Smile en el tipo Swap

Fernando de Lope Contreras (fernando.delope@bbva.com)

MEFC-BBVA, Abril de 2019

Índice

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

1. Libor in Arrears

Libor in Arrears

Recordamos la definición del tipo libor $(j+1)$-ésimo como el libor que fija en t_j y resetea en t_{j+1}

$$F_{j+1}(t) = \frac{B(t,t_j) - B(t,t_{j+1})}{\delta_j B(t,t_{j+1})}$$

Definimos ahora un FRA (Forward Rate Agreement) de strike 0 sobre este tipo libor que paga en t_j,

$$V(t_j) = F_{j+1}(t_j) \tag{1}$$

Por el teorema fundamental de valoración sabemos que su precio en t se puede representar, bajo el par medida, numerario $(N,\ \mathbb{Q}_N)$ como,

$$V(t) = N(t) E_t^{\mathbb{Q}_N} \left(\frac{F_{j+1}(t_j)}{N(t_j)} \right) \tag{2}$$

Como sabemos, el forward $F_{j+1}(t)$ es martingala bajo la medida forward asociada al ZCB de vencimiento t_{j+1}, $\mathbb{Q}_{j+1}$, por lo que será más conveniente calcular ese valor esperado bajo la medida $\mathbb{Q}_{j+1}$, tal que el valor del derivado en t lo podemos expresar como,

$$V(t) = B(t, t_{j+1}) E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}} \left(\frac{F_{j+1}(t_j)}{B(t_j, t_{j+1})} \right) \tag{3}$$

pero sabemos que, $\frac{1}{B(t_j, t_{j+1})}$ lo podemos expresar como,

$$\frac{1}{B(t_j, t_{j+1})} = 1 + \delta_{j+1} F_{j+1}(t_j)$$

por lo que el precio de ese flujo de caja lo podemos expresar como,

$$\begin{aligned} V(t) &= B(t, t_{j+1}) E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}} \left(F_{j+1}(t_j)(1 + \delta_{j+1} F_{j+1}(t_j)) \right) \\ &= B(t, t_{j+1}) \left(F_{j+1}(t_j) + \delta_{j+1} E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}} (F_{j+1}^2(t_j)) \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Es decir, para el cálculo de un FRA sobre un libor in arrears tenemos que calcular el término

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right)$$

que es una función convexa del tipo libor. Por eso, se dice que el tipo libor in Arrears lleva un ajuste de convexidad. Este ajuste suele definirse como,

$$\boxed{Ajuste_{LIA}(t) = E_t^{\mathbb{Q}_j}(F_{j+1}(t_j)) - F_{j+1}(t)}$$

Simplemente notad que para calcular $E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right)$ debemos integrar la función x^2 contra la función de densidad de $F_{j+1}(t_j)$ bajo la medida $\mathbb{Q}_{j+1}$. Esto, lo podemos hacer de dos formas:

- **Vía modelo:** Calibrando un modelo de caplet vanilla al smile de mercado del caplet $(j+1)$-ésimo. Según el modelo que elijamos esa integral podrá resolverse de forma analítica.

- **Vía Mercado:** Podríamos inferir la función de densidad de $F_{j+1}(t_j)$ bajo la medida

$\mathbb{Q}_{j+1}$ directamente de los precios observados en mercado y aplicar un argumento de réplica. En este caso, la función de densidad será directamente la observada en mercado y será independiente de modelo.

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

Réplica de un Libor in Arrears.

Nuestro objetivo es ver cómo calcular $E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right)$ en base a la información de mercado únicamente y, por tanto, abstraernos de modelo.

Podemos representar ese valor esperado en términos de una integral, como

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = \int_0^\infty x^2 \eta_{F_{j+1}}(x)dx \tag{5}$$

donde $\eta_{F_{j+1}}(\cdot)$ representa la función de densidad de transición entre t y t_j para el libor F_{j+1} bajo $\mathbb{Q}_{j+1}$. Por otro lado, sabemos que la función de densidad del tipo F_{j+1} la podemos sacar del mercado de caplets sobre ese libor,

$$\eta_{F_{j+1}}(x) = \frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^2} \tag{6}$$

donde, si no decimos otra cosa, $c(x)$ es el precio sin descontar de mercado de un caplet vanilla sobre F_{j+1} de strike x.

Sustituyendo en (5), tenemos que

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = \int_0^\infty x^2 \frac{\partial^2 c(x)}{\partial x^2} dx$$

integrando por partes obtenemos,

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = \underbrace{\left(x^2 \frac{\partial c(x)}{\partial x}\right)_{x=0}^{\infty}}_{0} - 2\int_0^\infty x \frac{\partial c(x)}{\partial x} dx$$

De nuevo integrando por partes obtenemos que,

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = -\underbrace{\left(xc(x)\right)_{x=0}^{\infty}}_{0} + 2\int_0^\infty c(x) dx$$

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

Es decir, que podemos expresar,

$$E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = 2\int_0^\infty c(x)dx \tag{7}$$

en función de una suma infinita de precio de opciones de mercado de distintos strikes. Si lo queremos expresar en términos de cap/floor podemos aplicar la paridad cap/floor,

$$c(x) - f(x) = F_{j+1}(t) - x$$

a (7) tal que,

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

$$
\begin{aligned}
E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) &= 2\int_0^{K^*} c(x)dx + 2\int_{K^*}^{\infty} c(x)dx \\
&= 2\int_0^{K^*} \left(f(x) + \left(F_{j+1}(t) - x\right)\right)dx + 2\int_{K^*}^{\infty} c(x)dx \\
&= 2\left(F_{j+1}(t)K^* - \frac{1}{2}{K^*}^2\right) + 2\int_0^{K^*} f(x)dx + +2\int_{K^*}^{\infty} c(x)dx \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Si fijamos el strike de corte en el forward libor $K^* = F_{j+1}(t)$ obtenmos,

$$
\boxed{E_t^{\mathbb{Q}_{j+1}}\left(F_{j+1}^2(t_j)\right) = F_{j+1}^2(t) + 2\int_0^{F_{j+1}} f(x)dx + 2\int_{F_{j+1}}^{\infty} c(x)dx} \qquad (9)
$$

Es decir, el precio de un FRA in Arrears lo podemos descomponer en una suma de floor/caplets de mercado.

Debemos notar que (9) no sólo nos da una idea de cómo calcular el ajuste de convexidad de un libor in arrears sino que también nos dice cómo establecer una cartera de réplica en tiempo t que replique el pay-off a vencimiento de un FRA in Arrars.

Es decir, para cubrir un contrato que a vencimiento nos paga

$$(1+\delta_{j+1}F_{j+1}(t_j))\,F_{j+1}(t_j)$$

deberíamos seguir la siguiente estrategia,

- Comprar un FRA de strike 0 sobre F_{j+1}.
- comprar $\delta_{j+1}F^2_{j+1}(t)$ unidades del ZCB $B(t,t_{j+1})$
- Comprar $2\delta_{j+1}$ floors de strike $K\ \forall\ K\in(0,F_{j+1}(t)]$
- Comprar $2\delta_{j+1}$ caps de strike $K\ \forall\ K\in[F_{j+1}(t),\infty$

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

ILUSTRACIÓN

De acuerdo al modelo gaussiano del primer tema, generar, para una parametrización determinada, un smile para el caplet sobre el libor j-ésimo. Calcular el valor de un FRA in Arrears de acuerdo al modelo gaussiano y compararlo contra el el valor de mercado de ese FRA de acuerdo al smile generado (que asumiremos que es el de mercado).

2. Instrumentos linkados a un tipo CMS

FRA sobre CMS

Definimos el FRA j-ésimo sobre el tipo swap (CMS) $S_{a,b}$ como el instrumento que paga en t_j

$$V(t_j) = \left(S_{a,b}(t_a) - K\right)\delta_j$$

donde normalmente $t_j \geq t_{a+1}$.

El precio de este FRA en t viene determinado por

$$V(t) = B(t, t_j) E_t^{\mathbb{Q}_j}\left(S_{a,b}(t_a) - K\right)\delta_j$$

Es sencillo ver que el forward de este contrato (aquel K que hace que $V(t) = 0$) no es el tipo forward swap $S_{a,b}(t)$ si no,

$$K = E_t^{\mathbb{Q}_j}\left(S_{a,b}(t_a)\right) = \frac{A_{a,b}(t)}{B(t, t_j)} E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a, t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right)$$

Es por esto, que decimos que el tipo CMS forward lleva un ajuste de convexidad respecto al tipo swap. Definimos este tipo de ajuste como,

$$\begin{aligned} Ajuste_{CMS}(t) &= E_t^{\mathbb{Q}_j}\left(S_{a,b}(t_a)\right) - S_{a,b}(t) \\ &= \frac{A_{a,b}(t)}{B(t,t_j)} E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right) - S_{a,b}(t) \end{aligned} \tag{10}$$

Imaginemos que queremos valorar un FRA sobre el tipo CMS $S_{a,b}$ que paga en t_j el tipo CMS (es decir, de strike 0). Hemos visto que su valor hoy en t viene definido por,

$$V(t) = A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right) \tag{11}$$

Igual que en el caso del libor in arrears, la distribución del tipo swap $S_{a,b}(t_a)$ bajo $\mathbb{Q}_A$ podemos obtenerla a partir de cotizaciones de swaption sobre $S_{a,b}$ para distintos strikes.

Sin embargo el término

$$\frac{B(t_a, t_j)}{A_{a,b}(t_a)}$$

no depende únicamente del tipo swap $S_{a,b}$ sino de la curva completa entre t_a y t_b por lo que para ser capaces de calcular el ajuste de convexidad del tipo CMS necesitaríamos en principio un modelo de curva. Sin embargo, esta aproximación puede ser inexacta y/o costosa computacionalmente por lo que es muy común aplicar un argumento de réplica como en el caso del tipo libor in arrears para calcular este tipo de ajuste.

En el caso de que queramos ir vía argumento de réplica, vamos a necesitar representar el ratio $\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)}$ en función del tipo swap $S_{a,b}$. Definimos esta función, $\alpha(t_a)$ tal que,

$$E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a, t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right) = E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\alpha(S_{a,b}(t_a)) S_{a,b}(t_a)\right)$$

De tal forma que siguiendo el mismo argumento que en el caso del libor in arrears tenemos que podemos expresar,

$$E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\alpha(S_{a,b}(t_a))S_{a,b}(t_a)\right) = S_{a,b}(t)\alpha(S_{a,b}(t)) + \int_0^{S_{a,b}} \omega(x)p(x)dx + \int_{S_{a,b}}^{\infty} \omega(x)c(x)dx \qquad (12)$$

donde $p(x)$, $c(x)$ son el precio, sin descontar, de un swaption receiver y payer respectivamente de strike x.

Y

$$\omega(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha(x)x\right)$$

por tanto, sustituyendo en (11) vemos que el valor del FRA sobre el tipo CMS $S_{a,b}$ es

$$\boxed{V(t) = A_{a,b}(t)S_{a,b}(t)\alpha(S_{a,b}(t)) + \int_0^{S_{a,b}} \omega(x)Swpt_{rec}(x)dx + \int_{S_{a,b}}^{\infty} \omega(x)Swpt_{pay}(x)dx} \qquad (13)$$

donde

$$
\begin{aligned}
Swpt_{pay}(x) &= A_{a,b}(t)E_t^{\mathbb{Q}_A}\left((S_{a,b}(t_a)-x)^+\right) \\
Swpt_{rec}(x) &= A_{a,b}(t)E_t^{\mathbb{Q}_A}\left((x-S_{a,b}(t_a))^+\right)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Observación

El método de réplica nos permite calcular el valor de un FRA sobre un CMS (y en general cualquier función sobre un CMS) de forma consistente con el mercado de swaptions'para todos los strikes. A su vez nos proporciona una estrategia de cobertura estática a partir de una cartera de swaptions payer y receiver.

Elección de $\alpha(S_{a,b}(t_a))$

Hemos visto la valoración del FRA sobre el tipo CMS lo podíamos expresar como,

$$V(t) = A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right) = A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\alpha(S_{a,b}(t_a)) S_{a,b}(t_a)\right)$$

donde para evitar tener que utilizar un modelo e curva hemos elegido hacer el ratio $\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)}$ una función determinista del tipo swap en t_a.

Podemos ver que

$$\begin{aligned} V(t) &= A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)} S_{a,b}(t_a)\right) \\ &= A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)} | S_{a,b}(t_a)\right) S_{a,b}(t_a)\right) \\ &= A_{a,b}(t) E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\alpha(S_{a,b}(t_a)) S_{a,b}(t_a)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

por lo que podemos ver que con independencia de modelo

$$\boxed{\alpha(S_{a,b}(t_a)) = E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)}|S_{a,b}(t_a)\right)} \tag{16}$$

Modelo de tipo Swap Lineal

Supongamos que

$$\alpha(s) = \alpha_1 s + \alpha_2 \tag{17}$$

supongamos que tomamos α_1 de forma exógena y elegimos α_2 tal que seamos consistente con la condición de no arbitrage

$$\frac{B(t,t_j)}{A_{a,b}(t)} = E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\frac{B(t_a,t_j)}{A_{a,b}(t_a)}\right) = E_t^{\mathbb{Q}_A}\left(\alpha_1 S_{a,b}(t_a) + \alpha_2\right)$$

por lo que,

$$\alpha_2 = \frac{B(t,t_j)}{A_{a,b}(t)} - \alpha_1 S_{a,b}(t)$$

Bajo esta parametrización el precio del FRA sobre CMS queda como

$$\boxed{V(t) = B(t,t_j)S_{a,b}(t) + \alpha_1 A_{a,b}(t)Var^{Q_A}(S_{a,b}(t_a))} \tag{18}$$

o sustituyendo en la ecuación de réplica (13)

$$\boxed{V(t) = A_{a,b}(t)S_{a,b}(t)\left(\alpha_1 S_{a,b}(t) + \alpha_2\right) + \int_0^{S_{a,b}} Swpt_{rec}(x)dx + \int_{S_{a,b}}^{\infty} Swpt_{pay}(x)dx} \tag{19}$$

OBSERVACIÓN

El valor de un FRA sobre un tipo CMS lo podemos calcular en función de un modelo que ha sido previamente calibrado al smile de swaptions de mercado calculando la varianza del tipo swap o integrando el tipo swap contra la función de densidad de mercado de swaptions según el argumento de réplica.

Tipo CMS bajo medida forward

Podemos pensar en el problema de calcular el precio de un instrumento que paga $g(S_{a,b}(t_a))$ en t_j como el problema de determinar la función de densidad del tipo swap bajo la medida de pago $\mathbb{Q}_j$.

$$E_t^{\mathbb{Q}_j}\left(g(S_{a,b}(t_a)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_j}(s)ds$$

Esta función de densidad únicamente podríamos inferirla del mercado de Cap/Floor sobre CMS. Por otro lado, del mercado de Swaptions observamos la función de distribución del tipo swap bajo la medida asocianda a la anualidad a partir de la relación,

$$\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_A}(K) = \frac{\partial^2}{\partial K^2}c(K)$$

A continuación, vemos cómo relacionar ambas funciones de densidad bajo las dos medidas.

Para ello definimos la derivada Radon Nikodyn como,

$$\frac{dQ_j}{dQ_A} = \frac{B(t_a, t_j)}{A_{a,b}(t_a)} \frac{A_{a,b}(t)}{B(t, t_j)} = \alpha(S_{a,b}(t_a)) \frac{A_{a,b}(t)}{B(t, t_j)} \tag{20}$$

por otro lado sabemos que podemos exprear el precio de un isntrumento que paga $g(S_{a,b}(t_a))$ en t_j,

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{Q}_j}\left(g(S_{a,b}(t_a)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_j}(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\frac{dQ_j}{dQ_A}\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_A}(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\underbrace{\alpha(s)\frac{A_{a,b}(t)}{B(t,t_j)}\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_A}(s)}_{\eta_{S_{a,b}}^{\mathbb{Q}_j}(s)}ds \end{aligned} \tag{21}$$

por lo que,

$$\boxed{\eta^{\mathbb{Q}_j}_{S_{a,b}}(s) = \alpha(s)\frac{A_{a,b}(t)}{B(t,t_j)}\eta^{\mathbb{Q}_A}_{S_{a,b}}(s)}$$

Bajo el modelo Lineal tenemos que esta función de densidad quedaría como,

$$\eta^{\mathbb{Q}_j}_{S_{a,b}}(s) = \frac{A_{a,b}(t)}{B(t,t_j)}\left(\alpha_1 s + \alpha_2\right)\eta^{\mathbb{Q}_A}_{S_{a,b}}(s)$$

En mercado esta función la podemos sacar del mercado de caplets sobre CMS a partir de la relación ya comentada

$$\eta^{\mathbb{Q}_j}_{S_{a,b}}(s) = \frac{1}{B(t,t_j)}\frac{\partial^2}{\partial K^2}V_{Caplet}(t,K,S_{a,b}(t))$$

Ilustración

Calcular el tipo forward CMS de un FRA de vencimiento 5 años sobre el tipo swap de tenor 5 años asumiendo que el tipo swap se distribuye lognormalmente con parámetro de volatilidad constante. Comparar este resultado con el tipo forward CMS de mercado (obtenido a partir de la función de densidad observada en mercado).

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

3. Modelos de Volatilidad Estocástica para el tipo Swap

Dinámica del Smile

Hemos visto la fuerte dependencia que tienen los instrumentos sobre CMS en el smile de volatilidad del tipo swap. Estos instrumento podemos valorarlos bien integrando la función de payoff contra la función de densidad directamente observada en mercado o de acuerdo a un modelo que sea capaz de recoger el smile observado en mercado. En general para valorar instrumentos más exóticos será conveniente recoger la información de mercado y proyectarla en un modelo de smile.

En cuanto a modelos de smile podríamos descansar en un modelo de vol local o en un modelo de vol estocástica. Vamos a ver cómo sería la cobertura, en términos generales, de la delta con un modelo de smile. En función de esta discusión propondremos un modelo de vol para el tipo swap.

Definamos la volatilidad implícita de Black como $\sigma^B(t, S_{a,b}(t), t_a, K)$. Tal que una opción europea sobre $S_{a,b}$ de strike K viene definido por la fórmula de Black,

$$c^B = c^B(t, S_{a,b}(t), t_a, K, \sigma^B(t, S_{a,b}(t), t_a, K))$$

Tenemos entonces que la delta de esta opción vendrá determinada por,

Afi Escuela de Finanzas Aplicadas 2018-2019. Todos los derechos reservados

$$\frac{\partial c^B}{\partial S_{a,b}} = \frac{\partial c^B}{\partial S_{a,b}} + \frac{\partial c^B}{\partial \sigma^B}\frac{\partial \sigma^B}{\partial S_{a,b}} = \Delta^B(t) + Z^B(t)\frac{\partial \sigma^B}{\partial S_{a,b}}$$

donde $\Delta^B(t)$ y $Z^B(t)$ son la delta y la vega respectívamente.

Es decir, en el modelo de smile la superficie de volatilidad se moverá con el suyacente y esto implicará que la delta de del modelo dependerá de la vega de Black a través del término $\frac{\partial \sigma^B}{\partial S_{a,b}}$ que denominaremos Backbone.

Es importante por tanto para que nuestra delta esté bien calculada que nuestro modelo sea consistente con el Backbone observado en mercado. En mercado se observa que

$$\frac{\partial \sigma^B}{\partial S_{a,b}} > 0$$

contrario a lo que establece un modelo de vol local.

Para verlo, imaginemos que asumimos una dinámica CEV para el tipo swap tal que,

$$dS_{a,b}(t) = \phi(t) S_{a,b}^{\beta}(t) dW^{\mathbb{Q}_A}(t) \quad S_{a,b}(t_0) = S_{a,b}^{MDO}(t_0)$$

Se puede aproximar la volatidad implícita de Black en función de los parámetros del modelo como,

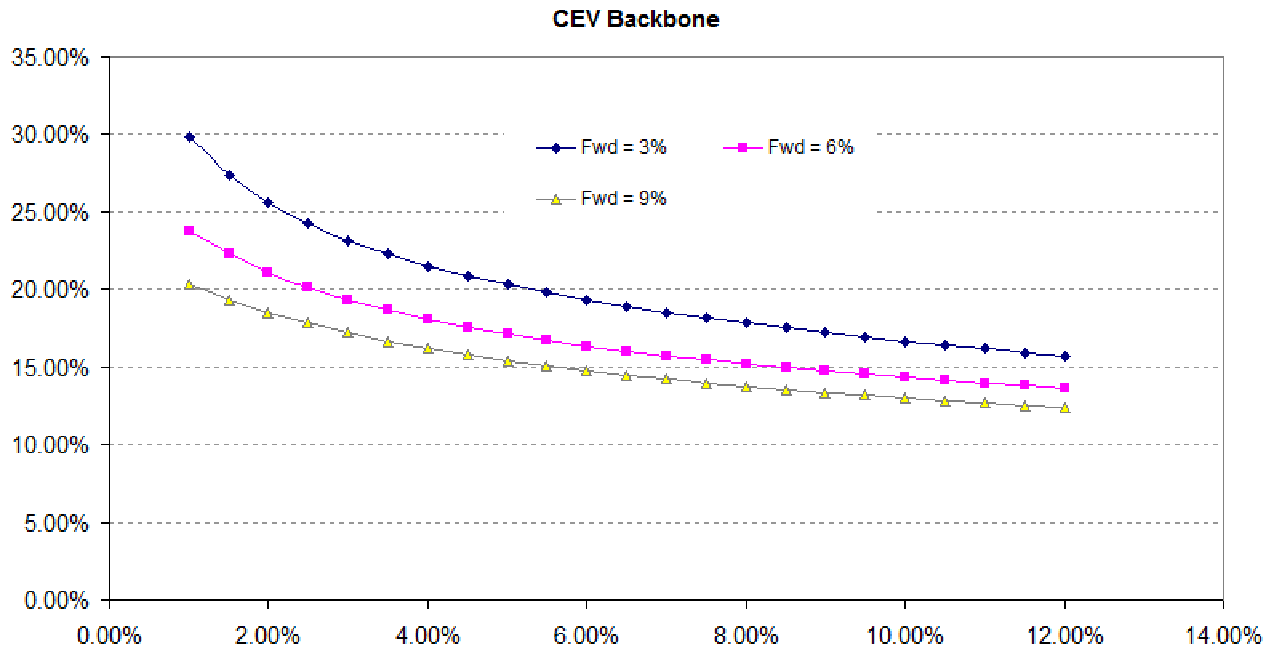
$$\sigma^B(t, S_{a,b}(t), t_a, K) = \frac{\Phi}{\hat{S}^{1-\beta}} \left(1 + \frac{1}{24}(1-\beta)(2+\beta) \left(\frac{S_{a,b}(t) - K}{\hat{S}} \right)^2 + \frac{1}{24} \frac{\Phi^2 t_a}{\hat{S}^{2-2\beta}} + \dots \right) \tag{22}$$

donde

$$\Phi = \sqrt{\frac{1}{t_a} \int_t^{t_a} \phi^2(s) ds}$$

$$\hat{S} = \frac{1}{2}(S_{a,b}(t) + K)$$

En el siguiente gráfico se puede ver como al aumentar el forward swap el smile se desplaza hacia abajo.



Modelo de SABR (Stochastic Alpha, Beta, Rho

)

Hagan et al. proponen la siguiente dinámica bifactorial para el tipo Swap $S_{a,b}(t)$.

$$
\begin{aligned}
dS_{a,b}(t) &= \sigma(t)S_{a,b}^{\beta}(t)dW_S^{\mathbb{Q}_A}(t) \quad s.t. \quad S_{a,b}(t_0) = S_{a,b}^{MDO}(t_0) \\
d\sigma(t) &= \nu\sigma(t)dW_\sigma^{\mathbb{Q}_A}(t) \quad s.t. \quad \sigma(t_0) = \alpha
\end{aligned} \tag{23}
$$

Donde,

$$E_t^{\mathbb{Q}_A}(dW_S(t)dW_\sigma) = \rho dt$$

Hagan et al. aproximan la volatilidad equivalente de Black $\sigma^B(S_{a,b}(t), K, t_a)$ de acuerdo a la siguiente expresión.

$$\sigma^B(S_{a,b}(t), K, T) = \frac{\alpha}{(S_{a,b}K)^{(1-\beta)/2}\left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24}\ln^2 S_{a,b}/K + \frac{(1-\beta)^4}{1920}\ln^4 S_{a,b}/K + \dots\right)}\frac{z}{x(z)}$$
$$\left[1 + \left(\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(S_{a,b}K)^{1-\beta}} + \frac{1}{4}\frac{\rho\beta\nu\alpha}{(S_{a,b}K)^{(1-\beta)/2}} + \frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right)t_a + \dots\right] \tag{24}$$

donde

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(S_{a,b}K)^{(1-\beta)/2}\ln(S_{a,b}/K)$$

$$x(z) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho z + z^2} + z - \rho}{1 - ho}\right)$$

Para el caso de opciones ATM $(K = S_{a,b}(t))$ tenemos que la aproximación se reduce a

$$\begin{aligned} \sigma^B_{ATM} &= \sigma^B(S_{a,b}, S_{a,b}, t_a) \\ &= \frac{\alpha}{S_{a,b}^{(1-\beta)}} \left[1 + \left(\frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{S_{a,b}^{2(1-\beta)}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta\nu\alpha}{S_{a,b}^{(1-\beta)}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right) t_a + \dots \right] \end{aligned} \tag{25}$$

Sensisibilidad del Smile a los parámetros

Sensibilidad a β

El parámetro beta controla el Backbone del modelo. En general, para cualquier valor de $\beta \in [0,1]$ el smile de mercado es recogido más o menos bien. Este parámetro puede calibrarse en base a históricos del backbone o tomado como input.

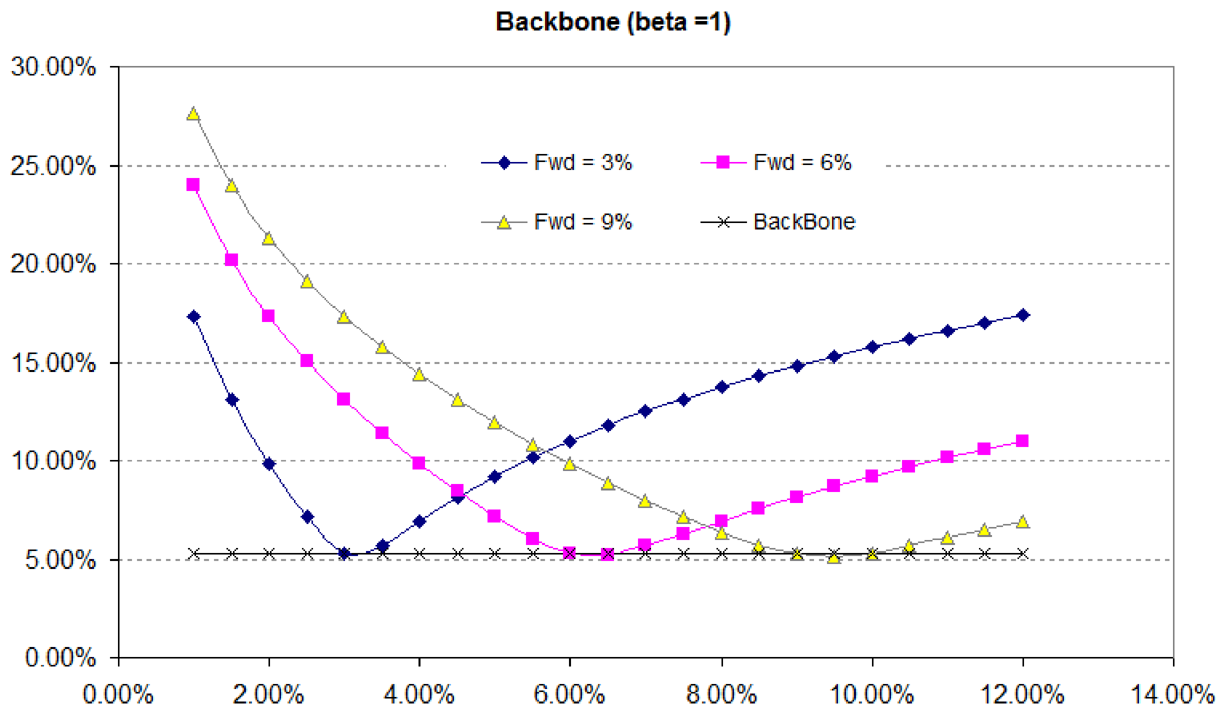


Figura 1: BackBone constante para SABR con $\beta = 1$

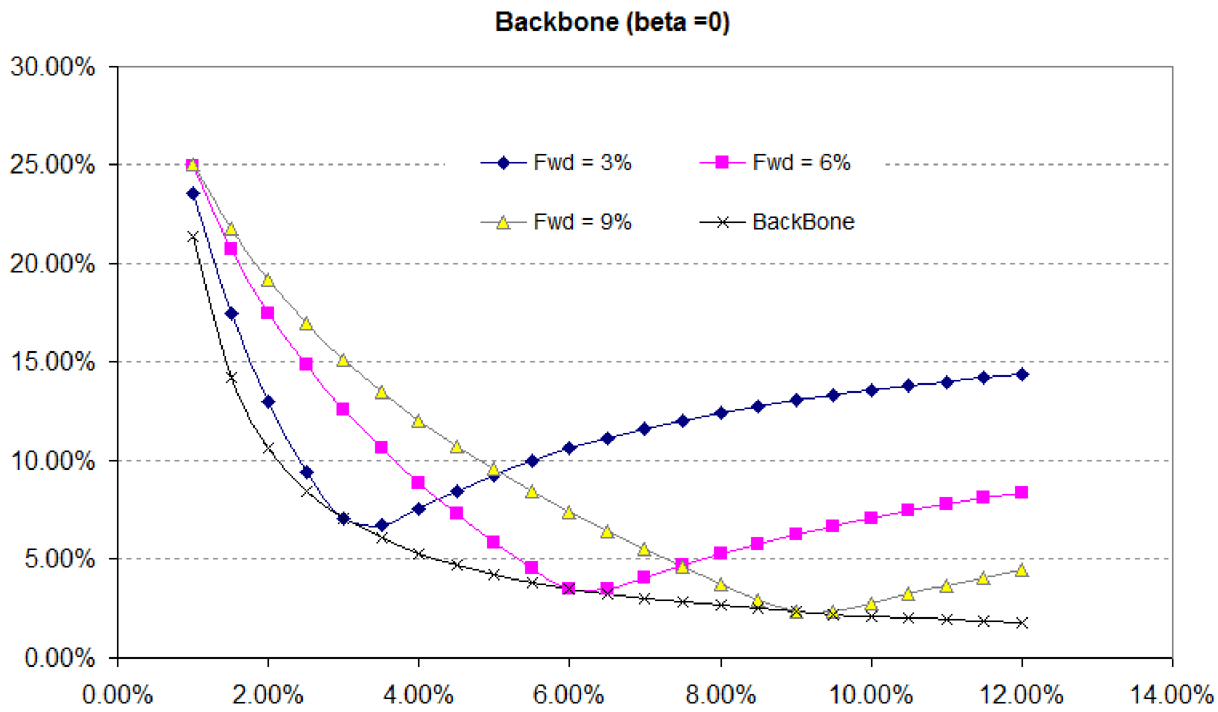


Figura 2: BackBone decreciente para SABR con $\beta = 0$

Sensibilidad a α

α determina el nivel ATM. Suele utilizarse para pasar por ese punto de volatilidad.

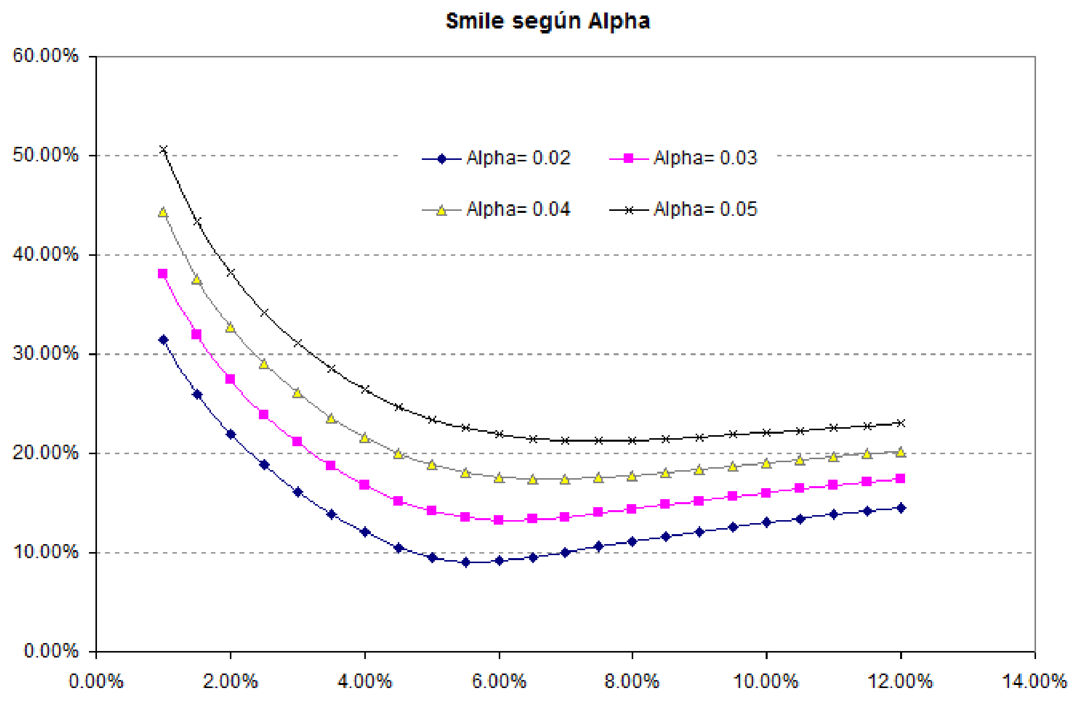


Figura 3: Smile según α

Sensibilidad a ρ y ν

ρ y ν determinan el smile de volatilidad.

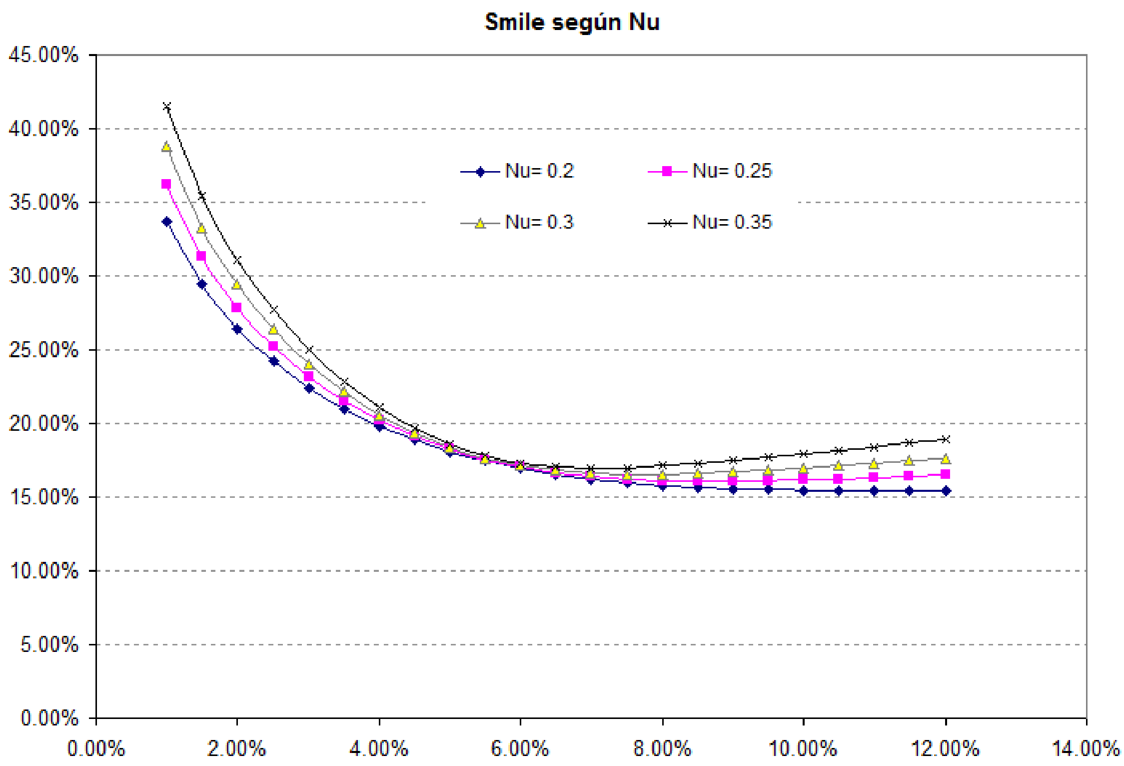


Figura 4: Smile según ν

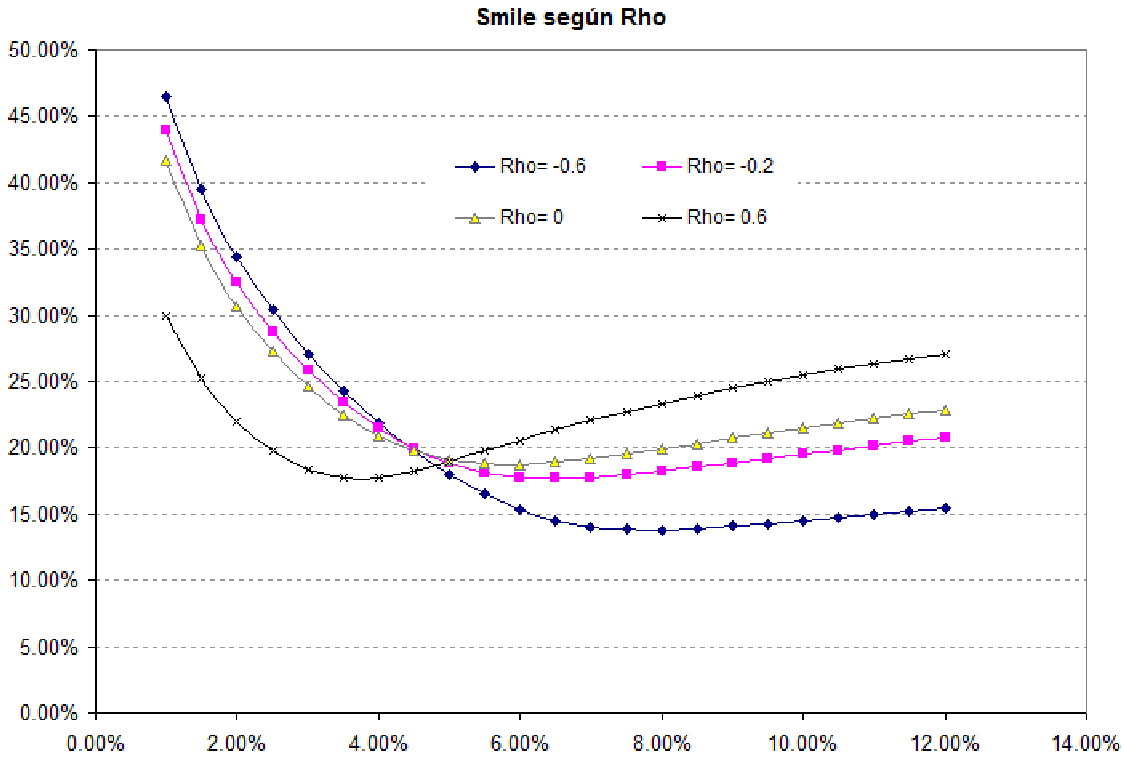


Figura 5: Smile según ρ

Ilustración

Calcular el ajuste de convexidad de CMS de acuerdo a una determinada parametrización del modelo SABR.