Valoración

Valoración en Tiempo Continuo

Luis Manuel García Muñoz (lmanuel.garcia@bbva.com)

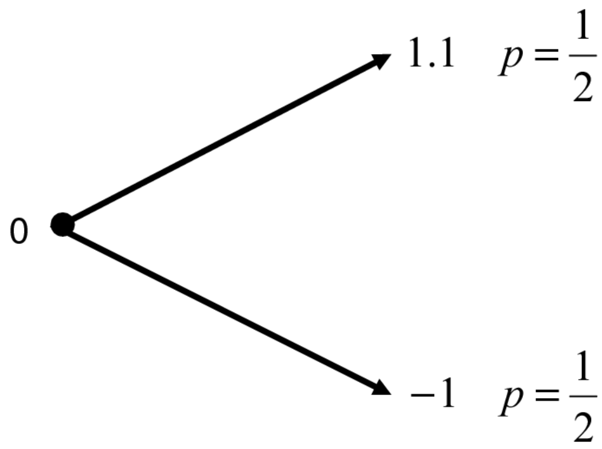
MEFC BBVA, Febrero de 2019

Índice

1. Cambio de medida: el Teorema de Girsanov

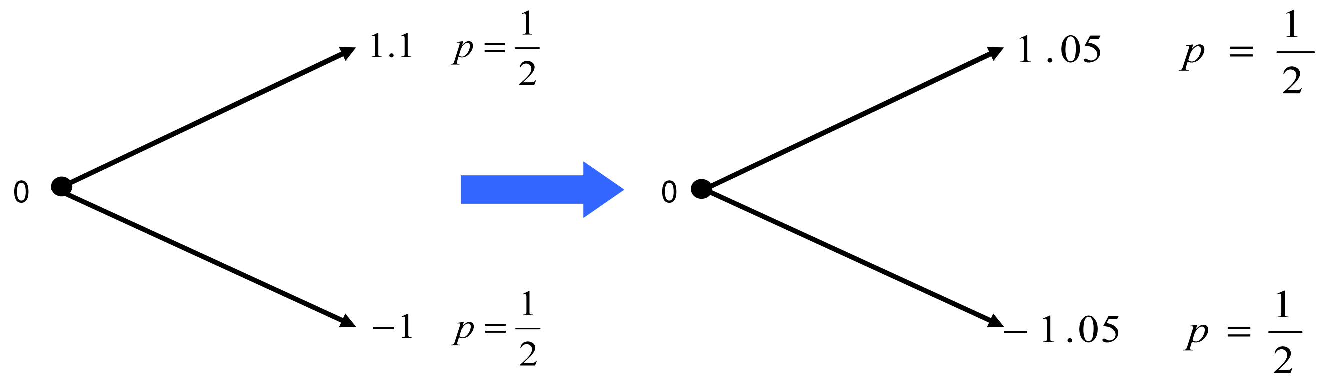
Búsqueda de martingalas

Como veremos más adelante, de cara a valorar productos derivados estaremos interesados en convertir en martingalas procesos que en un principio no lo son.



Dado el proceso de la figura, $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\Delta X] = \frac{1}{2} \cdot 1.1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.05$, por lo que el proceso no es martingala.

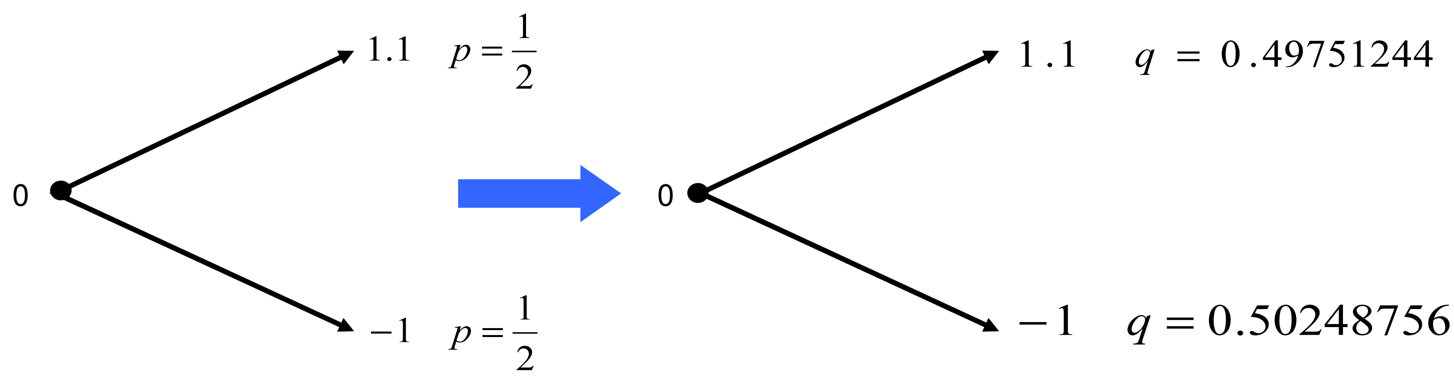
Una primera idea es restar del proceso su valor esperado, de manera que si consideramos el proceso definido por $\Delta Y = \Delta X - \mathbf{E}[\Delta X]$, entonces tendremos que $\mathbf{E}[\Delta Y] = \mathbf{E}[\Delta X] - \mathbf{E}[\Delta X] = 0$, por lo que Y será martingala. De esta manera estamos variando los valores finales para transformar el proceso en martingala.



Veremos que, aunque conceptualmente más sencillo, este camino nos será poco útil.

Otra idea es, en lugar de operar sobre los valores, operar sobre probabilidades:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta X] = 1.1 \times q - 1 \times (1-q) = 0$$
$$\Longrightarrow \; q = 0.497512438, \; (1-q) = 0.502487562$$

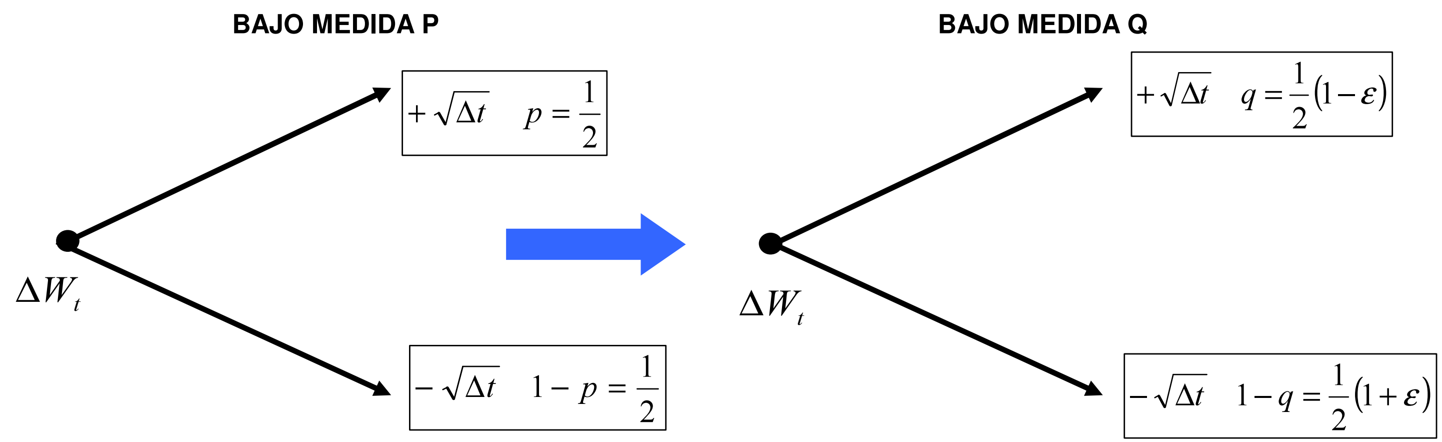


Éste es el camino que vamos a seguir.

Cambiando probabilidades al Browniano.

Siguiendo el método comentado en el apartado anterior, vamos a cambiar probabilidades al movimiento Browniano. Veremos qué efecto tiene el cambio de probabilidades en el mismo. A partir de ahora, “medida” será lo mismo que “probabilidad”.

Partimos de la versión discreta del proceso de Wiener:



Hemos de tener en cuenta que cuando $\Delta t \to 0$ el proceso discreto así definido tiende al movimiento browniano (teorema del límite central).

Como primer intento, cambiaremos de probabilidades según lo mostrado en la figura de la página anterior.

Veámos qué ocurre con la media del proceso discreto:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{2}(1-\epsilon)\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}(1+\epsilon)(-\sqrt{\Delta t}) = -\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Donde $\Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}}$ representa el incremento de la versión discreta del browniano.

Por lo que

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_0^{\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_0\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\Delta\widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_0\right] =$$
$$\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta\widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_0\right] = \sum_{j=0}^{n-1} -\epsilon\sqrt{\Delta t}$$
$$= -\frac{T}{\Delta t}\sqrt{\Delta t}\epsilon = -\frac{T}{\sqrt{\Delta t}}\epsilon$$

En cuanto al proceso continuo, al hacer $\Delta t \to 0$ tenemos

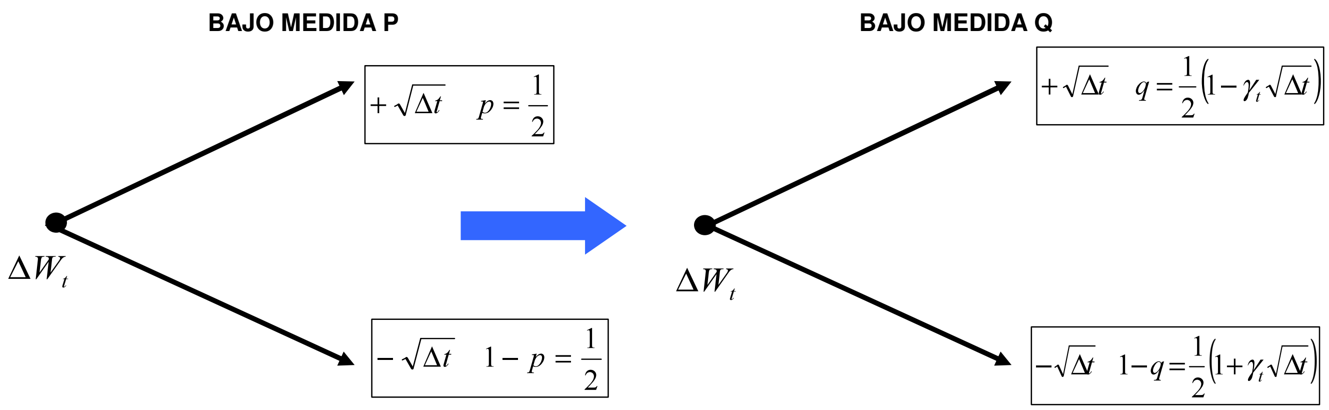
$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{P}} - W_0^{\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_0\right] = \lim_{\Delta t\to 0} -\frac{T}{\sqrt{\Delta t}}\epsilon = \pm\infty\,,$$

donde el signo del límite depende del signo de ϵ. De manera que, si queremos hacer el límite finito, ϵ ha de ser del orden de $\sqrt{\Delta t}$.

Ilustración

Comprobar el resultado anterior en hoja de cálculo

En general, tomaremos un proceso previsible (no anticipativo) γ_t y cambiaremos la probabilidad al Browniano según el siguiente esquema:



Inicialmente vamos a suponer que γ_t es función determinista del tiempo. Para la versión discreta del proceso, el valor esperado de la variación en un horizonte finito queda de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_0^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \Delta\widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta\widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} -\gamma_{t_j}\sqrt{\Delta t}\sqrt{\Delta t} = -\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{t_j}\Delta t\,.\end{aligned}$$

Y al hacer $\Delta t \to 0$ tenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[W_T^{\mathbb{P}} - W_0^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = - \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{t_j} \Delta t = - \int_0^T \gamma_t dt \,.$$

De manera que al cambiar de probabilidad hemos cambiado la media del Browniano. Veamos qué ha ocurrido con la varianza:

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[(\Delta \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}})^2 \middle| \mathcal{F}_0\right] - \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right]^2 = \Delta t - \gamma_t^2 \Delta t^2$$

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_0^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = \mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \Delta \widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta \widetilde{W}_{t_j}^{\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_0\right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\Delta t - \gamma_t^2 \Delta t^2\right)$$

$$= T \frac{\Delta t}{\Delta t} - \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_t^2 \Delta t^2 = T - \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_t^2 \Delta t^2 \,.$$

Y al hacer $\Delta t \to 0$ tenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{V}_{\mathbb{Q}} \left[W_T - W_0 \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left(T - \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_t^2 \Delta t^2 \right) = T\,.$$

En resumen, cuando γ_t es función del tiempo:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[W_T - W_0] = -\int_0^T \gamma_t dt$$

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}[W_T - W_0] = T$$

En cuanto a la distribución del Browniano bajo la nueva medida, continúa siendo normal (suma de normales independientes):

$$W_T - W_0 \sim N(-\int_0^T \gamma_t dt, T)$$

De manera que al cambiar de probabilidad al Browniano, cambiamos su media (drift/deriva), pero no su varianza.

Al cambiar de medida, el Browniano deja de serlo.

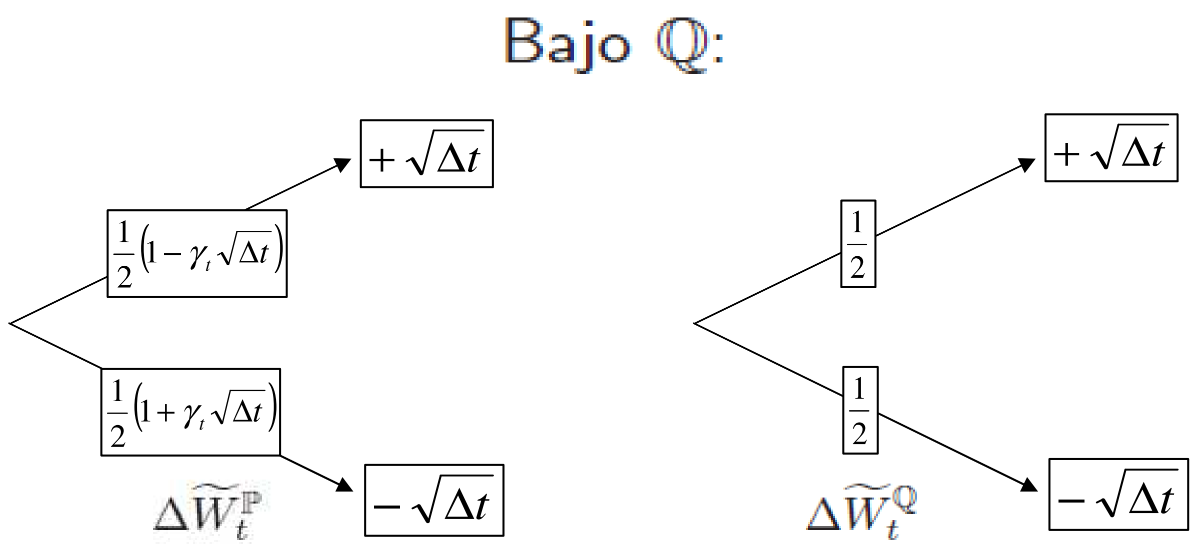
Ilustración

Comprobar el resultado anterior en hoja de cálculo

En principio, cuando γ_t es una función determinista del tiempo podemos escribir

$$W_T^{\mathbb{P}} - W_t^{\mathbb{P}} \stackrel{d}{=} W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} - \int_{s=t}^{T} \gamma_s ds$$

Nos preguntamos ahora por qué pasa si γ_t es simplemente un proceso previsible del tiempo no necesariamente determinista. Además nos gustaría explorar si la anterior igualdad la podemos establecer punto a punto. Es decir, no que las dos variables aleatorias siguen la misma ley, sino que la igualdad se da para cada realización. Para ello volvemos a la representación discreta de dos procesos brownianos: uno que lo será bajo $\mathbb{P}$ y otro que lo será bajo $\mathbb{Q}$, de manera que sus probabilidades de transición bajo la nueva medida $\mathbb{Q}$ serán:



Dado que queremos correlar totalmente ambos procesos, de cara a explorar la posibilidad de establecer la igualdad punto a punto, imponemos una dependencia total haciendo que las uniformes que nos ayudan a determinar el salto para cada proceso sean la misma.

De esta manera tendremos que bajo la nueva medida:

$$\Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} = \begin{cases} -2\sqrt{\Delta t} & \text{con probabilidad } \gamma_t \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - \gamma_t \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} \end{cases}$$

Esto hace que:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = -\gamma_t \Delta t$$

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = 2\gamma_t \Delta t^{3/2} - \gamma_t^2 \Delta t^2$$

Si definimos

$$\Delta X_t := \Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \Delta\widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}} + \gamma_t \Delta t$$

Tenemos

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta X_t \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta X_t \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[(\Delta X_t)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = 2\gamma_t \Delta t^{3/2} - \gamma_t^2 \Delta t^2 \tag{2}$$

De manera que:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \left(\widetilde{W}_T^{\mathbb{Q}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{t_j} \Delta t \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \Delta X_{t_j} \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta X_{t_j} \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta X_{t_j} \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0$$

Veámos la varianza:

$$\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \left(\widetilde{W}_T^{\mathbb{Q}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{t_j} \Delta t \middle| \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} \Delta X_{t_j}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \left(\Delta X_{t_j}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] + \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \Delta X_{t_j} \Delta X_{t_k} \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\Delta X_{t_j}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \middle| \mathcal{F}_t\right] + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta X_{t_j} \Delta X_{t_k} \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right] \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Pero como $t_k > t_j$, ΔX_{t_j} ya es conocido en t_k, por lo que

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\Delta X_{t_j}\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j} \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\Delta X_{t_j} \underbrace{\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\Delta X_{t_k} \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right]}_{=0} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Y sustituyendo los valores esperados (1) y (2)

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[2\gamma_{t_j} \Delta t^{3/2} - \gamma_{t_j}^2 \Delta t^2 \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

De manera que cuando $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[W_T^{\mathbb{P}} - W_t^{\mathbb{P}} - \left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} \right) + \int_{s=t}^{T} \gamma_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right] = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{W}_T^{\mathbb{P}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{P}} - \left(\widetilde{W}_T^{\mathbb{Q}} - \widetilde{W}_t^{\mathbb{Q}}\right) + \int_{s=t}^{T} \gamma_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \text{lím}_{\Delta t \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[2\gamma_{t_j}\Delta t^{3/2} - \gamma_{t_j}^2 \Delta t^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

(3) y (4) nos permiten escribir:

$$W_T^{\mathbb{P}} - W_t^{\mathbb{P}} = W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}} - \int_{s=t}^{T} \gamma_s ds$$

Y en forma diferencial

$$dW_t^{\mathbb{P}} = dW_t^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt$$

Es importante recalcar que en presencia de γ_t no deterministas, al cambiar la medida, el browniano no sólo perderá su condición de martingala, sino que también perderá su distribución (normalidad).

Ecuación Diferencial Estocástica tras el cambio de medida

Tenemos el proceso que evoluciona según

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} .$$

Al cambiar de probabilidad, la EDS del proceso continúa siendo la misma, pero si queremos expresar su evolución en función del Browniano bajo la nueva medida:

$$dS_t = \mu_t dt + \sigma_t(-\gamma_t dt + dW_t^{\mathbb{Q}}) = (\mu_t - \sigma_t \gamma_t)dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

De manera que si queremos hacer el proceso martingala, debemos tomar:

$$\gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t}$$

Implicación Fundamental: Al cambiar de medida, cambiamos la deriva (drift) de los procesos estocásticos sin variar su difusión. En ese sentido, drift es medida y medida es drift

La Derivada Radon-Nikodym

Llamaremos ω_t al camino seguido por el Browniano hasta tiempo t.

Supongamos una variable aleatoria X función de ω_t.

$$X = f(\omega_t)\,.$$

Entonces, su valor esperado vendrá dado por

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int X(\omega_t)\phi(\omega_t)d\omega_t\,,$$

donde $\phi(\omega_t)$ es la función de densidad asociada al camino ω_t y $\phi(\omega_t)d\omega_t = d\mathbb{P}(\omega_t)$ su probabilidad diferencial. Podemos escribir:

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X] = \int X(\omega_t)d\mathbb{P}(\omega_t)$$

Al cambiar de medida, el camino ω_t deja de tener probabilidad diferencial $d\mathbb{P}(\omega_t)$ pasando a ser ésta $d\mathbb{Q}(\omega_t)$. Luego bajo $\mathbb{Q}$:

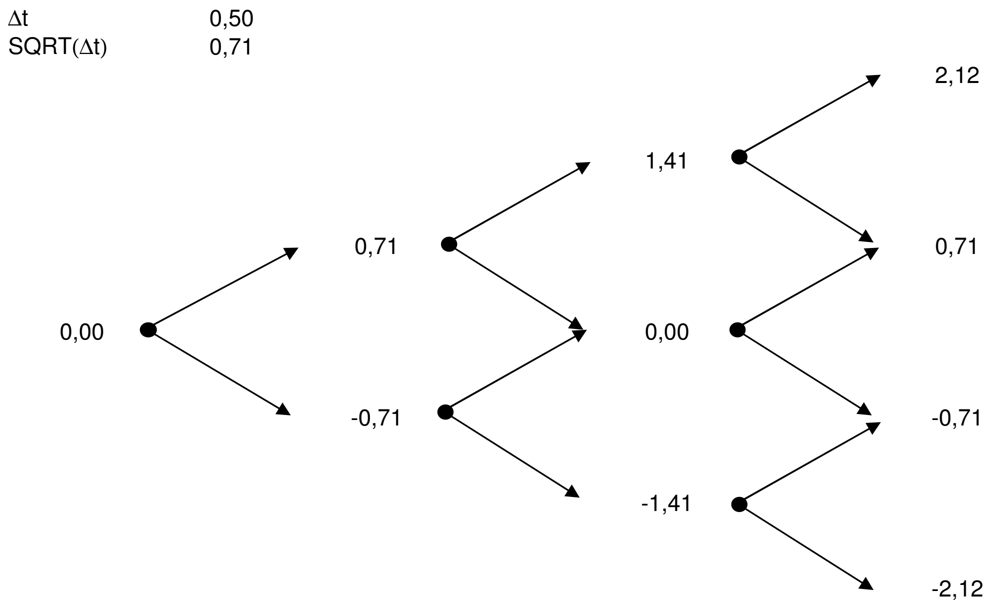
$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \int X(\omega_t) d\mathbb{Q}(\omega_t)\,.$$

Imaginemos que hemos cambiado a la probabilidad $\mathbb{Q}$ y bajo esa medida quisiésemos recuperar el valor esperado bajo $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X] &= \int X(\omega_t) d\mathbb{P}(\omega_t) = \int X(\omega_t) d\mathbb{P}(\omega_t) \frac{d\mathbb{Q}(\omega_t)}{d\mathbb{Q}(\omega_t)} = \int X(\omega_t) \frac{d\mathbb{P}(\omega_t)}{d\mathbb{Q}(\omega_t)} d\mathbb{Q}(\omega_t) \\ &= \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X(\omega_t)\frac{d\mathbb{P}(\omega_t)}{d\mathbb{Q}(\omega_t)}\right]\end{aligned}$$

Ilustración

Consideremos el árbol de la figura:



Bajo $\mathbb{P}$, las probabilidades de subir en todo nodo son $\frac{1}{2}$. Bajo $\mathbb{Q}$, $\frac{1}{3}$. Consideremos la variable aleatoria

$$X = 1_{\{W_T > 0\}}.$$

Calcúlense $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X]$, $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X]$ y $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X(\omega_t)\frac{d\mathbb{P}(\omega_t)}{d\mathbb{Q}(\omega_t)}\right]$.

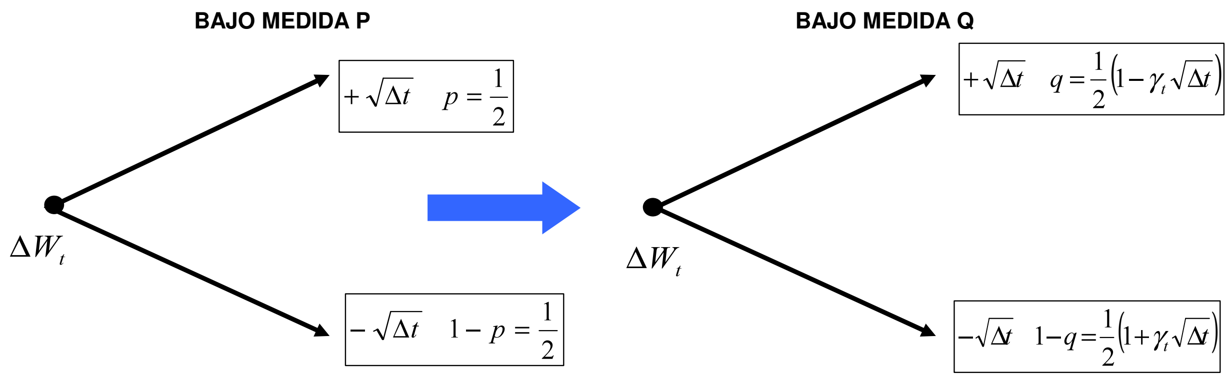
Medidas equivalentes

Dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes cuando están de acuerdo en lo que es y no es posible. Es decir, si

$$\mathbf{P}_{\mathbb{P}}[\omega_t \in A] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}[\omega_t \in A] = 0.$$

Expresión de la derivada Radon-Nikodym

En la versión discreta del Browniano, cambiabamos de medida de la forma:



De manera que el cociente de probabilidades de un camino experimentado por el Browniano bajo ambas medidas vendrá dado por:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(1 \mp \gamma_{t_i}\sqrt{\Delta t}\right)}{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(1 - \gamma_{t_i}\Delta \widetilde{W}_{t_i}^{\mathbb{P}}\right)}{\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \gamma_{t_i}\Delta \widetilde{W}_{t_i}^{\mathbb{P}}\right)$$

Si tomamos logaritmos:

$$\ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(1 - \gamma_{t_i} \Delta W_{t_i}^{\mathbb{P}}\right)$$

Pero al hacer $\Delta t \to 0$:

$$\ln\left(1 - \gamma_t dW_t^{\mathbb{P}}\right) \approx -\gamma_t dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\gamma_t^2 (dW_t^{\mathbb{P}})^2 = -\gamma_t dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\gamma_t^2 dt$$

Ejercicio

Demostrar lo anterior

Y al hacer $\Delta t \to 0$, el sumatorio se transforma en integral:

$$\ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t) = -\int_0^t \gamma_s dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t) = e^{-\int_0^t \gamma_s dW_s^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds}$$

Dado que $dW_s^{\mathbb{P}} = dW_s^{\mathbb{Q}} - \gamma_s ds$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t) = e^{-\int_0^t \gamma_s dW_s^{\mathbb{Q}} + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_s^2 ds}$$

Si definimos $\zeta_t := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t)$, entonces, simplemente aplicando Itô obtenemos:

$$d\zeta_t = -\gamma_t \zeta_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Por lo que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega_t)$ será martingala bajo $\mathbb{P}$. Evidentemente $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(\omega_t)$ lo será bajo $\mathbb{Q}$.

2. Teorema Fundamental de Valoración

Deducción en tiempo continuo

Cartera autofinanciada

Entendemos por cartera autofinanciada aquella en la que no hay entradas/salidas de capital una vez ha sido montada.

En una cartera autofinanciada, las variaciones de la misma se deberán únicamente a las variaciones de los activos que la componen.

Supongamos una cartera que en el instante t está formada por cantidades α_t en un activo S_t y β_t en el activo cuenta corriente B_t.

Es importante recalcar que las cantidades α_t y β_t pueden depender de t y de S_t (ser cantidades estocásticas), pero deben ser conocidas antes de que se produzca la variación de S_t en el intervalo $(t, t + dt)$. Es decir, son procesos previsibles.

Entonces, el valor de la cartera en t viene dado por

$$\Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \, .$$

La cartera será autofinanciada si su variación en el intervalo $(t, t+dt)$ viene dada por

$$d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \,.$$

Y no será autofinanciada si su variación contiene algún término que representa salidas/entradas de capital. Por ejemplo,

$$d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t + \underbrace{dC}_{\text{in/out flow}} \,.$$

Teorema de representación de martingalas

Consideremos dos procesos M_t y N_t dirigidos por un mismo y único Browniano W_t tales que son martingala bajo cierta medida $\mathbb{Q}$. Los procesos son tales que sus volatilidades no pueden ser nulas y que además cumplen ciertas condiciones técnicas que no comentaremos. Entonces existe un proceso previsible ϕ_t único tal que podemos escribir:

$$N_t - N_0 = \int_0^t \phi_s dM_s \, .$$

O, lo que es lo mismo,

$$dN_t = \phi_t dM_t \, .$$

Es decir, si dos procesos son martingalas y dirigidos por un mismo y único browniano, podemos replicar un proceso con el otro.

En efecto, si ambos procesos son martingalas, podemos escribir

$$dN_t = \sigma_t^N dW_t \quad dM_t = \sigma_t^M dW_t \,,$$

luego

$$dN_t = \sigma_t^N dW_t = \frac{\sigma_t^N}{\sigma_t^M}\sigma_t^M dW_t = \frac{\sigma_t^N}{\sigma_t^M} dM_t \,,$$

por lo que

$$\phi_t = \frac{\sigma_t^N}{\sigma_t^M} \,.$$

Ilustración

Sean los procesos dados por:

$$dM_t = M_t dW_t$$

$$dN_t = (1+t) dW_t$$

Replicar N_t mediante M_t.

Teorema Fundamental de Valoración en tiempo continuo

Consideremos un derivado que a vencimiento paga en función del valor del subyacente en este instante:

$$C_T = C(S_T)\,.$$

C_t representa el valor del derivado en un instante anterior al vencimiento ($t < T$).

Llamaremos B_t al activo cuenta corriente (la evolución en el tiempo de dinero invertido en el tipo instantáneo libre de riesgo). La evolución de B_t viene dada por:

$$dB_t = r_t B_t dt\,.$$

Vamos a intentar montar en t una cartera autofinanciada Π_t que replique al derivado. Es decir, que pase lo que pase, el valor de la cartera de réplica y el del derivado coincidan en la fecha de vencimiento:

$$\Pi_T = C_T\,.$$

Si derivado y cartera de réplica valen lo mismo a vencimiento, deben valer lo mismo en todo instante anterior a vencimiento (de no ser así, habría una oportunidad de arbitraje):

$$\Pi_t = C_t \, .$$

Reafirmando lo visto anteriormente: el valor del derivado coincide con el de su cartera de réplica.

Formaremos esa cartera con α_t unidades del subyacente y β_t unidades del activo cuenta corriente. α_t y β_t dependerán del valor del subyacente y del tiempo a vencimiento, pero serán procesos previsibles.

En todo instante t, se cumple que:

$$\Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \, .$$

Al ser la cartera autofinanciada, su variación vendrá dada por

$$d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \, .$$

Pero como el valor del derivado debe ser igual al de la cartera de réplica, también debe cumplirse que

$$C_t = \Pi_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \quad \Rightarrow \quad dC_t = d\Pi_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \,.$$

De manera que tenemos 2 problemas por resolver:

- Calcular el valor del derivado C_t.
- Determinar las cantidades α_t y β_t de subyacente y cuenta corriente que componen la cartera de réplica.

Si logramos determinar C_t y α_t, β_t podrá ser obtenido sin más que despejar β_t de la siguiente ecuación:

$$C_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$$

Cuenta corriente como numerario

Vamos a determinar C_t y α_t. Para ello tomamos la ecuación de réplica y la dividimos por el numerario (cuenta corriente):

$$C_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \quad \Rightarrow \quad \frac{C_t}{B_t} = \alpha_t \frac{S_t}{B_t} + \beta_t \frac{B_t}{B_t} \quad \Rightarrow \quad \hat{C}_t = \alpha_t \hat{S}_t + \beta_t \,.$$

De esta manera, al diferenciar desaparece el término en β_t:

$$d\hat{C}_t = \alpha_t \, d\hat{S}_t \,.$$

Es importante recalcar que esta relación se debe cumplir en el mundo real (bajo la medida $\mathbb{P}$).

De cualquier modo, ya comentamos que al cambiar de medida, las ecuaciones diferenciales estocásticas no cambian (cambia su forma al expresarlas en función del Browniano bajo la nueva medida), por lo que esta relación de no arbitraje se debe cumplir bajo toda medida $\mathbb{Q}$ equivalente a la medida $\mathbb{P}$.

En general, las variaciones de $\hat{C}_t$ y $\hat{S}_t$ expresadas en función del Browniano bajo $\mathbb{P}$ serán de la forma:

$$d\hat{C}_t = \mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t} dW_t^{\mathbb{P}}$$
$$d\hat{S}_t = \mu_t^{\hat{S}_t} dt + \sigma_t^{\hat{S}_t} dW_t^{\mathbb{P}}$$

Por lo que

$$\underbrace{\mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t} dW_t^{\mathbb{P}}}_{d\hat{C}_t} = \underbrace{\alpha_t \left(\mu_t^{\hat{S}_t} dt + \sigma_t^{\hat{S}_t} dW_t^{\mathbb{P}} \right)}_{\alpha_t d\hat{S}_t} .$$

Y para que ambos incrementos sean iguales, lo deben ser sus derivas y difusiones:

$$\mu_t^{\hat{C}_t} = \alpha_t \mu^{\hat{S}_t}, \quad \sigma_t^{\hat{C}_t} = \alpha_t \sigma^{\hat{S}_t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_t^{\hat{S}_t}}{\sigma_t^{\hat{S}_t}} = \frac{\mu_t^{\hat{C}_t}}{\sigma_t^{\hat{C}_t}} .$$

Luego para que podamos replicar, se debe cumplir que:

$$\frac{\mu_t^{\hat{S}_t}}{\sigma_t^{\hat{S}_t}} = \frac{\mu_t^{\hat{C}_t}}{\sigma_t^{\hat{C}_t}} .$$

Hagamos ahora un cambio de medida de manera que $\hat{S}_t$ sea martingala bajo esa nueva medida $\mathbb{Q}$ (recordemos el teorema de Girsanov):

$$d\hat{S}_t = \mu_t^{\hat{S}_t} dt + \sigma_t^{\hat{S}_t} dW_t^{\mathbb{P}} = \mu_t^{\hat{S}_t} dt + \sigma_t^{\hat{S}_t}(dW_t^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt) = (\mu_t^{\hat{S}_t} dt - \gamma_t \sigma_t^{\hat{S}_t}) dt + \sigma_t^{\hat{S}_t} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Si tomamos $\gamma_t = \frac{\mu_t^{\hat{S}_t}}{\sigma_t^{\hat{S}_t}}$, tenemos que $d\hat{S}_t = \sigma_t^{\hat{S}_t} dW_t^{\mathbb{Q}}$, luego $\hat{S}_t$ será martingala bajo $\mathbb{Q}$.

Veamos la ecuación diferencial estocástica de $\hat{C}_t$ bajo $\mathbb{Q}$:

$$d\hat{C}_t = \mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t} dW_t^{\mathbb{P}} = \mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t}(dW_t^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt) = \mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t}\left(dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\mu_t^{\hat{S}_t}}{\sigma_t^{\hat{S}_t}} dt\right)$$

$$= \mu_t^{\hat{C}_t} dt + \sigma_t^{\hat{C}_t}\left(dW_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\mu_t^{\hat{C}_t}}{\sigma_t^{\hat{C}_t}} dt\right) = \sigma_t^{\hat{C}_t} dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Luego bajo $\mathbb{Q}$, $\hat{C}_t$ y $\hat{S}_t$ son martingala. Es decir, que si en todo momento se cumple que $\Pi_t = C_t$ (la réplica es posible), una vez tomada la cuenta corriente como numerario, existe una medida bajo la cual $\frac{S_t}{B_t}$, $\frac{C_t}{B_t}$ y $\frac{B_t}{B_t}$ son todos ellos martingala.

El hecho de que exista una medida $\mathbb{Q}$ bajo la que $\hat{C}_t$ y $\hat{S}_t$ son martingala, nos ayuda a resolver la primera parte del problema (el cálculo de C_t).

Cálculo de C_t. Sabemos que la ausencia de oportunidades de arbitraje implica que, al elegir la cuenta corriente como numerario, existe una medida $\mathbb{Q}$ bajo la que se cumple que:

$$\frac{S_t}{B_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T}{B_T}|\mathcal{F}_t\right], \quad \frac{C_t}{B_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T}{B_T}|\mathcal{F}_t\right], \quad \frac{B_t}{B_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_T}{B_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

El teorema de Girsanov nos asegura que al cambiar de medida, tan sólo cambiamos el drift, por lo que hablar de medida es equivalente a hablar de drift. Veamos pues qué cambio de medida (cambio de drift en el subyacente) hace que los precios expresados en términos del numerario sean martingalas. Se trata simplemente de ver qué drift $\mu_t^{S_t}$ hace que se cumpla:

$$\frac{S_t}{B_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T}{B_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

(una ecuación con una incógnita). Una vez obtenido ese drift, sabemos simular el subyacente bajo esa medida, por lo que obtendremos el valor de C_t calculando el siguiente valor esperado:

$$\frac{C_t}{B_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{C_T}{B_T}|\mathcal{F}_t\right] .$$

Subyacente como numerario

Volvamos a escribir la ecuación de réplica y la dividimos por el nuevo numerario (subyacente):

$$C_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t \quad \Rightarrow \quad \frac{C_t}{S_t} = \alpha_t \frac{S_t}{S_t} + \beta_t \frac{B_t}{S_t} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{C_t} = \alpha_t + \beta_t \widetilde{B_t}\,.$$

De esta manera, al diferenciar desaparece el término en α_t:

$$d\widetilde{C_t} = \beta_t d\widetilde{B_t}\,.$$

Haciendo el mismo razonamiento que para el caso anterior, vemos que somos capaces de replicar si existe una medida $\mathbb{Q}$ bajo la cual $\frac{S_t}{S_t}$, $\frac{B_t}{S_t}$ y $\frac{C_t}{S_t}$ son martingala.

Cálculo de C_t (subyacente como numerario). La ausencia de oportunidades de arbitraje implica que, al elegir el subyacente como numerario, existe una medida $\mathbb{G}$ bajo la que se cumple que:

$$\frac{S_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{G}}\left[\frac{S_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right], \quad \frac{C_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{G}}\left[\frac{C_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right], \quad \frac{B_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{G}}\left[\frac{B_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

El teorema de Girsanov nos asegura que al cambiar de medida, tan sólo cambiamos el drift, por lo que hablar de medida es equivalente a hablar de drift. Veamos pues qué cambio de medida (cambio de drift en el subyacente) hace que los precios expresados en términos del numerario sean martingalas. Se trata simplemente de ver qué drift $\mu_t^{S_t}$ hace que se cumpla que (una ecuación con una incógnita):

$$\frac{B_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{G}}\left[\frac{B_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

Una vez obtenido ese drift, sabemos simular el subyacente bajo esa medida, por lo que podemos obtener el valor de C_t calculando el siguiente valor esperado:

$$\frac{C_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{G}}\left[\frac{C_T}{S_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

Obviamente el valor obtenido de C_t será independiente del numerario elegido. Elegiremos el numerario que haga más fácil el cálculo del valor esperado.

Activo negociable

Extendemos la definición de activo negociable incluyendo aquellos que son replicables. Todo activo que es negociable/replicable cumple con respecto al subyacente que

$$d\left(\frac{V_t}{B_t}\right) = \alpha_t \, d\left(\frac{S_t}{B_t}\right).$$

Luego existe una medida bajo la que ambos (el subyacente y el derivado) son martingalas.

Es decir, bajo la medida que hace que el subyacente es martingala, todo derivado replicable lo es también.

Si un activo replicable no fuese martingala bajo esa medida, habría una oportunidad de arbitraje.

Nueva formulación del Teorema de representación de martingalas.

Hemos visto que si bajo la medida real podemos escribir que dos procesos M_t y N_t cumplen que:

$$dM_t = \alpha_t \, dN_t \, ,$$

entonces existe una medida bajo la cual ambos procesos son martingala.

Ejercicio

Dar un ejemplo de activo no replicable en la economía Euro.

Derivada Radon-Nykodim en función de activos negociables

La derivada Radon-Nykodim nos ayuda a relacionar valores esperados bajo distintas medidas.

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[X] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right].$$

Al valorar un derivado C_t bajo las medidas asociadas a los numerarios M_t y N_t, tenemos:

$$C_t = N_t\,\mathbf{E}_{\mathbb{N}}\left[\frac{C_T}{N_T}\right]$$

$$C_t = M_t\,\mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[\frac{C_T}{M_T}\right]$$

E igualando

$$N_t\,\mathbf{E}_{\mathbb{N}}\left[\frac{C_T}{N_T}\right] = M_t\,\mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[\frac{C_T}{M_T}\right].$$

Es decir,

$$\mathbf{E}_{\mathbb{N}}\left[\frac{C_T}{N_T}\right] = \tfrac{M_t}{N_t}\mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[\frac{C_T}{M_T}\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[\tfrac{C_T}{N_T}\frac{M_t}{N_t}\frac{N_T}{M_T}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{N}}[X] = \mathbf{E}_{\mathbb{M}}\left[X\frac{M_t}{N_t}\frac{N_T}{M_T}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d\mathbb{N}}{d\mathbb{M}} = \frac{M_t}{N_t}\frac{N_T}{M_T}}$$

La cartera de réplica

Una vez calculado el valor C_t, es decir, el precio que debe pagar el comprador del derivado al vendedor, debemos determinar qué cartera ha de montar éste último para replicar la evolución del producto.

Se trata pues de calcular las cantidades α_t y β_t.

Como la cartera debe replicar al derivado, debe cumplirse que

$$dC_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t \,.$$

Pero C_t ha de ser función del precio actual del subyacente y del tiempo: $C_t = C(S_t, t)$, luego si aplicamos el lema de Itô sobre C_t:

$$dC_t = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \,,$$

y utilizando que

$$dS_t = \mu_t^S dt + \sigma_t^S dW_t^{\mathbb{P}} \quad \Rightarrow \quad (dS_t)^2 = (\sigma_t^S)^2 dt \,,$$

obtenemos

$$\underbrace{\frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\sigma_t^S)^2 dt}_{dC_t} = \underbrace{\alpha_t dS_t + \beta_t dB_t}_{d\Pi_t},$$

es decir,

$$\underbrace{\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}(\sigma_t^S)^2\right) dt}_{\text{determinista}} + \underbrace{\frac{\partial C}{\partial S_t}dS_t}_{\text{estocástica}} = \underbrace{\beta_t r_t B_t dt}_{\text{determinista}} + \underbrace{\alpha_t dS_t}_{\text{estocástica}} .$$

Y para que ambas variaciones sean iguales (la réplica sea efectiva), sus términos determinista y estocástico han de ser iguales, por lo que:

$$\boxed{\alpha_t = \frac{\partial C}{\partial S_t} = \Delta}$$

Y β_t viene de despejar en la siguiente ecuación:

$$C_t = \Delta_t S_t + \beta_t B_t \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\beta_t = \frac{1}{B_t}(C_t - \Delta S_t)}$$

Market Price of Risk

Consideremos dos derivados (C_t y H_t) cuyos payoffs dependen del mismo subyacente. El hecho de que dependan del mismo subyacente nos permitirá replicar uno con el otro (C_t con H_t) de la siguiente manera:

$$C_t = \alpha_t \, H_t + \beta_t \, B_t$$

$$dC_t = \alpha_t \, dH_t + \beta_t \, dB_t$$

Si elegimos B_t como numerario, tenemos:

$$d\left(\frac{C_t}{B_t}\right) = \alpha_t \, d\left(\frac{H_t}{B_t}\right).$$

En general, las ecuaciones diferenciales estocásticas de los dos derivados vendrán dadas por (en función del Browniano bajo la medida real):

$$dC_t = C_t(\mu_t^C \, dt + \sigma_t^C \, dW_t^{\mathbb{P}})$$

$$dH_t = H_t(\mu_t^H \, dt + \sigma_t^H \, dW_t^{\mathbb{P}})$$

$$dB_t = r_t \, B_t \, dt$$

Y aplicando Itô:

$$
\begin{aligned}
d\hat{C}_t = d\left(\frac{C_t}{B_t}\right) &= \frac{dC_t}{B_t} - \frac{C_t}{B_t^2}dB_t = \frac{C_t}{B_t}(\mu_t^C dt + \sigma_t^C dW_t^{\mathbb{P}}) - \frac{C_t}{B_t}r dt \\
&= \hat{C}_t\left((\mu_t^C - r_t)dt + \sigma_t^C dW_t^{\mathbb{P}}\right) .
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
d\hat{H}_t = \hat{H}_t\left((\mu_t^H - r_t)dt + \sigma_t^H dW_t^{\mathbb{P}}\right) .
$$

Y si volvemos a la ecuación de réplica:

$$
\underbrace{\hat{C}_t\left((\mu_t^C - r_t)dt + \sigma_t^C dW_t^{\mathbb{P}}\right)}_{d\hat{C}_t} = \underbrace{\alpha_t\left(\hat{H}_t\left((\mu_t^H - r_t)dt + \sigma_t^H dW_t^{\mathbb{P}}\right)\right)}_{\alpha_t \hat{\hat{H}}_t}
$$

Igualando los términos determinista y estocástico:

$$\alpha_t = \frac{\hat{C}_t \left(\mu_t^C - r_t\right)}{\hat{H}_t \left(\mu_t^H - r_t\right)} = \frac{\hat{C}_t \sigma_t^C}{\hat{H}_t \sigma_t^H}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\mu_t^C - r_t}{\sigma_t^C} = \frac{\mu_t^H - r_t}{\sigma_t^H}}$$

Luego, localmente, los dos derivados han de tener el mismo exceso de rentabilidad por unidad de riesgo sobre el tipo sin riesgo (mismo ratio de Sharpe).

Llamamos a este ratio el Market Price or Risk.

En un mercado completo, derivados sobre el mismo subyacente han de tener el mismo exceso de rentabilidad por unidad de riesgo sobre el tipo sin riesgo (mismo market price of risk).

3. Cambio de Numerario

Expresión de la derivada Radon-Nikodym en función de numerarios

Como vimos anteriormente, si tenemos dos medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ con numerarios $N_t^{\mathbb{P}}$ y $N_t^{\mathbb{Q}}$, debe cumplirse que dada una función de pago $V_T(\omega_T)$ (donde ω_T representa todo el camino seguido por las variables de mercado hasta tiempo t), el valor del derivado sea independiente de la medida utilizada. Así

$$V_t = N_t^{\mathbb{P}} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{V_T}{N_T^{\mathbb{P}}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = N_t^{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{V_T}{N_T^{\mathbb{Q}}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[\underbrace{\frac{V_T}{N_T^{\mathbb{P}}}}_{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{N_t^{\mathbb{Q}}}{N_t^{\mathbb{P}}} \mathbf{E}_{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{\frac{V_T}{N_T^{\mathbb{P}}}}_{X_T} \frac{N_T^{\mathbb{P}}}{N_T^{\mathbb{Q}}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[X_T \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T \frac{N_t^{\mathbb{Q}}}{N_t^{\mathbb{P}}} \frac{N_T^{\mathbb{P}}}{N_T^{\mathbb{Q}}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(t,T) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(t,T)$ representa el cociente de probabilidades que presenta el camino ω_T (que define el valor de V_T, $N_T^{\mathbb{P}}$ y $N_T^{\mathbb{Q}}$) bajo $\mathbb{P}$ y bajo $\mathbb{Q}$ entre los instantes t y T.

Nótese que dado que

$$\zeta(t,T) = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}(t,T) = \frac{N_t^{\mathbb{Q}}}{N_t^{\mathbb{P}}} \frac{N_T^{\mathbb{P}}}{N_T^{\mathbb{Q}}}$$

dicho proceso debe ser martingala bajo $\mathbb{Q}$. Esto es debido a que representa el cociente entre $N_T^{\mathbb{P}}$ (cartera autofinanciada) dividido por $N_T^{\mathbb{Q}}$ (el numerario bajo $\mathbb{Q}$).

Lo que confirma lo que vimos en el punto 1, en el cuál vimos que

$$d\zeta(t,T) = -\gamma_t^{\mathbb{P}\to\mathbb{Q}}\zeta(t,T)dW_T^{\mathbb{Q}}$$

lo que nos ayudó a afirmar el mismo resultado.

Pues bien, este resultado nos ayudará a establecer el cambio de dinámica al cambiar de medida.

Deducción de la Fórmula de Black-Scholes bajo 2 Numerarios

Supongamos que queremos valorar una opción call sobre un activo que no paga dividendos. El payoff en la fecha de vencimiento viene dado por:

$$C_T = (S_T - K)^+$$

Donde S_T es el valor del subyacente a vencimiento y K el strike de la opción.

Podemos escribir el payoff de la siguiente forma:

$$C_T = (S_T - K)^+ = \underbrace{S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}}_{G_T} - \underbrace{K \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}}_{H_T} = G_T - H_T$$

Aplicaremos el modelo de Black-Sholes, lo que supone que bajo la medida real, la ecuación difrencial estocástica que describe la evolución del subyacente es:

$$dS_t = \ldots dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

Dicho modelo también supone tipos deterministas. Supondremos aquí que el subyacente no paga dividendos, hipótesis que será relajada en las sesiones de renta variable.

Calculemos primero H_t. Para ello elegiremos como numerario la cuenta corriente. Según el teorema fundamental de valoración:

$$\frac{H_t}{\beta_t} = E_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{\beta_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\beta_T}E_{\mathbb{Q}}\left[K\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$
$$\Downarrow$$
$$H_t = e^{-\int_{s=t}^{T} r_s ds}E_{\mathbb{Q}}\left[K\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Donde β_t representa el valor de la cuenta corriente en t y $\mathbb{Q}$ representa la medida martingala asociada a dicho numerario. r_t representa el tipo libre de riesgo instantáneo al que se capitaliza β_t.

De manera que calcular H_t pasa por calcular:

$$E_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}\left[S_T > K\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Que no es sino la probabilidad de que la opción termine en dinero (subyacente por encima del stike) bajo la medida $\mathbb{Q}$. Para calcular esa probabilidad, debemos saber cómo se distribuye el subyacente bajo dicha medida.

Para ello, sabemos que bajo $\mathbb{Q}$, debe cumplirse que $\frac{S_t}{\beta_t}$ debe ser una $\mathbb{Q}$ martingala, por lo que su drift debe ser nulo.

Por otro lado, el teorema de Girsanov nos garantiza que al cambiar de la medida real $\mathbb{P}$ a la medida real $\mathbb{Q}$, la difusión de la ecuación diferencial estocástica no variará, tan sólo lo hará su deriva. De manera que bajo $\mathbb{Q}$, tendremos:

$$dS_t = \mu_t^{\mathbb{Q}} S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Aplicando el lema de Itô bajo $\mathbb{Q}$

$$d\frac{S_t}{\beta_t} = \frac{dS_t}{\beta_t} - r_t\frac{S_t}{\beta_t} = \frac{S_t}{\beta_t}\left((\mu_t^{\mathbb{Q}} - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}\right)$$

La condición de martingala hace que $\mu_t^{\mathbb{Q}} = r_t$

Y la solución de esta ecuación diferencial estocástica vendrá dada por (según el lema de Itô):

$$
\begin{aligned}
S_T &= S_t \exp\left(\int_{s=t}^{T} r_s ds - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right)\right) \\
&= S_t \exp\left(\left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

De lo que se deduce que S_T se distribuye bajo $\mathbb{Q}$ como una variable aleatoria log-normal.

Lo que nos permite calcular:

$$
\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}\left[S_T > K \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}\left[S_t \exp\left(\left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}\right)\right) > K \middle| \mathcal{F}_t\right]
$$

$$
= \mathbf{P}_{\mathbb{Q}}\left[S_t \exp\left(\left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\phi\right) > K\right]
$$

$$= \mathbf{P}_{\mathbb{Q}} \left[\phi > \frac{\log \frac{K}{S_t} - \left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

$$= \mathbf{P}_{\mathbb{Q}} \left[\phi < \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] = N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

Donde ϕ es una normal estándar y $N(\ )$ su función de distribución.

Recapitulando:

$$H_t = K e^{-\int_{s=t}^{T} r_s ds} E_{\mathbb{Q}} \left[K \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = K e^{-R(t,T)(T-t)} N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

Pasemos a calcular G_t. Para ello, tomaremos como numerario el propio subyacente, lo cuál hace que la ecuación de valoración quede:

$$\frac{G_t}{S_t} = \mathbf{E}_{\mathbb{S}}\left[\frac{S_T \mathbf{1}_{\{S_T>K\}}}{S_T}\middle|\mathcal{F}_t\right] = E_{\mathbb{S}}\left[\mathbf{1}_{\{S_T>K\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{P}_{\mathbb{S}}[S_T > K\big|\mathcal{F}_t]$$

Donde $\mathbb{S}$ es la medida martingala asociada al nuevo numerario.

Nótese que la elección de numerario nos ha simplificado el cálculo del valor esperado y que, de nuevo, hemos de calcular la probabilidad de que la opción termine en dinero, pero bajo otra medida (**nunca olvidemos que toda probabilidad depende de la medida**).

Pero una vez más, para calcular dicha probabilidad, debemos saber cómo se distribuye S_T bajo $\mathbb{S}$.

Análogamente a lo ya comentado para el cálculo de H_t, el teorema de Girsanov nos garantiza que bajo $\mathbb{S}$, S_T seguirá:

$$dS_t = \mu_t^{\mathbb{S}} S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{S}}$$

Y lo que tenemos que calcular es el valor de $\mu^{\mathbb{S}}$.

Deducción aplicando Itô

En este punto seguimos el razonamiento análogo al realizado bajo $\mathbb{Q}$, pero esta vez $\frac{\beta_t}{S_t}$ debe ser una $\mathbb{S}$ martingala. De manera que aplicamos Itô bajo $\mathbb{S}$:

$$d\frac{\beta_t}{S_t} = r_t\frac{\beta_t}{S_t} - \frac{\beta_t}{S_t^2}dS_t + \frac{\beta_t}{S_t^3}dS_t^2$$
$$= \frac{\beta_t}{S_t}\left(\left(r_t - \mu_t^{\mathbb{S}} + \sigma^2\right)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{S}}\right)$$

Y para que $\frac{\beta_t}{S_t}$ sea una $\mathbb{S}$ martingala, debe cumplirse que $\mu_t^{\mathbb{S}} = r_t + \sigma^2$

Deducción mediante la derivada Radon-Nikodym

Hemos visto que

$$\zeta_t = \frac{d\mathbb{S}}{d\mathbb{Q}}(t) = \frac{\beta_0}{S_0}\frac{S_t}{\beta_t}$$

Aplicando Itô bajo $\mathbb{Q}$ tenemos que

$$d\zeta_t = \frac{\beta_0}{S_0}\frac{S_t}{\beta_t}\sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Pero por otro lado sabemos que

$$d\zeta_t = -\gamma_t^{\mathbb{Q}\to\mathbb{S}}\zeta_t dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Por lo que

$$\gamma_t^{\mathbb{Q}\to\mathbb{S}} = -\sigma$$

Lo que hace que

$$dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t^{\mathbb{S}} + \sigma dt$$

Esto implica que

$$dS_t = S_t\left(r_t dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}\right) = S_t\left(r_t dt + \sigma\left(dW_t^{\mathbb{Q}} + \sigma dt\right)\right) = S_t\left(\left(r_t + \sigma^2\right)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{S}}\right)$$

Luego vemos de nuevo que $\mu_t^{\mathbb{S}} = r_t + \sigma^2$

El drift obtenido nos permite afirmar que bajo $\mathbb{S}$, S_T se distribuye:

$$S_T = S_t \exp\left(\left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{S}} - W_t^{\mathbb{S}}\right)\right)$$

Lo que nos permite calcular:

$$\mathbf{P}_{\mathbb{S}}\left[S_T > K \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbf{P}_{\mathbb{S}}\left[S_t \exp\left(\left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(W_T^{\mathbb{S}} - W_t^{\mathbb{S}}\right)\right) > K \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbf{P}_{\mathbb{S}}\left[S_t \exp\left(\left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\phi\right) > K\right]$$

$$= \mathbf{P}_{\mathbb{S}}\left[\phi > \frac{\log\frac{K}{S_t} - \left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] =$$

$$= \mathbf{P}_{\mathbb{S}} \left[\phi < \frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] = N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

De lo que finalmente obtenemos:

$$G_t = S_t N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

Y finalmente tenemos el precio de la call:

$$C_t = G_t - H_t = S_t N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) + \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right] - K e^{-R(t,T)(T-t)} N \left[\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(R(t,T) - \frac{\sigma^2}{2} \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

Tipo de cambio y efecto Quanto

Expresión de la derivada Radon-Nikodym en entorno multidivisa

Veamos cómo queda la expresión de la derivada Radon Nikodym cuando manejamos numerarios es distintas divisas. Para ello consideremos un derivado denominado en la divisa F con pago en fecha de vencimiento T de V_T^F (cantidad denomidada en la divisa F). Bueno, pues si consideramos un numerario denominado en dicha divisa N_t^F, el teorema fundamental de valoración nos garantiza:

$$V_t^F = N_t^F \mathbf{E}_{\mathbb{F}} \left[\frac{V_T^F}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Donde $\mathbb{F}$ es la medida martingala asociada a N_t^F.

Por otro lado, consideremos otra divis D. Si X_t representa el tipo de cambio medido en D/F, entonces podemos expresar V_t^F en la divisa D sin más que hacer:

$$V_t^D = X_t V_t^F = X_t N_t^F \mathbf{E}_{\mathbb{F}} \left[\frac{V_T^F}{N_T^F} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Aunque también podemos tomar un cierto numerario N_t^D denominado en D y hacer

$$V_t^D = N_t^D \mathbf{E}_{\mathbb{D}} \left[\frac{V_T^F X_T}{N_T^D} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Donde todo lo que hemos hecho es pasar los flujos futuros a la divisa D al tipo de cambio final y dividir por el numerario N_t^D. $\mathbb{D}$ es la medida martingala asociada a N_t^D.

Pues bien, igualando las dos expresiones anteriores

$$N_t^D \mathbf{E}_{\mathbb{D}} \left[\frac{V_T^F X_T}{N_T^D} \middle| \mathcal{F}_t \right] = X_t N_t^F \mathbf{E}_{\mathbb{F}} \left[\frac{V_T^F}{N_T^F} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{D}}\left[\underbrace{\frac{V_T^F X_T}{N_T^D}}_{Y_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{X_t N_t^F}{N_t^D}\mathbf{E}_{\mathbb{F}}\left[\underbrace{\frac{V_T^F X_T}{N_T^D}}_{Y_T}\frac{N_T^D}{N_T^F X_T}\Big|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}_{\mathbb{D}}\left[Y_T\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}_{\mathbb{F}}\left[Y_T\underbrace{\frac{X_t N_t^F}{N_t^D}\frac{N_T^D}{N_T^F X_T}}_{\frac{d\mathbb{D}}{d\mathbb{F}}(t,T)}\Big|\mathcal{F}_t\right]$$

Ajuste Quanto

Supongamos cierto subyacente denominado en una cierta divisa F y cuyo precio en tiempo t representaremos por S_t^F (dicho precio está expresado en unidades de la divisa F). Supongamos, no obstante, que queremos valorar un derivado que paga cierto valor $V_T^D = V_T^D(S_T^F)$, pero denominado en cierta divisa D. ¿Cómo debemos valorar dicho derivado?.

Otra situación en la que nos vemos enfrentados a un problema similar es el caso en que tenemos un motor de simulación riesgo neutro de diversos factores denominados en varias divisas. Utilizamos como numerario cierto activo denominado en D. ¿Cómo debemos simular activos denominados en la divisa F bajo la medida martingala asociada al numerario elegido?

Por resolver un ejemplo concreto, supongamos que bajo la medida real $\mathbb{P}$

$$
\begin{gathered}
dS_t^F = \mu_t^{S,\mathbb{P}} S_t^F dt + \sigma^S S_t^F dW_t^{S,\mathbb{P}} \\
dX_t = \mu_t^{X,\mathbb{P}} X_t dt + \sigma^X X_t dW_t^{X,\mathbb{P}} \\
dW_t^{S,\mathbb{P}} dW_t^{X,\mathbb{P}} = \rho dt
\end{gathered}
$$

Suponemos tipos deterministas en ambas divisas r_t^F, r_t^D. X_t representa el tipo de cambio en D/F.

Supongamos que elegimos como numerario β_t^D (cuenta corriente denominada en la divisa D). Llamaremos a la medida martingala asociada a dicho numerario $\mathbb{D}$. Lo primero que debemos cuestionarnos es la ecuación diferencial estocástica que sigue X_t bajo $\mathbb{D}$.

Para ello, tengamos en cuenta que β_t^F (cuenta corriente denominada en F) no es un activo negociable bajo el inversor en divisa D, por lo que $\frac{\beta_t^F}{\beta_t^D}$ no es una $\mathbb{D}$ martingala. Sí lo será la cuenta corriente denominada en F pasada a la divisa D multiplicando en todo momento por el tipo de cambio X_t. De manera que $\frac{\beta_t^F X_t}{\beta_t^D}$ sí es una $\mathbb{D}$ martingala.

Por otro lado, el teorema de Girsanov garantiza que bajo $\mathbb{D}$

$$dX_t = \mu_t^{X,\mathbb{D}} X_t dt + \sigma^X X_t dW_t^{X,\mathbb{D}}$$

Aplicando Itô

$$d\frac{\beta_t^F X_t}{\beta_t^D} = \frac{\beta_t^F X_t}{\beta_t^D}\left(\left(r_t^F - r_t^D + \mu_t^{X,\mathbb{D}}\right)dt + \sigma^X dW_t^{X,\mathbb{D}}\right)$$

Por lo que

$$\mu_t^{X,\mathbb{D}} = r_t^D - r_t^F$$

Con respecto a cómo simular S_t^F bajo $\mathbb{D}$, tenemos dos formas de proceder.

Deducción de ajuste Quanto aplicando Itô

Como hemos visto, el teorema de Girsanov garantiza

$$dS_t^F = \mu_t^{S,\mathbb{D}} S_t^F dt + \sigma^S S_t^F dW_t^{S,\mathbb{D}}$$

Por otro lado sabemos que $\frac{S_t^F X_t}{\beta_t^D}$ es una $\mathbb{D}$ martingala, por lo que

$$d\frac{S_t^F X_t}{\beta_t^D} = \frac{X_t dS_t^F}{\beta_t^D} + \frac{S_t^F dX_t}{\beta_t^D} - r_t^D \frac{X_t S_t^F}{\beta_t^D} dt + \frac{dX_t dS_t^F}{\beta_t^D}$$

$$= \frac{S_t^F X_t}{\beta_t^D} \left(\mu_t^{S,\mathbb{D}} dt + \sigma^S dW_t^{S,\mathbb{D}} + \left(r_t^D - r_t^F - r_t^D \right) dt + \sigma^X dW_t^{X,\mathbb{D}} + \rho \sigma^X \sigma^F dt \right)$$

E imponiendo que la deriva debe ser nula obtenemos

$$\mu_t^{S,\mathbb{D}} = r_t^F - \rho \sigma^S \sigma^X$$

Deducción de ajuste Quanto mediante la derivada Radon-Nikodym

Sabemos que bajo $\mathbb{F}$ (medida martingala asociada a β_t^F)

$$dS_t^F = r_t^F S_t^F dt + \sigma^S S_t^F dW_t^{S,\mathbb{F}}$$

Hemos visto que

$$\zeta_t = \frac{d\mathbb{D}}{d\mathbb{F}}(t) = \frac{\beta_0^F X_0}{\beta_0^D} \frac{\beta_t^D}{\beta_t^F X_t}$$

Aplicando Itô bajo $\mathbb{F}$ tenemos que

$$d\zeta_t = -\sigma^X \frac{\beta_0^F X_0}{\beta_0^D} \frac{\beta_t^D}{\beta_t^F X_t} dW_t^{X,\mathbb{F}} = -\sigma^X \zeta_t dW_t^{X,\mathbb{F}}$$

No obstante, estamos en un mundo regido por dos brownianos $W_t^{X,\mathbb{F}}$ y $W_t^{S,\mathbb{F}}$ que podemos expresar en función de dos brownianos independientes

$$\begin{aligned} dW_t^{X,\mathbb{F}} &= dW_t^{A,\mathbb{F}} \\ dW_t^{S,\mathbb{F}} &= \rho dW_t^{A,\mathbb{F}} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{B,\mathbb{F}} \end{aligned}$$

Por lo que lo más correcto es expresar la derivada Radon Nikodym de forma matricial

$$d\zeta_t = -\zeta_t \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^X & 0 \end{bmatrix}}_{\gamma_t^{\mathbb{F}\to\mathbb{D}}} \begin{bmatrix} dW_t^{A,\mathbb{F}} \\ dW_t^{B,\mathbb{F}} \end{bmatrix}$$

Lo que hace que

$$dW_t^{A,\mathbb{F}} = dW_t^{A,\mathbb{D}} - \sigma^X dt$$
$$dW_t^{B,\mathbb{F}} = dW_t^{B,\mathbb{D}}$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_t^F}{S_t^F} &= r_t^F dt + \sigma^S \left(\rho dW_t^{A,\mathbb{F}} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{B,\mathbb{F}} \right) \\
&= r_t^F dt + \sigma^S \left(\rho \left(dW_t^{A,\mathbb{D}} - \sigma^X dt \right) + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{B,\mathbb{D}} \right) \\
&= \left(r_t^F - \rho \sigma^X \sigma^S \right) dt + \sigma^S \left(\rho dW_t^{A,\mathbb{D}} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{B,\mathbb{D}} \right) \\
&= \left(r_t^F - \rho \sigma^X \sigma^S \right) dt + \sigma^S dW_t^{S,\mathbb{F}}
\end{aligned}
$$

De manera que obtenemos el mismo resultado que en el punto anterior.