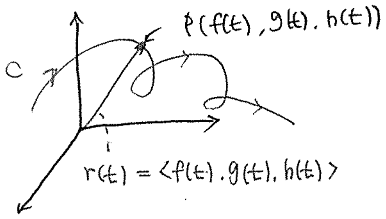
12. 벡터함수

12.1 벡터함수와 공간곡선

정의 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$: 벡터함수

$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

$f(t), g(t), h(t)$: 벡터함수 r의 성분함수



· r은 $r(t)$의 끝점에 의하여 그려지는 공간곡선 C를 정의.

$\boxed{\text{정리}}$ $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ 일 때, 각 성분함수의 극한이 존재하면

$$\lim_{t\to a} r(t) = \langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \rangle$$

예) $r(t) = (1+t^3)i + te^{-t}j + \frac{\sin t}{t}k$; $\lim_{t\to 0} r(t) = ?$ $\qquad \frac{\cos t}{1} = 1$

Sol) $\lim_{t\to 0} r(t) = [\lim_{t\to 0}(1+t^3)]i + [\lim_{t\to 0} te^{-t}]j + [\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}]k = i + k$

정의 $\lim_{t\to a} r(t) = r(a)$: a에서 연속

$\boxed{\text{Remark}}$ $\lim_{t\to a} r(t) = r(a) \iff \lim_{t\to a} f(t) = f(a)$, $\lim_{t\to a} g(t) = g(a)$, $\lim_{t\to a} h(t) = h(a)$

각 성분함수 f, g, h가 a에서 연속.

예) $r(t) = \langle 1+t, 2+5t, -1+6t \rangle$ 에 의해 정의되는 곡선?

Sol) $\langle 1, 5, 6 \rangle = v$ $\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{6} = t$. $(r_0 = 1, 2, -1)$ → 직선의 벡터방정식

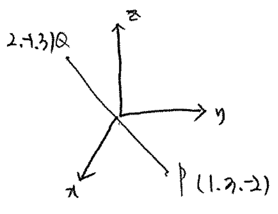
예) $r(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + tk$ 인 곡선

Sol) $r(t) = \langle \underset{x}{\cos t}, \underset{y}{\sin t}, \underset{z}{t} \rangle$

$x^2+y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ → 주어진 곡선은 $x^2+y^2=1$ 을 밑면으로 하는 원기둥 위에 있음.

xy 평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 주위를 반시계 방향으로 움직임. → 나선.

예) 점 $P(1, 3, -2)$와 점 $Q(2, -1, 3)$을 잇는 선분의 벡터 방정식과 매개변수 방정식.

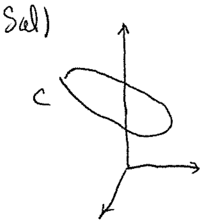


$v = \langle 1, -4, 5 \rangle$ $\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{5} = t$ → $x = t+1$, $y = -4t+3$, $z = 5t-2$

$\therefore r(t) = \langle t+1, -4t+3, 5t-2 \rangle$

예) $x^2+y^2=1$ 과 평면 $y+z=2$ 가 만나서 생성되는 곡선을 나타내는 벡터방정식.

Sol)



C의 xy 평면 사영 → $x^2+y^2=1$

→ $x=\cos t,\ y=\sin t\quad (0 \le t \le 2\pi)$

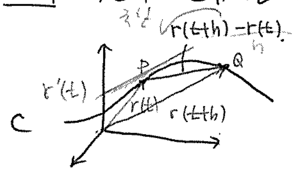
$z = 2-y = 2-\sin t$

$\therefore r(t) = \langle \cos t,\ \sin t,\ 2-\sin t \rangle \quad 0 \le t \le 2\pi$

12.2 벡터의 도함수와 적분

$\boxed{\text{정의}}$ 극한이 존재하는 경우 $\dfrac{dr}{dt} = r'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{r(t+h)-r(t)}{h}$

P에서의 접선 : 접선벡터와 평행한 직선



· $r'(t) \ne 0$ 인 경우 P에서의 접선벡터 (tangent vector)

· $T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r(t)\|}$: 단위접선벡터 (unit tangent vector)

$\boxed{\text{정리}}$ f.g.h가 미분 가능한 함수이고 $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ 일 때

$\underline{r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)i + g'(t)j + h'(t)k}$

예) 벡터함수 $r(t) = (1+t^3)i + te^{-t}j + \sin 2t\,k$ 의 도함수를 구하고 $t=0$ 인 점에서의 단위접선벡터를 구하여라.

Sol) $r(t) = \langle 1+t^3,\ t\cdot e^{-t},\ \sin 2t \rangle \longrightarrow r'(t) = \langle 3t^2,\ (1-t)e^{-t},\ 2\cos 2t \rangle$

$t=0 \rightarrow r'(0) = \langle 0, 1, 2 \rangle$

$T(t) = \dfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+4}} \langle 0, 1, 2 \rangle$

예) 매개변수 방정식 $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ 를 갖는 나선에 대해 점 $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ 에서 접선의 매개변수 방정식?

Sol) $r(t) = \langle 2\cos t, \sin t, t \rangle$: 접선벡터 = 지나는 한 점과 평행한 벡터

$r'(t) = \langle -2\sin t, \cos t, 1 \rangle$

$z = t = \frac{\pi}{2} \rightarrow r'(\frac{\pi}{2}) = \langle -2, 0, 1 \rangle$

$\therefore$ 점 $(0, 1, \frac{\pi}{2})$ 에서 접선의 매개변수 방정식 : $\dfrac{x-0}{-2} = y-1 = \dfrac{z-\frac{\pi}{2}}{1}$

0은 이미 없어진 수라 분모에 안들어감.

$\langle x-0,\ y-1,\ z-\frac{3}{2} \rangle = t\langle -2, 0, 1 \rangle$

$x = -2t+0$

$y = 1$

$z = t+\frac{3}{2}$

정리 u, v : 벡터함수 (미가) . $c \in \mathbb{R}$, f · 스칼라 함수

1. $(u(t)+v(t))' = u'(t)+v'(t)$, $(c \cdot u(t))' = c\,u'(t)$
2. $(f(t)\,u(t))' = f'(t)\,u(t) + f(t)\,u'(t)$
3. $(u(t) \cdot v(t))' = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$ $(u(t) \cdot v(t))'$ $u'(t) \cdot v(t) + u(\ )$인데
4. $(u(t) \times v(t))' = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$
5. $(u(f(t)))' = u'(f(t)) \cdot f'(t)$ (연쇄법칙)

ex) $\|r(t)\| = c$ (상수) 면 $r'(t) = r(t)$ 는 항상 수직임을 증명

Sol) $\cdot\ \|r(t)\|^2 = c^2 = r(t) \cdot r(t) \xrightarrow[\text{미분}]{} 0 = 2r'(t)\,r(t)$ by 3 ∴ 내적 = 0 이므로 수직

→ 구면위에 있는 곡선의 $r'(t)$는 $r(t)$에 언제나 수직.

$\|r(t)\| = c$

참) $\|\_\|$ 이 상수라고 상수함수 아님.

$\boxed{\text{적분}}$ $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ 일 때 $\int_a^b r(t)\,dt = \langle \int_a^b f(t)\,dt,\ \int_a^b g(t)\,dt,\ \int_a^b h(t)\,dt \rangle$

ex) $r(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$ 일 때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)\,dt = ?$

Sol) $r(t) = \langle 2\cos t, \sin t, 2t \rangle$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(t)\,dt = \langle \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\,dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\,dt \rangle = \langle 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}}, [\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}, [t^2]_0^{\frac{\pi}{2}} \rangle$$

$$= \langle 2, 1, \frac{\pi}{4} \rangle$$

12.3 호의 길이와 곡률

(비행거리, 휜 정도)

호의길이 $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ $t \in [a, b]$ 이면.

곡선의 길이 $L = \int_a^b \|r'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2}\,dt$

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ · 공간곡선 길이 = 내접한 다각형 길이의 극한

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

예) $r(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ 를 갖는 원형나선 위의 점 $(1, 0, 0)$ 에서 $(1, 0, 2\pi)$ 까지의 호의 길이를 구하시오.

Sol) $r(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ $z \to t = 0 \sim 2\pi$ 사이

$r'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\,dt = [\sqrt{2}\,t]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

$\boxed{\text{정의}}$ 호의 길이 함수 $s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du$ $\qquad S(x) = \int_a^x \|r'(t)\| dt$

$\rightarrow \frac{ds}{dt} = s'(t) = \|r'(t)\|$ $\qquad \frac{ds}{dx} = s'(x) = \|r'(x)\|$

예) $r(t) = < \cos t, \sin t, t >$를 시작점 $(1,0,0)$으로부터 t가 증가하는 방향으로 잰 호의 길이에 관하여 재매개변수 표현을 구해라.

Sol) $r(u) = < \cos u, \sin u, u >$

u → 0부터 t까지

$r'(u) = < -\sin u, \cos u, 1 >$

$s(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{(-\sin u)^2 + (\cos u)^2 + 1^2}\, du = \sqrt{2}t$ 호의 길이 함수

재매개변수 표현 $\rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{2}}$: 매개변수를 호의 길이 s로 바꿔라.

$r\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = < \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}} >$

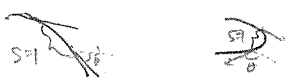
$\boxed{\text{정의}}$ 곡률 $k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\| = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} = \frac{\|\text{단위접선벡터미분}\|}{\|\text{호의길이함수 미분}\|\ s'(t)} = \frac{\|\text{단위접선벡터미분}\|}{\|\text{벡터함수미분}\|\ r'(t)}$

$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$: 단위접선벡터.

$S(t) = \int_a^t \|r'(u)\| du$: 호의 길이함수

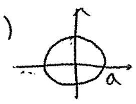
· 곡률 = 그 점에서 곡선이 얼마나 빠르게 방향을 바꾸는가 (휘어진 정도!)

s가 1만큼 변했을 때 T는 얼마나 변했을까



예) 반지름이 a인 원의 곡률이 $\frac{1}{a}$임을 보여라.

Sol)



$r(t) = < a\cos t, a\sin t >$

$r'(t) = < -a\sin t, a\cos t >$

$\|r'(t)\| = a$

$T(t) = \frac{1}{\|r'(t)\|} r'(t) = < -\sin t, \cos t >$

$T'(t) = < -\cos t, -\sin t >$

$\therefore k = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{a}$

시험 — 간단한 곡률 계산정도만
(풀다가 계산 지저분하면 풀지마)

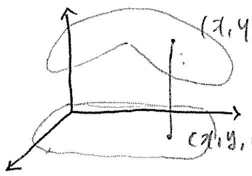
13장. 편도함수

#13.1 다변수 함수

정의 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (이변수 함수)

$z = f(x, y)$

z: 종속변수, x, y: 독립변수



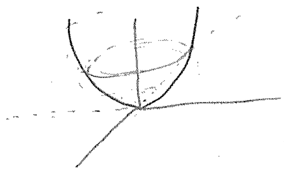
— Graph : 절편찾기.

ex) $f(x,y) = x^2+y^2$ 그래프

$z = f(x,y)$

$z = 1 = x^2+y^2$

$z = \rho = x^2+y^2$



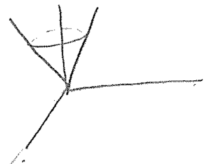
+) $y=0 \longrightarrow z = x^2$. ∪ 모양

ex) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = f(x,y)$

$z = 1 = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = 4 = \sqrt{x^2+y^2}$



+) $y=0 \to z = \sqrt{x^2} = |x|$: V 모양

정의 $z = f(x,y)$ 일 때 $f(x,y) = k$ (상수)로 주어진 곡선을 f의 등위곡선 (level curve) 라 함.

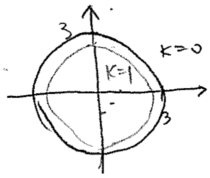
(k: 치역 내 상수)

등위곡선 = 등고선

→ 입체 평면에서 같은 높이인 것 연결

ex) $g(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ 의 등위곡선?

Sol) $k = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 = 9-k^2$ $(k \geq 0)$



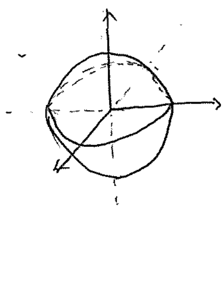
정의 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (삼변수 함수)

$w = f(x, y, z)$

w: 종속변수, x, y, z: 독립변수

ex) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = k$ 의 등위곡면?

Sol)



← 등위곡면!

#13.2 극한과 연속성

정의 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

- $f(x,y)$가 접근 경로와 관계없이 일정한 값으로 접근해야 극한값이 존재 → 극한 값 존재 보이기 어려움
- 약분 될 만한거 대입
- 직관적 수렴 / 발산에 신경쓰기

ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

sol) 1) $(x,y)\to(0,0)$ along $y=0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{x^2} = 0$

2) $(x,y)\to(0,0)$ along $x=0$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{0}{y^4} = 0$

3) $(x,y)\to(0,0)$ along $x=y^2$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$

→ 존재 ×

1) $(x,y)\to(0,0)$ y축 따라서 ↓

$\lim_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0$

2) $(x,y)\to(0,0)$ x축 따라서 //

$\lim \dfrac{0}{y^2} = 0$

3) $(x,y)\to(0,0)$ along $x=y^2$

$\dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$

정의 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(a,b)$ 가 성립하면 $f(x,y)$가 (a,b)에서 연속.

Remark 모든 다항식은 $\mathbb{R}^2$ 위에서 연속이고 유리함수도 그 정의역에서 연속함수.

ex) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = a \iff f(x,y) = x$ 가 (a,b)에서 연속

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin x = \sin a \iff f(x,y) = \sin x$ 가 (a,b)에서 연속.

정의 f, g : 연속 ⟶ $f \circ g$ 연속 ($f(g(x))$)

* 연속함수 예

- 다항함수
- 유리함수 (분모=0 제외)

연속	$+$, $-$, $\times$, $\div$	연속	= 연속
			// (분모 $\neq 0$)

이런게 연속이구나! 정도로

#13.3 편도함수

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 기만 변화

<u>정의</u> $f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$: (a,b) 에서 x에 관한 편도함수

$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$: (a,b) 에서 y에 관한 편도함수

<표기법>

$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ (x변수)

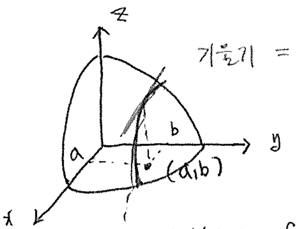
$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ (y변수)

ex) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y$

sol) $f_x = 3x^2 + 2xy^3 \quad \rightarrow f_x(2,1) = 14$

$f_y = 3x^2y^2 - 2. \quad \rightarrow f_y(2,1) = 10$

<u>Remark</u> $z = f(x,y)$



기울기 $= \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b)$

$\quad\quad$ 기만 변화함

곡선함수식 $f(x,b) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$.

ex) $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$ 일 때 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 구해라.

sol) $f_x = \cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right) \cdot \dfrac{1}{1+y}$ $\quad\quad \left(\dfrac{x}{1+y}\right)' = \dfrac{-x}{(1+y)^2}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ y변수

$f_y = \cos\left(\dfrac{x}{1+y}\right)\left(-\dfrac{x}{(1+y)^2}\right)$

< 삼변수 함수 > $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ 3개

ex) $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$ $\quad\quad$ $y \cdot e^{xy}\ln z +$

Sol) $f_x = \ln z \cdot e^{xy} \cdot y$

$f_y = \ln z \cdot e^{xy} \cdot x$

$f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$

고계편도함수 : 여러번 미분

· 2계 편도함수

$z = f(x,y)$

- $f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- $f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$
- $f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

ex) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

sol) $f_x = 3x^2 + 2xy^3$

$f_y = 3y^2x^2 - 4y$

$\rightarrow f_{xx} = 6x + 2y^3$

$\underline{f_{xy} = 6xy^2}$

$\underline{f_{yx} = 6xy^2}$

$f_{yy} = 6x^2y - 4.$

정리 클레로의 정리.

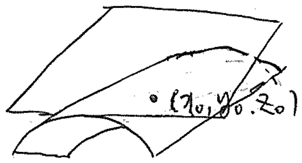
f_{xy} 와 f_{yx} 가 연속이면 $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ 대부분 다 됨!

참) 도함수 아닌 편도함수 구하는 이유는 분모 벡터 불가 (두개 동시 움직이는 거 불가능

$\text{if } f'(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)}{(h_1,h_2)}$

#13.4 접평면과 선형근사.

$z = f(x,y)$



접평면 $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$

$f = z = g(x,y) = z_0 + a(x-x_0) + b(y-y_0)$ 로 놓자.

$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

$b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

<정리>

접평면 $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

정의 $L(x,y) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$; (x_0,y_0) 에서 함수 f 의 선형화.

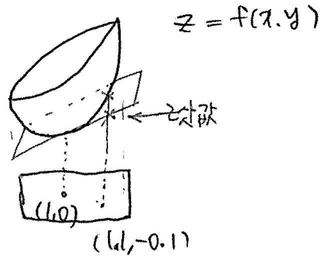
$f(x,y) \approx f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)$; (x_0,y_0) 에서 f 의 접평면 근사식.

미분가능 생략

ex) $f(x,y) = x \cdot e^{xy}$ (1.0)에서의 선형화를 구하고, 이를 이용해 $f(1.1, -0.1)$의 근삿값을 구하시오.

$$f_x^{(1,0)} = xe^{xy} \cdot y + e^{xy} = 1$$
$$f_y^{(1,0)} = e^{xy} \cdot x = 1$$
$$L(x,y) = (x-1) + 1(y-0) + 1 = x+y$$

Sol)



$f_x = e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y \quad \rightarrow f_x(1,0) = 1$

$f_y = x \cdot e^{xy} \cdot x \quad \rightarrow f_y(1,0) = 1$

접평면 $\rightarrow z = 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) + \overset{f(1,0)}{1}$

$= x+y \approx f(x,y)$

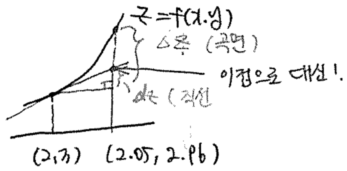
$f(1.1, -0.1) = 1.1 - 0.1 = 1$

$\boxed{\text{정의}}$ $z = f(x,y)$ 일 때 $dz = f_x \underset{\Delta x}{dx} + f_y \underset{\Delta y}{dy}$: 함수 f의 (전)미분

Remark $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ $\rightarrow \underbrace{dz}_{\text{접평면의 증분}} = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \approx \Delta z$ 곡면의 증분

ex) $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$, $f(2.05, 2.96)$의 근삿값

Sol)



$4 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 9$

$4 + 18 - 9 = 13$

$f_x = 2x + 3y$, $f_y = 3x - 2y$

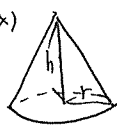
$dz = f_x dx + f_y dy = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

$x=2$, $y=3$, $dx = 0.05$, $dy = -0.04$

$\rightarrow 13 \cdot 0.05 = 0.65 \approx \Delta z$

$\therefore f(2.05, 2.96)$ 근삿값 $= f(2,3) + 0.65$

ex)



$r = 10$, $h = 25$.

측정오차 0.1.

전미분 사용하여 부피 구할 때 최대오차?

Sol) $dV = V_r \cdot dr + V_h \cdot dh$ $\qquad r = 10$, $h = 25$, $dr = dh = 0.1$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\begin{cases} V_r = \frac{2}{3}\pi r h \\ V_h = \frac{1}{3}\pi r^2 \end{cases}$

$\rightarrow \underbrace{\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 25 \cdot \pi}_{V_r} \cdot \overset{dr}{\frac{1}{10}} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{1}{10}$

$= \frac{50}{3}\pi + \frac{10}{3}\pi = 20\pi$

· 삼변수 이상의 함수

$w = f(x, y, z)$

(a, b, c)에서 선형근사식

$f(x,y,z) \approx f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(x-b) + f_z(a,b,c)(x-z)$

$dw = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$; f의 (전)미분

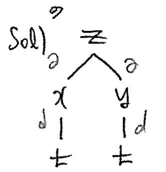
#13.5 연쇄법칙

<법칙 1> $z = f(x,y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

ex) $z = x^2y + 3xy^4$, $x = \sin 2t$, $y = \cos t$ $\frac{dz}{dt} = ?$

Sol)

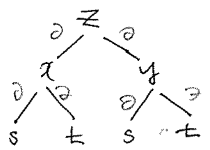


$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

$t = 0 \rightarrow 4xy + 6y^4$

<법칙 2> $z = f(x,y)$ $x = g(s,t)$ $y = h(s,t)$



$$\rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

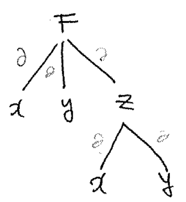
ex) $z = e^x \sin y$. $x = st^2$. $y = s^2t$

sol) $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

$= (e^x \cdot \sin y)t^2 + (e^x \cdot \cos y)\cdot 2st$

<음함수의 미분법> - 함수의 형태가 드러나 있지 않음. ex) $x^2 + y^2 = 1$

$F(x, y, f(x,y)) = 0$ 인 함수



x 편미분

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$ ← 음함수만!

y 편미분

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

ex) $x^3+y^3+z^3+6xyz=1$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$?

Sol) ① x편미분

$$3x^2+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+6yz+6xy\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(3z^2+6xy)\frac{\partial z}{\partial x}=-(3x^2+6yz)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3x^2+6yz}{3z^2+6xy}$$

y편미분

$$3y^2+3z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+6xz+6xy\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x^2+6xz}{3z^2+6xy}$$

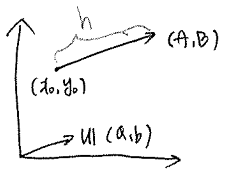
② $F_x=3x^2+6yz$, $F_y=3y^2+6xz$, $F_z=3z^2+6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+6yz}{3z^2+6yz}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2+6xz}{3z^2+6xy}.$$

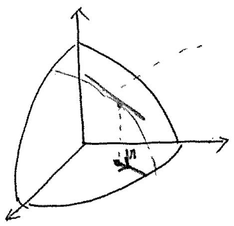
13.6 방향도함수와 gradient 기울기벡터

정의



$u=\langle a,b\rangle$: Unit vector (단위벡터. 크기 1)

$\langle A-x_0, B-y_0\rangle=\langle ha, hb\rangle$



접선의 기울기 $D_u f(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+ah, y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$

; u 방향에 대한 (x_0,y_0) 에서의 f의 방향도함수

Remark $g(h)=f(x_0+ah, y_0+bh)$

$\rightarrow g'(h)=f_x(x_0+ah, y_0+bh)a+f_y(x_0+ah, y_0+bh)$

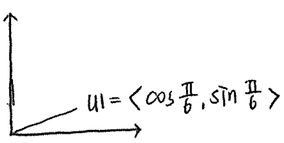
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=g'(0)=\underline{f_x(x_0,y_0)a+f_y(x_0,y_0)b}=D_u f(x_0,y_0)$$

$u=\langle1,0\rangle \Rightarrow D_u f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$

$u=\langle0,1\rangle \Rightarrow D_u f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

ex) $f(x,y)=x^3-3xy+4y^2$, u는 x의 양의방향과 이루는 각 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $D_u f(1,2)=?$

Sol)



$f_x=3x^2-3y$

$f_y=-3x+8y$

$D_u f(1,2)=f_x(1,2)\cos\frac{\pi}{6}+f_y(1,2)\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{3\sqrt3}{2}+\frac{13}{2}=\frac{13-3\sqrt3}{2}$

정의 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla f(x,y) = \text{grad} f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle$; f의 gradient (다변수 함수 f의 미분)

Remark $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot u$ (내적)

ex) $v = \langle 2, 5 \rangle$ 방향에 대한 점 $(2,-1)$에서 $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ 의 방향도함수?

Sol) $\nabla f = \langle f_x, f_y \rangle$

$= \langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4 \rangle \xrightarrow{(2,-1)} \langle -4, 8 \rangle$

$\therefore D_u f(2,-1) = \nabla f(2,1) \cdot \frac{v}{|v|} = \langle -4, 8 \rangle \langle 2, 5 \rangle \times \frac{1}{\sqrt{29}}$

<3변수 함수>

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $w = f(x,y,z)$

① $\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$; f의 Gradient

② $D_u f = \nabla f \cdot u$; 방향도함수 : 변화율

<의미> Maximum increasing

f : max increasing $\Longleftrightarrow$ D_u 최대 (가장 가파른 길 산타야 가장 빨리 도착)

$= \nabla f \cdot u$

$= \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|u\|}_{1} \underbrace{\cos\theta}_{\theta=0 \text{ 일때 } 1}$ 최대 $\Longleftrightarrow$ $\theta = 0$ 일때 최대

$\Longleftrightarrow$ 최대변화율은 $\|\nabla f\|$

ex) (1) $f(x,y) = x \cdot e^y$ 일 때 $P(2,0)$에서 $Q(\frac{1}{2}, 2)$ 방향으로 P에서 f의 변화율?

(2) 어느 방향에서 f는 최대 변화율을 갖는가. 그 변화율의 최댓값은?

변화율 : 미분 → 방향도함수

Sol) (1) P에서 f의 변화율 : $\nabla f(2,0) \to \langle e^y, x \cdot e^y \rangle \xrightarrow{(2,0)} \langle 1, 2 \rangle$

방향 : $u = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \langle -\frac{3}{2}, 2 \rangle \times \frac{2}{5} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

$\therefore$ 방향도함수 $D_u f(2,0)$

$= \nabla f \cdot u = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1$

$\frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

(2) 어느방향에서 f의 최대변화율 : Gradient ~~방향~~! → $\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$

변화율의 최댓값 : $\|\nabla f(2,0)\| = \sqrt{5}$

$\nabla T = \langle T_x, T_y, T_z \rangle$

ex) $T(x,y,z) = \frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$ 점 $(1,1,-2)$에서 가장 빨리 증가하는 방향, 최대 증가율

Sol) 가장 빨리 증가하는 방향 : Gradient 방향 → $\nabla T(1,1,-2) \to T\nabla \langle -\frac{80 \cdot 2x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{80 \cdot 4y}{(1+x^2 \cdots)^2}, -\frac{80 \cdot 6z}{(1+\cdots)^2} \rangle$

$\xrightarrow{(1,1,-2) \text{ 대입}} \langle -\frac{5}{8}, -\frac{10}{8}, -\frac{30}{8} \rangle$ 방향

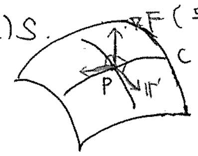
최대증가율 : $\|\nabla f(1,1,-2)\| = \frac{5}{8}\sqrt{41}$

의미2 Normal vector (법선벡터)

S : $F(x, y, z) = k$ 인 등위곡면

C : $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$; S 위의 임의의 곡선

(등위곡면) S



∇F (두개의 $\mathbf{r}'(t)$에 대해 수직)

C (곡선)

$F(x(t), y(t), z(t)) = k \xrightarrow{\text{미분}} F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) = 0$

$\Rightarrow \nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

수직!

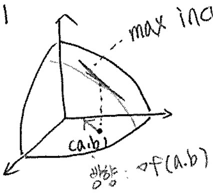
∴ 점 $P(x_0, y_0, z_0)$을 통과, 법선벡터 $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$를 가지는 평면

= 점 P에서 등위곡면 $F(x, y, z) = k$ 에 대한 접평면.

$\rightarrow$ $F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

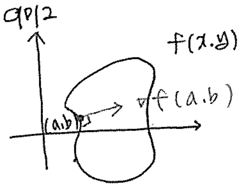
Remark 비교 $z = f(x, y)$

의미1



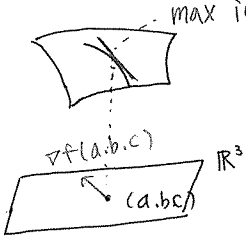
$\xrightarrow{}$ $f(a,b) = k$

의미2

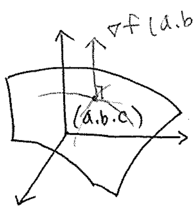


$f(x,y) = k$ 등위곡선

$w = f(x, y, z)$



$\xrightarrow{}$ $f(a,b,c) = k$



$f(x, y, z) = k$ 등위곡면

Remark

$S : z = f(x, y)$

$F(x, y, z) = z - f(x, y)$ 로 놓으면 $S : F(x, y, z) = 0$ 인 등위곡면.

$\rightarrow$ $F(x, y, z) = 0$ 위의 한점 $P(x_0, y_0, z_0)$에서의 접평면 : $(z - z_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$\rightarrow$ $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \langle -f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1 \rangle$ 법선벡터.

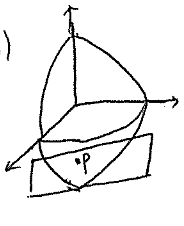
접평면 $\rightarrow$ $-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$

ex) 점 $(-2, 1, -3)$에서 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ 에 대한 접평면의 방정식 $\frac{x}{2}$

상수 있을 때☺

아래부분

sol)



① $z = -\sqrt{27 - \frac{9}{4}x^2 - 9y^2}$

$\therefore z + 3 = f_x(-2, 1)(x + 2) + f_y(-2, 1)(y - 1)$

f_x, f_y 계산 복잡...

② $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$ 이라 놓으면

타원면은 $F(x, y, z) = 3$ 인 등위곡면

∴ 법선벡터 $= \nabla F(2, 1, -3) = \langle -1, 2, -\frac{2}{3} \rangle$

$\therefore -(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0$

상황에 따라 잘 사용해야!

#13.7 최댓값과 최솟값

정의 (a.b)를 중심으로 하는 어떤 원판안에 모든점 (x.y)에 대하여 $f(x.y) \le f(a.b)$ 일 때, $f(a.b)$를 극댓값 (local maximum), $f(x,y) \ge f(a.b)$ 이면 $f(a.b)$는 극솟값 (local minimum)

정리 f가 (a.b)에서 극값을 가지며 편도함수가 존재하면 $f_x(a.b) = f_y(a.b) = 0$.

정의 $f_x(a.b) = 0 = f_y(a.b)$ 아 편도함수가 하나라도 존재하지 않을 때 (a.b)를 f의 임계점 (critical point)
└ 극대.극소 가질수도 아무것도 아닐수도

정리 $f_x(a,b) = f_y(a.b) = 0$, (즉 (a.b)가 f의 임계점일 때)

판별식 $D(x.y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$ $(f_{xy} = f_{yx})$

① $D(a.b) > 0$, $f_{xx}(a.b) < 0$ ⟶ $f(a.b)$ 극댓값

② $D(a.b) > 0$, $f_{xx}(a.b) > 0$ ⟶ $f(a.b)$ 극솟값

③ $D(a.b) < 0$ ⟶ $f(a.b)$ 안장점.

④ $D = 0$ ⟶ 판정불가

ex) $f(x.y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ 극대. 극소. 안장점.

Sol) $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$ $= 0$ $f_x = 0 \to x^3 = y$ (0,0) (1,1) (-1,-1)

⟵ 극대.극소의 후보자 = 임계점.

$D(x.y) = \begin{vmatrix} 12x & -4 \\ -4 & 12y \end{vmatrix}$

① $D(0,0) = -16 < 0$: 안장점.

② $D(1,1) > 0$, $f_{xx}(1,1) > 0$: 극솟값

③ $D(-1,-1) > 0$, $f_{xx}(-1,-1) > 0$: 극솟값

ex) 뚜껑이 없는 직육면체의 상자를 $12m^2$ 넓이의 판자로 만들 때, 상자 부피의 최댓값은?

Sol) 부피 $= xyz$

식 : $xy + 2yz + 2xz = 12$, $z = \dfrac{(12 - xy)\,xy}{2(x+y)}$

$- f_x = \dfrac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{\{2(x+y)\}^2} = 0$

⋮

의 복잡.. ⟶ 라그랑주 승수법 이용

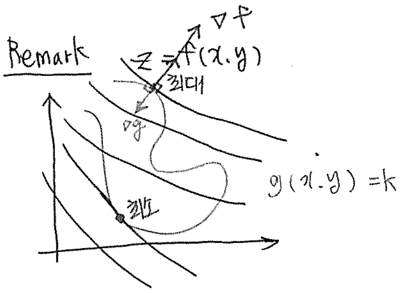
13.8 라그랑주 승수법 (Lagrange 승수법)

· 제약조건 $g(x.y.z) = k$ 를 만족하는 $f(x.y.z)$ 의 최대 / 최소 ($\nabla f \neq 0$ 가정 → $\nabla g \neq 0$, $\lambda \neq 0$)

$$\rightarrow \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x.y.z) = k \end{cases}$$

를 만족하는 $x.y.z.\lambda$ 구한 후 이들의 함숫값 조합 중 { 가장 큰게 f의 최댓값 / 가장 작은게 f의 최솟값

Remark



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = k \end{cases}$$

$\therefore \lambda$: 라그랑주 승수

) 최대. 최소 가질 때 그 점에서 $\nabla f \,/\!/\, \nabla g$ (평행)

ex) 뚜껑없는 직육면체. 넓이 12. 상자부피 최댓값.

Sol) 부피 : $f(x.y.z) = xyz$

$g(x.y.z) = xy + 2xz + 2yz = 12$ — 제약조건

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 12 \end{cases}$$

$\nabla f = \langle yz, xz, xy \rangle$

$\nabla g = \langle y+2z, x+2z, 2x+2y \rangle$

$$\rightarrow \begin{cases} yz = \lambda(y+2z) & \cdots ① \\ xz = \lambda(x+2z) & \cdots ② \\ xy = \lambda(2x+2y) & \cdots ③ \\ xy + 2xz + 2yz = 12 & \cdots ④ \end{cases}$$

① & ② → $\lambda x(y+2z) = \lambda y(x+2z)$

$\therefore x = y$ ($\lambda \neq 0, z \neq 0$)

③ & ② → $\lambda y(x+2z) = \lambda z(2x+2y)$

$\therefore y = 2z$

$\therefore x = x,\ y = x,\ z = \frac{x}{2}$

→ $x \cdot x + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + 2x \cdot \frac{x}{2} = 12$ $\therefore x = 2,\ y = 2,\ z = 1$

$\therefore f(2.2.1) = 4.$

정리 f가 $\mathbb{R}^2$ 상의 유계 (bounded) 인 폐집합 (closed) D에서 연속이면 최대 / 최솟값을 가짐.

① D의 내부에서 임계점의 함숫값 (한번 미분 = 0 지점)

② D의 경계에서 최대 / 최솟값 (양 끝 점 함숫값)

① . ② 중 큰거 최댓값 . 작은거 최솟값

Closed (폐구간의 확장판)

not closed

ex) $x^2+y^2=1$ 에서 정의된 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 의 최대 / 최소

Sol) $g(x,y)=x^2+y^2=1 \rightarrow \nabla g(x,y)=\langle 2x, 2y\rangle$

$\nabla f(x,y)=\langle 2x, 4y\rangle$

$\langle 2x, 4y\rangle=\lambda\langle 2x, 2y\rangle \rightarrow \begin{cases} 2x=\lambda 2x & \rightarrow \lambda=1 \text{ or } \lambda=0 \\ 4y=\lambda 2y & y=0 \\ x^2+y^2=1 & x=\pm 1 \end{cases}$

$\begin{cases} f(1,0)=1 & : \text{최소} \\ f(0,1)=2 & : \text{최대} \end{cases}$

라그랑주 승수는 제약조건 = 일때만 가능

ㄴ 다른 범위는 조건 나눠서

연습 ex) $x^2+y^2\le 1$ 에서 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 의 최대 / 최소

Sol) ① $x^2+y^2<1$ (내부) — 미분 = 0 점 (임계점)

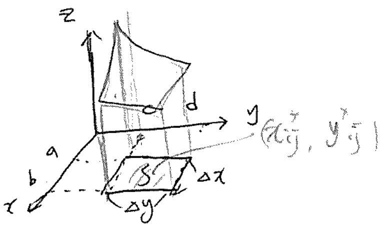
$\begin{cases} f_x=2x=0 & \rightarrow f(0,0)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$

② $x^2+y^2=1$ (경계) — 라그랑지 승수법

위에 풀이

$\rightarrow$ 최대 : $f(0,1)=2$, 최소 $f(0,0)=0$

14. 다중적분



14.1 직사각형 위에서의 이중적분

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$R=[a,b]\times[c,d]$

$\therefore$ S의 부피 $=\iint_R f(x,y)\,dA \quad (\Delta A=\Delta x\cdot\Delta y)$

$=\lim_{m,n\rightarrow\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\Delta A.$

· 연속인 함수는 적분가능하다

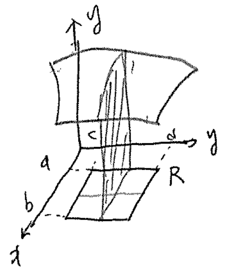
정리 푸비니 정리

$R=[\underset{x}{a,b}]\times[\underset{y}{c,d}]$

$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$ ← 반복적분

정리 $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA=\iint_R f(x,y)\,dA+\iint_R g(x,y)\,dA.$

$f(x,y)\geq g(x,y)$ 일 때 $\iint_R f(x,y)\,dA\geq\iint_R g(x,y)\,dA.$



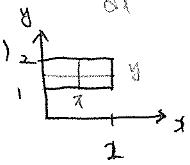
$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$ 부분에서 의 넓이 구함 ⟷ 합이 같다

$= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

ex) $R = \underbrace{[0,2]}_{dx} \times \underbrace{[1,2]}_{dy}$ $\quad \iint_{R} (x-3y^2)\,dA = ?$

R: 적분범위, dA: 면적

Sol)



① $\int_0^2 \overbrace{\int_1^2 (x-3y^2)\,dy}^{1,2가 y축}\,dx = \int_0^2 [xy - y^3]_1^2\,dx$

$= \int_0^2 (x-7)\,dx = [\frac{1}{2}x^2 - 7x]_0^2 = -12$

② $\int_1^2 \int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 [\frac{1}{2}x^2 - 3y^2x]_0^2\,dy$

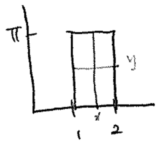
$= \int_1^2 (2-6y^2)\,dy = [2y - 2y^3]_1^2 = 2-14 = -12$

계산 쉽냐 지저분하냐 차이일 뿐

ㄴ 둘 중 하나는 지저분!

ex) $R = \underbrace{[1,2]}_{dx} \times \underbrace{[0,\pi]}_{dy}$, $\iint_R y\sin(xy)\,dA = ?$

Sol)



$\int (\sin x)' = -\cos x \times -$

① $\int_1^2 \int_0^{\pi} \underbrace{y}_{u}\underbrace{\sin(xy)}_{v'}\,dy\,dx$

$du = dy$ $\quad v' = \sin(xy)\,dy$

$v = -\cos(xy) \cdots ?$

② $\int_0^{\pi} \int_1^2 y\sin(xy)\,dx\,dy$ $\quad$ 삼각함수 적분 안에 곱셈은 $\int 3\sin 3x = -\cos 3x + C$

$(\sin 3x)' = \cos 3x$?

$= \int_0^{\pi} y\,[-\cos(xy)]_1^2\,dy = \int_0^{\pi} (-\cos(2y) + \cos y)\,dy$

$= [-\sin(2y) + \sin y]_0^{\pi} = 0$

Remark 함수의 문자 분리되어 있으면 $\int$ 분리가능!

$R = [a,b] \times [c,d]$

$\iint_R h(x)g(y)\,dA = \int_a^b \int_c^d \underbrace{h(x)}_{상수} g(y)\,dy\,dx$

$= \int_a^b h(x) \underbrace{\int_c^d g(y)\,dy}_{상수}\,dx$

$= \int_a^b h(x)\,dx \int_c^d g(y)\,dy$

ex) $R=\underbrace{[0,\frac{\pi}{2}]}_{dx}\times\underbrace{[0,\frac{\pi}{2}]}_{dy}$. $\iint_R \sin x\cos y\,dA=?$

Sol) $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos y\,dx\,dy$

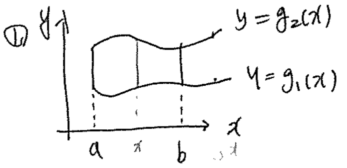
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$=[\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}}\times[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\times(-0+1)=1$

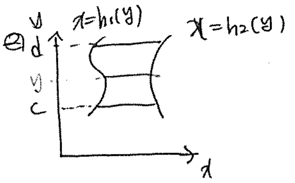
하지만 잘못쓰면 식 지저분해지니 신중하게 사용할 것

14.3 일반영역 위의 이중적분.

복잡해 보이는 애가 안에 들어가는게 편함

①


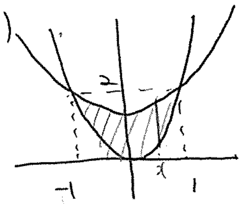
$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}f(x,y)\,dA\,dx$

②


$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)}f(x,y)\,dx\,dy$

고정되 있는게 바깥에!

ex) $y=2x^2$, $y=1+x^2$에 둘러싸인 xy 평면에의 영역 D에 대해 $\iint_D(x+2y)\,dA=?$

Sol)


$(R=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\})$

$2x^2=1+x^2 \to x=-1,1$

$\int_{-1}^1\int_{2x^2}^{x^2+1}(x+2y)\,dy\,dx$

$=\int_{-1}^1[xy+y^2]_{2x^2}^{x^2+1}dx$

$=\int_{-1}^1 x(1-x^2)+((x^2+1)^2-(2x^2)^2)\,dx=\int_{-1}^1 x-x^3+(x^4+2x^2+1-4x^4)$

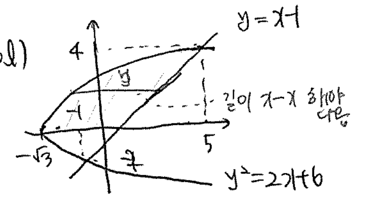
$=\int_{-1}^1(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx$

$=2[-\frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x]_0^1 = 2(-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+1)=\frac{32}{15}$

$\frac{-9+10+15}{15}$

계산!

ex) $y=x-1$, $y^2=2x+6$에 둘러싸인 영역 D에 대해 $\iint_D xy\,dA=?$

Sol)


$2x+6=(x-1)^2 \to x=-1,5$

$\int_{-2}^4\int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1}xy\,dx\,dy$

$=\int_{-2}^4[\frac{1}{2}x^2y]_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1}dy=\int_{-2}^4\frac{1}{2}(y^2+2y+1-\frac{y^4}{4}+3y^2-9)y\,dy$

$=\frac{1}{2}\int_{-2}^4(-\frac{y^5}{4}+4y^3+2y^2-8y)\,dy=\frac{1}{2}[-\frac{y^6}{24}+y^4+\frac{2}{3}y^3-4y^2]_{-2}^4$

$=\frac{1}{2}(-\frac{(2^{12}-(-2)^6)}{24}+(2^8-(-2)^4)+\frac{2}{3}(2^6-(-2)^3)-4(2^4-(-2)^2))$

$=\frac{1}{2}(-168+240+48-48)=36$

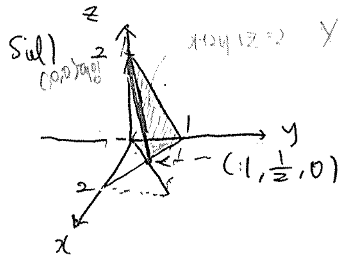
$4^6=2^{12}$
$4^4=2^8$
16-4

$2^6(2^6-1)$
$-168+240+48-48$

ex) $x+2y+z=2$, $x=2y$. $x=0$. $z=0$ 으로 둘러싸인 사면체의 부피

하나씩 0 너보기

sol)



$y=\frac{1}{2}x$

$z=2-x$ $z=2-2y$

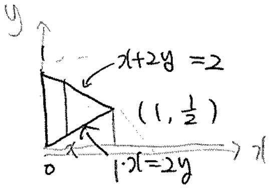
$2y=2-x$

$y=1-\frac{1}{2}x$

하나씩 0넣어보고 생기는 그래프 그리면 됨

$x=2y$, $z=0$ 이므로 $x+2y=2$ 로 생긴것이 밑바닥면임. ①

바닥면



높이 $z=2-x-2y$ 부피의 식은 높이!

$$\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} 2-x-2y\ dy\,dx = \int_0^1 \left[2y-xy-y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2\left(\frac{2-2x}{2}\right) - x\left(\frac{2-2x}{2}\right) - \left(\frac{4-4x+x^2-x^2}{4}\right)\right)dx$$

$$= \int_0^1 (2-2x-x+x^2-1+x)\,dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$$

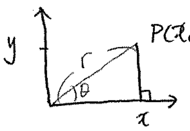
$$= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Remark $\int_a^b dx = [a.b]$ 길이

$\iint_R dA = R$의 면적

14. 4 극좌표에서의 이중적분

원점 ($\theta=0$) 에서 (x, y) 쪽으로 돌음 → 각, 거리 따임

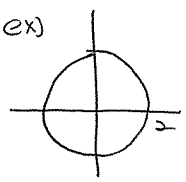


$P(x,y) = P(r,\theta)$

- $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$

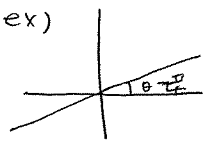
$$\rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

ex)



$r=2 \longleftrightarrow x^2+y^2=2^2$

ex)



$\theta=\frac{\pi}{4} \leftrightarrow y=\frac{1}{2}x$

* 이중적분의 극 좌표로 변환

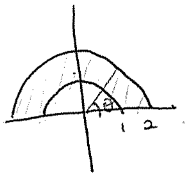
f가 $R = \{(r,\theta) : 0 \le a \le r \le b,\ \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le \beta - \alpha \le 2\pi\}$ 위에서 연속이면

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

둥글어서 x, y로는 구하기 어려운 애들

ex) $x^2+y^2=1$ 과 $x^2+y^2=4$에 의해 둘러싸이고 x축 반 위에 있는 영역 R. $\iint_R (3x+4y^2)\,dA = ?$

sol)



$$\int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi [r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta]_1^2 = \int_0^\pi (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^\pi 7\cos\theta + 15\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \left[-7\sin\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right]_0^\pi$$

$$= \frac{15}{2}\pi$$

* $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\int \cos a\theta =$

$\int \cos 3\theta = \int \sin$

$= \frac{1}{3}\int \sin 3\theta$

???

Remark $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = ?$

$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ 변수 바꿔도 노상관

$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$

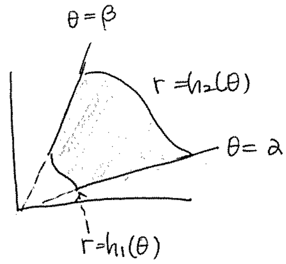
$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2 e^{-r^2} + e^{-r^2}\cdot -2r\cdot r\right]_0^\infty d\theta = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}r^2 e^{-r^2}\right]_0^\infty d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = \pi$

$\therefore I = \sqrt{\pi}$.



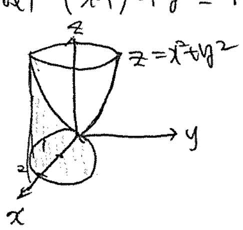
정리 $D = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$ 위에서 f가 연속이면

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

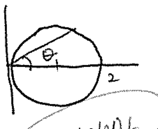
ex) $z = x^2+y^2$ 아래, xy 평면 위, $x^2+y^2=2x$ 안쪽에 놓여있는 부피를 구해라

동글동글! (직교좌표 $\int$ 안에 $\int\sqrt{\ }$ 면 바로 극좌표)

sol) $(x-1)^2+y^2=1$



부피 $= \iint_R x^2+y^2\, dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, r\, dr\, d\theta$



$x^2+y^2=2x$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2r\cos\theta$

$r^2 = 2r\cos\theta$

$r = 2\cos\theta$

극점이어서

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$

$= \int_0^\pi 4\cos^4\theta\, d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$

$\frac{1+\cos 4\theta}{2}$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\, d\theta$

$\frac{1}{4}\cos$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) d\theta = \left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{3}{2}\pi$

$\cos 2\theta$

#14.10 다중적분의 변수변환

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(y))\cdot g'(y)\,dy \qquad \begin{cases} x = g(y) \\ dx = g'(y)\cdot dy \end{cases}$$

ex) $\int_0^1 e^{y^2}\cdot y\cdot dy = \int_0^1 \frac{1}{2} e^u\,du = \frac{1}{2}(e-1)$

$$\begin{cases} u = y^2 \\ du = 2y\cdot dy \end{cases}$$

정리 $\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R^*} f(x(u,v),\,y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$

자코비안의 절댓값

여기서 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}$: 자코비안 (Jacobian)

바꾸려고 하는 문자

ex) 극좌표

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

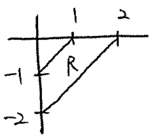
$\int e^{x^2}$ $\int e^x$

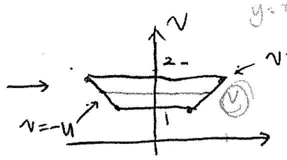
$\therefore \iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

ex) (1,0), (2,0), (0,-2), (0,-1)을 꼭짓점으로 갖는 영역을 R이라 할 때 $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dA$ 는?

sol) $u = x+y$, $v = x-y \rightarrow x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$

$$\rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$





$y=x$ 기준대칭 $x=$변 꼴

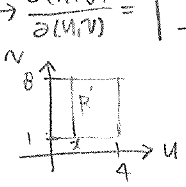
$$\int_1^2\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$
$$= \int_1^2\int_{-v}^{v} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}\cdot v\cdot e^{\frac{u}{v}}\right]_{-v}^{v} dv \quad \leftarrow \text{기우 바꾸는건 변수변환 전에나 가능}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 v(e-e^{-1})\,dv$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(e-e^{-1})v^2\right]_1^2 = \frac{3}{4}(e-e^{-1})$$

$$\ast \int e^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}$$
$$\int e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}$$

ex) $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$, $3x-y=8$로 둘러싸인 영역을 R. $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dA = ?$

sol) $u = x-2y$, $v = 3x-y$ $\rightarrow$ $x = -\frac{1}{5}(u-2v)$, $y = -\frac{1}{5}(3u-v)$

$$\rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{25}+\frac{6}{25} = \frac{1}{5}$$



$$\int_0^4\int_1^8 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{5}\,dv\,du$$
$$= \frac{1}{5}\int_1^8\int_0^4 \frac{u}{v}\,du\,dv$$
$$= \frac{1}{5}\int_1^8 \left[\frac{1}{2v}u^2\right]_0^4 dv$$
$$= \frac{1}{5}\int_1^8 \frac{8}{v}\,dv$$
$$= \frac{8}{5}\left[\ln v\right]_1^8$$
$$= \frac{8}{5}\ln 8$$