Lec2. stationary 아닌걸 어떻게 stationary로?!

대체적으로 평균을 중심으로 왔다갔다

trend 존재 = 평균이 시점에 따라 변함

= weakly stationary 조건 위배

# De-trend in time series.

time series trend 제거

1. In practice, the observed time series are not stationary in many reasons.
2. Particulary, often there is a trend in series.
3. We introduce two ways to remove trend in time series. One is the classical regression analysis, and the other is taking difference.

## 1. Regression analysis in time series

회귀모형으로 트렌드 제거

1. **Generalized least square**

- Observations $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ are from the model

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon,$$

where

설명 변수의 관측값

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \underset{\text{design matrix}}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$$

and $\epsilon$ $(p \times 1)$ vector has multivariate normal distribution with mean 0 and variance $\Sigma$ $(p \times p)$, matrix.

- The minimum variance unbiased estimator of $\beta$ the solution to the weighted least square problem

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

- The solution is

$$\widehat{\beta} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\underbrace{\Sigma^{-1}}_{I}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\underbrace{\Sigma^{-1}}_{I}\mathbf{Y}.$$

우리가 아는 $\hat{Y} = X\underbrace{(X^TX)^{-1}X^TY}$ 부분과 동일

$$* \ \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ : 공분산 행렬

$\varepsilon$의 공분산 행렬 : $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma_n^2 I$ 꼴

* $Y = X\beta + \varepsilon$

design matrix , 각 col : 설명변수 관측값 (주로 첫번째 col은 1 (절편))

* 시계열에선 $\varepsilon$가 정상시계열 모형이 되게끔 하는 것이 목표 . — WN 제외 $\varepsilon$끼리 상관관계 생김 (= cov ≠ 0)

⇒ 일반화 최소제곱법 사용 : weight (← $\varepsilon$의 공분산을 역행렬로 곱해줌 ; GLS : 가중치 준 거리)

* $X = (X_1, \cdots, X_p)$ , $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ , $Xb = b_1 X_1 + \cdots + b_p X_p$ (Linear combination) , $X_j = \begin{pmatrix} X_{1j} \\ \vdots \\ X_{nj} \end{pmatrix}$

$\{Xb : b \in \mathbb{R}^p\} = sp(X_1, \cdots, X_p)$

최소제곱법 $\sum_{i=1}^{n} \{Y_i - (b_1 x_{1i} + \cdots + b_p X_{pi})\}^2 = (Y - Xb)^T (Y - Xb) = \|Y - Xb\|^2$

Y벡터와 제일 가까운 span 안에 원소 찾기

$\therefore \hat{Y} = X\underbrace{(X^T X)^{-1} X^T Y}_{\hat{\beta}}$

* 거리

방향이나 가중치 다르게

W : positive definite , $\|v\|_w^2 = v^T W v \geq 0$ ($v = 0$ 일때만 0, p.d 의 정의에 의해)

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta).$$

- If $\Sigma^{-1} = W$ 면 형태 동일, n차원 공간에서의 거리 ($\Sigma$ : 회전)
- 식을 최소화 : $Y \sim Xb$ 거리에서 제일 가까운 점 : 수직 → 내적 = 0 ($\langle v_1, v_2 \rangle_w = v_1^T W v_2 = 0$)

$$\hat{\beta} = (\underbrace{X^T \Sigma^{-1} X}_{X\text{의 크기들의 합}})^{-1} \underbrace{X^T \Sigma^{-1} Y}_{X\text{와 } Y\text{의 내적들}}$$

X랑 Y의 내적들 (각각 $\varepsilon$의 내적 모아놓은 벡터)

→ $\frac{\text{내적}}{\text{거리}}$ : projection

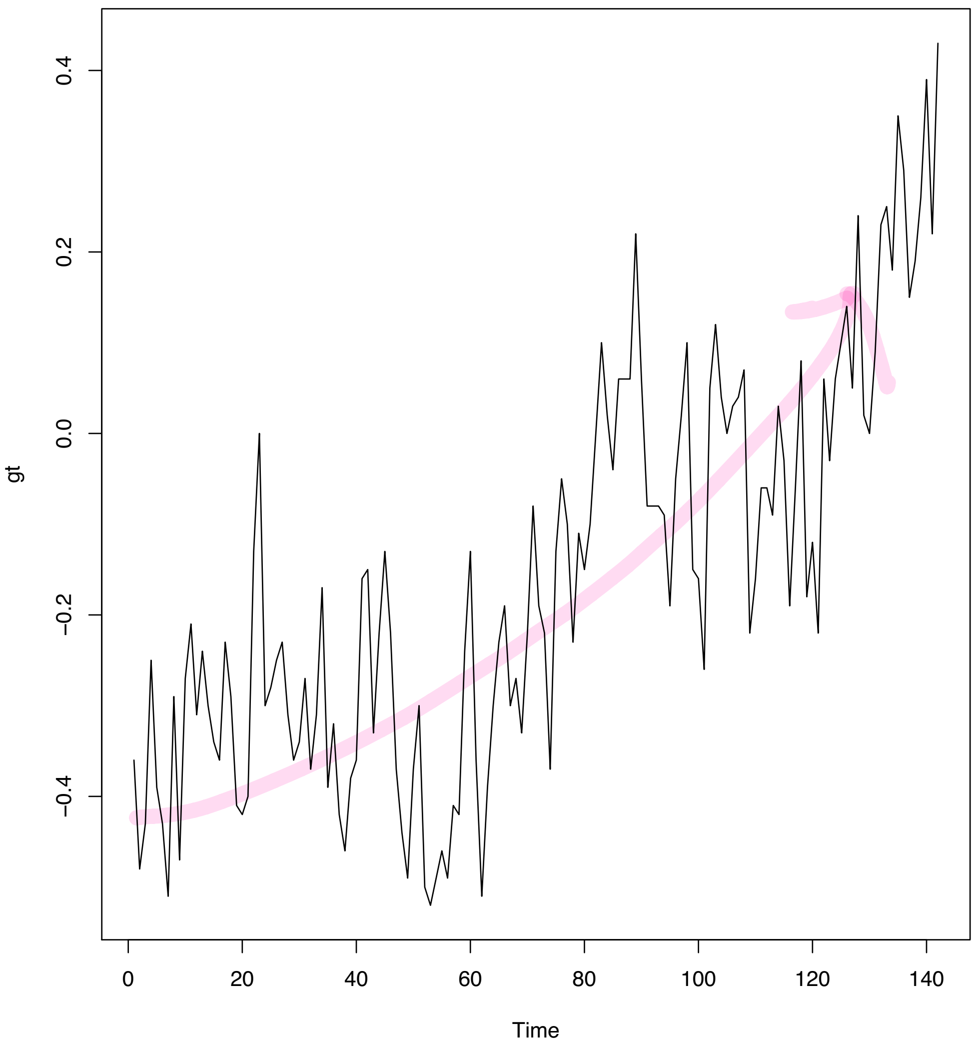
* 가중최소제곱법 (GLS의 형태 中)

$\sum (Y_i - (b_1 x_{i1} + \cdots + b_p X_{ip}))^2 \frac{1}{\sigma_i^2}$ : $\varepsilon$ 거리 독립 but $\varepsilon$ 분산 다다름 → $\varepsilon$ 큰거 → weight ⇓

$\varepsilon$ 작은거 → weight ⇑

이 때의 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$

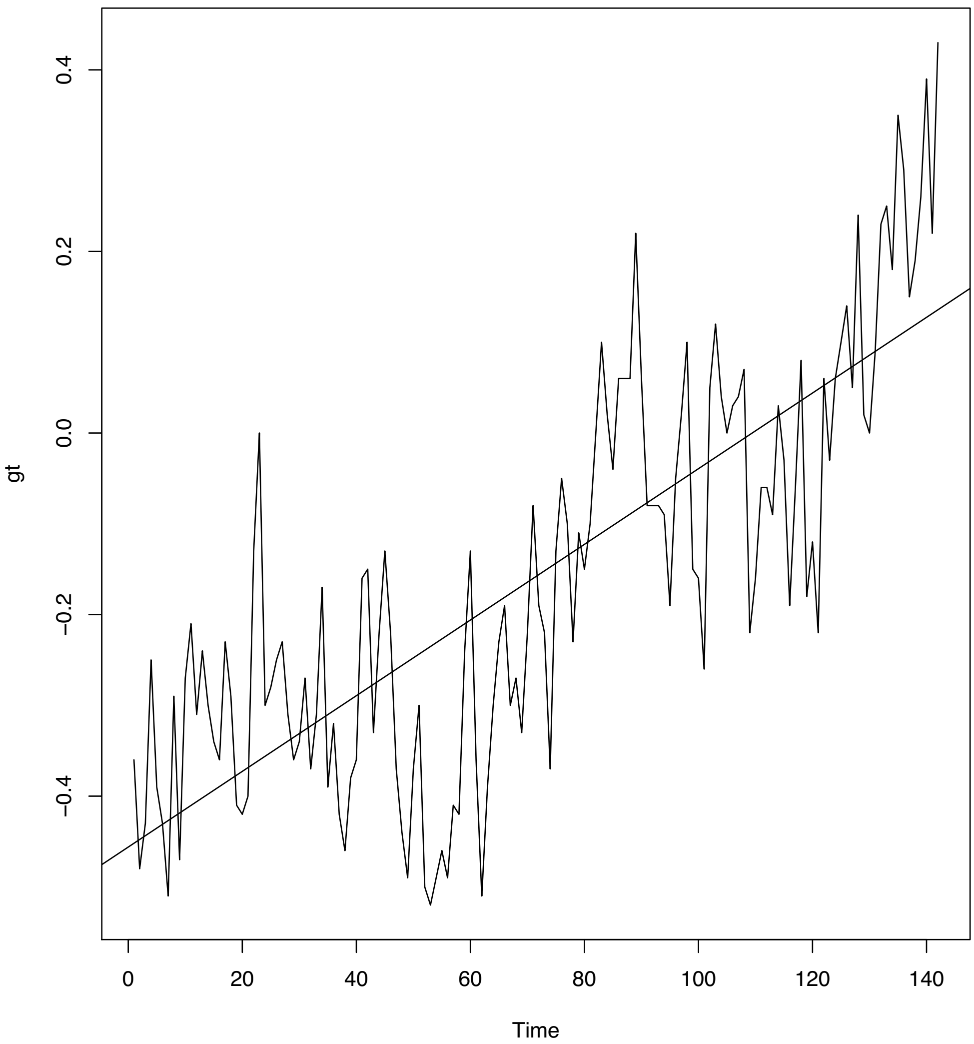
- **Global warming (estimate linear trend)**




시간에 따라
평균값 증가

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + w_t$$

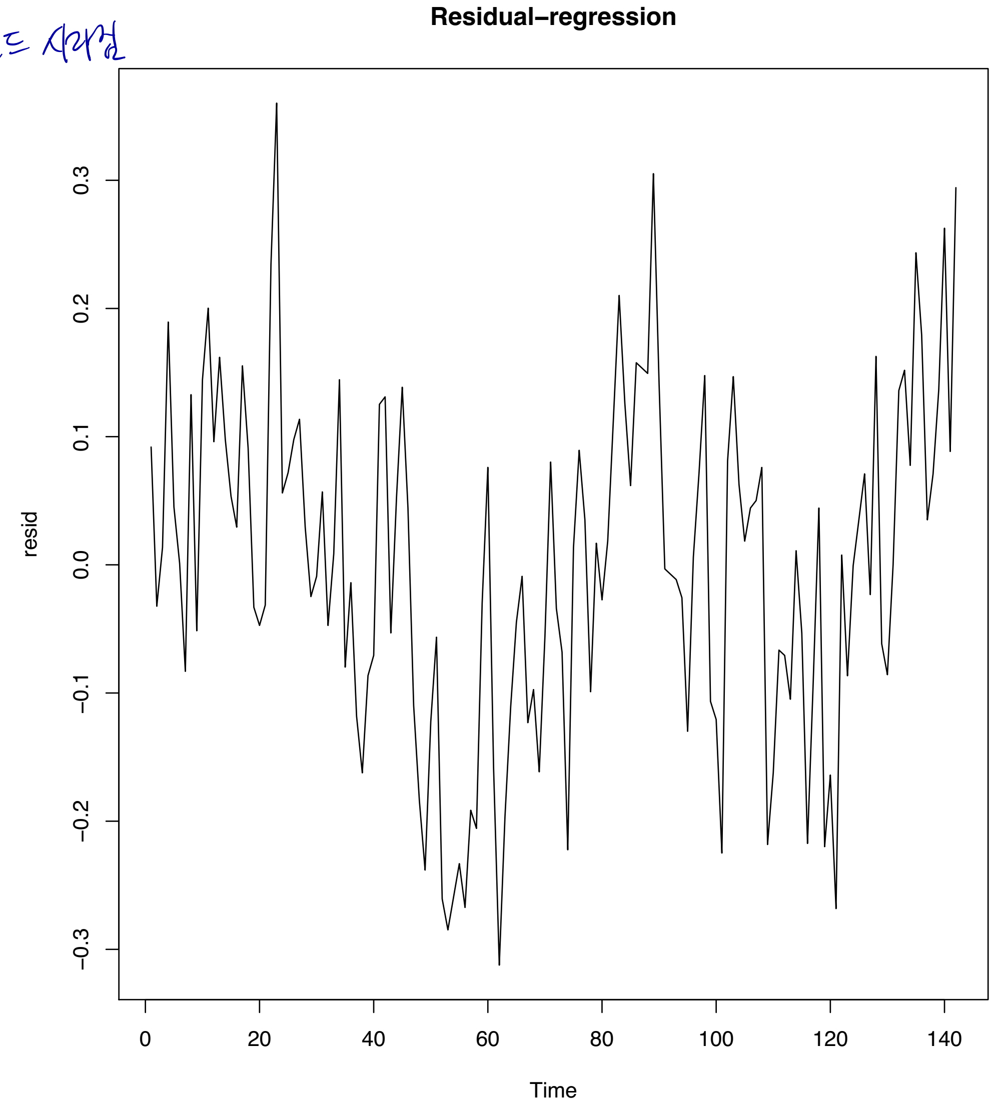
일차식보다 이차식이 더 적합할수도!



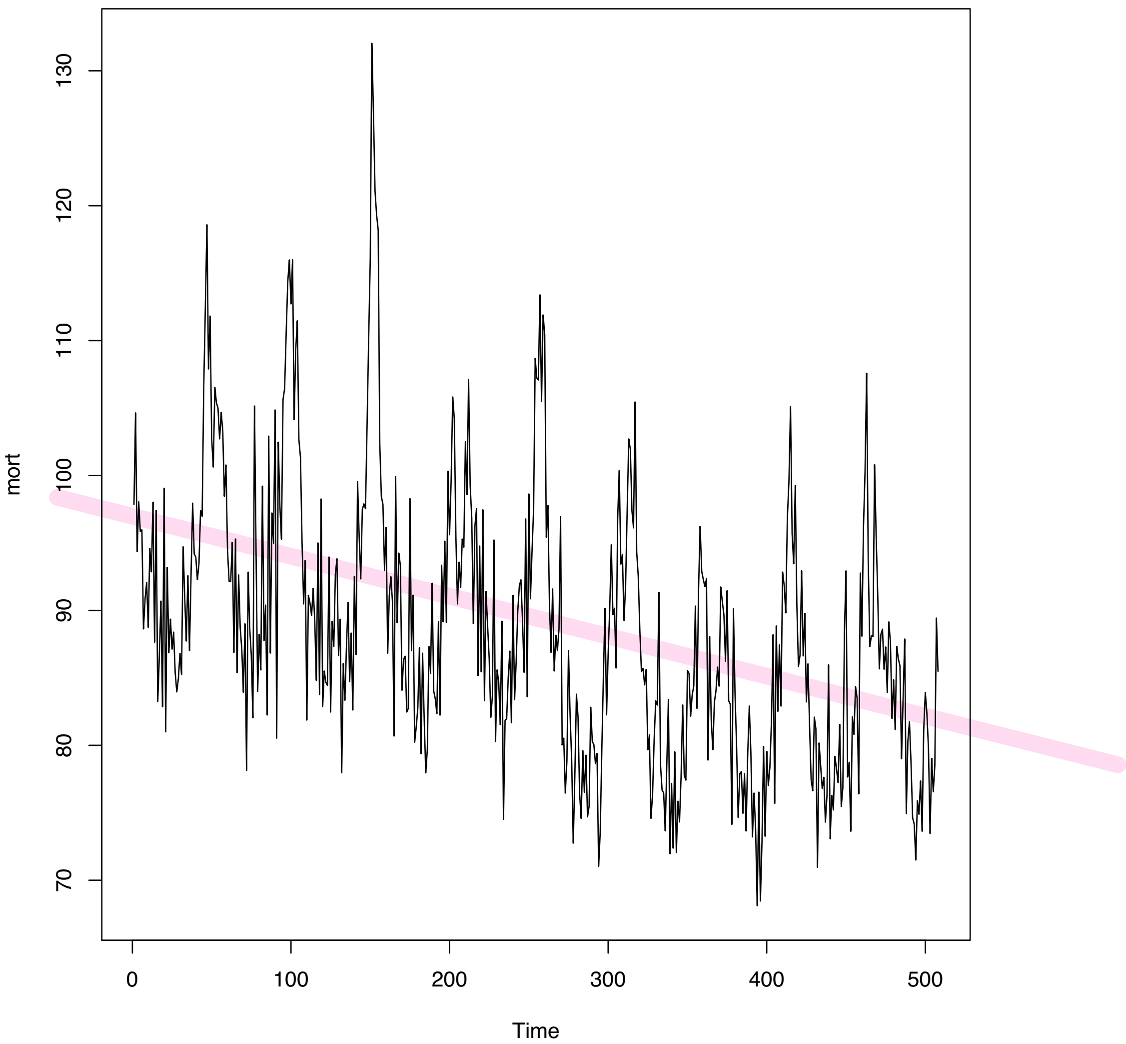

일차식 fitting

$r = Y - \hat{Y}$ 을 나타낸 그래프

→ 증가하는 트랜드 사라짐



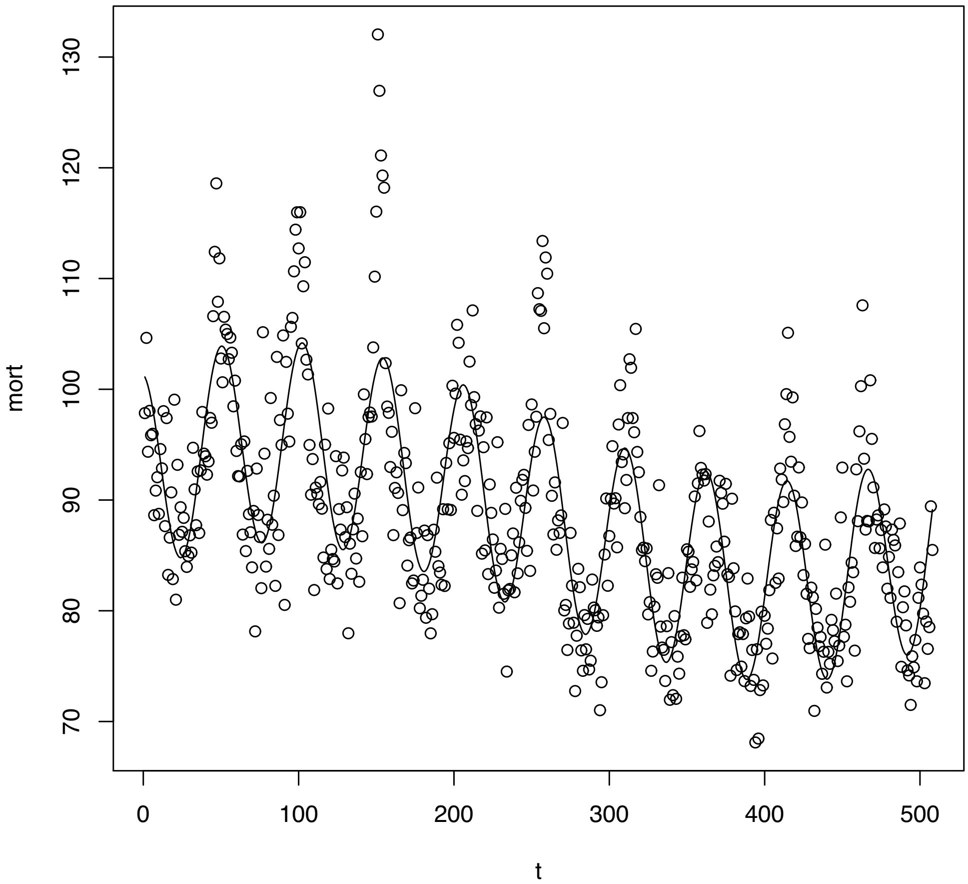
- **Cardiovascular mortality series (estimate periodic trend)**



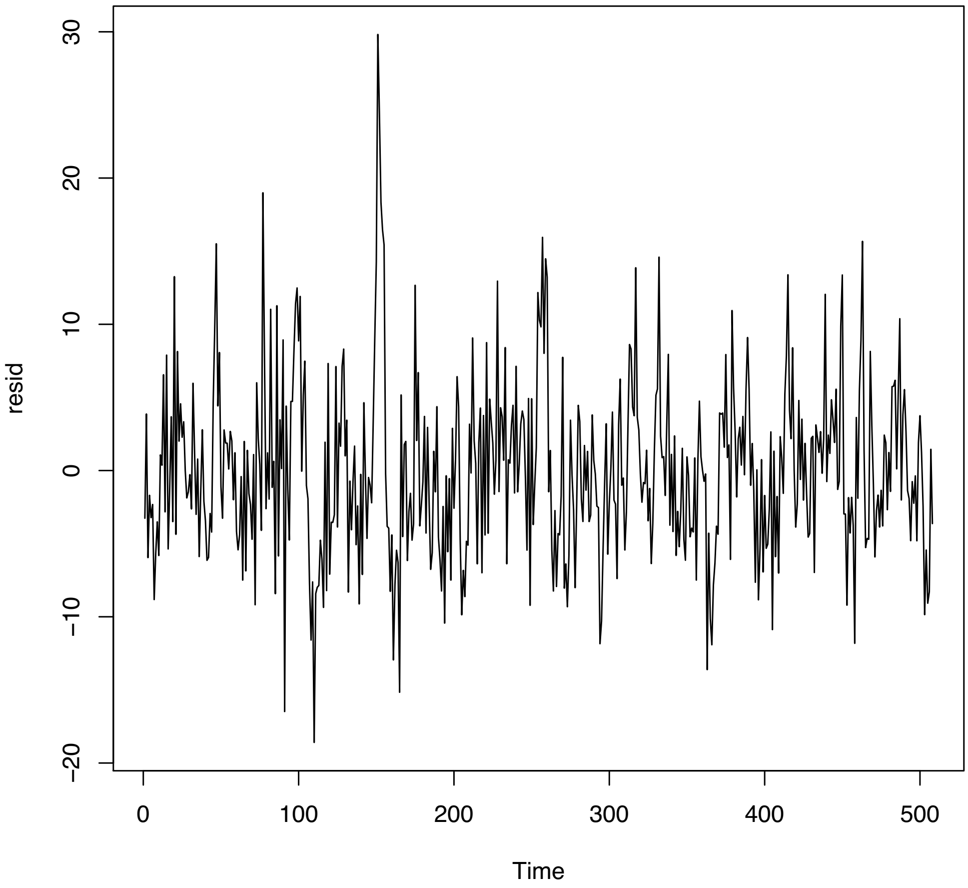

내려가는 패턴 + 주기성 둘다 반영

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 + \alpha_1 \cos\left(2\pi t/\underline{52}\right) + \alpha_2 \sin\left(2\pi t/52\right) + w_t$$

1년(52주)마다
1 싸이클 되도록!


mort
130
120
110
100
90
80
70
0
100
200
300
400
500
t

**residual–mortality** 잔차그래프 - 평균을 중심으로 왔다갔다.




$Y_t = m(t) + X_t$ $\quad \{X_t\}$ : stationary

1) $m(t)$ 모형화 $\longrightarrow$ $\hat{m}(t)$ 찾기

(X틸다t) $\tilde{X}_t = Y - \hat{m}(t) \approx X_t$ 비슷한 성질 가정!

- **Routine for generalized least square**
  - run OLS (IID errors).
  - estimate covariance matrix of error terms, $\Sigma$, using residuals.
  - run GLS with the estimate covariance matrix estimate.
  - iterate the above steps.

## Difference and back-shift operator

**Definition 0.1.** *We define the backshift operator by*

$$Bx_t = x_{t-1}$$

*and extend it to powers* $B^2 x_t = B(Bx_t) = Bx_{t-1} = x_{t-2}$.

- Consider the first difference is

$$\triangle x_t = x_t - x_{t-1} = (1-B)x_t$$

$$\triangle^2 x_t = (1-B)^2 x_t = (1 - 2B + B^2)x_t$$

- We can eliminate *linear* trend with $\triangle$
- We can eliminate *2nd order* trend with $\triangle^2$
- We can eliminate *d-th order* trend with $\triangle^d$

## <Difference and back-shift operator>

① Back shift operator : 한 시점 전으로 옮김.

$B x_t = x_{t-1}$

$B^n x_t = x_{t-n}$

② Differencing

$\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ : 현재값과 전 값의 차이    $\Delta^n_k$ ← 몇번했니 / ← 몇칸전이니

$= (1-B)x_t$

$\Delta^2 x_t = (1-B)^2 x_t$    $\Delta(\Delta x_t) = \Delta(x_t - x_{t-1}) = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = (x_t - x_{t-1}) - (x_{t-1} - x_{t-2})$

$= x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = (1 - 2B + B^2)x_t = (1-B)^2 x_t$

$\Delta^n x_t = (1-B)^n x_t$

* $\Delta$ : 차수 줄이는데 사용 (time trend 제거) / 에러는 없으나 한 번 할때마다 하나의 데이터 손실

ex) $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t$

$\Delta Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t - (\beta_0 + \beta_1 (t-1) + X_{t-1}) = \beta_1 + X_t - X_{t-1}$ (time trend (t) 사라짐)

ex) random walk

$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t$ → 평균일정, 분산변함 → stationary X

$X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$ → $\epsilon_t$가 stationary 면 $X_t - X_{t-1}$도 stationary → 그래서 차분법 多 쓰임!

참) fitting - smoothing - Time series 대략적인 평균추세 확인
- 가중