto CMS, teníamos la siguiente relación entre dichas volatilidades:

$$(\sigma_{t,T}^F)^2 = (\sigma_t^S)^2 + (\sigma_{t,T}^{P_T})^2 - 2\rho_t^{S,P_T}(\sigma_t^S)(\sigma_{t,T}^{P_T})$$

EJERCICIO

Obtener la estructura temporal de volatilidad instantánea del proceso Spot “piecewise constant” consistente con la estructura temporal de volatilidad Black-Scholes en un entorno de tipos estocásticos dado por el modelo Hull&White normal de 1 factor.

Condiciones de no arbitraje en superficies de volatilidad implícita

Una vez hemos definido el concepto de volatilidad implícita, el siguiente paso es establecer bajo qué condiciones dicha superficie de volatilidad NO presenta oportunidades de arbitraje, es decir, bajo qué condiciones no es posible construir una estrategia (estática) que permita realizar un beneficio seguro.

A la hora de hablar de condiciones de no arbitraje en una superficie de volatilidades implícitas, se suele distinguir entre condiciones relativas al strike y condiciones relativas al vencimiento de las opciones. Así pues, el test de arbitraje se puede realizar de una manera secuencial, primero analizar la superficie según strike (para cada uno de los vencimientos) y después analizar la superficie según vencimientos.

A) Condiciones de no arbitraje relativas al strike K :

A continuación vamos a tratar de establecer condiciones **necesarias** de no arbitraje relativas al strike de las opciones europeas (call/put). Es decir, vamos a buscar condiciones del tipo:

Si NO EXISTE oportunidad de arbitraje \Rightarrow se verifica la condición, o equivalentemente,

Si NO se verifica la condición \Rightarrow EXISTE oportunidad de arbitraje.

Por tanto, debemos tener en cuenta que si las condiciones de NO arbitraje que establezcamos son satisfechas, en ningún caso podremos asegurar que NO existan oportunidades de arbitraje.

En adelante vamos a utilizar la siguiente notación:

$C_{K,T}$ es el precio de una opción europea “call” de strike K y vencimiento T

F_T es el precio forward del subyacente al vencimiento T

$P(T)$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

A.1) Condición $C_{K,T} \geq 0$.

Hipótesis $\rightarrow C_{K,T} < 0$

En t_0 : Compramos lo barato, $C_{K,T}$ (recibimos $C_{K,T}$).

En T : Recibimos $(S_T - K)^+$.

Dado que $(S_T - K)^+ \geq 0$, es posible realizar un beneficio $|C_{K,T}| > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.

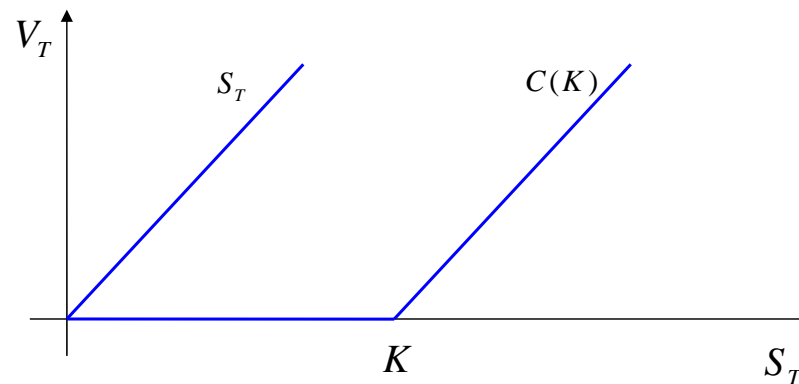
A.2) Condición $C_{K,T} \leq V_{K,T} = P(T)F_T$.

Hipótesis $\rightarrow C_{K,T} > V_{K,T} = P(T)F_T$

En t_0 : Compramos lo barato, $V_{K,T}$ y vendemos lo caro, $C_{K,T}$.

En T : Recibimos S_T , entregamos $(S_T - K)^+$.

Dado que $S_T \geq 0$, se sigue que $S_T \geq (S_T - K)^+$ cualquier sea el valor de S_T y por tanto, es posible realizar un beneficio $C_{K,T} - V_{K,T} > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.



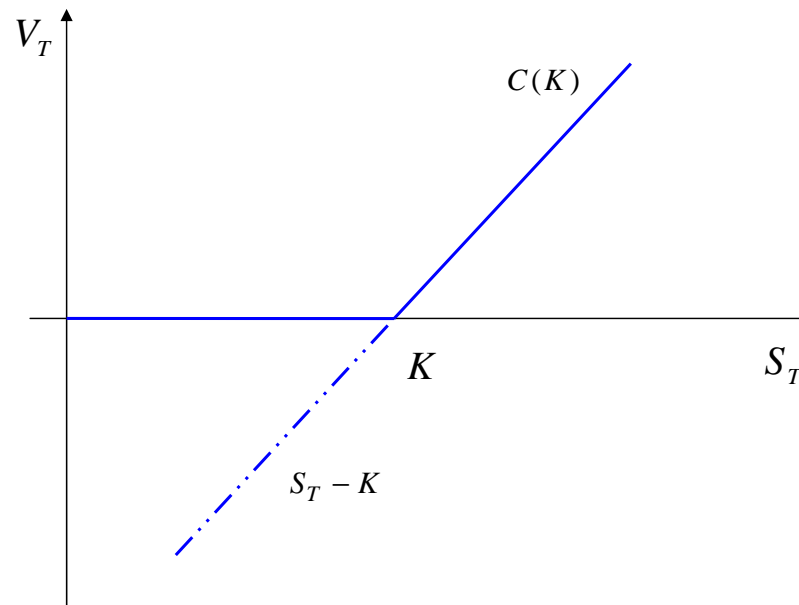
A.3) Condición $C_{K,T} \geq V_{K,T} = P(T)(F_T - K)$.

Hipótesis $\rightarrow C_{K,T} < V_{K,T} = P(T)(F_T - K)$

En t_0 : Compramos lo barato, $C_{K,T}$ y vendemos lo caro, $V_{K,T}$.

En T : Recibimos $(S_T - K)^+$, entregamos $S_T - K$.

Dado que $(S_T - K)^+ \geq 0$, se sigue que $(S_T - K)^+ \geq S_T - K$ cualquier sea el valor de S_T y por tanto, es posible realizar un beneficio $V_{K,T} - C_{K,T} > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.



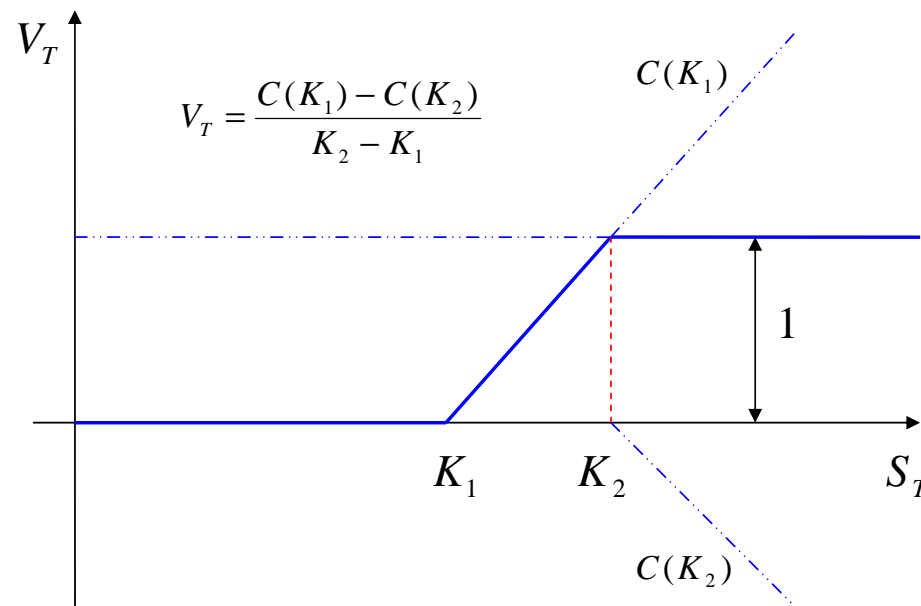
A.4) Condición $C_{K_1,T} \geq C_{K_2,T}$ siendo $K_2 > K_1$.

Hipótesis $\rightarrow C_{K_1,T} < C_{K_2,T}$ siendo $K_2 > K_1$

En t_0 : Compramos lo barato, $C_{K_1,T}$ y vendemos lo caro, $C_{K_2,T}$.

En T : Recibimos $(S_T - K_1)^+$, entregamos $(S_T - K_2)^+$.

Dado que $K_2 > K_1$, se sigue que $(S_T - K_1)^+ \geq (S_T - K_2)^+$ cualquier sea el valor de S_T y por tanto, es posible realizar un beneficio $C_{K_2,T} - C_{K_1,T} > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.



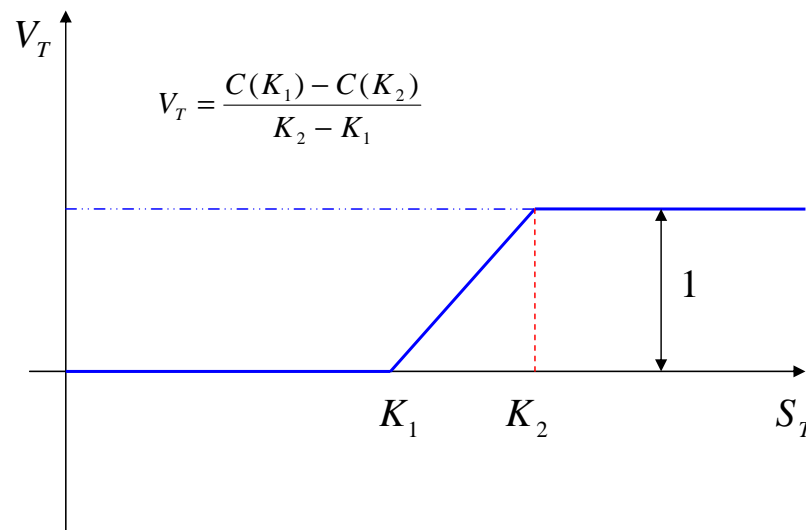
A.5) Condición $\frac{C_{K_1,T} - C_{K_2,T}}{K_2 - K_1} \leq P(T)$ siendo $K_2 > K_1$.

Hipótesis $\rightarrow (C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1) > P(T)$

En t_0 : Compramos lo barato, $P(T)$ y vendemos lo caro, $(C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1)$.

En T : Recibimos 1, entregamos $((S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+)/ (K_2 - K_1)$.

Dado que $1 \geq ((S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+)/ (K_2 - K_1)$ cualquier sea el valor de S_T , es posible realizar un beneficio $(C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1) - P(T) > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.



A.6) Condición $\frac{C_{K_2,T} - C_{K_3,T}}{K_3 - K_2} \leq \frac{C_{K_1,T} - C_{K_2,T}}{K_2 - K_1}$ siendo $K_3 > K_2 > K_1$.

Hipótesis $\rightarrow (C_{K_2,T} - C_{K_3,T})/(K_3 - K_2) > (C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1)$

En t_0 :

Compramos lo barato, $(C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1)$

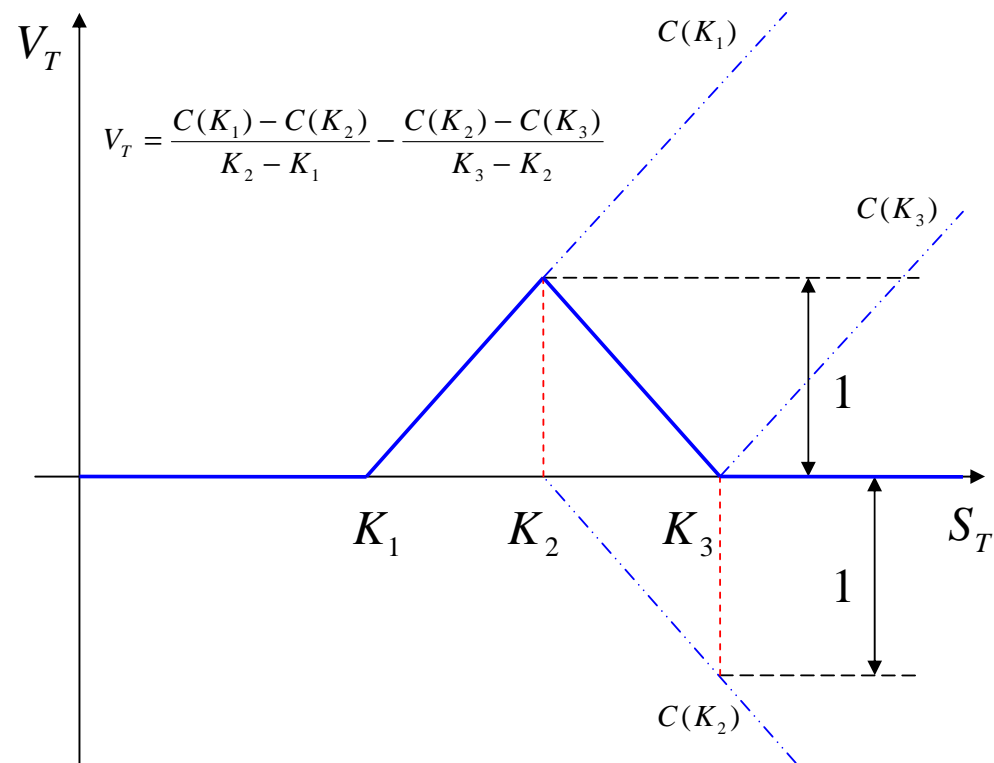
Vendemos lo caro, $(C_{K_2,T} - C_{K_3,T})/(K_3 - K_2)$

En T :

Recibimos $((S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+)/(K_2 - K_1)$

Entregamos $((S_T - K_2)^+ - (S_T - K_3)^+)/(K_3 - K_2)$

Dado que $((S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+)/(K_2 - K_1) \geq ((S_T - K_2)^+ - (S_T - K_3)^+)/(K_3 - K_2)$ cualquier sea el valor de S_T , es posible realizar un beneficio $(C_{K_2,T} - C_{K_3,T})/(K_3 - K_2) - (C_{K_1,T} - C_{K_2,T})/(K_2 - K_1) > 0$ en t_0 sin riesgo alguno al vencimiento.



A la vista de las condiciones definidas anteriormente, nuestro objetivo es expresar dichas condiciones en términos de una serie discreta de valores de strike K para los cuales están cotizadas en mercado las volatilidades implícitas correspondientes. Así pues, asumimos que disponemos de un conjunto discreto de strikes K_i , $i = 1, \dots, N$ (siendo $K_{i+1} > K_i \forall i$) para cualquier vencimiento T_j , $j = 1, \dots, M$ (siendo $T_{j+1} > T_j \forall j$).

Las condiciones definidas anteriormente pueden ser aplicadas al conjunto discreto de strikes y vencimientos definido de manera que llegamos a lo siguiente (T_j , $j = 1, \dots, M$):

$$(1) C_{K_N, T_j} \geq 0$$

$$(2) C_{K_1, T_j} \leq P(T_j)F_{T_j}$$

$$(3) \forall i, i = 1, \dots, N \Rightarrow C_{K_i, T_j} \geq P(T_j)(F_{T_j} - K_i)$$

$$(4) C_{K_N, T_j} - C_{K_{N-1}, T_j} \leq 0$$

$$(5) \frac{C_{K_2, T_j} - C_{K_1, T_j}}{K_2 - K_1} \geq -P(T_j)$$

$$(6) \forall i, i = 2, \dots, N - 2 \Rightarrow \frac{C_{K_{i+1}, T_j} - C_{K_i, T_j}}{K_{i+1} - K_i} \geq \frac{C_{K_i, T_j} - C_{K_{i-1}, T_j}}{K_i - K_{i-1}}$$

B) Condiciones de no arbitraje relativas al vencimiento T :

Al igual que ocurría con las condiciones relativas al strike de las opciones, vamos a tratar de establecer condiciones **necesarias** de no arbitraje entre opciones de distinto vencimiento. Sin embargo, en este caso no resulta tan inmediato construir arbitrajes que permitan definir las condiciones que deben verificarse. Es por ello que vamos a tener que hacer uso de algunas de las propiedades derivadas de las "martingalas".

Supongamos que tenemos un proceso martingala X_t . Entonces se verifica que el proceso $(X_t - k)^+$ es una "submartingala", es decir, se tiene:

$$E[(X_{t_2} - k)^+ | \mathcal{F}_{t_0}] \geq E[(X_{t_1} - k)^+ | \mathcal{F}_{t_0}] \geq (X_{t_0} - k)^+$$

Definamos ahora la siguiente martingala: $X_t = S_t / F_{t_0, t}$

donde,

S_t es el precio del subyacente

$F_{t_0, t}$ es el precio forward del subyacente al vencimiento t visto desde t_0

Teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos establecer la siguiente condición relativa al vencimiento T_j , $j = 1, \dots, M$ (siendo $T_{j+1} > T_j \forall j$):

$\forall i, i = 1, \dots, N$

$$(1) \forall j, j = 1, \dots, N - 1 \Rightarrow \frac{C_{K_i, T_{j+1}}}{P(T_{j+1})K_i} \geq \frac{C_{K_i^*, T_j}}{P(T_j)K_i^*}, \text{ siendo } K_i^* = K_i \frac{F_{t_0, T_j}}{F_{t_0, T_{j+1}}}$$

Pero además, dado que la anterior expresión proviene de la siguiente desigualdad:

$$E\left[(X_{T_{j+1}} - k_i)^+ | \mathcal{F}_{t_0}\right] \geq E\left[(X_{T_j} - k_i)^+ | \mathcal{F}_{t_0}\right], \text{ siendo } k_i = \frac{K_i}{F_{t_0, T_{j+1}}} = \frac{K_i^*}{F_{t_0, T_j}}$$

la condición de arbitraje temporal se puede establecer en términos de la varianza total ($\sigma^2 \cdot T$):

$$(2) \forall j, j = 1, \dots, N - 1 \Rightarrow \sigma_{K_i, T_{j+1}}^2 \cdot T_{j+1} \geq \sigma_{K_i^*, T_j}^2 \cdot T_j$$

C) Condiciones de no arbitraje relativas a fechas de dividendo T_i :

La condición de no arbitraje establecida en fechas de pago de dividendo T_i nos conduce a la siguiente relación de ausencia de arbitraje en los precios de opciones europeas:

$$S_{T_i^+} = S_{T_i^-} - D_{T_i}$$

\Downarrow

$$\frac{C_{K,T_i^+}}{P(T_i)} = E\left[(S_{T_i^+} - K)^+ | \mathcal{F}_{t_0}\right] = E\left[(S_{T_i^-} - (K + D_{T_i}))^+ | \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

A la vista de la anterior expresión, observamos que la condición de no arbitraje en el pago de dividendos vincula los precios de las opciones que vencen antes y después de una fecha de dividendo. En principio, de manera general, conocido un continuo de precios de opciones (según strike) que vencen en T_i^- , podríamos obtener el precio de la opción de strike K en el vencimiento T_i^+ .

ILUSTRACIÓN

Comprobar la ausencia de arbitraje en una superficie de volatilidades implícitas haciendo uso de las expresiones anteriormente deducidas.

Evolución temporal de la superficie de volatilidad implícita

A la hora de manejar el concepto de volatilidad implícita, una de las cuestiones de mayor relevancia es la siguiente. ¿Cómo se comporta la volatilidad implícita según pasa el tiempo?. Efectivamente, esta es una cuestión de vital importancia en tanto en cuanto afecta de forma directa al cálculo de nuestro “hedge”.

La respuesta a esta pregunta puede plantearse desde dos puntos de vista distintos:

1) Evolución NO determinista de la superficie de volatilidades implícitas.

Por evolución NO determinista debe entenderse aquella que no queda completamente descrita con la información de que se dispone a día de hoy. Dentro de este tipo de evoluciones se puede distinguir dos metodologías:

- Evolución temporal de la volatilidad implícita inherente a un modelo de evolución del activo subyacente. Como ejemplos pueden citarse todos los modelos de volatilidad (estocástica o no) que describiremos más adelante.

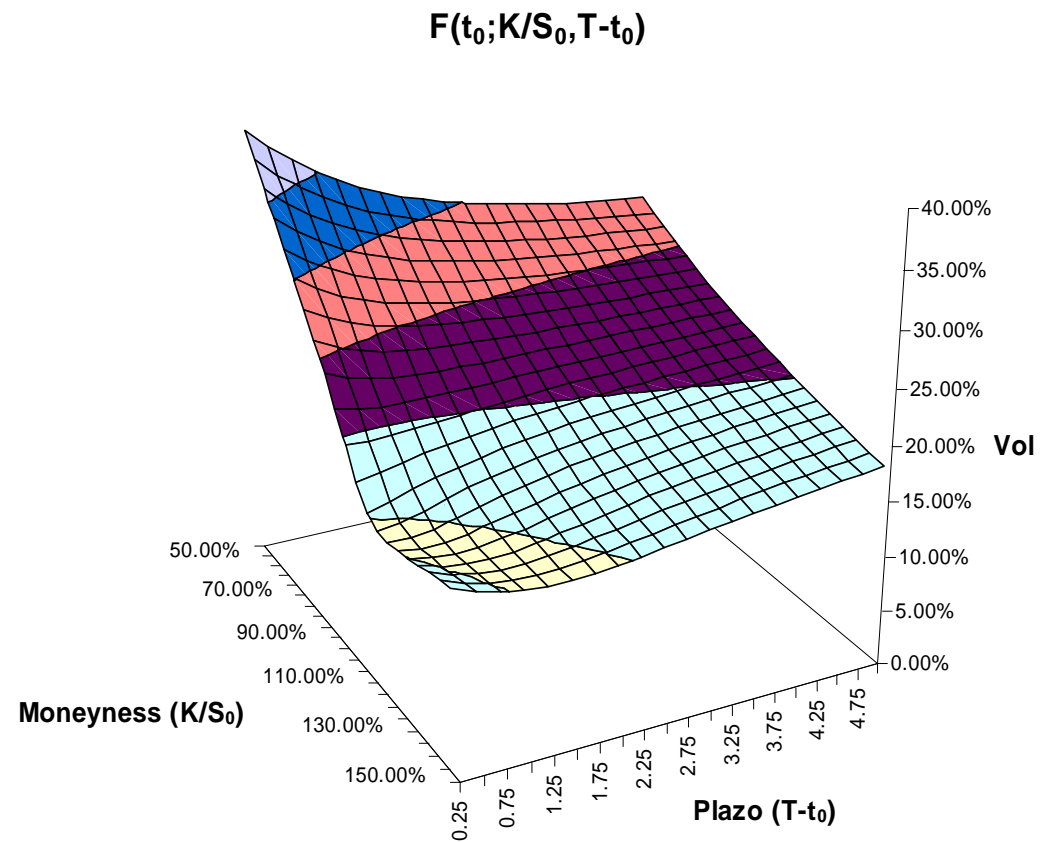
- Evolución temporal de la volatilidad implícita definida ésta como un proceso estocástico en sí mismo, correlado o no con el proceso de evolución seguido por el activo subyacente. Esta formulación reviste una complejidad adicional ya que es necesario imponer condiciones de no arbitraje para definir la dinámica riesgo neutro de dicha volatilidad implícita.

2) Evolución determinista de la superficie de volatilidades implícitas.

Consideremos la siguiente definición de superficie de volatilidad implícita:

$$\sigma_{ref}(t_0; k = K/S_{t_0}, \tau = T - t_0)$$

donde t_0 es un instante de referencia.

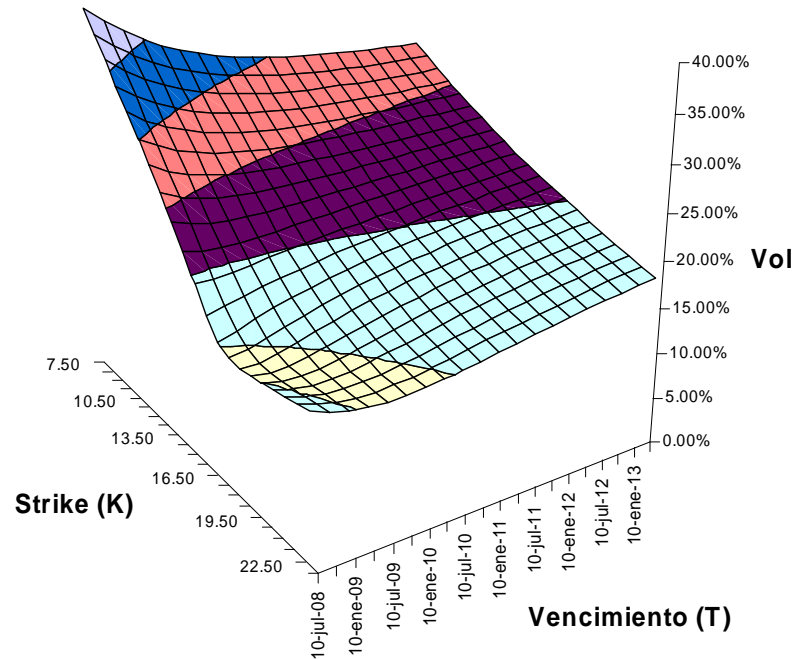


- Sticky Strike:

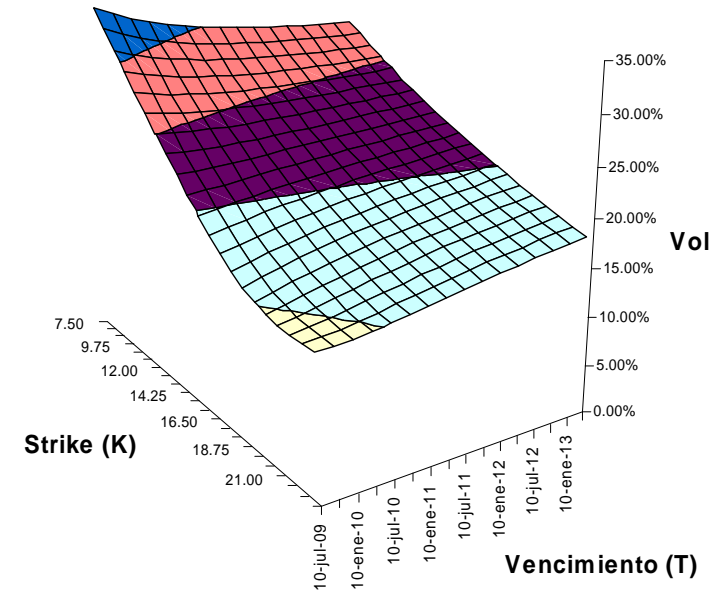
Pensemos ahora en el modelo Black-Scholes. Como sabemos, en dicho modelo se asume que la volatilidad del proceso seguido por el precio forward es constante con el tiempo para un strike y un vencimiento dados, esto es, se asume que la volatilidad implícita evoluciona en sentido “sticky strike”. Así pues:

$$\sigma^{impl}(t; K, T) = \sigma_{ref}(t_0; k = K/S_{t_0}, \tau = T - t_0)$$

$t_0=10/04/08 \leftrightarrow S_0=15$
 $\text{ImpliedVol}(t_0;K,T)=F(t_0;K/S_0,T-t_0)$



Sticky Strike
 $t=10/04/09 \leftrightarrow S_t=16$
 $\text{ImpliedVol}(t;K,T)=F(t_0;K/S_0,T-t_0)$



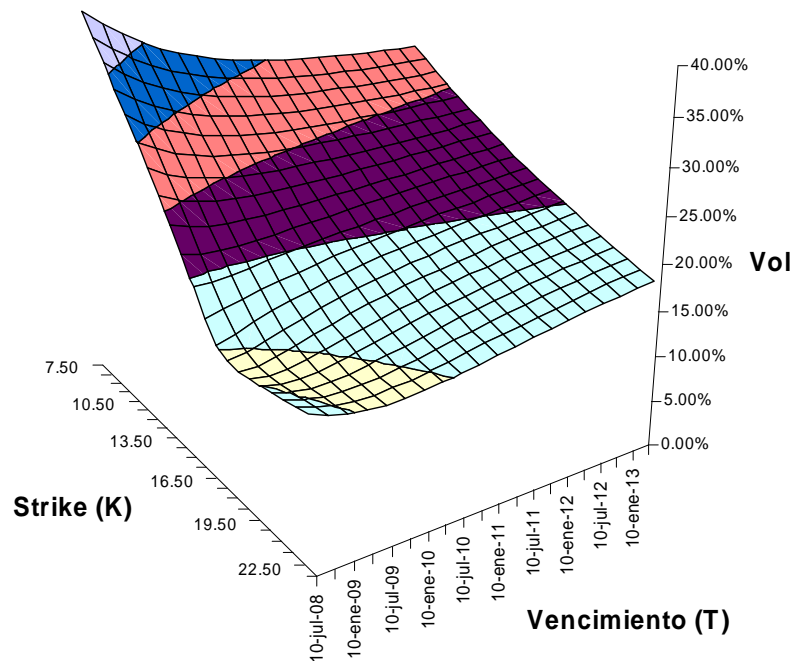
- Sticky Delta:

En el caso de la evolución “sticky delta”, se asume que para un plazo dado, la volatilidad se mantiene constante a “moneyness” constante, es decir, manteniendo el cociente K/S_t constante. Dado que la delta en el entorno Black-Scholes depende de dicha “moneyness” así como de la propia volatilidad, es por ello que se denomina “sticky delta”. Por tanto:

$$\sigma^{impl}(t; K, T) = \sigma_{ref}(t_0; k = K/S_t, \tau = T - t)$$

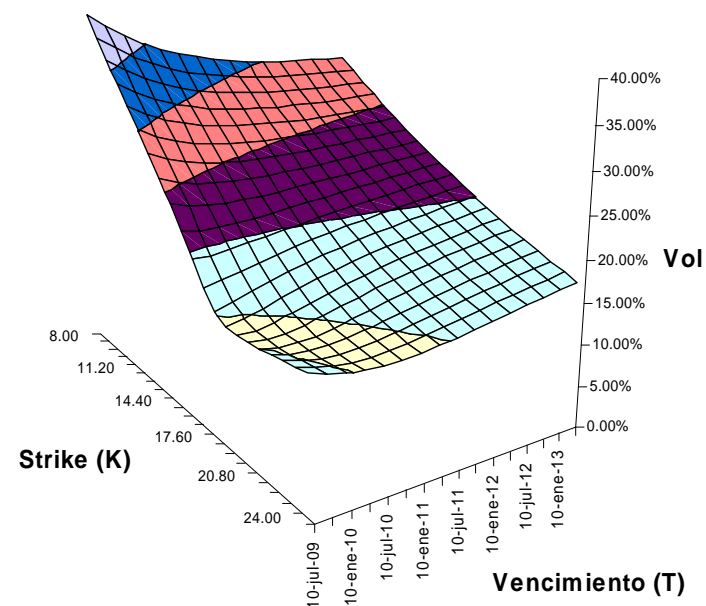
Por último, conviene reseñar que para ambos tipos de evolución determinista del “smile” se puede establecer una estrategia dinámica de arbitraje.

$t_0=10/04/08 \leftrightarrow S_0=15$
 $\text{ImpliedVol}(t_0;K,T)=F(t_0;K/S_0,T-t_0)$



Sticky Delta

$t=10/04/09 \leftrightarrow S_t=16$
 $\text{ImpliedVol}(t;K,T)=F(t_0;K/S_t,T-t)$



4. Modelos de Smile

Modelo de función de densidad

A la hora de clasificar los productos derivados, uno de los criterios más habituales suele ser la “path dependency”. Esto permite definir dos categorías:

- 1) Productos “europeos”
- 2) Productos “path dependent”

En este apartado nos vamos a centrar en la metodología para la valoración del primer tipo de productos, es decir, los productos de tipo “europeo”.

Por producto europeo se entiende todo aquel cuyo payoff depende únicamente del valor del subyacente/s en un determinado instante de tiempo. Esto implica que, en base a la teoría de valoración, cualquier payoff europeo puede ser evaluado mediante una integral. Efectivamente, como sabemos, elegido un numerario N , el valor de un determinado derivado “europeo” queda definido por el siguiente valor esperado:

$$V_t = N_t E_{\mathbb{Q}_N} \left[\frac{f(S_T)}{N_T} | \mathcal{F}_t \right] = \int \int \frac{f(S_T)}{N_T} \varphi(S_T, N_T) dS_T dN_T$$

Función de densidad marginal

El objetivo de este apartado es obtener la función de densidad marginal del subyacente S al vencimiento T de forma “consistente” con el smile de mercado. Esto último significa que dicha función de densidad permite inferir todos los precios de opciones europeas (“call/put”) definidos a través del smile de mercado.

Por otro lado, la unicidad de dicha función de densidad está asociada a la existencia de un continuo de volatilidades implícitas, o equivalentemente, un continuo de precios de opciones europeas “call/put”. En lo que sigue, vamos a asumir que disponemos de dicho continuo de volatilidades. Así pues, sabemos que:

$$C_{K,T} = P_{t,T} E_{\mathbb{Q}_{P_T}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{P_{T,T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \int_0^\infty (S_T - K)^+ \varphi_{S_T}(S_T) dS_T$$

donde,

$C_{K,T}$ es el precio de una opción “call” de strike K y vencimiento T

$P_{t,T}$ es el precio del bono cupón cero de vencimiento T

$\varphi_{S_T}(S_T)$ es la función de densidad marginal del subyacente S al vencimiento T

A continuación vamos a aplicar el teorema de derivación de integrales paramétricas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} = -P_{t,T} \int_0^\infty 1_{\{S_T \geq K\}} \varphi_{S_T}(S_T) dS_T$$

donde,

$1_{\{S_T \geq K\}}$ es la función indicatriz de condición $\{S_T \geq K\}$

Por último, derivando otra vez sobre K :

$$\frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} = P_{t,T} \int_0^\infty \delta(S_T - K) \varphi_{S_T}(S_T) dS_T$$

donde,

$\delta(S_T - K)$ es la función delta de Dirac centrada en el valor K

Ahora, aplicando una de las propiedades conocidas de la función delta de Dirac, se tiene:

$$\frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} = P_{t,T} \varphi_{S_T}(K) \Rightarrow \varphi_{S_T}(K) = \frac{1}{P_{t,T}} \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}$$

Una vez obtenido el anterior resultado, teniendo en cuenta que la función de densidad debe ser necesariamente positiva en su dominio de definición, entonces debe cumplirse:

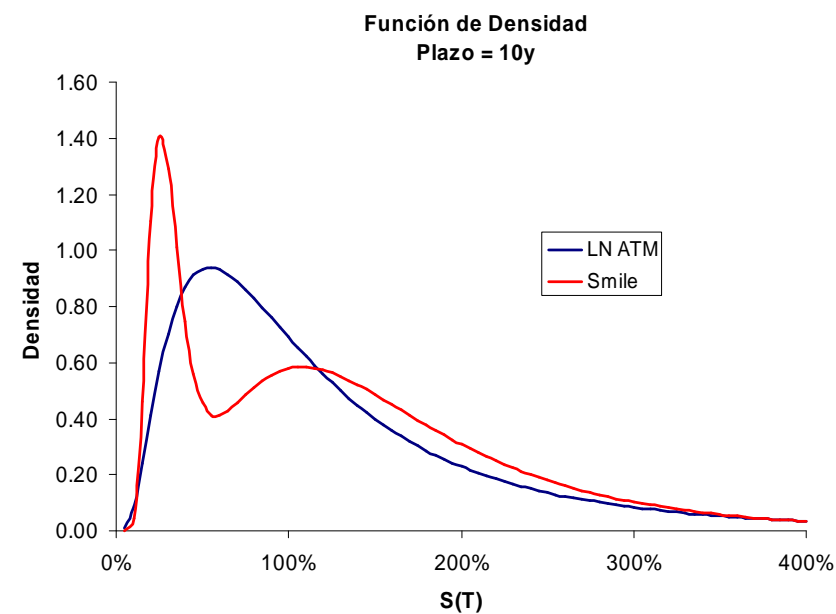
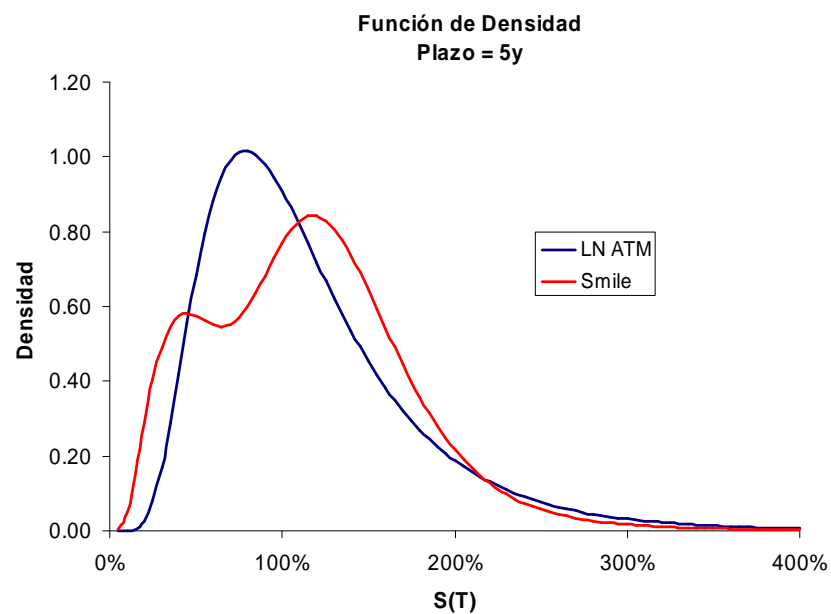
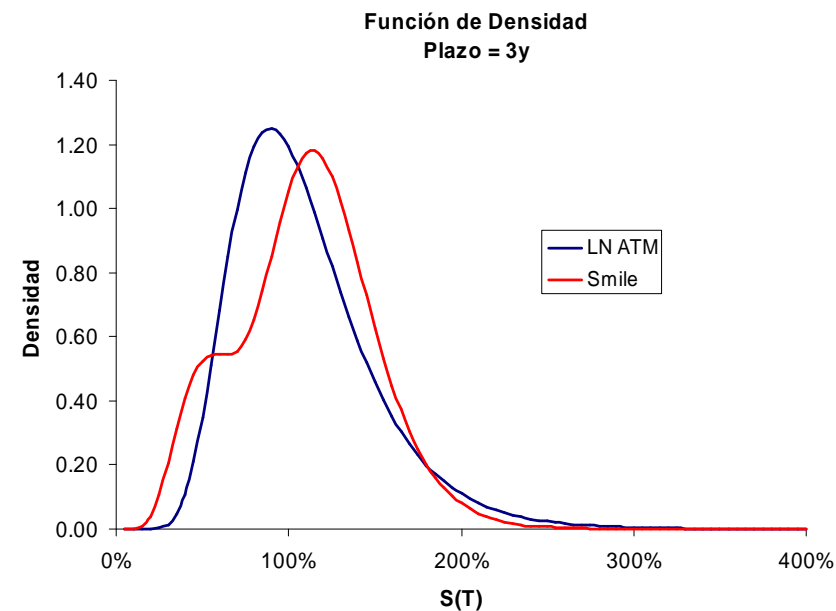
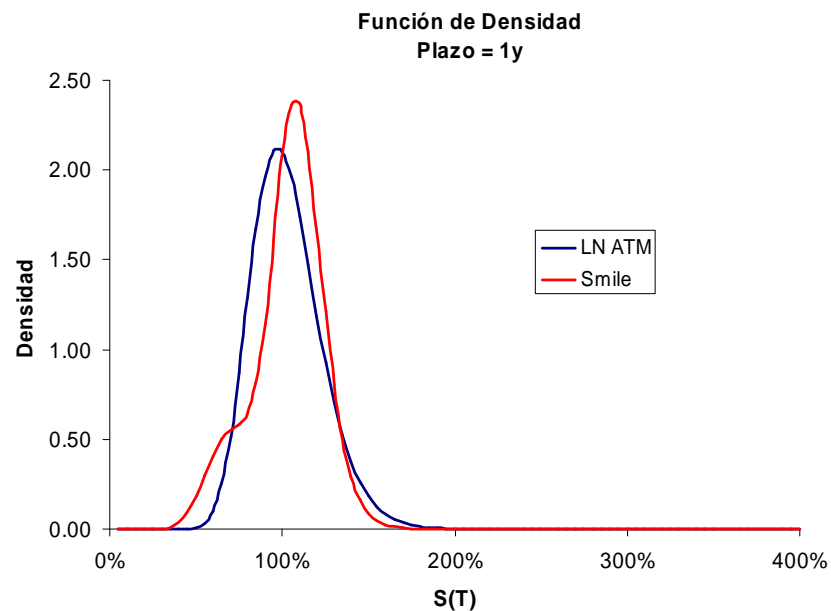
$\frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} \geq 0$, condición necesaria de no arbitraje que ya habíamos encontrado anteriormente (en su versión discreta).

EJERCICIO

Obtener la función de densidad de un activo en términos de las derivadas de su volatilidad implícita.

EJERCICIO

En base al resultado anterior, ¿qué podemos decir sobre la función de densidad de un activo que cotiza un “V-smile”?



ILUSTRACIÓN

Calcular la función de densidad marginal de un activo consistente con una parametrización polinómica de la volatilidad implícita.

ILUSTRACIÓN

Calcular el precio de una opción digital en presencia de “smile” de volatilidad. Deducir la expresión analítica para dicho instrumento y aplicarla para comparar el resultado con aquél que se obtiene integrando contra la función de densidad.

Replicación de payoffs europeos

Como se ha visto en el apartado anterior, es posible valorar cualquier producto europeo de forma consistente con el smile de mercado sin más que obtener la función de densidad marginal y posteriormente realizar una integración del payoff haciendo uso de dicha función.

El objetivo de este apartado es presentar una metodología que, siendo en esencia idéntica a la anterior, evita la necesidad de tener que obtener la función de densidad del subyacente de una forma explícita.

Para ilustrar la metodología, vamos a considerar que la función que define el payoff $V_T = f(S_T)$ es al menos C^2 . Entonces, se puede mostrar que:

$$f(S_T) = f(S^*) + f'(S^*)(S_T - S^*) + \int_0^{S^*} (s - S_T)^+ f''(s) ds + \int_{S^*}^{\infty} (S_T - s)^+ f''(s) ds$$

donde,

S^* es un valor de referencia arbitrario

Tomando valores esperados se tiene:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}_{P_T}} \left[f(S_T) | \mathcal{F}_t \right] = & f(S^*) + f'(S^*)(F_{t,T} - S^*) + \\ & + \int_0^{S^*} Put_{s,T} f''(s) ds + \int_{S^*}^{\infty} Call_{s,T} f''(s) ds \end{aligned}$$

donde,

$F_{t,T}$ es el precio forward del subyacente al vencimiento T

$Call_{s,T}$ es el precio de una opción “call” de strike s y vencimiento T

$Put_{s,T}$ es el precio de una opción “put” de strike s y vencimiento T

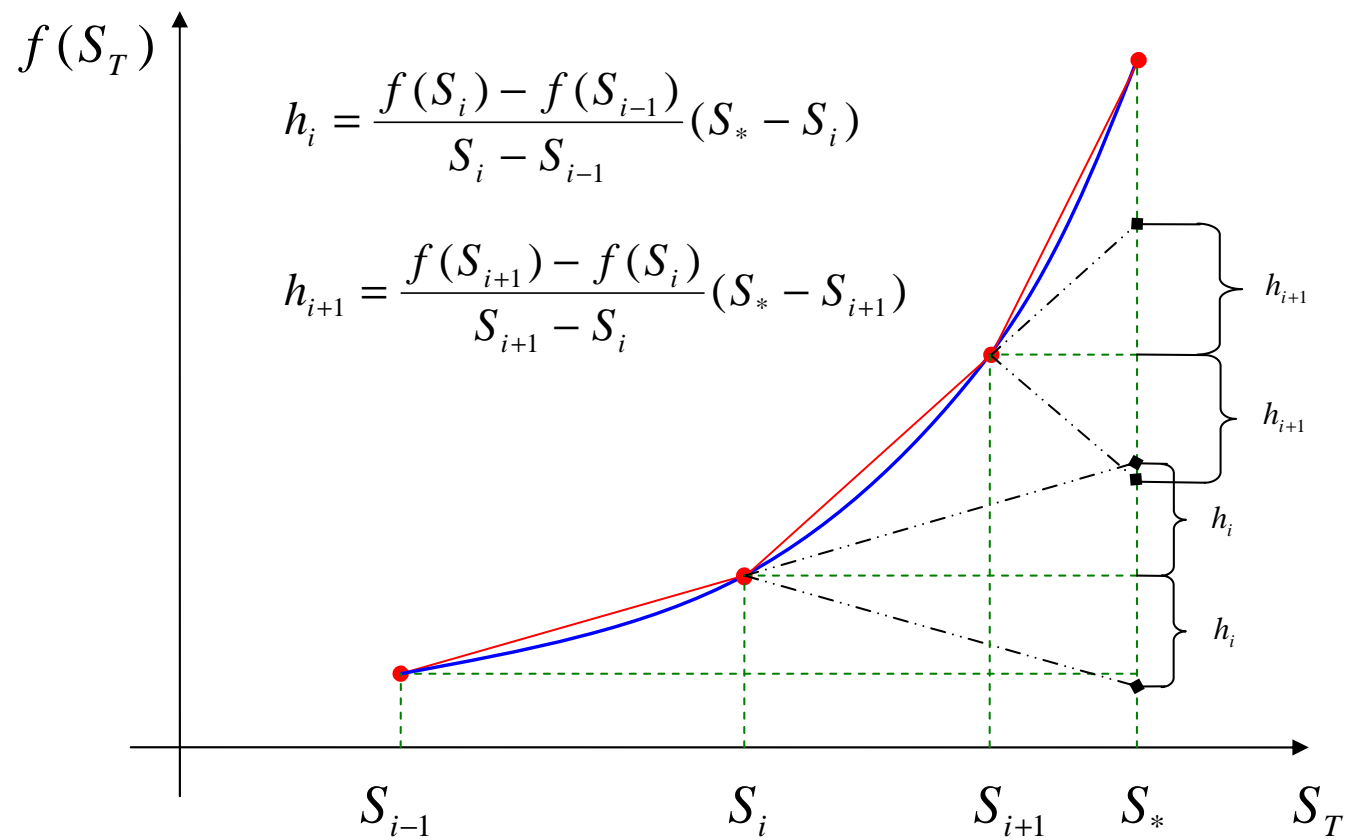
Existen diferentes formas de encontrar el anterior resultado. Para ello, empezamos considerando el caso en que $S_T \geq S^*$:

Definido el intervalo $[S^*, S_T]$, generamos una partición de dicho intervalo, S_i , $i = 0, \dots, n$, siendo $S_0 = S^*$ y $S_n = S_T$. Entonces:

$$\begin{aligned} f(S_n) = f(S_0) &+ \frac{f(S_1) - f(S_0)}{S_1 - S_0}(S_n - S_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{f(S_{i+1}) - f(S_i)}{S_{i+1} - S_i} - \frac{f(S_i) - f(S_{i-1})}{S_i - S_{i-1}} \right] (S_n - S_i) \end{aligned}$$

Haciendo $\lim_{n \rightarrow \infty}$ se llega a la siguiente expresión:

$$f(S_T) = f(S^*) + f'(S^*)(S_T - S^*) + \int_{S^*}^{S_T} (S_T - s) f''(s) ds$$



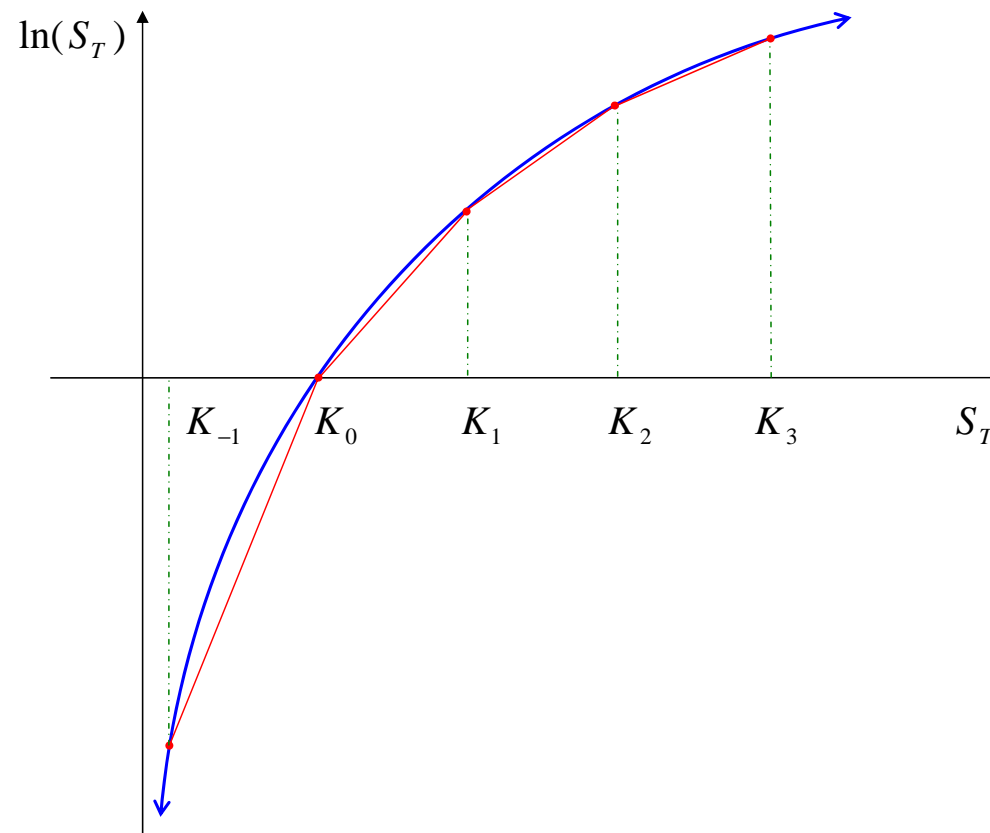
Por último, llevando el límite superior de la integral a infinito y cambiando $(S_T - s)$ por $(S_T - s)^+$ se llega a la expresión inicial cuando se tiene $S_T \geq S^*$.

En cuanto al caso $S_T < S^*$, el razonamiento es exactamente el mismo, llegándose a la expresión inicial.

Así pues hemos deducido una expresión que permite expresar el valor de cualquier derivado “europeo” en términos de los precios de opciones europeas “call/put”. Es a través de los precios de dichas opciones donde entra en juego el smile de volatilidad.

ILUSTRACIÓN

Replicar el precio del “log-payoff” y comparar el resultado con aquél que se obtiene integrando contra la función de densidad.



Modelos en tiempo continuo

A continuación vamos a introducir una serie de modelos en tiempo continuo que permiten reflejar la presencia del smile de volatilidad. Este tipo de modelos se usan en la valoración de derivados “path dependent”, dado que permiten representar la dependencia temporal del payoff respecto de varios instantes de tiempo de una forma “consistente”.

Por derivado “path dependent” debemos entender todo aquel cuyo payoff depende del valor del subyacente en varios instantes de tiempo de una forma “acoplada”, es decir:

$$V_t = N_t E_{\mathbb{Q}_N} \left[\frac{f(\bar{S}_\tau)}{N_T} | \mathcal{F}_t \right] = \int \int \frac{f(\bar{S}_\tau)}{N_T} \varphi(\bar{S}_\tau, N_T) d\bar{S}_\tau dN_T$$

siendo,

\bar{S}_τ cada uno de los valores que el subyacente toma para un conjunto de instantes de tiempo que puede ser finito, es decir, $\tau = t_i, i = 1, \dots, N$), o infinito, es decir, $\tau = t, t \in [T_1, T_2]$ con $T_1, T_2 \leq T$.

Modelo de volatilidad local

El modelo de volatilidad local se presenta como una extensión natural del modelo de Black-Scholes que permite representar de un modo consistente el “smile” de volatilidad existente en el mercado. Bajo este modelo, la ecuación diferencial estocástica que dirige la evolución del subyacente es la siguiente:

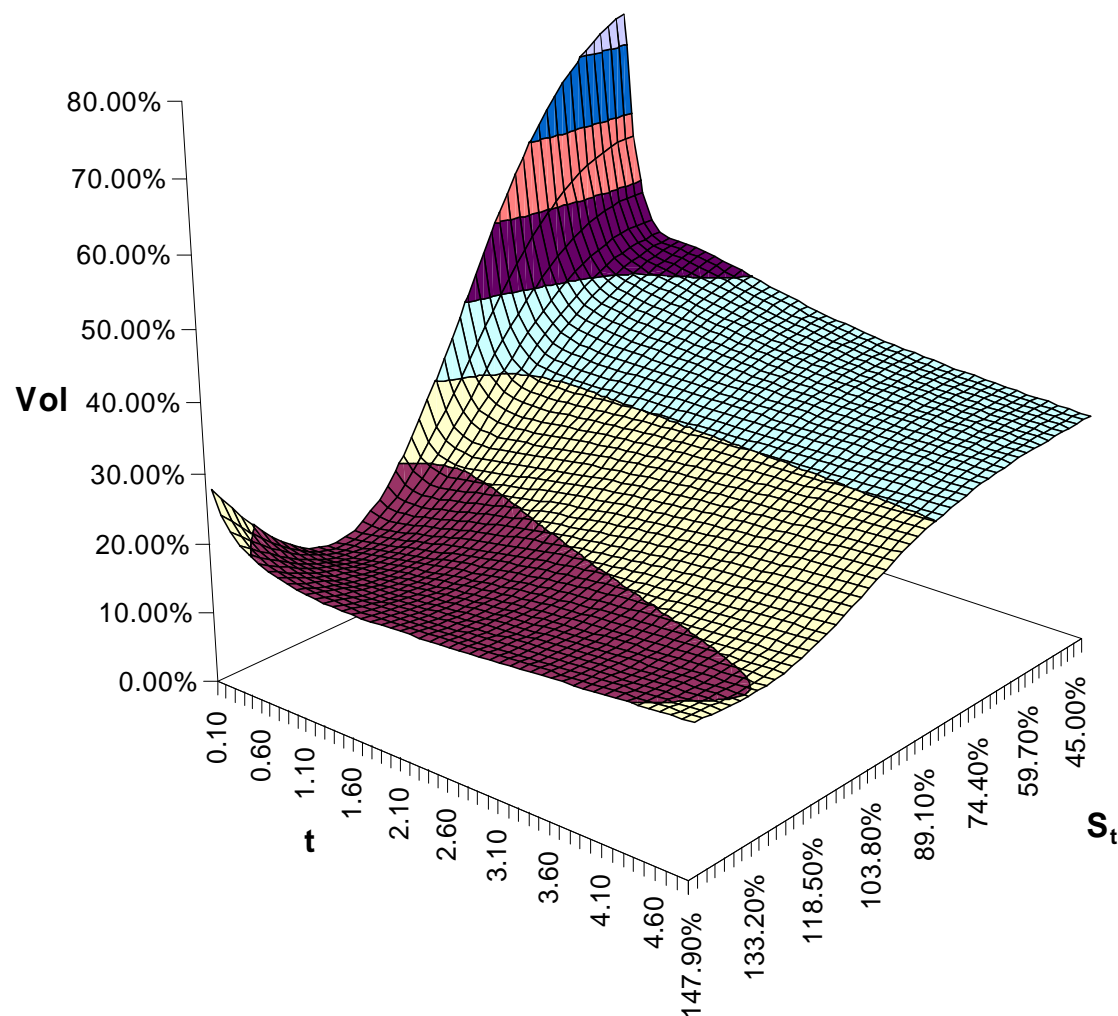
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_L(t, S_t) dW_t$$

donde,

$\sigma_L(t, S_t)$ es la función de volatilidad local

Como puede apreciarse, ahora, además de una dependencia temporal del coeficiente de volatilidad, aparece también una dependencia de la misma con el nivel del propio subyacente en cada instante. Esta es la razón por la cual a este modelo se le conoce también como modelo de “volatilidad pseudo-estocástica”.

Volatilidad Local



Modelo de vol. local. Dinámica Riesgo Neutro

La dinámica riesgo neutro del subyacente viene dada por un coeficiente de “drift” igual al que se obtenía para el modelo de Black-Scholes. Así, asumiendo un activo que no paga dividendo, debemos imponer que el cociente S_t/B_t sea martingala, por tanto:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_L(t, S_t) dW_t$$

Modelo de vol. local. Evolución del activo entre dos instantes (t, T)

Para conocer la evolución del subyacente S_t en el intervalo de tiempo (t, T) procedemos de la misma manera que hacíamos para el modelo de Black-Scholes. Por tanto, aplicando el lema de Itô sobre el logaritmo de S_t :

$$d(\ln S_t) = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d(\ln S_t) = r_t dt - \frac{1}{2} \sigma_L^2(t, S_t) dt + \sigma_L(t, S_t) dW_t^S$$

Por tanto, integrando llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp \left\{ \int_t^T \left(r_u - \frac{1}{2} \sigma_L^2(u, S_u) \right) du + \int_t^T \sigma_L(u, S_u) dW_u^S \right\}$$

La anterior expresión nos permite simular el valor del activo subyacente entre dos instantes de tiempo (t, T) cualesquiera.

Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en el modelo Black-Scholes, la anterior expresión no representa una integral exacta, en tanto en cuanto, el valor del subyacente en T depende del camino seguido por el mismo hasta dicho instante.

Por tanto, para resolver la anterior integral es necesario recurrir a aproximaciones numéricas de entre las cuales podemos destacar, por su simplicidad, el esquema explícito de Euler. Al tratarse de un esquema explícito de primer orden, resulta de vital importancia controlar el paso de tiempo con el cual se realiza la integración. Además, en el caso del modelo de volatilidad local, la convergencia del esquema puede verse fuertemente comprometida en cuanto la función de volatilidad local $\sigma_L(t, S_t)$ no sea suficientemente regular.

La aplicación del esquema Euler permite obtener la siguiente expresión para la evolución del subyacente entre dos instantes de tiempo (t_1, t_2) :

$$\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} = \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} r_u du - \frac{1}{2} \sigma_L^2(t_1, S_{t_1}) \Delta t_{1,2} + \sigma_L(t_1, S_{t_1}) \Delta W_{t_{1,2}} \right\}$$

Modelo de vol. local. Cartera de réplica

Atendiendo a la dinámica del modelo de volatilidad local es fácil deducir que la cartera autofinanciada que permite replicar el precio de cualquier instrumento derivado bajo dicho modelo es exactamente aquella que se obtiene para el modelo de Black-Scholes, en tanto en cuanto el modelo de volatilidad local no introduce ninguna fuente de riesgo adicional que sea necesario “cubrir”.

Por tanto,

$$\Pi_t = V_t - \Delta_t S_t$$

donde,

V_t es el precio del derivado

Δ_t es la “posición” de cobertura en el subyacente

siendo,

$$\Delta_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$$

Modelo de vol. local. Ecuación diferencial de un derivado

Al igual que ocurre con la cartera de réplica, la ecuación diferencial que sigue un activo derivado bajo el modelo de volatilidad local es exactamente la misma que se tenía para el modelo Black-Scholes, por lo que podemos escribir:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} r_t S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \sigma_L^2(t, S_t) S_t^2 - r_t V_t = 0$$

Modelo de vol. local. Valoración de opciones europeas

En el apartado anterior hemos visto la ecuación diferencial que describe el precio de un activo derivado bajo el modelo de volatilidad local. A dicha ecuación se la conoce como ecuación “backward”.

Pues bien, cuando se trata de valorar opciones europeas mediante la anterior ecuación, mientras que para el modelo de Black-Scholes existe solución analítica (fórmula de Black-Scholes), para el modelo de volatilidad local no existe tal solución, haciéndose necesario recurrir a la resolución numérica de dicha ecuación.

Consideremos ahora el siguiente caso:

Supongamos que postulamos una forma funcional paramétrica para el término de volatilidad local y pretendemos “calibrar” dicha forma funcional a los precios de opciones europeas (volatilidades implícitas) existentes en el mercado. Para llevar a cabo este proceso necesitaríamos resolver tantas edp’s como pares de “strikes” y vencimientos tuviésemos en nuestro proceso de “calibración” del modelo. La pregunta que nos viene a la cabeza es, existirá alguna forma mas eficiente (desde el punto de vista computacional) de realizar este proceso?. La respuesta es SÍ, y es conocida como ecuación diferencial “forward”.

Modelo de vol. local. Ec. diferencial “forward” del proceso Spot

Para entender mejor el concepto de ecuación diferencial “forward” resulta muy útil comparar el resultado que permite obtener frente a la ecuación “backward”.

- Ecuación “backward”:

Devuelve el precio de una opción europea C_{K_0, T_0} para cualquier valor de (t, S_t)

- Ecuación “forward”:

Devuelve el precio de cualquier opción europea $C_{K, T}$ para el valor actual (t_0, S_{t_0})

Por último, conviene recordar que la **ecuación “forward” sólo es válida para opciones europeas (call/put)**.

Para deducir la ecuación diferencial “forward” del proceso Spot vamos a considerar las siguientes dinámicas para el subyacente y la cuenta corriente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t - q_t) dt + \sigma_L(t, S_t) dW_t$$

$$\frac{dB_t}{B_t} = r_t dt$$

Como sabemos, el precio de una opción “call” viene dado por el siguiente valor esperado:

$$C_{K,T} = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Recordemos también que la función de densidad marginal del subyacente al vencimiento T venía dada por la siguiente expresión:

$$\varphi_{S_T}(K) = \frac{1}{P_{t,T}} \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}$$

A continuación, aplicando el lema de Itô sobre el funcional $(S_T - K)^+ / B_T$ se tiene:

$$d \left(\frac{(S_T - K)^+}{B_T} \right) = \frac{1_{\{S_T > K\}}}{B_T} dS_T + \frac{1}{2} \frac{\delta_K(S_T)}{B_T} (dS_T)^2 - \frac{(S_T - K)^+}{B_T} \frac{dB_T}{B_T}$$

donde,

$1_{\{S_T > K\}}$ es la función indicatriz de condición $\{S_T > K\}$

$\delta_K(S_T)$ es la función delta de Dirac centrada en K

Tomando valores esperados sobre la anterior expresión:

$$E_{\mathbb{Q}} \left[d \left(\frac{(S_T - K)^+}{B_T} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = dE_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = dC_{K,T}$$

Por tanto, se tiene:

$$dC_{K,T} = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(r_T - d_T) S_T 1_{\{S_T > K\}}}{B_T} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_L^2(T, S_T) S_T^2 \delta_K(S_T)}{B_T} - \frac{r_T (S_T - K)^+}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] dT$$

Asumiendo que los tipos de interés son deterministas y teniendo en cuenta las siguientes relaciones:

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K) 1_{\{S_T > K\}} = S_T 1_{\{S_T > K\}} - K 1_{\{S_T > K\}}$$

$$E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\sigma_L^2(T, S_T) S_T^2 \delta_K(S_T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{\sigma_L^2(T, K) K^2 \varphi_{S_T}(K)}{B_T} = \sigma_L^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}$$

Llegamos al resultado final:

$$\frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} = -(r_T - d_T) K \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} + \frac{1}{2} \sigma_L^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} - d_T C_{K,T}$$

Como ya hemos comentado, la anterior ecuación “forward” nos permite determinar el valor de cualquier opción call/put partiendo de las condiciones iniciales (t_0, S_{t_0}) y conocida la función de volatilidad local $\sigma_L(t, S_t; t_0, S_{t_0})$.

Sin embargo, si suponemos conocido un continuo de primas de opciones europeas (call/put), también es posible utilizar la anterior expresión para determinar de forma unívoca la función de volatilidad local, es decir:

$$\sigma_L^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C_{K,T}}{\partial T} + (r_T - d_T) K \frac{\partial C_{K,T}}{\partial K} + d_T C_{K,T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}}$$

La anterior expresión es conocida como fórmula de Dupire.

EJERCICIO

En base al resultado anterior, ¿qué podemos decir sobre la volatilidad local de un activo que cotiza un “V-smile”?

ILUSTRACIÓN

Calcular la superficie de volatilidad local partiendo de una superficie de volatilidad implícita generada mediante funciones polinómicas. Utilizar dicha volatilidad local para simular el activo y calcular precios de opciones europeas (K, T) .

Modelo de vol. local. Ec. diferencial “forward” del proceso Fwd

El objetivo de este apartado es obtener la ecuación diferencial “forward” del proceso Forward apoyándonos en la siguiente dinámica:

$$\frac{dF_{t,T}}{F_{t,T}} = \sigma_{L,F}(t, F_{t,T}) dW_t$$

Además, vamos a definir el siguiente payoff de una opción “call” sobre el precio Forward $F_{t,\tilde{T}}$ donde $\tilde{T} > T$ corresponde al vencimiento del contrato Forward asociado:

$$C_{K,T}^F = E_{\mathbb{Q}} \left[(F_{T,\tilde{T}} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

De nuevo, aplicando el lema de Itô sobre el funcional $(F_{T,\tilde{T}} - K)^+$ se tiene:

$$d\left((F_{T,\tilde{T}} - K)^+\right) = 1_{\{F_{T,\tilde{T}} > K\}} dF_{T,\tilde{T}} + \frac{1}{2} \delta_K(F_{T,\tilde{T}}) \left(dF_{T,\tilde{T}}\right)^2$$

donde,

$1_{\{F_{T,\tilde{T}} > K\}}$ es la función indicatriz de condición $\{F_{T,\tilde{T}} > K\}$

$\delta_K(F_{T,\tilde{T}})$ es la función delta de Dirac centrada en K

Tomando valores esperados sobre la anterior expresión:

$$E_{\mathbb{Q}} \left[d\left((F_{T,\tilde{T}} - K)^+\right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = dE_{\mathbb{Q}} \left[(F_{T,\tilde{T}} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = dC_{K,T}^F$$

Por tanto, se tiene:

$$dC_{K,T}^F = E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{2} \sigma_{L,F}^2(T, F_{T,\tilde{T}}) F_{T,\tilde{T}}^2 \delta_K(F_{T,\tilde{T}}) \middle| \mathcal{F}_t \right] dT$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \left[\sigma_{L,F}^2(T, F_{T,\tilde{T}}) F_{T,\tilde{T}}^2 \delta_K(F_{T,\tilde{T}}) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \sigma_{L,F}^2(T, K) K^2 \varphi_{F_{T,\tilde{T}}}(K) = \\ &= \sigma_{L,F}^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}^F}{\partial K^2} \end{aligned}$$

Llegamos al resultado final:

$$\frac{\partial C_{K,T}^F}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma_{L,F}^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}^F}{\partial K^2}$$

Como ya hemos comentado, la anterior ecuación “forward” nos permite determinar el valor de cualquier opción call/put partiendo de las condiciones iniciales $(t_0, F_{t_0, \tilde{T}})$ y conocida la función de volatilidad local $\sigma_{L,F}(t, F_{t, \tilde{T}}; t_0, F_{t_0, \tilde{T}})$.

Como en el caso del proceso Spot, también es posible utilizar la anterior expresión para determinar la función de volatilidad local del proceso Forward, es decir:

$$\sigma_{L,F}^2(T, K) = \frac{\frac{\partial C_{K,T}^F}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}^F}{\partial K^2}}$$

La anterior expresión es conocida como fórmula de Dupire del proceso Forward.

La única cuestión abierta respecto de la fórmula anterior reside en la definición del continuo de “precios” $C_{K,T}^F$. Atendiendo a la expresión de dicho payoff, únicamente disponemos de información en el mercado para el vencimiento \tilde{T} correspondiente al vencimiento del contrato Forward, esto es:

$$C_{K,\tilde{T}}^F = E_{\mathbb{Q}} \left[(F_{\tilde{T},\tilde{T}} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = E_{\mathbb{Q}} \left[(S_{\tilde{T}} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Por tanto, de cara a la aplicación de la fórmula de Dupire para el proceso Forward, resulta necesario disponer de información para todo vencimiento $T < \tilde{T}$. En concreto, la solución pasa por hacer uso de la relación existente entre proceso Forward y proceso Spot detallada en los primeros capítulos del curso para una variedad de modelos de dividendos. Así, concentrándonos en los modelos cuyo Forward se expresa como una combinación lineal del Spot:

$$F_{T,\tilde{T}} = \alpha_{T,\tilde{T}} S_T + \beta_{T,\tilde{T}}$$

Finalmente, podemos expresar los “precios” $C_{K,T}^F$ en términos de la anterior relación:

$$C_{K,T}^F = E_{\mathbb{Q}} \left[(F_{T,\tilde{T}} - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] = \alpha_{T,\tilde{T}} E_{\mathbb{Q}} \left[\left(S_T - \frac{K - \beta_{T,\tilde{T}}}{\alpha_{T,\tilde{T}}} \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Modelo de vol. local. Teoría unificada de volatilidad (UTV)

En el anterior desarrollo hemos tratado con el siguiente término:

$$E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\sigma_L^2(T, S_T) S_T^2 \delta_K(S_T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sigma_L^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2}$$

Supongamos que en lugar de considerar el modelo de volatilidad local hubiésemos considerado un modelo de volatilidad estocástica cualquiera. Entonces, de igual manera habríamos llegado al anterior término, pero:

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\sigma_T^2 S_T^2 \delta_K(S_T)}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E_{\mathbb{Q}} \left[E_{\mathbb{Q}} \left[\frac{\sigma_T^2 S_T^2 \delta_K(S_T)}{B_T} \middle| S_T = \bar{S}_T \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= E_{\mathbb{Q}} \left[\sigma_t^2 \middle| S_T = K \right] K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}}{\partial K^2} \end{aligned}$$

Por tanto, de la anterior igualdad se tiene:

$$E_{\mathbb{Q}} \left[\sigma_t^2 \middle| S_T = K \right] = \sigma_L^2(T, K)$$

Este resultado es lo que se conoce como teoría unificada de volatilidad (en inglés UTV) y viene a decir que **cualquier modelo de volatilidad estocástica consistente con el “smile” de mercado debe cumplir que su varianza “forward” condicional sea igual a la varianza local.**