Modelos de Crédito: Modelos Estáticos sobre Cestas

Juan E. Palomar (juan.palomar@bbva.com)

MEFC-BBVA, 24-25 de mayo de 2019

Índice

3 El Skew de Correlaciones

- **El Skew de Correlaciones**
- **Correlaciones Base**
- **Boostrapping de la Curva de Correlaciones Base**
- **Problemática de la interpolación en Correlaciones Base**

1. Instrumentos de Mercado

CDS sobre un Índice

Consideremos un índice compuesto por M referencias de crédito, cada una de ellas con un peso igual a $\frac{1}{M}$.

Las pérdidas en el índice para una fecha futura T vendrán dadas por:

$$L_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} (1 - R_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

L_T: Pérdidas en el índice.

R_i: Tasa de recuperación de la referencia i.

τ_i: Tiempo de quiebra de la referencia i.

Por otro lado, el porcentaje de referencias no quebradas viene dado por:

$$N_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{\tau_i > T\}}$$

Consideremos un credit default swap sobre el índice con fechas de pago $t_1, \ldots, t_n$. Siendo S la prima del CDS, el contrato supone los pagos siguientes:

- Pata de prima: En cada fecha de pago t_i el vendedor de protección recibe $S\gamma_i N_{t_i}$.
- Pata de quiebra: El vendedor de protección paga en todo instante futuro $h \leq t_n$ el incremento de la cuenta de pérdidas $L_h - L_{h-dh}$.

γ_i: Fracción de año comprendida entre t_{i-1} y t_i.

Valoración del CDS sobre un Índice:

Para valorar el valor de mercado de un CDS sobre un índice supondremos independencia entre tipos y crédito (recuérdese el modelo estático sobre una referencia). Si tomamos como numerario la cuenta corriente β_t:

- Pata de prima:

$$PL = E\left[S\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\frac{N_{t_j}}{\beta_{t_j}}\right] = S\sum_{j=1}^{n}\gamma_j E\left[\frac{N_{t_j}}{\beta_{t_j}}\right] \underbrace{=}_{\text{Independencia}}$$

$$= S\sum_{j=1}^{n}\gamma_j E\left[N_{t_j}\right] B(t,t_j)$$

t: Fecha de valoración.

$B(t,t_j)$: Factor de descuento libre de riesgo observado en t y de vencimiento t_j.

- Pata de quiebra:

$$DL = E\left[\sum_{k=1}^{h} \frac{L_{t_k} - L_{t_{k-1}}}{\beta_{t_k}}\right] \underbrace{=}_{\text{Independencia}} \sum_{k=1}^{h} B(t, t_k)\left(E\left[L_{t_k}\right] - E\left[L_{t_{k-1}}\right]\right)$$

Donde el sumatorio anterior recorre todas las fechas en las que discretizamos la pata de quiebra.

De manera que calcular el valor de mercado del CDS pasa por calcular los siguientes valores esperados:

$$E\left[L_{t_k}\right] = E\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(1-R_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \le t_k\}}\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(1-R_i)E\left[\mathbf{1}_{\{\tau_i \le t_k\}}\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(1-R_i)\left(1 - P_i(t, t_k)\right)$$

$P_i(t, t_k)$: Probabilidad de supervivencia de la referencia i hasta la fecha t_k.

En la deducción anterior hemos supuesto una tasa de recuperación determinista.

$$E\left[N_{t_j}\right] = E\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\mathbf{1}_{\{\tau_i>T\}}\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}E\left[\mathbf{1}_{\{\tau_i>T\}}\right] = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}P_i(t,t_j)$$

Por lo que para calcular el valor de mercado del CDS bajo las hipótesis hechas (independencia entre tipos y crédito y tasas de recuperación deterministas) tan solo necesitamos las curvas de supervivencia de cada nombre, las cuales son extraídas de las curvas de CDS de nombres individuales.

Es importante notar que la valoración de un CDS sobre un índice es independiente de la correlación entre los tiempos de quiebra de las referencias que lo componen.

Relación entre la Prima de Mercado del Índice y las Primas de mercado de las Referencias que lo Componen

Tal y como hemos definido la pata de quiebra de un índice, podemos replicarla con las patas de quiebra de los CDS individuales (debemos tomar una posición de $\frac{1}{M}$ en la pata de quiebra del CDS de cada nombre).

Al tratarse de CDSs de mercado, sus patas de prima son iguales a sus patas de quiebra, por lo que la pata de prima del índice debe ser igual a la suma de las patas de prima de los CDS individuales (cada uno con nominal $\frac{1}{M}$).

Como vimos anteriormente:

$$PL_{\text{Índice}} = S_{\text{Índice}} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j B(t,t_j) \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P_i(t,t_j) \right) \right) =$$

$$= \frac{S_{\text{Índice}}}{M} \sum_{i=1}^{M} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j B(t,t_j) P_i(t,t_j) \right)}_{DV01_i} = \frac{S_{\text{Índice}}}{M} \sum_{i=1}^{M} DV01_i$$

$DV01_i$: Anualidad con riesgo de crédito de la referencia i.

Por otro lado, la suma de las patas de prima de los nombres individuales toma un valor igual a:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} S_i DV01_i$$

De lo que se deduce que:

$$\frac{S_{\text{Índice}}}{M}\sum_{i=1}^{M} DV01_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} S_i DV01_i$$
$$\Downarrow$$
$$S_{\text{Índice}} = \sum_{i=1}^{M} S_i \frac{DV01_i}{\sum_{j=1}^{M} DV01_j} = \sum_{i=1} S_i w_i$$

Con

$$w_i = \frac{DV01_i}{\sum_{j=1}^{M} DV01_j}$$

De manera que la prima de mercado del índice es una media ponderada de las primas de mercado de los nombres individuales. La ponderación del nombre i es su anualidad dividida por la suma de anualidades de todos los nombres que componen el índice.

First to Default Swap

Consideremos una cesta de M referencias. Un first to default swap es un CDS definido de la siguiente manera:

- El vendedor de protección recibe prima en las fechas de pago del swap hasta que se produce la primera quiebra en la cesta.
- En el momento de la primera quiebra, el vendedor de protección paga la severidad de la referencia quebrada $(1 - R)$.

Para simplificar las expresiones, vamos a suponer que todas las referencias de la cesta tienen la misma tasa de recuperación.

Llamamos N_T al número de referencias quebradas en la cesta en el tiempo T.

$$N_T = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

En cada fecha de pago del swap (t_i), el vendedor de protección recibirá $S\gamma_i \mathbf{1}_{\{N_{t_i}=0\}}$.

En una fecha futura $h \leq t_n$ (t_n es la última fecha de pago del swap), el vendedor de protección efectuará un pago igual a $(1-R)\left(1_{\{N_{h-dh}=0\}} - 1_{\{N_h=0\}}\right)$.

De manera que la pata de prima vendrá dada por (asumiendo independencia entre tipos y crédito):

$$PL = S\sum_{i=1}^{n} \gamma_i B(t,t_i) Pr\left[N_{t_i} = 0 | \mathcal{F}_t\right] = S\sum_{i=1}^{n} \gamma_i B(t,t_i) P_0(t,t_i)$$

Siendo S la prima del contrato.

Y la pata de quiebra (suponiendo además que todas las referencias tienen el mismo recovery):

$$DL = (1-R)\int_{h=t}^{t_n} B(t,h)dP_0(t,h)$$

Límites de la Prima de Mercado de un First to Default Swap

Supongamos que tenemos 3 referencias crediticias con igual recovery. Las primas de CDS de mercado de cada una de las referencias que componen la cesta son S_A, S_B, y S_C.

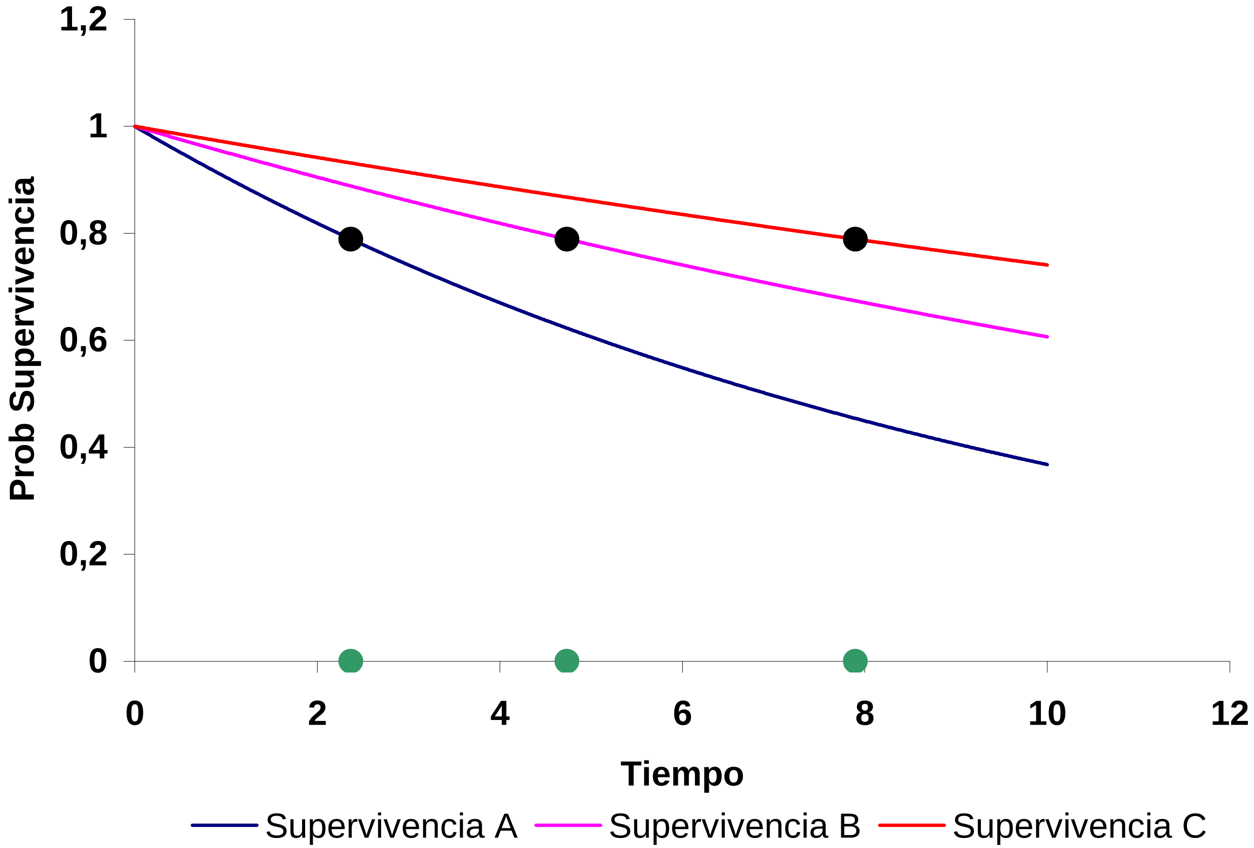
Supondremos que $S_A > S_B > S_C$, de manera que la referencia A es la más arriesgada de las tres.

Tal y como vimos en los modelos sobre una referencia, las intensidades de los procesos de default vendrán dadas (aproximadamente) por:

$$\lambda_A \approx \frac{S_A}{1-R},\ \lambda_B \approx \frac{S_B}{1-R},\ \lambda_C \approx \frac{S_C}{1-R}$$

Dependencia Total entre Eventos de Quiebra:

Supongamos que hay una dependencia total entre los eventos de quiebra de todas las empresas. En términos de simulación, suponer una dependencia total es suponer que generamos los tiempos de quiebra mediante la misma uniforme (ver gráfico).



Como vemos en el gráfico anterior, una dependencia total de los tiempos de quiebra implicará que siempre quebrará primero la empresa de mayor spread. De manera que el vendedor de protección estará en el fondo expuesto al riesgo de crédito de la peor empresa.

Del razonamiento anterior se deduce que, en caso de dependencia total entre los eventos de quiebra de las empresas que componen la cesta, la prima de mercado del first to default swap vendrá dada por el spread de CDS de la empresa más arriesgada (el mayor spread).

Independencia entre Eventos de Quiebra

Analicemos ahora el caso de independencia. Para ello supondremos que la pata de prima de la cesta paga de forma continua (en cada intervalo de longitud dh, el vendedor de protección recibe Sdh). Entonces, las patas de prima y quiebra vendrán dadas por:

$$PL = S\int_{h=t}^{T} B(t,h)P_0(t,h)dh$$

$$DL = (1-R)\int_{h=t}^{T} B(t,h)dP_0(t,h)$$

Siendo T el vencimiento del swap.

Pero en caso de independencia entre los eventos de quiebra, tenemos:

$$\begin{aligned} P_0(t,h) = Pr\left[\tau_A > h \cap \tau_B > h \cap \tau_C > h \middle| \mathcal{F}_t\right] = \\ = Pr\left[\tau_A > h \middle| \mathcal{F}_t\right] Pr\left[\tau_B > h \middle| \mathcal{F}_t\right] Pr\left[\tau_C > h \middle| \mathcal{F}_t\right] = \\ = P_A(t,h)P_B(t,h)P_C(t,h) \end{aligned}$$

De lo que se deduce que:

$$P_0(t,h) = \exp\left(-\lambda_A(h-t)\right)\exp\left(-\lambda_B(h-t)\right)\exp\left(-\lambda_C(h-t)\right) =$$
$$= \exp\left(-\left(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C\right)(h-t)\right)$$

Y por lo tanto

$$dP_0(t,h) = -\left(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C\right)P_0(t,h)dh$$

Lo que nos permite obtener la siguiente relación para la prima de mercado del swap (aquella que hace que su valor de mercado sea nulo):

$$0 = PL - DL = S_{\mathsf{PAR}}\int_{h=t}^{T} B(t,h)P_0(t,h)dh$$
$$-(1-R)\int_{h=t}^{T} B(t,h)P_0(t,h)\left(-\left(\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C\right)\right)dh$$
$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\text{PAR}} = (1-R)\left(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C\right) = S_A + S_B + S_C$$

Luego en caso de independencia, la prima de mercado del first to default swap será, aproximadamente, igual a la suma de los spreads de CDS de los nombres que la componen.

Es importante notar que para obtener la relación hemos supuesto pagos continuos y curvas planas. En general se trata de un límite dificilmente alcanzable.

Nota.

$$\underbrace{\max_i\{S_i\}}_{\text{Máxima Dependencia}} \leq S_{FTD} \leq \underbrace{\sum_i S_i}_{Independencia}$$

S_i: Prima de mercado de CDS de la referencia i.
S_{FTD}: Prima de mercado de FTD.
Por lo que será importante modelizar la dependencia de los eventos de quiebra para valorar este tipo de payoffs.

Un incremento en la percepción sobre la dependencia de los eventos de quiebra disminuirá la prima de mercado del swap incrementando el valor de mercado del swap desde el punto de vista del vendedor de protección.

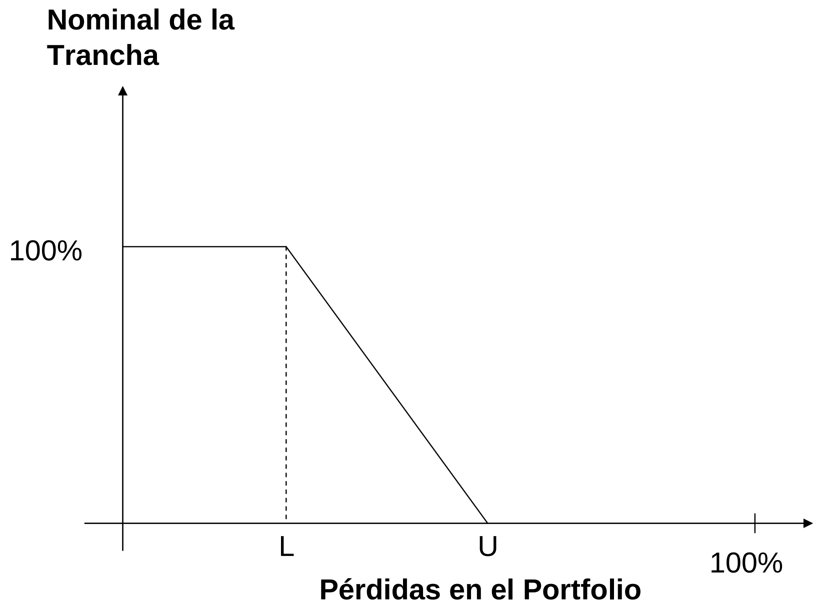
Ejercicio

Calcular la probabilidad de que dos referencias lleguen vivas a $T = 5y$ en función de la correlación dentro de un modelo de cópula gaussiana, suponiendo que sus intensidades de default son $\lambda_1 = 2\,\%$ y $\lambda_2 = 3\,\%$

Nth to Default Swap

El concepto es muy similar al del first to default, pero esta vez es la N-ésima quiebra la que desencadena el pago en quiebra y hace que se cancelen los pagos de prima posteriores.

Trancha de CDO Sintético



Una vez más se trata de un swap mediante el cuál dos contrapartidas se transfieren riesgo de crédito.

Tomamos una cesta de nombres cada uno con cierta ponderación.

Definimos dos niveles de pérdidas L y U que definirán lo que a partir de ahora llamaremos trancha.

El vendedor de protección recibe prima por un nominal que depende de las pérdidas acumuladas en el portfolio de la manera indicada en la figura. Si la quiebra de una empresa implica una reducción del nominal de la trancha, el vendedor de protección hace un pago igual a la reducción de nocional.

Nótese que el vendedor de protección (en lo que respecta a los pagos) no se ve influido hasta que las pérdidas acumuladas en el portfolio alcanzan el nivel L. A partir de ese momento, toda quiebra adicional reducirá el nominal por el que recibe prima y le forzará a hacer pagos. Una vez alcanzado el nivel U, termina la operación.

Es importante recalcar que a la hora de contabilizar las pérdidas acumuladas en el portfolio, debemos tener en cuenta la tasa de recuperación de las referencias quebradas (en un portfolio de 100 referencias en el que han quebrado 10 con un recovery del 50 %, las pérdidas acumuladas son del 5 %).

Al nivel L se le llama -Attachment- y al nivel U -Detachment-.

Llamamos l_T a las pérdidas acumuladas en el portfolio hasta tiempo T.

$$l_T = \sum_{i=1}^{M} w_i(1 - R_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

M: Número de referencias en el portfolio.

w_i: Peso de la referencia i.

R_i: Tasa de recuperación de la referencia i.

τ_i: Tiempo de quiebra de la referencia i.

El nocional del swap a tiempo T viene dado por:

$$N_T = 1 - \frac{(l_t - L)^+ - (l_t - U)^+}{U - L}$$

Tal y como hemos definido el payoff, y suponiendo independencia entre tipos y crédito, los valores de pata de prima y de quiebra vendrán dados por:

$$PL = S \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j B(t,t_j) E\left[N_{t_j}\right]}_{DV01_{L,U}}$$

$$DL = \int_{h=0}^{t_n} B(t,h) dE\left[N_h\right]$$

De manera que la valoración dependerá del cálculo del valor esperado del nominal en fechas futuras.

Vamos a suponer una cartera compuesta por 100 nombres con igual tasa de recuperación ($40\,\%$), igual nominal e igual spread (misma intensidad de quiebra ($2\,\%$)).

En el caso de que supongamos una dependencia total, la función de densidad de pérdidas a un horizonte de 5 años vendrá dada por:

$0\,\%$: con probabilidad $\exp(-2\,\% \cdot 5)$.

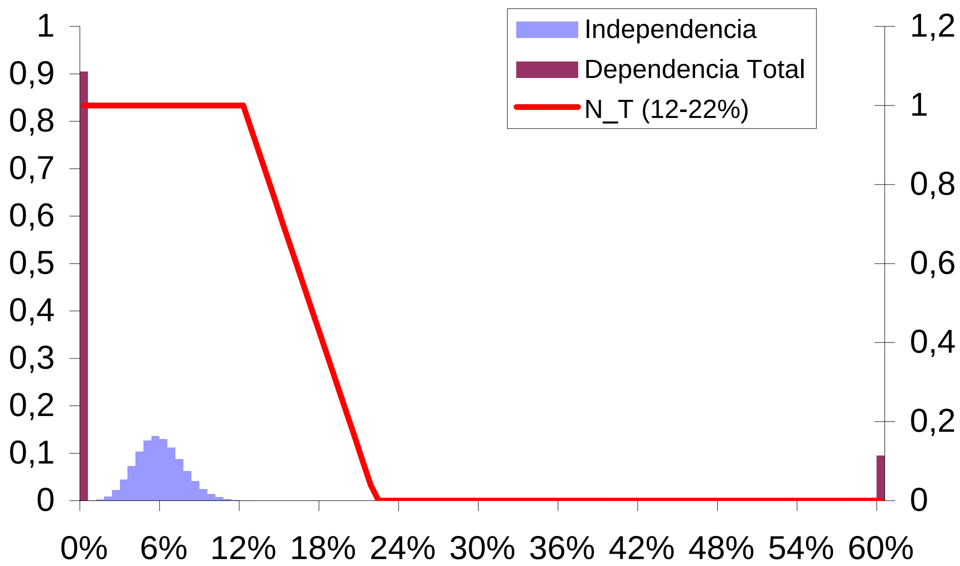
$60\,\%$: con probabilidad $1 - \exp(-2\,\% \cdot 5)$.

Nótese que en este caso, el hecho de que tengan la misma intensidad y que haya dependencia total (los defaults son producidos por la misma uniforme) hace que el instante de quiebra sea igual para toda referencia.

Por el contrario, en el caso en que haya independencia total, la función de densidad vendrá dada por la distribución binomial:

$$Pr\left[l_T = \frac{n(1-R)}{M}\right] = \binom{M}{n} p^n (1-p)^{M-n}$$

Nótese el la figura cómo, en función de la hipótesis de dependencia, obtendremos valores esperados del nominal muy distintos.



Conclusión

Vemos que, salvo para el caso del índice, en general hemos de modelizar la dependencia entre los eventos de quiebra para poder valorar instrumentos de mercado sobre cestas.

2. Cópula Gaussiana

En la valoración de derivados sobre cestas es muy común emplear modelos de cópula. Uno de los más populares es la cópula gaussiana. Como primer ejemplo, tratemos de valorar un first to default sobre dos referencias crediticias.

Cópula Gaussiana de un solo factor

Llegados a este punto, es importante observar que no hay datos históricos de los que podamos estimar las correlaciones a imputar a nuestro modelo. La correlación entre tiempos de default de empresas que hoy no han quebrado no puede extraerse de datos pasados.

Una práctica común es utilizar correlaciones extraidas del mercado de renta variable.

La dificultad de obtener las correlaciones a imputar a nuestro modelo, unido al hecho de que, para resolver un problema de valoración nos vemos obligados a utilizar la técnica de montecarlo para un número aceptable de dimensiones (computacionalmente costoso) ha provocado que el mercado simplifique el modelo reduciendo factores.

Una primera simplificación pasa por simplificar la estructura de la matriz de correlaciones, de manera que suponemos que hay una correlación única ρ.

De manera que las variables que rigen la quiebra de las empresas i y j vienen dadas por:

$$X_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i$$
$$X_j = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\epsilon_j$$

Donde X, ϵ_i y ϵ_j son $N(0,1)$ independientes.

De manera que X_i y X_j son N(0,1) cuya correlación viene dada por ρ.

Si hacemos una abstracción, la variable aleatoria X representa un componente de riesgo común a todas las compañías, y las ϵ_i representan el componente específico.

Cálculo de la Función de Densidad de las Pérdidas a un Horizonte Dado

De cara a resolver la valoración de una trancha de un CDO sintético, debemos calcular el valor esperado del nocional de la trancha a distintos horizontes (fechas de pago del swap y fechas en las que discretizamos la pata de quiebra).

Fijémonos en un hozizonte T. De las cotizaciones de CDS de cada uno de los nombres que componen la cesta, podemos extraer la probabilidad de quiebra anterior a T de cada referencia.

$$p_i(T) = Pr[\tau_i \leq T]$$

Y como vamos a determinar la quiebra o no quiebra de la referencia i a partir de la variable X_i, debemos determinar el valor de X_i por debajo del cuál la empresa quiebra antes de T. Recordando que X_i se distribuye según una $N(0,1)$:

$$p_i(T) = Pr[X_i \leq z_i(T)] = N(z_i(T))$$

z_i: Valor de X_i por debajo del cuál se produce una quiebra antes de T

$N(\ )$: Función de distribución de la N(0,1).

Por lo que

$$z_i(T) = N^{-1}(p_i(T))$$

Tal y como hemos definido la dependencia entre las distintas X_i, es importante recalcar que, una vez condicionado a la realización del factor común X, los eventos de quiebra de las distintas compa˜ias son independientes.

Por lo que vamos a discretizar los distintos valores que puede tomar la variable X y vamos a condicionar a esos valores.

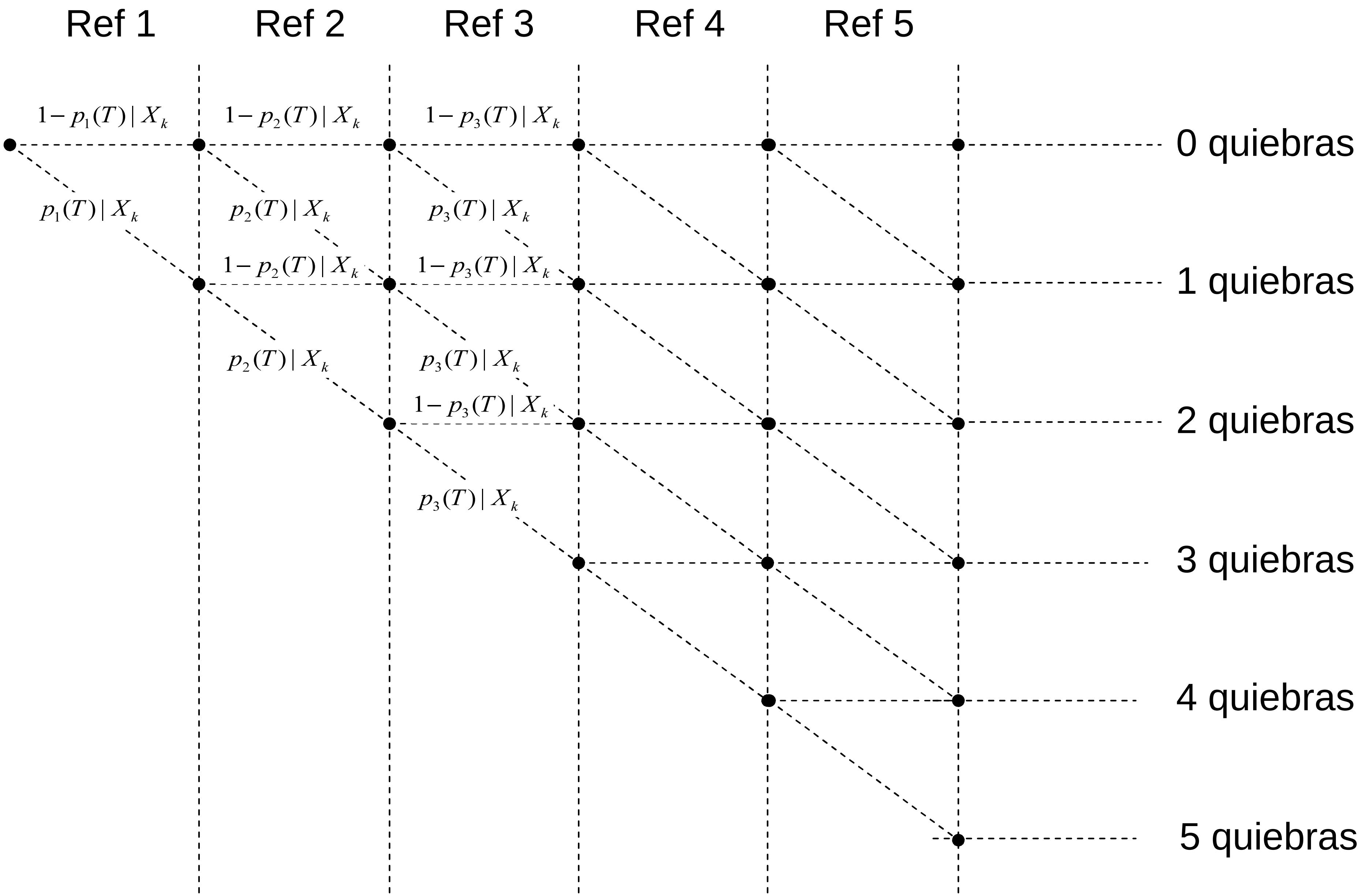
Supongamos que la variable X toma un valor X_k. Entonces la probabilidad de quiebra de la referencia i antes del horizonte T condicionada a que $X = X_k$ viene dada por:

$$p_i(T)|X_k = Pr[\sqrt{\rho}X_k + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i < N^{-1}(p_i(T))] =$$

$$= Pr\left[\epsilon_i < \frac{N^{-1}(p_i(T)) - \sqrt{\rho}X_k}{\sqrt{1-\rho}}\right] = N\left(\frac{N^{-1}(p_i(T)) - \sqrt{\rho}X_k}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Una vez obtenido el valor de $p_i(T)|X_k \ \ \forall i$, podemos calcular la función de densidad del número de referencia quebradas antes de T sin más que aplicar la independencia entre los eventos de quiebra habiendo condicionado a que $X = X_k$.

La independencia nos permite ir construyendo el árbol de probabilidades sin más que ir añadiendo las referencia una a una con sus probabilidades de quiebra condicionadas. Eso nos permite calcular la función de densidad del número de quiebras condicionada a que $X = X_k$.


Ref 1
Ref 2
Ref 3
Ref 4
Ref 5
$1-p_1(T)|X_k$
$1-p_2(T)|X_k$
$1-p_3(T)|X_k$
$p_1(T)|X_k$
$p_2(T)|X_k$
$p_3(T)|X_k$
$1-p_2(T)|X_k$
$1-p_3(T)|X_k$
$p_2(T)|X_k$
$p_3(T)|X_k$
$1-p_3(T)|X_k$
$p_3(T)|X_k$
0 quiebras
1 quiebras
2 quiebras
3 quiebras
4 quiebras
5 quiebras

Tras haber obtenido la función de densidad del número de quiebras para los distintos valores del factor común X_k, integramos el el factor común:

$$Pr[n_T = h] = \int_X Pr[n_T = h|x]n(x)dx$$

n_T: Número de quiebras hasta el instante T.

$n(x)$: Función de densidad de la N(0,1).

Ilustración

Implementar en hoja de cálculo el procedimiento anterior. Suponer que todas las referencias tienen la misma probabilidad de quiebra.

El cálculo de la función de densidad del número de quiebras (unido a la hipótesis de recovery), nos permitirá calcular e valor esperado del nocional de una trancha de CDO (o de un nth to default swap) a sus fechas de pago y fechas de pata de quiebra.

Nota. Si los pesos o tasa de recuperación son distintos entre nombres, tendremos que hacer algún tipo de discretización-redondeo para que el árbol recombine.

Simplificaciones sobre la Cópula Gaussiana Unifactorial

A pesar de que el método antes descrito es bastante eficiente en términos computacionales, podemos ir un paso más allá y tratar de aproximar la función de densidad del número de quiebras condicionada al estado del factor común X. Proponemos dos alternativas:

- Utilizar una distribución binomial con igual media e igual varianza. Esta aproximación será exacta si el portfolio es homogéneo.
- Utilizar una distribución normal con igual media e igual varianza. Esta aproximación será tanto mejor cuanto más homegéneo sea el portfolio y mayor número de referencias tenga.

Large Homogeneous Portfolio

Consideremos el caso en que tenemos un portfolio homogéneo (todas las referencias tienen igual peso, igual curva de CDS e igual recovery).

Supondremos que la distribución conjunta de tiempos de quiebra viene dada por una cópula gaussiana de un sólo factor (existe una correlación única ρ).

Supondremos que el portfolio está compuesto por infinitas referencias.

Se trata de una formulación aproximada que será tanto mejor cuanto más homogéneo sea el portfolio y esté compuesto por mayor número de referencias.

Nos fijamos en un horizonte futuro T. Llamamos p_T a la probabilidad de quiebra antes de T de cualquiera de las referencias que componen el portfolio.

$$p_T = Pr\left[\tau_i \leq T\right] \quad \forall i$$

Nuestro objetivo es encontrar la distribución de las pérdidas en el portfolio a ese horizonte.

Como vimos en el punto anterior, condicionando al factor común X, la probabilidad de quiebra de cada una de las referencias viene dada por:

$$p_T|X = N\left(\frac{N^{-1}(p_T) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Llamemos c_T a la proporción de empresas en el portfolio que quiebra antes de T:

$$c_T = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T\}}$$

Y $c_T|X$ a la proporción de quiebras condicionada al valor X del factor común:

$$c_T|X = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T|X\}}$$

Pero las variables aleatorias τ_i condicionadas a X están igualmente distribuidas, por lo que:

$$c_T|X = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T|X\}} = E\left[\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq T|X\}}\right] = p_T|X = N\left(\frac{N^{-1}(p_T) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

De manera que la ley de los grandes números garantiza que, condicionado a un valor del factor común X, el portfolio experimentará una proporción de quiebras igual a $p_T|X$ sin varianza.

Por lo que, al considerar los valores posibles del factor común X:

$$Pr[c_T \leq K] = Pr\left[N\left(\frac{N^{-1}(p_T) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right) \leq K\right]$$

Pero $N(x)$ (función de distribución de la normal estándar) es una función creciente, por lo que:

$$\begin{aligned}
Pr[c_T \leq K] = Pr\left[\frac{N^{-1}(p_T) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}} \leq N^{-1}(K)\right] = \\
= Pr\left[N^{-1}(p_T) - \sqrt{\rho}X \leq \sqrt{1-\rho}N^{-1}(K)\right] = \\
= Pr\left[X \geq \frac{-\sqrt{1-\rho}N^{-1}(K) + N^{-1}(p_T)}{\sqrt{\rho}}\right] = \\
= Pr\left[X \leq \frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(K) - N^{-1}(p_T)}{\sqrt{\rho}}\right] = \\
= N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(K) - N^{-1}(p_T)}{\sqrt{\rho}}\right)
\end{aligned}$$

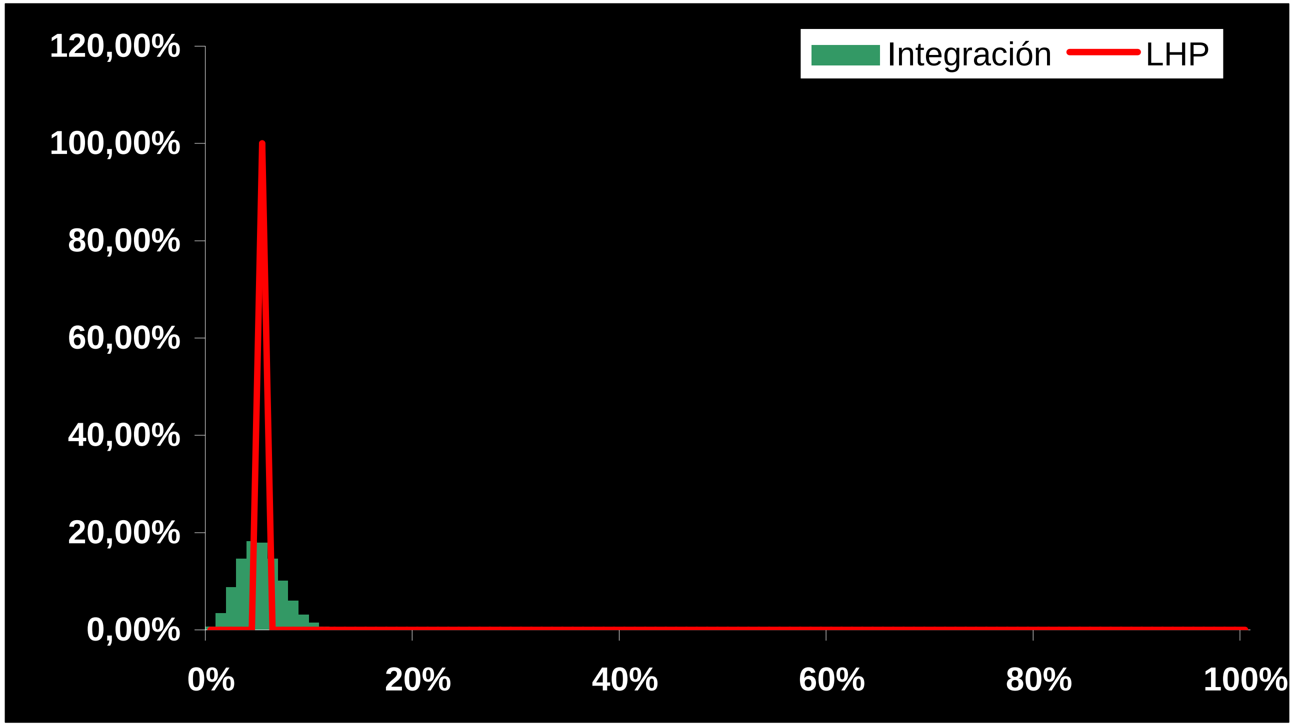
Y si lo que queremos es calcular la distribución de las pérdidas en el portfolio L_T (y no de la proporción de empresas quebradas), tendremos:

$$L_T = c_T(1-R)$$

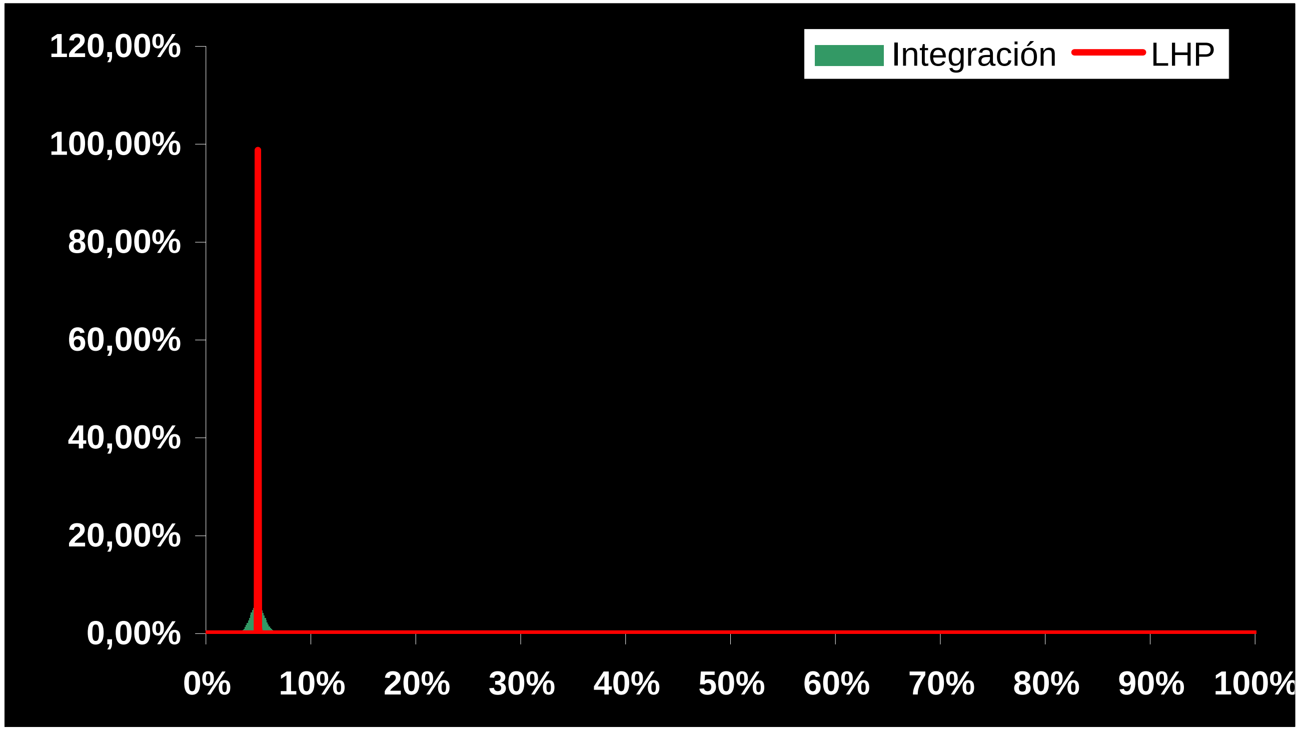
$$Pr[L_T \leq L] = Pr\left[c_T \leq \frac{L}{1-R}\right]] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(\frac{L}{1-R}) - N^{-1}(p_T)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

ILUSTRACIÓN

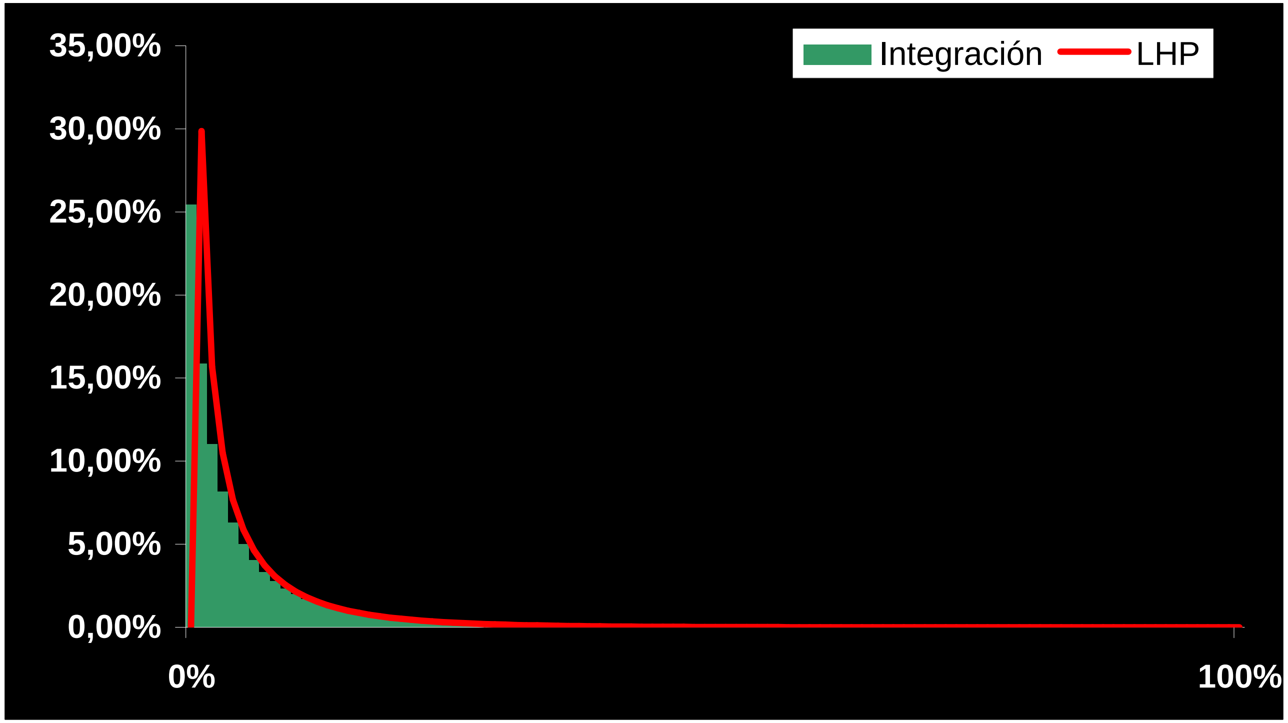
Comparar la distribución aproximada del Large Homogeneous Portfolio con la obtenida por integración numérica con un número finito de referencias. Ver discrepancias variando el número de referencias y la correlación.



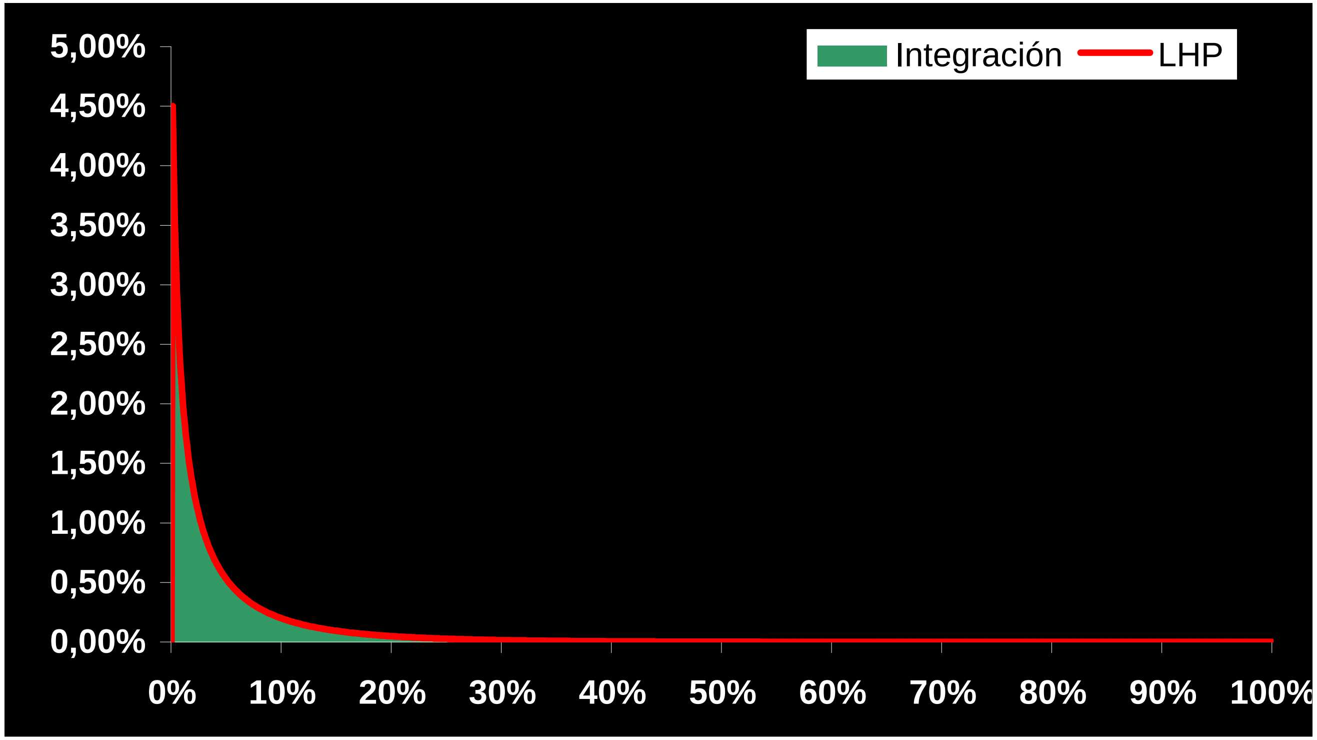
Integración numérica vs LHP con portfolio homogéneo 100 referencias y $\rho = 0$.



Integración numérica vs LHP con portfolio homogéneo 1000 referencias y $\rho = 0$.



Integración numérica vs LHP con portfolio homogéneo 100 referencias y $\rho = 30\,\%$.



Integración numérica vs LHP con portfolio homogéneo 1000 referencias y $\rho = 30\,\%$.

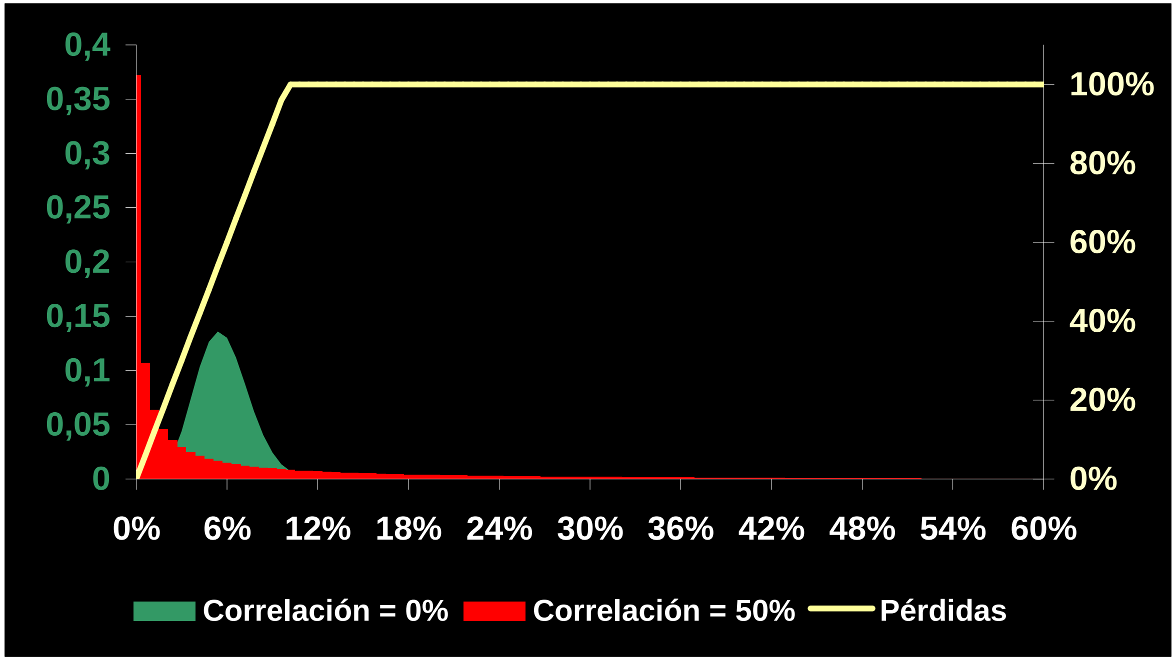
De manera que la aproximación es tanto más exacta cuanto mayor sea el número de referencias y mayor sea la correlación.

Sensibilidad a la Correlación de las Distintas Tranchas

Podemos distinguir las tranchas de mercado en los siguientes grupos:

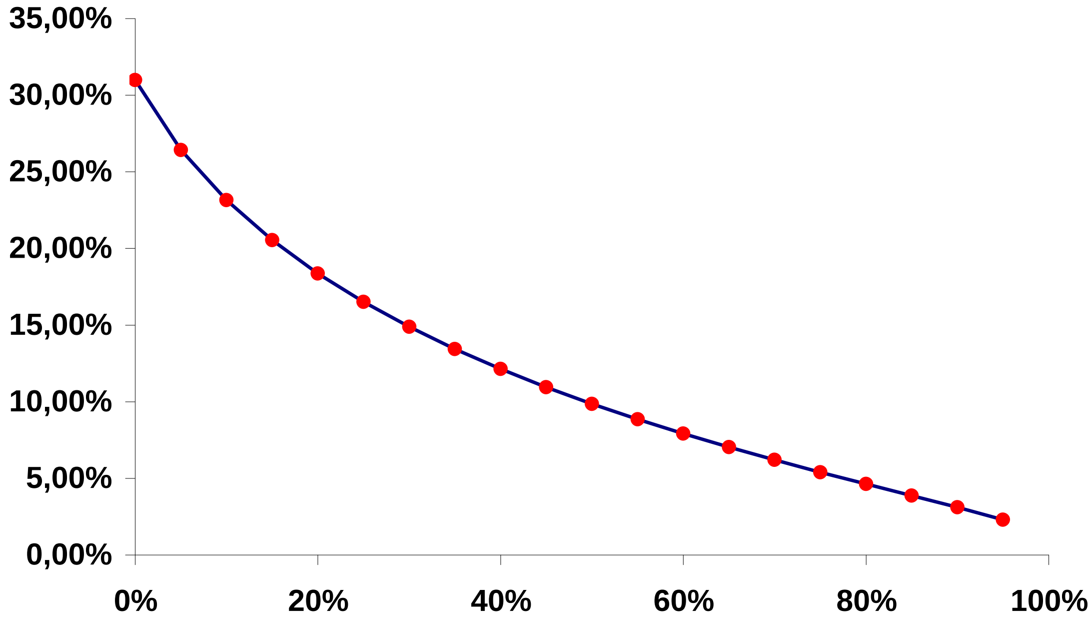
- Tranchas Equity: Aquellas para las que $L = 0\,\%,\ U < 100\,\%$.
- Tranchas Supersenior: Aquellas para las que $L > 0\,\%,\ U = 100\,\%$.
- Tranchas Mezzanine: Aquellas para las que $L > 0\,\%,\ U < 100\,\%$.

Sensibilidad a la Correlación de las Tranchas Equity



Como podemos ver en la figura, un aumento de correlación hace que disminuya el valor esperado de las pérdidas de tranchas equity, por lo que será positivo desde el punto de vista del vendedor de protección.

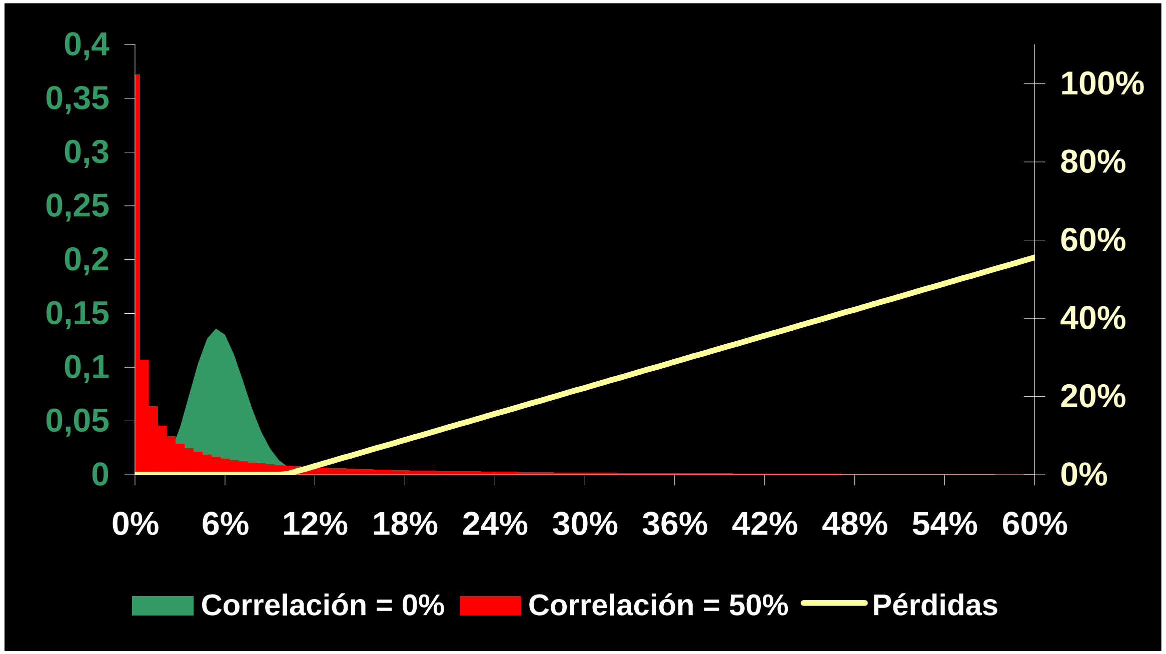
De manera que podemos afirmar que una posición vendida de protección en este tipo de tranchas es una posición larga de correlación (se beneficia de incrementos en correlación).



Prima trancha $0 - 3\,\%$ con respecto a la correlación.

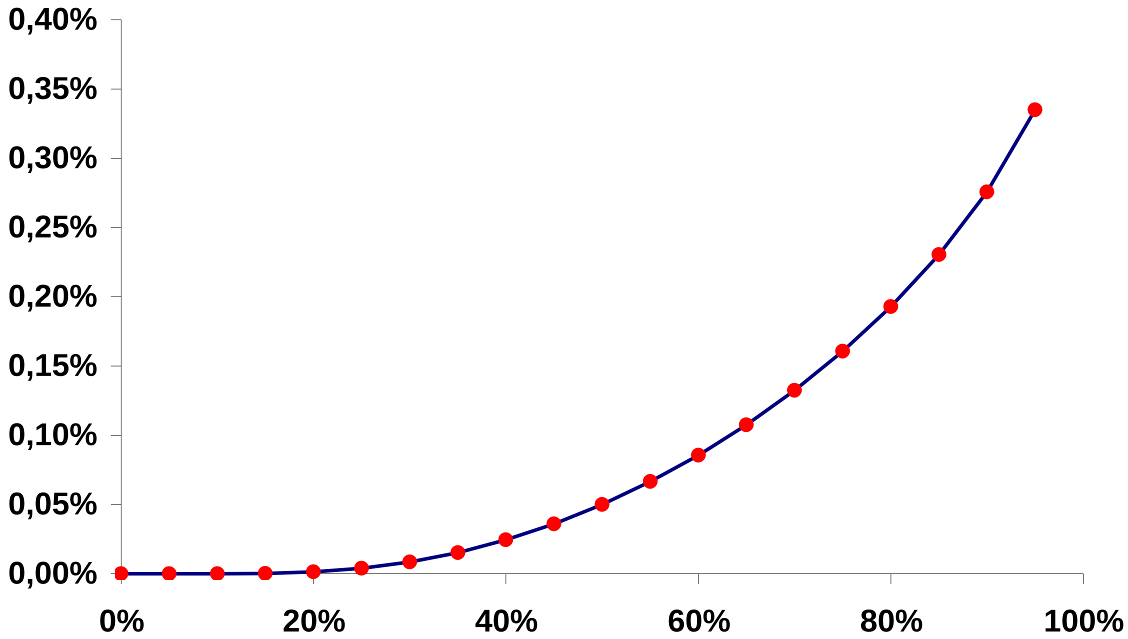
Como podemos observar en la figura, la relación de la prima de la trancha equity con respecto a la correlación es monótona decreciente.

Sensibilidad a la Correlación de las Tranchas Supersenior



Como podemos ver en la figura, un aumento de correlación hace que aumente el valor esperado de las pérdidas de tranchas supersenior, por lo que será negativo desde el punto de vista del vendedor de protección.

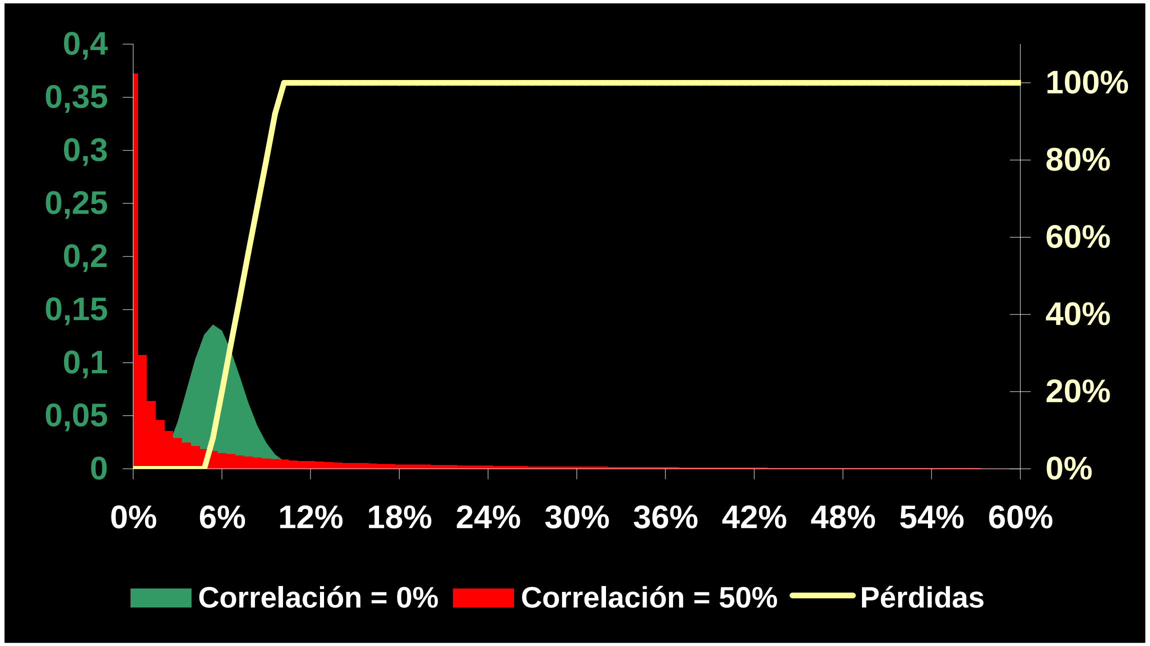
De manera que podemos afirmar que una posición vendida de protección en este tipo de tranchas es una posición corta de correlación (se beneficia de incrementos en correlación).



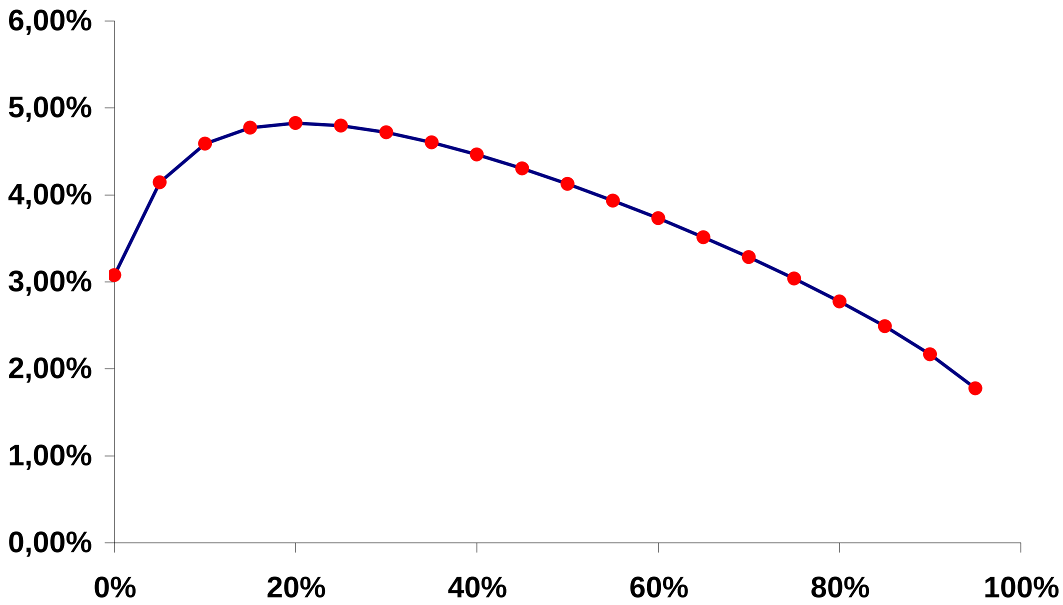
Prima trancha $22 - 100\,\%$ con respecto a la correlación.

Como podemos observar en la figura, la relación de la prima de la trancha supersenior con respecto a la correlación es monótona creciente.

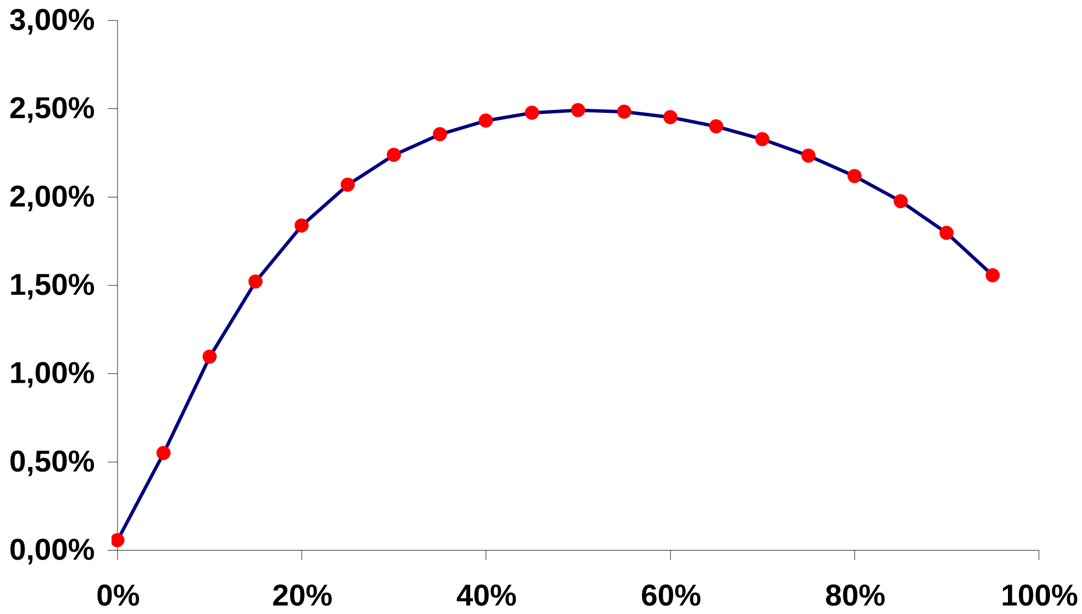
Sensibilidad a la Correlación de las Tranchas Mezzanine



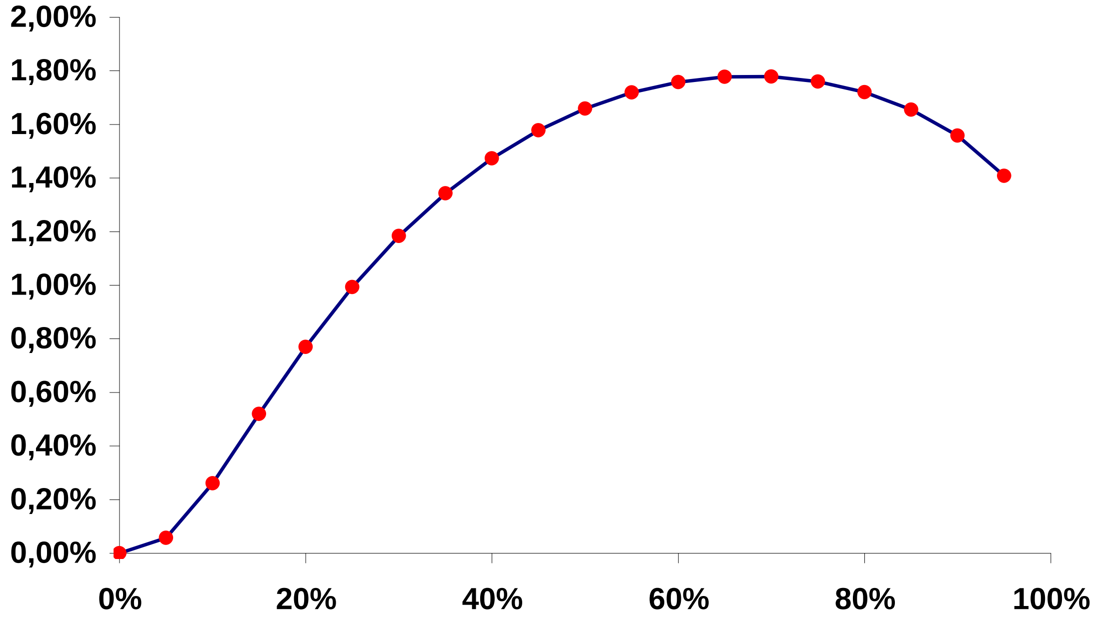
Como podemos ver en la figura, el incremento en correlación no tiene un efecto claro sobre las tranchas mezzanine.



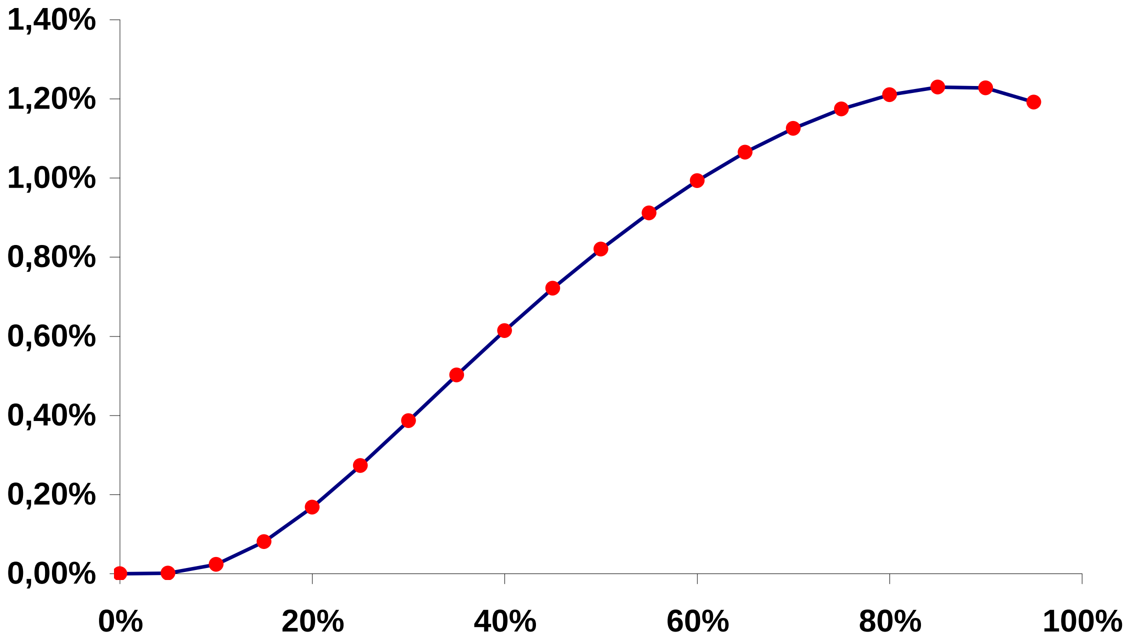
Prima trancha $3 - 6\,\%$ con respecto a la correlación.



Prima trancha $6 - 9\,\%$ con respecto a la correlación.



Prima trancha $9-12\,\%$ con respecto a la correlación.



Prima trancha $12 - 22\,\%$ con respecto a la correlación.

De las figuras anteriores se deduce que no existe una relación monótona entre las primas de las tranchas mezzanine y su prima de mercado.

Papel del Modelo de Cópula Gaussiana en el Mercado

El modelo de Cópula Gaussiana se ha convertido (en parte por su eficiencia en términos computacionales) en el modelo estándar para la valoración de tranchas de CDO sintéticos.

Como veremos en el punto siguiente, el modelo no es capaz de calibrar todo el mercado de correlación (primas de las distintas tranchas) para los índices estándar.

La incapacidad del modelo de calibrar el mercado no ha de extrañarnos, ya que se trata de un modelo en el que la dependencia conjunta de tiempos de quiebra viene dada únicamente por un único parámetro (ρ).

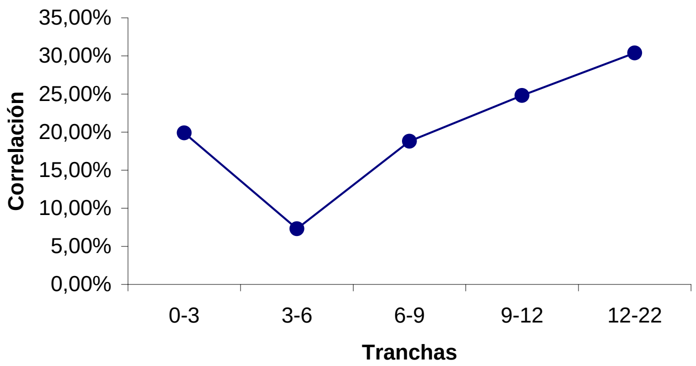
En ese sentido, el modelo de cópula gaussiana de un factor juega en el mundo del crédito un papel similar al jugado por el modelo de Black-Scholes en los mercados de renta variable (y FX). Es decir, se trata de un diccionario que nos permite convertir precios de primas (algo sobre lo que no tenemos intuición) en correlaciones.

3. El Skew de Correlación

El Skew de Correlación

Como adelantábamos en el punto anterior, el modelo de cópula gaussiana no es capaz de calibrar el mercado de correlación (primas de tranchas de CDOs estándar).

Esto implica que si invertimos el modelo de cópula gaussiana para obtener la correlación que ajusta las primas de mercado no obtenemos un valor único para todas las tranchas.



Llamamos a este fenómeno skew de correlación.

Correlaciones Base

Las correlaciones obtenidas para cada una de las tranchas invirtiéndo el modelo de cópula gaussiana de un factor son llamadas correlaciones implícitas (o correlaciones compound).

El hecho de que la relación correlación-prima de mercado no sea monótona para las tranchas mezzanine implica que dada una prima de mercado habrá, en general, dos niveles de correlación compound que ajusten su precio. No obstante, es bastante común no encontrar niveles de correlación única que ajusten las primas de tranchas mezzanine.

Sin embargo, como vimos en el punto anterior, la relación entre primas de tranchas equity y correlación sí es monótona.

Además, podemos replicar tranchas mezzanine mediante una combinación lineal de tranchas equity.

En efecto, dada una trancha mezzanine de strikes L y U, la pérdidas de la trancha $l_{L,U}$ en función de las pérdidas del portfolio l vienen dadas por:

$$l_{L,U} = \frac{(l-L)^+ - (l-U)^+}{U-L}$$

Si consideramos las tranchas equity $0-L$ y $0-U$, sus pérdidas vienen dadas por:

$$l_{0,L} = \text{mín}\left(\frac{l}{L}, 1\right)$$
$$l_{0,U} = \text{mín}\left(\frac{l}{U}, 1\right)$$

Y al cumplirse que:

$$l_{L,U} = \frac{(l-L)^+ - (l-U)^+}{U-L} = \alpha \,\text{mín}\left(\frac{l}{L}, 1\right) + \beta \,\text{mín}\left(\frac{l}{U}, 1\right)$$

con valores de α y β iguales a:

$$\alpha = -\frac{L}{U-L}$$
$$\beta = \frac{U}{U-L}$$

tenemos que:

$$l_{L,U} = \alpha l_{0,L} + \beta l_{0,U}$$

pero esa relación también se cumple para nominales vivos:

$$N_{L,U} = 1 - l_{L,U} = 1 - \alpha l_{0,L} - \beta l_{0,U} = \alpha + \beta - \alpha l_{0,L} - \beta l_{0,U} = \alpha N_{0,L} + \beta N_{0,U}$$

De manera que ha de cumplirse que:

$$DV01_{L,U} = \alpha DV01_{0,L} + \beta DV01_{0,U}$$
$$DL_{L,U} = \alpha DL_{0,L} + \beta DL_{0,U}$$

Siendo DL la pata de quiebra y $DV01$ la anualidad con riesgo de crédito de las distintas tranchas.

Por lo que podemos replicar tranchas mezzanine a partir de tranchas equity.

Se ha convertido en práctica de mercado el ver el mercado de correlaciones observando las correlaciones de las trancas equity asociadas a tranchas mezzanine (correlaciones de tranchas equity $0\,\% - 3\,\%$, $0\,\% - 6\,\%$, $0\,\% - 9\,\%$, $0\,\% - 12\,\%$, $0\,\% - 22\,\%$ para el Itraxx.

A las correlaciones asociadas a las tranchas equity es a lo que se llama en mercado correlaciones base.

Bootstrapping de la Curva de Correlación Base

Supongamos que estamos en el mercado del Itraxx. El bootstraping de la curva de correlaciones base es un proceso iterativo.

- Dada la prima de mercado de la trancha 0-3, obtenemos la correlación base $\rho_{0,3}$.

  Creyéndonos parcialmente el modelo de cópula gaussiana obtenido, podemos inferir los valores de $DV01_{0,3}$ y de $DL_{0,3}$.

- Partiendo de la prima de mercado de la trancha $3-6$, hacemos la siguiente operación:

$$0 = S_{3,6}DV01_{3,6} - DL_{3,6} = \alpha\left(S_{3,6}DV01_{0,3} - DL_{0,3}\right) + \beta\left(S_{3,6}DV01_{0,6} - DL_{0,6}\right)$$

  Por lo que:

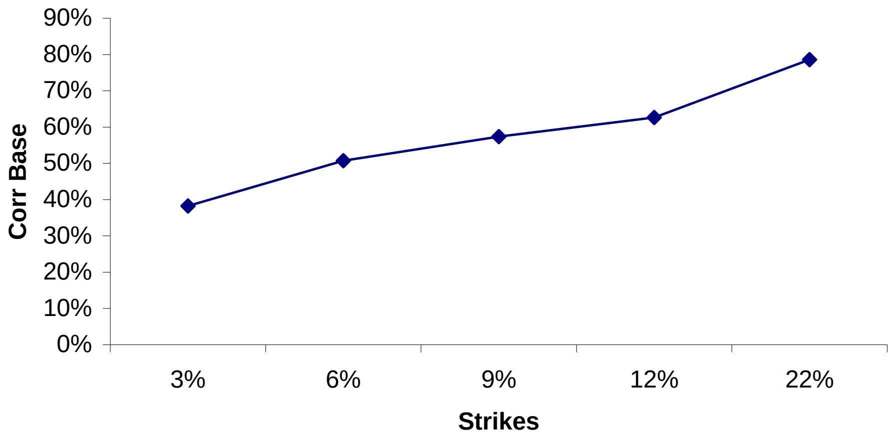
$$S_{3,6} = \frac{\alpha DL_{0,3} + \beta DL_{0,6}}{\alpha DV01_{0,3} + \beta DV01_{0,6}}$$

De la anterior expresión, conocemos la prima de mercado $S_{3,6}$ y, creyéndonos parcialmente el modelo de cópula gaussiana determinado por $\rho_{0,3}$, también conocemos $DL_{0,3}$ y $DV01_{0,3}$. Las únicas incógnitas son $DL_{0,6}$ y $DV01_{0,6}$. Pero ambas magnitudes son función de $\rho_{0,6}$, por lo que tenemos una ecuación con una incógnita.

Determinamos así $\rho_{0,6}$.

- Repetimos el proceso para los strikes superiores hasta el $22\,\%$ (nótese que no hay una correlación base $\rho_{0,100}$ ya que el índice no es sensible a la correlación).

  Mediante el proceso iterativo descrito, se suelen encontrar curvas de correlación base de pendiente positiva (ver figura).



La curva de correlaciones base nos permite interpolar en ella para determinar primas para strikes distintos a los de mercado.

Problemática de la interpolación en Correlaciones Base

Interpolar linealmente en correlaciones puede ser problemático. En general podemos obtener precios arbitrables.

Nos vemos en la necesidad de utilizar modelos no arbitrables que nos permitan interpolar primas de tranchas no estándar.

Estos modelos no arbitrables serán en input de modelos de dinámicos sobre cestas.

Cópula implícita de Hull y White

En el fondo el modelo de cópula de un sólo factor (al menos para un portfolio homogéneo) es una mixtura de binomiales. Dada la realización del factor común (el cuál se da con cierta probabilidad), tenemos que el histograma de las pérdidas en la cartera viene dado por una distribución binomial.

Para ello consideramos un conjunto discreto de intensidades de default $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y suponemos que cada valor de λ se da con una probabilidad $\pi_1, \ldots, \pi_n$.

A cada horizonte de interés, la función de densidad de número de quiebras en cartera vendrá dada por:

$$f(n_T) = \pi_1 f_1(n_T) + \pi_2 f_2(n_T) + \ldots \pi_n f_n(n_T)$$

Lo cuál nos permite determinar primas de tranchas bajo el modelo.

Podemos optimizar las probabilidades $\pi_1, \ldots, \pi_n$ que mejor ajustan los precios de mercado.

De cara a elegir los valores de λ_j, se propone elegir un valor mínimo λ_0, un incremento ϵ y un número de puntos N e ir obteniendo los valores λ_j de la siguiente forma:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} \exp\left(\frac{\ln(0{,}5) - \ln(\epsilon)}{N-1}\right)$$

En la optimización, podemos imponer una condición de suavizado sobre la función de densidad resultante.