무한급수

10.1 수열 - 자연수를 정의역으로 하는 함수 ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$)

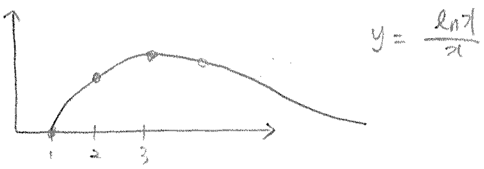
· 극한 정의 · $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (L 존재하면 수렴)

정리 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ 이고 정수 n에 대해 $a_n = f(n)$ $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

ex) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$

sol) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{로피탈}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

(로피탈 가로 바꾼수 써야! - 정의역 n은 자연수이므로, ··· 를 알아보기 위해 곡선 움직임 이용)



정리 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 수렴

$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$

$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

$p > 0$, $a_n > 0$ $\rightarrow$ $\lim a_n^p = [\lim a_n]^p$

정리 압축정리 (샌드위치 정리)

$a_n \le b_n \le c_n$ & $\lim a_n = \lim c_n = L$ $\rightarrow$ $\lim b_n = L$

정리 $\lim |a_n| = 0 \rightarrow \lim a_n = 0$

($\because -\underset{\downarrow\, 0}{|a_n|} \le a_n \le \underset{\downarrow\, 0}{|a_n|}$)

ex) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$

sol) $\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{n}} \le \frac{\sin n}{n} \le \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}$ as $n \to \infty$

(곱이라고 바로 나누면 안됨! 수렴성 확인부터!)

ex) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

sol) $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1 \cdot 2 \cdot \times \cdots \times n}{n \cdot n \cdots n} \le \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{n}}$ as $n \to \infty$

정리 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ 이고 f가 L에서 연속이면 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$ $f(\lim a_n)$

ㄴ조건 : 수렴 & 연속

<참>

비교 고찰이

$\lim f(a_n) \ne f(\lim a_n)$

ㄴ 될 때 : 일대일 함수

ㄴ 안될 때 : 주기함수 , 불연속함수

ex) $\lim \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

sol) $\sin\left(\lim \frac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0$ ($\because$ sin 연속함수)

< 판정법 > − 발산 판정법, 적분판정법, 비교판정법 + 극한비교 판정법, 교대급수 판정법, 비판정법 + 절대수렴

① 발산판정법

Σa_n 이 수렴 $\rightarrow \lim a_n = 0 \Rightarrow \underline{\lim a_n \neq 0 \rightarrow \Sigma a_n \text{ 발산}}$ ($\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \Sigma a_n$ 수렴) 반례 $a_n = \frac{1}{n}$

정리 Σa_n, Σb_n 수렴하면

1) $\Sigma(a_n \pm b_n) = \Sigma a_n \pm \Sigma b_n$ 2) $\Sigma c \cdot a_n = c\Sigma a_n$

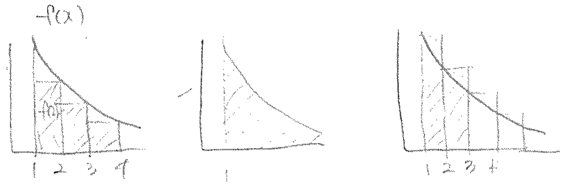
Remark $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 수렴 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 수렴. (앞에 한 두개는 수렴판정에 노의미..)

ex) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ 수렴 $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{1^3+1} + \frac{1}{2^3+1} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ 수렴

10.3 적분판정법

f가 $[1, \infty)$ 에서 연속(조건①), 양의 값(②), 감소함수(③) 이고, $a_n = f(n)$ 이라 하면

Σa_n 수렴 $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 수렴.



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)\right)$ 수렴 $<$ $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 수렴 $<$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\right)$ 수렴

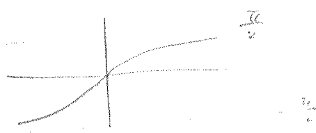
Remark $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ 수렴 $\Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 수렴 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 수렴

ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 수렴성

sol) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$: $[1, \infty)$ 연속, 양의 값, 감소

$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\tan^{-1} x]_1^t = \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1} t - \tan^{-1} 1)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$



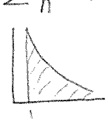
$* \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$

☆ < P급수 >

$\Sigma \frac{1}{n^p}$ { 수렴 $p > 1$ / 발산 $p \leq 1$

① $p = 1$

$\Sigma \frac{1}{n} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ $[1, \infty)$ 연속, 양의 값, 감소



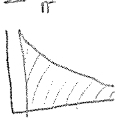
$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} [\ln t - \ln 1] = \infty$

$\therefore \Sigma \frac{1}{n}$ 발산

② $p = 2$

$\Sigma \frac{1}{n^2} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2}$ $[1, \infty)$ 연속, 양의 값, 감소



$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim [-1 x^{-1}]_1^t$

$= \lim [-t^{-1} + 1] = 1$

$\therefore \Sigma \frac{1}{n^2}$ 수렴

Remark 무한급수 합 $\neq$ 이상적분 값

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \neq \Sigma \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

($x \to \infty$) 증가속도

$x^p << e^x$.

ex) $\sum \frac{\ln n}{n}$ 수렴성 판단

Sol) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ → $[1,\infty)$ 연속...? 양의값, 감소...?

쌔기 ↳ $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$, $1 < \ln x$, $e < x$ 일 때 감소

즉, $[3,\infty)$ 연속, 양의 값, 감소 만족

$$\int_3^\infty \frac{\ln x}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_3^t \frac{\ln x}{x}dx = \lim \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_3^t$$

$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}(\ln t)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2\right) = \infty$$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 발산

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 발산

$\int fg' = fg - \int f'g$

$\ln x \cdot \frac{1}{x}$ $f(x) = \ln x$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$\int uv$

$\int uv' = uv - \int u'v$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}dx$

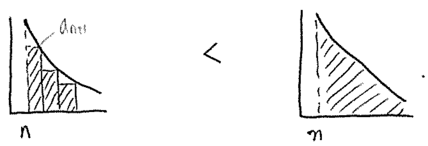
$\int_3^t u \cdot du = \frac{1}{2}[\ln x]$

<급수의 합 추정>

$S = \sum a_n = \lim S_n$

$S_n = a_1 + \cdots + a_n$: 부분합

$R_n = S - S_n$: 나머지 = 오차



$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots < \int_n^\infty f(x)dx$

$\therefore R_n < \int_n^\infty f(x)dx$

암기

ex) 1. 처음 10개 항을 이용해 $\sum \frac{1}{n^3}$ 의 근삿값과 오차를 구하시오

Sol) $\sum \frac{1}{n^3}$ 수렴

$S_{10} = a_1 + \cdots + a_{10} = \frac{1}{1^3} + \cdots + \frac{1}{10^3}$: 근삿값

$R_{10} = a_{11} + a_{12} + \cdots = \frac{1}{11^3} + \frac{1}{12^3} + \cdots < \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{200} = 0.005$: 오차

$\left(\int_n^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim \int_n^t x^{-3}dx = \lim\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_n^t = \lim\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}\right)$

ex) 2. 오차가 0.0005 이하에 있게 하기 위해 처음 몇개의 항을 합해야 하는가?

Sol) $R_n < \int_n^\infty \frac{1}{x^3}dx < 0.0005$

$\frac{1}{2n^2} \le 0.0005$ $\therefore n \ge 31.xx$

$\therefore n = 32$

10.4 비교판정법

$\sum a_n$, $\sum b_n$ 의 항이 모두 양수일 때,

- $\sum b_n$ 수렴, $a_n \le b_n$ ⇒ $\sum a_n$ 수렴
- $\sum b_n$ 발산, $b_n \le a_n$ ⇒ $\sum a_n$ 발산
  - └ P급수, 무한등비급수 등의 수렴성 이용

ex) $\sum \frac{1}{n^2+1}$ 수렴성 판단

Sol) $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ 수렴 $\underset{\text{비교판정법}}{\Rightarrow}$ $\sum \frac{1}{n^2+1}$ 수렴

ex) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

Sol) $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ 발산 $\underset{\text{비·판}}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 발산

ex) $\sum \frac{5}{2n^2+4n+3}$

Sol) $\frac{5}{2n^2+4n+3} < \frac{5}{2} \times \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$ 수렴 $\underset{\text{비·판}}{\Rightarrow}$ $\sum \frac{5}{2n^2+4n+3}$ 수렴

< 극한 비교 판정법 >

$\sum a_n$, $\sum b_n$ 이 양항급수 일 때,

$\lim \frac{a_n}{b_n} = c \quad (c>0,\ c\in\mathbb{R})$ 이면 $a_n = c \cdot b_n$

$\sum a_n$, $\sum b_n$ 은 동시에 수렴하거나 발산한다. $\frac{0}{\,}$ $\frac{\infty}{\infty}$

ex) $\sum \frac{1}{2^n+1}$ 수렴성 판단

Sol) $\lim \frac{\frac{1}{2^n+1}}{\frac{1}{2^n}} = 1 > 0$ & $\sum \frac{1}{2^n}$ 수렴

$\underset{극.비}{\Longrightarrow} \sum \frac{1}{2^n+1}$ 수렴

$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ & $\sum \frac{1}{2^n}$ 수렴

$\underset{비교}{\Longrightarrow} \sum \frac{1}{2^n+1}$ 수렴

ex) $\sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^5+5}}$

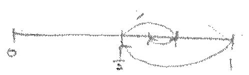
Sol) $\lim \frac{\frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^5+5}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1 > 0$ & $\sum \frac{2}{\sqrt{n}}$ 발산

$\underset{극.비}{\Longrightarrow} \sum \frac{2n^2+3n}{\sqrt{n^5+5}}$ 발산

10.5 교대급수

< 교대급수 판정법 >

교대급수 $\sum (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \quad b_n > 0$



가 (1) 모든 n에 대하여 $b_n \geq b_{n+1}$ 을 만족하면 수렴한다.
(2) $\lim b_n = 0$

원칙적으로는 b_n 미분해서
감소하는지도 따져봐야함

$(-1)^n$ 부분 때고

ex) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 수렴성 판단

Sol) (1) $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$
(2) $\lim \frac{1}{n} = 0$
$\rightarrow$ 수렴!

[책]
교대급수 추정정리
$|R_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$

ex) $\sum \frac{(-1)^{n+2} \cdot n^2}{n^3+1}$

$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1} = \frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+2}$

Sol) (1) $\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+1}$ 분자 $2n+1$ 만큼 커질 때 분모 $3n^2+3n+1$ 만큼 커짐
(2) $\lim \frac{n^2}{n^3+1} = 0$
$\longrightarrow$ 수렴

10.6 절대 수렴과 비판정법

정의 $\sum |a_n|$ 이 수렴할 때 $\sum a_n$을 절대수렴 한다고 함.

ex) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 은 절대수렴?

sol) $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$: 수렴. $\rightarrow \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 절대수렴

$S_1 =$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ → 수렴. $-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots$

$\lim \frac{1}{n} = 0$

교대급수

ex) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

sol) $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$: 발산 $\rightarrow$ $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 절대수렴하지 않음 = 조건부 수렴

정의 $\sum a_n$은 수렴하지만 절대수렴하지 않을 때 $\sum a_n$은 조건부 수렴 한다고 한다.

* **정리** $\sum a_n$이 절대수렴하면 $\sum a_n$은 수렴한다.

<증명> $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$

$\sum |a_n|$ 수렴 $\longrightarrow$ $\sum 2|a_n|$ 수렴.

비교판정 ↘ $\sum (a_n + |a_n|)$ 수렴.

$\therefore \sum a_n = \sum (a_n + |a_n| - |a_n|)$

$= \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$: 수렴.

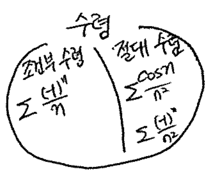
ex) $\sum \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \cdots$ 수렴성 → <삼각함수 처럼 왔다갔다 하는거 | | 씌우기>

sol) $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ & $\sum \frac{1}{n^2}$ 수렴 $\xrightarrow[\text{비교판정}]{}$ $\sum \left|\frac{\cos n}{n^2}\right|$ (절대)수렴

└ * 절댓값 꼭 써야*

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ (절대) 수렴

*



☆중요
<비판정법>

ㄴ앞으로 문제 풀 때 '비' 쓰고 =1 일 때만 딴거 사용

정리 $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(1) $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ 절대 수렴 $|a_{n+1}|<|a_n|$

(2) $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ 발산

(3) $L=1 \Rightarrow$ 판정 불가 (이거 시험 ※!!!)

ㄴ ex) $\sum \frac{1}{n}$ 발산 $\left(\lim \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1\right)$ | $\sum \frac{1}{n^2}$ 수렴 $\left(\lim \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1\right)$

ex) $\sum \frac{(-1)^n \cdot n^3}{3^n}$

sol) $\lim\left|\dfrac{\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n\cdot n^3}{3^n}}\right| = \frac{1}{3} < 1$ ∴ 절대수렴

<재배열> — 더하는 순서 바꿈

· $\sum a_n$ 이 절대 수렴하고 합이 S 면 $\sum a_n$ 의 재배열은 같은 합 S 를 갖는다.

· 조건부 수렴하는 급수는 재배열에 의해 서로 다른 합을 가질 수 있다.

("무한은 더하는 순서를 바꿨을 때 합이 달라질수도!!" 이정도로 알아두기)

☆#10.8 멱급수 — 비판정법 ※ 사용

정의 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots$; a에 관한 멱급수 (x: 변수, C_n: 계수, a: 중심)

다항식의 확장판

ㄴ중심에선 100% 수렴

정리 세가지 중 하나가 반드시 성립 (하나만)

1) $x=a$ 에서만 수렴 $(R=0)$

2) 모든 x에서 수렴 $(R=\infty)$

3) 적당한 R이 존재하여 $|x-a|<R$에서 수렴, $|x-a|>R$ 에서 발산

(R: 수렴반지름, 수렴구간 : 수렴하는 모든 x의 집합)

ㄴ센터에서 떨어진 거리

ex) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ 의 수렴반경, 수렴구간

sol) $\lim\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim |(n+1)x| < 1$ 일 때 수렴 $|x| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$

$(n+1) \to \infty$, $x \to \frac{1}{\infty}$ 이어야 상수

($|x| < \lim \frac{1}{n+1}$, $-\lim\frac{1}{n+1} < x < \lim\frac{1}{n+1}$ $\rightarrow x=0$ (by 샌드위치 정리)

∴ 수렴집합 $x=\{0\}$

∴ 수렴반지름 $=0$ $\longrightarrow$ 수렴구간 $=0$

(* 절댓값 빼먹지 않게 조심)

(절대수렴 → 수렴
절대수렴 X ↛ 수렴 X)

ex) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ 수렴 반경. 수렴구간

Sol) $\lim \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-3)^n}{n}} \right| = |x-3| < 1$ 일 때 수렴.

1) $|x-3| < 1$ 수렴 → $2 < x < 4$

2) $|x-3| = 1$ 일때

i) $x=4$ 일때

$\sum \frac{1}{n}$: 발산 (∵ p급수)

ii) $x=2$ 일 때

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$: 수렴 (∵ 교대급수 판정법)

$\left(\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}, \lim \frac{1}{n} \to 0 \right)$

∴ 수렴구간 $2 \leq x < 4$

∴ 수렴반지름 : 1 (센터 3)

ex) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \cdot x^n}{\sqrt{n+1}}$ 수렴 반경. 수렴 구간

Sol) $\lim \left| \frac{\frac{(-3)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{(-3)^n \cdot x^n}{\sqrt{n+1}}} \right| = |(-3)x| = 3|x|$

1) $|x| < \frac{1}{3}$ 일때 수렴 → $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

2) $|x| = \frac{1}{3}$ 일 때

i) $x = \frac{1}{3}$

$\sum \frac{(-3)^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 수렴 (∵ 교대급수 판정법)

ii) $x = -\frac{1}{3}$

$\sum \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 발산 (∵ p급수의 극한 비교판정)

∴ 수렴구간 : $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

∴ 수렴 반지름 : $\frac{1}{3}$ (센터 0)

ex) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$ 수렴 반경. 수렴 구간

Sol) $\lim \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{2^{2n+2} ((n+1)!)^2}}{\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}} \right| = \lim \left| \frac{x^2}{2^2 (n+1)^2} \right| < 1$

→ $x = \infty$ (for all x)

∴ 수렴구간 : $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

∴ 수렴 반지름 : ∞

* 멱급수는 수렴구간을 정의역으로 가지는 함수이다.

* p급수, 무한등비급수 제외 왜 수렴, 발산인지 밝혀 쓰기
(아무리 간단해도 짧게 밝히기)

10.9 함수의 멱급수 표현 - 무한등비 급수의 합을 역으로 표현 $\left(\frac{\text{첫항}}{1-\text{공비}}\right)$

(멱급수는 Σ 생략하면 안돼 (수치에 따라 값 달라지기 때문))

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$ 일 때만 성립 ($-1<r<1$ 공비 조건)

$= 1+x+x^2+\cdots+x^n$

↳ n이 증가함에 따라 $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 의 더 좋은 근삿값이 됨.

ex) $\frac{1}{1+x^2}$ 을 멱급수로 나타내고 수렴 반경을 구하여라.

Sol) $\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n}$, $|-x^2|<1$ 즉 $\underbrace{|x|<1}_{\text{수렴반경}}$ 일때 성립

ex) $\frac{1}{2+x}$

Sol1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum \frac{(-1)^n\cdot x^n}{2^{n+1}}$, $|-\frac{x}{2}|<1$ 즉 $|x|<2$ 일때 성립

Sol2) $\frac{1}{1-(-x-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$, $|x+1|<1$ 일 때 성립

↳ 식이 다른 건 센터의 차이! (센터가 중요한 이유)
즉. 하나의 함수로 멱급수 나타내는 건 방법이 무한가지!

정리 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 의 수렴반지름이 $R\ (>0)$ 일 때 $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 로 정의된 함수는 $(a-R,\ a+R)$ 에서 미분 , 적분이 가능하다.

미분 - $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

적분 - $\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}c_n(x-a)^{n+1} + C$

(어차피 적분상수에 포함

) 수렴반경 모두 R

Remark 식 순서 바꾸기 가능

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}c_n(x-a)^n$$

$$\int\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n dx$$

ex) $\frac{1}{(1-x)^2}$ 멱급수로 나타내고 수렴반경을 구해라

Sol) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$

$\xrightarrow{\text{미}} \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x|<1$ 구간동일

ex) $\ln(1-x)$ 을 멱급수로 나타내고 수렴반경을 구해라

Sol) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$

$\xrightarrow{\text{적}} \ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) + C$, $|x|<1$

$x=0 \rightarrow \ln 1 = 0$

$\therefore \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, $|x|<1$

ex) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^7}\,dx$

Sol) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sum (-x^7)^n\,dx$

$$= \sum \left[\frac{(-1)^n}{7n+1} (x)^{7n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum \frac{(-1)^n}{7n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{7n+1}$$

10.10 Taylor 급수와 Maclaurian 급수

정리 f가 a 에서 멱급수로 전개되면 즉, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \cdots$

이면 멱급수 계수 $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ 이다.

증명) $f(a) = c_0$

$f'(a) = c_1,\ f^{(2)}(a) = 2c_2,\ f^{(3)}(a) = 2\cdot 3\, c_3 \quad \cdots \quad \therefore f^{(n)}(a) = n!\, c_n$

정의 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$; a에서 함수 f의 Taylor 급수.

$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \cdots$; f의 Maclaurin 급수

Remark f를 a에서 멱급수로 전개할 수 있다면 f는 그 Taylor 급수의 합과 같다.

ex) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Sol) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

$= \sum x^n \rightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = 1,\ a = 0$

$= \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$????

순서 대로하면?

즉 $f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f^{(2)}(x) = \frac{2!}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{3!}{(1-x)^4},\ \cdots\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

식대입 → $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum x^n$

순서 $f^{(n)}$의 규칙찾기 (Maclurin 급수는 더 쉬움)

→ 식에 대입 $\left(\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n\right)$

→ 원식과 같은지 비교

ex) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Sol) 규칙 $f'(0) = e^{-\frac{1}{x^2}} \times 2x^{-3} \rightarrow 0$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = 0$

식대입 $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$

∴ 모든 함수가 멱급수로 전개되는 것은 아니며 전개된다면 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ 의 형태로만 나타나는 것을 알 수 있다.

② $f(x) = \sin x$

Sol) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times x^{2n+1}$; $\sin x$의 Maclaurin 급수

($\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ → $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f^{(2)}(0)=0$, $f^{(3)}(0)=-1$, $f^{(4)}(0)=0$, …)

2) $\lim \left| \dfrac{\frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim \left| \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \right| = 0$ for any x.

∴ 수렴구간 $= \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$, z는 0과 x 사이의 수

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ & $\underbrace{\lim \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0}$

$(0 \le f^{(n+1)}(z) \le 1)$ 모든 실수에 대해 $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ 이므로

$\xrightarrow[\text{비교판정}]{} \lim |R_n(x)| = 0$

∴ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 즉. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \times x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

③ $f(x) = \cos x$

1Sol) 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$; $\cos x$ 의 Maclaurin 급수

2) $\lim \left| \dfrac{\frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \right| = 0$ for any x ∴ 수렴반경 $= \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{n!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}$, z는 0과 x 사이의 수

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1}$ & $\lim \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ($\sum \frac{x^n}{n!}$ 이 모든 x에 대해 $=0$ 으로 수렴하므로)

$\xrightarrow[\text{비교판정}]{} \lim |R_n(x)| = 0$

∴ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 즉. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

2Sol) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$\xrightarrow[\text{미분}]{} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$

$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n+1}$

<만약 유한한 구간이면 모든 대해 미분가능하면
모든 x에 대해 수렴.>

- 이항정리 $(k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n \qquad \left(\because \binom{k}{n} = {}_kC_n = \frac{k \cdots (k-n+1)}{n!} \right)$$

- 이항급수 $(k \in \mathbb{R},\ |x|<1)$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{k} \frac{k \cdots (k-n+1)}{n!} x^n$$

pf) 1) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k) \cdots (k-n+1)}{n!} x^n$; $(1+x)^k$ 의 Maclaurin 급수

2) $\displaystyle \lim \left| \frac{\frac{k \cdots (k-(n+1)+1)}{(n+1)!} \times x^{n+1}}{\frac{k \cdots (k-n+1)}{n!} x^n} \right| = \lim \left| \frac{(k-n)x}{(n+1)} \right| = |x| < 1$

∴ 수렴구간 = $(-1, 1)$ ($x = \pm 1$ 에서의 수렴여부는 k에 따라 달라진다)

3) $\lim R_n(x) = 0$ 을 보이는 건 생략.

∴ $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 즉, $\displaystyle (1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k \cdots (k-n+1)}{n!} x^n$, $|x|<1$

급수구하는데 이항급수꼴에서 이항정리 $(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$ 이 그대로 대입

ex) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ 의 Maclaurin 급수를 구하고 수렴반경을 구하여라

sol) 1) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\frac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2) $(1+x)^k$ 에서 $k = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{x}{4}$

$\displaystyle \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n} \left(-\frac{x}{4}\right)^n$, $\left|-\frac{x}{4}\right| < 1$

ex) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ 를 구해라.

sol) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left\{ \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{1}} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \cancel{-1} \cancel{-x} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots \right) = \frac{1}{2}$$

ex) $\displaystyle \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} dx$

sol) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$