Analistas Financieros Internacionales

Introducción a EDPs en Finanzas

Luis Manuel García Muñoz (lmanuel.garcia@bbva.com)

MEFC BBVA, Febrero de 2019

Índice

1. EDP de Valoración y Teorema de Feyman Kac

EDP de Valoración

Una ecuación en derivadas parciales (a veces abreviado como EDP (PDE en inglés)) es una relación entre una función matemática de varias variables independientes y las derivadas parciales de dicha función respecto de esas variables. En nuestro caso, la función será el precio del derivado y las variables serán el tiempo y, en principio, el precio de todos aquellos subyacentes de los que el derivado depende.

En esta sección pretendemos obtener la EDP seguida por el precio de todo derivado. Al igual que hicimos en la parte de valoración, supondremos que estamos en ausencia de riesgo de crédito, por lo que el que cubre el derivado puede financiarse y prestar al tipo libre de riesgo r_t. Obviamente haremos las hipótesis habituales de cobertura continua, ausencia de costes de transacción, ...

Inicialmente supondremos que el derivado sólo depende de un subyacente S_t, si bien posteriormente generalizaremos el resultado a n subyacentes. Al ser sólo función de dicho subyacente, el valor del derivado en un instante t V_t será función de t y de S_t y la variación experimentada por el mismo entre los instantes t y $t + dt$ vendrá dada por (suponiendo que el derivado no implica flujos de caja en el intervalo de tiempo)

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 dt$$

Donde hemos supuesto que bajo la medida real $\mathbb{P}$, la evolución del subyacente viene dada por

$$dS_t = \mu_t^{\mathbb{P}} S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Supondremos que σ_t no contiene fuente de estocasticidad adicional aparte de la posible dependencia de S_t (dicha hipótesis será relajada en el módulo de renta variable). Es decir, que en términos generales $\sigma_t = \sigma(t, S_t)$. Con esta hipótesis podremos cubrir el derivado formando la cartera de réplica con la cuenta corriente libre de riesgo B_t y el subyacente S_t. De manera que replicaremos si en todo momento t

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \tag{1}$$

Donde α_t y β_t son el número de unidades a invertir en cada instrumento de réplica. También debe cumplirse que las variaciones diferenciales experimentadas por derivado y cartera de réplica entre t y $t + dt$ deben ser iguales.

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt = \alpha_t dS_t + \alpha_t q_t S_t dt + \beta_t dB_t \tag{2}$$

Hemos supuesto que el subyacente paga dividendos de forma continua a una tasa de q_t.

Como vimos en la parte de valoración en tiempo continuo, para que se cumpla la condición anterior, los términos en dt y dS_t a ambos lados de la ecuación deben igualarse. Para ello

$$\alpha_t = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$$

Por lo que (2) queda

$$\frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 dt = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}q_t S_t dt + \beta_t B_t r_t dt$$

Si cancelamos dt y tenemos en cuenta que según (1) $\beta_t B_t = V_t - S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t}$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 = \frac{\partial V_t}{\partial S_t}q_t S_t + r_t \left(V_t - S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\right)$$

Lo que es igual a

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + (r_t - q_t)\, S_t \frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 = r_t V_t \qquad (3)$$

Que será la EDP que deberá cumplir el precio de todo derivado sobre S_t. Cuando $\sigma_t = \sigma(t)$, dicha EDP suele llamarse EDP de Black-Scholes.

Como veremos en el módulo de métodos numéricos para EDPs, de cara a resolver el valor de V_t, tendremos que imponer como condición de contorno que en la fecha de vencimiento del derivado $V_T = G(S_T)$ además de ciertas condiciones $\forall t$ para valores muy altos y muy bajos en el precio del subyacente. Al igual que ocurre con árboles, dicha resolución se irá haciendo hacia atrás en el tiempo (Backward).

Nótese que la EDP que describe V_t no depende de $\mu_t^{\mathbb{P}}$. De hecho veremos que el teorema fundamental de valoración también puede ser justificado mediante de EDPs.

Veamos ahora el caso de varios subyacentes $S_t^1, \ldots, S_t^n$. En este caso

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} dS_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^j \partial S_t^k}\rho_t^{jk}\sigma_t^j\sigma_t^k S_t^j S_t^k dt$$

Donde $\rho_t^{jk} dt = dW_t^{j,\mathbb{P}} dW_t^{k,\mathbb{P}}$ podría ser función de t, de S_t^j y de S_t^k

En este caso, la ecuación de réplica vendrá dada por:

$$V_t = \sum_{j=1}^{n} \alpha_t^j S_t^j + \beta_t B_t$$

Y en términos diferenciales:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} dS_t^j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^j \partial S_t^k}\rho_t^{jk}\sigma_t^j\sigma_t^k S_t^j S_t^k dt = \sum_{j=1}^{n} \alpha_t^j dS_t^j + \sum_{j=1}^{n} q_t^j \alpha_t^j S_t^j dt + \beta_t dB_t \tag{4}$$

Y nuevamente, para que se cumpla la igualdad anterior, los términos según dt y dS_t^j deben igualarse a ambos términos de la ecuación, por lo que

$$\alpha_t^j = \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j}$$

Por lo que (4) queda

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^j \partial S_t^k}\rho_t^{jk}\sigma_t^j\sigma_t^k S_t^j S_t^k = \sum_{j=1}^{n} q_t^j S_t^j \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} + r_t\left(V_t - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} S_t^j\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(r_t - q_t^j\right) S_t^j \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^j \partial S_t^k}\rho_t^{jk}\sigma_t^j\sigma_t^k S_t^j S_t^k = r_t V_t \tag{5}$$

Teorema de Feyman Kac

En este punto, pretendemos establecer una relación entre la solución de la EDP (6) y cierto valor esperado bajo cierta medida $\mathbb{Q}$. Se trata del teorema de Feyman Kac.

Dicho teorema establece que la solución a una EDP de la forma

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \left(r_t^j - q_t^j \right) S_t^j \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^j \partial S_t^k} \rho_t^{jk} \sigma_t^j \sigma_t^k S_t^j S_t^k = c_t V_t + f_t \tag{6}$$

Unido a la condición terminal $V_T = V(T, \bar{S}_T)$.

Donde de forma general $r_t^j = r^j(t, \bar{S}_t)$, $q_t^j = q^j(t, \bar{S}_t)$, $\rho_t^{jk} = \rho^{jk}(t, \bar{S}_t)$, $\sigma_t^j = \sigma^j(t, \bar{S}_t)$, $c_t = c(t, \bar{S}_t)$, $f_t = f(t, \bar{S}_t)$ con $\bar{S}_t = [S_t^1, \ldots, S_t^n]$.

Bueno, pues el teorema dice que la solución de (6) $V_t = V(t, \bar{S}_t)$ coincide con el siguiente valor esperado

$$V_t = V(t, \bar{S}^*_t) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T e^{-\int_{s=t}^{T} c_s ds} - \int_{s=t}^{T} e^{-\int_{h=t}^{s} c_h dh} f_s ds \middle| \bar{S}_t = \bar{S}^*_t \right]$$

Donde $\mathbb{Q}$ es una medida bajo la cual $dS^j_t = (r^j_t - q^j_t) S^j_t dt + \sigma_t S^j_t dW^{j,\mathbb{Q}}_t$

De cara a demostrarlo, tomemos el proceso $V_t e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds}$ y apliquemos Itô bajo $\mathbb{Q}$

$$d(V_t e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds}) = e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds} dV_t - c_t V_t e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds} dt$$

$$= \quad e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds} \left(\frac{\partial V_t}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^{n} \left(r_t - q^j_t \right) S^j_t \frac{\partial V_t}{\partial S^j_t} dt + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^j_t \partial S^k_t} \rho^{jk}_t \sigma^j_t \sigma^k_t S^j_t S^k_t dt \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_t}{\partial S^j_t} S^j_t \sigma^j_t dW^{j,\mathbb{Q}}_t - c_t V_t dt \right)$$

Si ahora aplicamos (6) a la expresión anterior, tenemos

$$d\left(V_t e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds}\right) = e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_t}{\partial S_t^j} S_t^j \sigma_t^j dW_t^{j,\mathbb{Q}} + f_t dt\right)$$

Si integramos la expresión anterior entre t y T, tendremos

$$V_T e^{-\int_{s=0}^{T} c_s ds} - V_t e^{-\int_{s=0}^{t} c_s ds} = \int_{s=t}^{T} e^{-\int_{h=0}^{s} c_h dh}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_s}{\partial S_s^j} S_s^j \sigma_s^j dW_s^{j,\mathbb{Q}} + f_s ds\right)$$

Y calculando la esperanza condicionada a $\mathcal{F}_t$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T e^{-\int_{s=t}^{T} c_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right] - V_t = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{s=t}^{T} e^{-\int_{h=t}^{s} c_h dh}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_s}{\partial S_s^j} S_s^j \sigma_s^j dW_s^{j,\mathbb{Q}} + f_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

De la expresión anterior, el término que va con brownianos es una integral de Itô, por lo que su esperanza es nula, teniendo

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T e^{-\int_{s=t}^{T} c_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right] - V_t = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_{s=t}^{T} e^{-\int_{h=t}^{s} c_h dh} f_s ds\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V_t = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T e^{-\int_{s=t}^{T} c_s ds} - \int_{s=t}^{T} e^{-\int_{h=t}^{s} c_h dh} f_s ds\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Nótese que si $f_t = 0$ y $r_t^j = c_t = r_t \; \forall j$, entonces

$$V_t = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[V_T e^{-\int_{s=t}^{T} r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

En una medida en la que $\mu_t^{j,\mathbb{Q}} = r_t - q_t^j$. Bajo dicha medida $\frac{V_t}{\beta_t}$ es una martingala.

2. Cambio de Numerario y EDPs

Justificación del Teorema Fundamental de Valoración con EDPs

En este punto trataremos de dar una justificación alternativa al teorema fundamental de valoración mediante el uso de EDPs. Para ello supongamos cierto derivado V_t sobre cierto subyacente S_t que supondremos que bajo la medida real $\mathbb{P}$ evoluciona según

$$dS_t = \mu_t^{\mathbb{P}} S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

y que paga dividendos de forma continua a una tasa q_t

Entonces la ecuación de réplica queda

$$V_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

Tomando como numerario B_t

Si dividimos por B_t

$$\bar{V}_t := \frac{V_t}{B_t} = \alpha_t \frac{S_t}{B_t} + \beta_t$$

Diferenciando y teniendo en cuenta los dividendos pagados por la posición invertida en el subyacente

$$\frac{\partial \bar{V}_t}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{V}_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{V}_t}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt = \alpha_t \frac{dS_t}{\beta_t} - r_t \alpha_t \frac{S_t}{\beta_t} dt + q_t \alpha_t \frac{S_t}{\beta_t} dt$$

De la expresión anterior deducimos que para estar cubiertos

$$\alpha_t = \beta_t \frac{\partial \bar{V}_t}{\partial S_t}$$

Por lo que

$$\frac{\partial \bar{V}_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{V}_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 = -r_t \frac{\partial \bar{V}_t}{\partial S_t} S_t + q_t \frac{\partial \bar{V}_t}{\partial S_t} S_t$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial \bar{V}_t}{\partial t} + (r_t - q_t)\, S_t \frac{\partial \bar{V}_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{V}_t}{\partial S_t^2}\sigma_t^2 S_t^2 = 0$$

El teorema de Feyman Kac nos garantiza que dada una condición terminal $V_T = T(T, S_T)$, la solución a la EDP anterior equivale a calcular el siguiente valor esperado

$$\bar{V}_t = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\bar{V}_t \middle| F_t\right]$$

En una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual

$$dS_t = (r_t - q_t) S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Tomando como numerario S_t

Al pagar dividendos S_t, definimos el proceso $N_t := S_t \exp\left(\int_{u=0}^{t} z_u du\right)$. z_t será determinado al imponer la condición de martingala a $\frac{V_t}{S_t}$

Dividiendo e la ecuación de réplica por N_t

$$\frac{V_t}{N_t} = \alpha_t \frac{S_t}{N_t} + \beta_t \frac{B_t}{N_t}$$

Definimos $\tilde{V}_t := \frac{V_t}{N_t}$

$$\tilde{V}_t = \alpha_t \exp\left(-\int_{u=0}^{t} z_u du\right) + \beta_t \frac{B_t}{S_t} \exp\left(-\int_{u=0}^{t} z_u du\right) \tag{7}$$

Y diferenciando

$$\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial t}dt + \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{V}_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma_t^2 dt = \exp\left(-\int_{u=0}^{t} z_u du\right)\left(-z_t\alpha_t dt + q_t\alpha_t dt + \beta_t\frac{B_t}{S_t}r_t dt - z_t\beta_t\frac{B_t}{S_t}dt - \beta_t\frac{B_t}{S_t^2}dS_t + \beta_t\frac{B_t}{S_t}\sigma_t^2 dt\right) \tag{8}$$

Para estar cubierto, los términos en dS_t a ambos lados de (8) deben ser iguales, de manera que:

$$\beta_t B_t = -S_t^2\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} \tag{9}$$

Lo que junto a (7) implica

$$\alpha_t = \frac{V_t^S}{S_t} + S_t\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} \tag{10}$$

Sustituyendo (9) y (10) en (8)

$$
\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{V}_t}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 =
$$
$$
\exp\left(-\int_{u=0}^{t} z_u du\right)\left(-z_t \frac{V_t^S}{S_t} - z_t S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} + (q_t - r_t^S)\frac{V_t^S}{S_t} + (q_t - r_t^S) S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} + r_t^S \frac{V_t^S}{S_t} + z_t S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} - \sigma_t^2 S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t}\right) \tag{11}
$$

Y cancelando términos

$$
\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial t} + (r_t^S - q_t + \sigma_t^2) S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{V}_t}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 = \exp\left(-\int_{u=0}^{t} z_u du\right)\left((q_t - z_t)\frac{V_t^S}{S_t}\right) \tag{12}
$$

Para que $\tilde{V}_t$ sea martingala en una medida bajo la cual el drift de S_t viene dado por $r_t^S - q_t + \sigma_t^2$ (llamaremos a esta medida $\mathbb{H}$), z_t debe ser igual a q_t, de manera que la parte derecha de la ecuación se anule (nótese que obtenemos el mismo resultado que obtuvimos aplicando el cambio de medida). Lo que implica que el numerario vendrá dado por

$$N_t = S_t \exp\left(\int_{u=0}^{t} q_u du\right)$$

Y la EDP que describe a $\tilde{V}_t$

$$\frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial t} + (r_t^S - q_t + \sigma_t^2) S_t \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{V}_t}{\partial S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 = 0 \tag{13}$$

Ajuste Quanto con EDPs

Supongamos cierto subyacente denominado en divisa F y cuyo precio en t llamaremos S_t^F. Supondremos que dicho subyacente evolucionará bajo la medida real como

$$dS_t^F = \mu_t^{S,\mathbb{P}} S_t^F dt + \sigma_t^S S_t^F dW_t^{S,\mathbb{P}}$$

Queremos replicar (o lo que es lo mismo, valorar) cierto derivado V_t^D denominado en la divisa D. No obstante, dicho derivado tiene a S_t^F como subyacente, pues en su fecha de vencimiento T $V_T^D = V^D(T, S_T^F)$. Como veremos más adelante, el hecho de que subyacente y derivado estén denominados en divisas distintas hará que el tipo de cambio que relaciona cantidades en D y F juegue un papel importante. De manera que supondremos que bajo la medida $\mathbb{P}$, X_t (tipo de cambio expresado en D/F) siga

$$dX_t = \mu_t^{X,\mathbb{P}} X_t dt + \sigma_t^X S_t^F dW_t^{X,\mathbb{P}}$$

Con $dW_t^{S,\mathbb{P}} dW_t^{X,\mathbb{P}} = \rho dt$

Supondremos que los tipos libres de riesgo en ambas divisas vienen dados por r_t^D y r_t^F

La cartera de cobertura vendrá dada por (denominada en divisa D)

$$V_t^D = \alpha_t X_t S_t^F + \beta_t B_t^D + \gamma_t B_t^F X_t \tag{14}$$

Nótese que tenemos que tomar una posición en la cuenta corriente en divisa F de manera que la exposición al tipo de cambio que tenemos por la posición en el subyacente quede cancelada.

En términos diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t^D}{\partial t} dt + \frac{\partial V_t^D}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2}\left(S_t^F \sigma_t^S\right)^2 dt \quad = \quad & \alpha_t X_t dS_t^F + \alpha_t S_t^F dX_t + \alpha_t \rho S_t^F X_t \sigma_t^S \sigma_t^X dt \\ & + q_t \alpha_t X_t S_t^F dt + r_t^D \beta_t B_t^D dt + \gamma_t B_t^F dX_t \\ & + r_t^F \gamma_t B_t^F X_t dt \end{aligned} \tag{15}$$

Para estar cubiertos, los términos en dS_t^F y dX_t deben cancelarse. Lo se hace imponiendo

$$\alpha_t X_t = \frac{\partial V_t^D}{\partial S_t}$$
$$\gamma_t B_t^F = -\alpha_t S_t^F$$

Y teniendo en cuenta (14)

$$\beta_t B_t^D = V_t^D - \alpha_t X_t S_t^F - \gamma_t B_t^F X_t$$

Con lo que (15) queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t^D}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2}\left(S_t^F \sigma_t^S\right)^2 &= \alpha_t X_t S_t^F \left(\rho \sigma_t^S \sigma_t^X + q_t\right) \\ &\quad + r_t^D \beta_t B_t^D + r_t^F \gamma_t B_t^F X_t \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $\beta_t B_t^D$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_t^D}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2}\left(S_t^F \sigma_t^S\right)^2 &= \alpha_t X_t S_t^F \left(\rho \sigma_t^S \sigma_t^X + q_t\right) \\
&+ r_t^D \left(V_t^D - \alpha_t X_t S_t^F - \gamma_t B_t^F X_t\right) + r_t^F \gamma_t B_t^F X_t
\end{aligned}
$$

Y el de $\gamma_t B_t^F$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_t^D}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2}\left(S_t^F \sigma_t^S\right)^2 &= \alpha_t X_t S_t^F \left(\rho \sigma_t^S \sigma_t^X + q_t\right) \\
&+ r_t^D \left(V_t^D - \alpha_t X_t S_t^F + \alpha_t X_t S_t^F\right) - r_t^F \alpha_t S_t^F X_t
\end{aligned}
$$

Quedando

$$
\frac{\partial V_t^D}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2}\left(S_t^F \sigma_t^S\right)^2 = \alpha_t X_t S_t^F \left(\rho \sigma_t^S \sigma_t^X + q_t - r_t^F\right) + r_t^D V_t^D
$$

Y sustituyendo finalmente el valor de $X_t \alpha_t$

$$\frac{\partial V_t^D}{\partial t} + S_t^F \left(r_t^F - q_t - \rho \sigma_t^S \sigma_t^X \right) \frac{\partial V_t^D}{\partial S_t^F} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t^D}{\partial S_t^2} \left(S_t^F \sigma_t^S \right)^2 = r_t^D V_t^D$$

El teorema de Feyman Kac garantiza que la solución de esta EDP tomando como condición de frontera el valor del derivado en su fecha de vencimiento es equivalente al cálculo del siguiente valor esperado:

$$V_t^D = \mathbf{E}_{\mathbb{H}} \left[V_T^D e^{-\int_{s=t}^{T} r_s^D ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

En una medida $\mathbb{H}$ en la que $\mu_t^{S,\mathbb{H}} = r_t^F - q_t - \rho \sigma_t^S \sigma_t^X$. Resultado que coincide con la expresión obtenida mediante el cambio de medida.

3. Ecuación Forward

Función Delta de Dirac

Una delta de Dirac es una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que notaremos por $\delta(x-k)$ si ésta está centrada en el valor k (nótese que en términos generales x y k serán vectores de dimensión n). Dicha función toma valor nulo $\forall x \neq k$ y vale $+\infty$ si $x = k$.

No obstante se cumple que su integral en $\mathbb{R}^n$ es 1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x-k)dx = 1$$

La delta de Dirac es el límite de toda función que tiende a $+\infty$ en k según tiende a cero cierto parámetro siempre y cuando su integral en $\mathbb{R}^n$ tienda a 1.

Por poner varios ejemplos en $\mathbb{R}$:

- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, k - \Delta/2) \cup (k + \Delta/2, +\infty) \\ 1/\Delta & x \in [k - \Delta/2, k + \Delta/2] \end{cases}$
- $f(x) = \frac{(x-k-\Delta)^+ - 2(x-k)^+ + (x-k+\Delta)^+}{\Delta^2}$
- $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-k)^2}{2\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi}\Delta}$

Todas estas funciones tienden a una delta de Dirac según $\Delta \to 0$ pues el valor de la función en k tiende a $+\infty$, si bien su integral vale 1 para todo valor de Δ. El segundo caso representa una mariposa (estrategia de opciones). En cuanto al tercero, se trata de la función de densidad de una normal de media cero y varianza Δ^2.

La delta de Dirac nos ayuda a representar funciones de densidad de variables aleatorias discretas. Así, si una variable aleatoria toma los valores $k_1, \ldots, k_m$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_m$, podremos representar la función de densidad como

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} p_j \delta(x - k_j)$$

También nos sirve para representar la derivada de la función escalón. Así, si $f(x) = 1_{\{x>k\}}$, podremos representar su derivada como $f'(x) = \delta(x - k)$.

Por lo que podremos decir que al derivar el payoff de una call con respecto al strike, tendremos:

$$C_T = (S_T - K)^+$$
$$\frac{\partial C_T}{\partial K} = -1_{\{S_T>K\}}$$
$$\frac{\partial^2 C_T}{\partial K^2} = \delta(S_T - K)$$

La propiedad fundamental de la delta de Dirac es que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\delta(x-k)dx = g(k)$$

Para ver el resultado anterior de forma intuitiva, podemos pensar que $\delta(0)$ es del orden de $\frac{1}{dx} = \frac{1}{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}$, lo cual justifica el resultado.

Otra propiedad que utilizaremos posteriormente es el valor de las siguientes integrales en $\mathbb{R}$:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial\delta(x-k)}{\partial x}dx$$
$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial^2\delta(x-k)}{\partial x^2}dx$$

De cara a valorar la primera, integramos por partes:

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial\delta(x-k)}{\partial x}dx = \underbrace{g(x)\delta(x-k)]_{x=-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g(x)}{\partial x}\delta(x-k)dx = -\frac{\partial g(k)}{\partial x} \tag{16}$$

Para la segunda, procedemos de forma similar

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial^2\delta(x-k)}{\partial x^2}dx = \underbrace{g(x)\frac{\partial\delta(x-k)}{\partial x}\Big]_{x=-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial\delta(x-k)}{\partial x}dx$$

Y aplicando (16)

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\partial^2\delta(x-k)}{\partial x^2}dx = -\int_{x=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial\delta(x-k)}{\partial x}dx = +\frac{\partial^2 g(k)}{\partial x^2} \tag{17}$$

Tanto (16) como (17) pueden generalizarse para $\mathbb{R}^n$.

Funciones de Distribución y de Densidad Riesgo Neutro

En este punto pretendemos relacionar funciones de distribución y de densidad riesgo neutro con el precio de calls europeas.

Supongamos que estamos en un contexto de tipos deterministas y que $\mathbb{Q}$ es la medida martingala asociada a la cuenta corriente (medida riesgo neutro) [1]. Supongamos que para un vencimiento determindo T disponemos de precios de opciones call para un continuo de strikes. Llamaremos C(T,K) al precio de la opción call de vencimiento T y strike K visto en t.

Obviamente

$$c(T, K) := \frac{C(T, K)}{B(t, T)} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

[1] No obstante el resultado puede generalizarse ante la presencia de tipos estocásticos si tomamos como numerario el factor de descuento que vence en la fecha de vencimiento de las opciones.

Si derivamos la expresión anterior con repecto a K

$$\frac{\partial c(T,K)}{\partial K} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial (S_T-K)^+}{\partial K}\Big|\mathcal{F}_t\right] = -\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_{\{S_T>K\}}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_{\{S_T\leq K\}}\Big|\mathcal{F}_t\right] - 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[1_{\{S_T\leq K\}}\Big|\mathcal{F}_t\right] = 1 + \frac{\partial c(T,K)}{\partial K}$$

Y si la derivamos dos veces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c(T,K)}{\partial K^2} &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial^2 (S_T-K)^+}{\partial K^2}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(S_T-K)\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \int_{S_T=-\infty}^{+\infty} \delta(S_T-K) f_{\mathbb{Q}|\mathcal{F}_t}(S_T)dS_T = f_{\mathbb{Q}|\mathcal{F}_t}(K)\end{aligned}$$

Donde $f_{\mathbb{Q}|\mathcal{F}_t}(K)$ representa la función de densidad de S_T bajo $\mathbb{Q}$ condicionada a $\mathcal{F}_t$ para el valor particular K.

Ecuación Forward para el Precio de Calls

Supongamos que tenemos cierto subyacente S_t cuya ecuación diferencial estocástica bajo la medida $\mathbb{Q}$ viene dada por

$$dS_t = (r_t - q_t)\, S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Donde $\sigma_t = \sigma(t, S_t)$, es decir, la volatilidad depende del tiempo y del propio nivel del subyacente.

Bajo este modelo, ¿De qué forma podemos calcular el precio de calls europeas para cualquier valor de strike y vencimiento?

Una primera idea sería resolver para cada vencimiento y para cada strike el precio de la opción utilizando cierta técnica numérica (árbol, PDE backward, Montecarlo) ¿Pero existe alguna forma mediante la cuál podamos resolver el precio de calls para un continuo de strikes y vencimientos al mismo tiempo?

Si llamamos C(T,K) al precio de una call europea de vencimiento T y strike K, $C(T, K)$ será una función continua de las variables T y K. En ese sentido, debe existir cierta EDP que describa la geometría de dicha superficie.

De cara a obtener dicha EDP, recordemos que:

$$C(T, K) = B(t, T)\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Donde $B(t, T)$ representa el factor de descuento entre las fechas t y T.

De manera que tenemos que calcular $c(T, K) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$.

Definamos entonces el proceso

$$X_T := (S_T - K)^+$$

y apliquemos el lema de Itô sobre el mismo

$$dX_T = \frac{\partial X_T}{\partial S_T} dS_T + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X_T}{\partial S_T^2}\sigma_T^2 S_T^2 dT$$

En este caso

$$\frac{\partial X_T}{\partial S_T} = 1_{\{S_T>K\}}$$
$$\frac{\partial^2 X_T}{\partial S_T^2} = \delta(S_T - K)$$

Donde $\delta(S_T - K)$ es una delta de Dirac centrada en K.

Entonces

$$dX_T = 1_{\{S_T>K\}}\left(r_T - q_T\right) S_T dT + 1_{\{S_T>K\}}\sigma_T S_T dW_T^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2}\delta(S_T - K)\sigma_T^2 S_T^2 dT$$

Si integramos entre t y T

$$X_T - X_t = \int_{h=t}^{T} 1_{\{S_h>K\}} (r_h - q_h) S_h dh + \int_{h=t}^{T} 1_{\{S_h>K\}} \sigma_h S_h dW_h^{\mathbb{Q}} + \int_{h=t}^{T} \frac{1}{2} \delta(S_h - K) \sigma_h^2 S_h^2 dh$$

Y si tomamos el valor esperado condicionado a $\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned} c(T,K) - c(t,K) &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{h=t}^{T} 1_{\{S_h>K\}} (r_h - q_h) S_h dh \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{h=t}^{T} 1_{\{S_h>K\}} \sigma_h S_h dW_h^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad + \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{h=t}^{T} \tfrac{1}{2} \delta(S_h - K) \sigma_h^2 S_h^2 dh \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Pero $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{h=t}^{T} 1_{\{S_h>K\}} \sigma_h S_h dW_h^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = 0$ por tratarse del valor esperado de una integral de Itô.

Por otro lado, el valor esperado de una integral es la integral del valor esperado, por lo que

$$\begin{aligned} c(T,K) - c(t,K) &= \int_{h=t}^{T} (r_h - q_h)\, dh \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[1_{\{S_h > K\}} S_h \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{h=t}^{T} dh \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\delta(S_h - K) \sigma_h^2 S_h^2 \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Analicemos cada uno de los valores esperados:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[1_{\{S_h > K\}} S_h \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[(S_h - K)^+ + K 1_{\{S_h > K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = c(h,K) - K \frac{\partial c(h,K)}{\partial K}$$

Donde hemos tenido en cuenta, como obtuvimos en el epígrafe anterior, que el precio de una digital puede obtenerse como la menos derivada del precio de una call con respecto al strike.

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(S_h-K)\sigma_h^2S_h^2\middle|\mathcal{F}_t\right]=\int_{S_h=-\infty}^{\infty}f(S_h)\delta(S_h-K)\sigma_h^2S_h^2dS_h=f(K)\sigma(h,K)^2K^2$$

$$=\sigma(h,K)^2K^2\frac{\partial^2c(h,K)}{\partial K^2}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} c(T,K)-c(t,K) &= \textstyle\int_{h=t}^{T}(r_h-q_h)\,dh\left(c(h,K)-K\frac{\partial c(h,K)}{\partial K}\right) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\textstyle\int_{h=t}^{T}dh\sigma(h,K)^2K^2\frac{\partial^2c(h,K)}{\partial K^2} \end{aligned}$$

Y si derivamos la expresión anterior con respecto a T tenemos

$$\frac{\partial c(T,K)}{\partial T}=(r_T-q_T)\left(c(T,K)-K\frac{\partial c(T,K)}{\partial K}\right)+\frac{1}{2}\sigma(T,K)^2K^2\frac{\partial^2c(T,K)}{\partial K^2}$$

De manera que dada una función $\sigma(T, S_T)$, podemos obtener el continuo c(T,K) son más que resolver la siguiente EDP

$$\frac{\partial c(T,K)}{\partial T} - (r_T - q_T)\left(c(T,K) - K\frac{\partial c(T,K)}{\partial K}\right) - \frac{1}{2}\sigma(T,K)^2 K^2 \frac{\partial^2 c(T,K)}{\partial K^2} = 0$$

Con condición de contorno

$$c(t,K) = (S_t - K)^+$$

Nótese que en contra de lo que ocurre para la ecuación de valoración, dicha ecuación se resuelve hacia delante en el tiempo.

Ecuación Forward para la Función de Densidad

Supongamos un proceso unidimensional [2] cuya evolución en el tiempo viene descrita por la siguiente ecuación diferencial estocástica bajo cierta medida

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$f(T, K)$ representará la función de densidad de S_T valorada en un valor concreto K bajo la medida $\mathbb{Q}$ y condicionada a $\mathcal{F}_t$. Dado que S_t es un proceso continuo, también lo será su función de densidad con respecto a T y a K. Nos preguntamos en este epígrafe por la EDP que describe la geometría de f(T,K).

Como hemos visto $f(T, K) = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(S_T - K)\middle|\mathcal{F}_t\right]$

De manera que definimos el proceso

$$X_T = \delta(S_T - K)$$

[2] El resultado ser generalizado para un proceso multidimensional

Y procedemos de forma equivalente a como hicimos en el epígrafe anterior. Esto es, aplicamos Itô

$$dX_T = \frac{\partial \delta(S_T - K)}{\partial S_T} dS_T + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta(S_T - K)}{\partial S_T^2} dS_T^2$$

Lo que es igual a

$$dX_T = \mu(T, S_T)\frac{\partial \delta(S_T - K)}{\partial S_T} dT + \sigma(T, S_T)\frac{\partial \delta(S_T - K)}{\partial S_T} dW_T^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta(S_T - K)}{\partial S_T^2}\sigma(T, S_T)^2 dT$$

Si integramos entre t y T obtenemos:

$$\begin{aligned} X_T - X_t &= \int_{h=t}^{T} \mu(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}dh \\ &+ \int_{h=t}^{T} \sigma(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}dW_h^{\mathbb{Q}} \\ &+ \int_{h=t}^{T} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta(S_h-K)}{\partial S_h^2}\sigma(h,S_h)^2 dh \end{aligned}$$

Y si tomamos valores esperados condicionados a $\mathcal{F}_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T\middle|\mathcal{F}_t\right] - X_t &= \int_{h=t}^{T} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mu(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}\middle|\mathcal{F}_t\right]dh \\ &+ \int_{h=t}^{T} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sigma(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}dW_h^{\mathbb{Q}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{h=t}^{T} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial^2\delta(S_h-K)}{\partial S_h^2}\sigma(h,S_h)^2\middle|\mathcal{F}_t\right]dh \end{aligned}$$

El segundo término de la parte derecha de la ecuación es nulo por tratarse del valor esperado de una integral de Itô.

En cuanto al primero de los otros dos términos:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mu(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \int_{S_h=-\infty}^{+\infty} f(h,S_h)\mu(h,S_h)\frac{\partial\delta(S_h-K)}{\partial S_h}dS_h$$
$$= -\frac{\partial\left(f(h,K)\mu(h,K)\right)}{\partial S_h}$$

Donde hemos tenido en cuenta (16).

Y el tercero:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial^2\delta(S_h-K)}{\partial S_h^2}\sigma(h,S_h)^2\Big|\mathcal{F}_t\right] = \int_{S_h=-\infty}^{+\infty} f(h,S_h)\frac{\partial^2\delta(S_h-K)}{\partial S_h^2}\sigma(h,S_h)^2 dS_h$$

$$= +\frac{\partial^2\left(f(h,K)\sigma(h,K)^2\right)}{\partial S_h^2}$$

Donde hemos teniso en cuenta (17)

De lo que se deduce que

$$
\begin{aligned}
f(T,K) - f(t,K) &= -\int_{h=t}^{T} \frac{\partial(f(h,K)\mu(h,K))}{\partial S_h} dh \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{h=t}^{T} \frac{\partial^2\left(f(h,K)\sigma(h,K)^2\right)}{\partial S_h^2} dh
\end{aligned}
$$

Y derivando con respecto a T tenemos

$$
\frac{\partial f(T,K)}{\partial T} = -\frac{\partial\left(f(T,K)\mu(T,K)\right)}{\partial K} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(f(T,K)\sigma(T,K)^2\right)}{\partial K^2}
$$

De manera que podemos resolver la función de densidad del proceso resolviendo

$$
\frac{\partial f(T,K)}{\partial T} + \frac{\partial\left(f(T,K)\mu(T,K)\right)}{\partial K} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(f(T,K)\sigma(T,K)^2\right)}{\partial K^2} = 0
$$

Con condición inicial $f(t,K) = \delta(S_t - K)$

A esta EDP es a lo que se llama ecuación de Fokker Planck.